

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Трунов Олександр Олексійович

УДК 539.3

ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ВИГНУТИХ ХВИЛЕВОДНИХ СТРУКТУРАХ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

Маципура Володимир Тимофійович

доктор фізико-математичних наук, професор

Київ–2016

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ 1. Огляд літератури	11
1.1 Аналіз літературних джерел.....	11
1.2 Вибір напрямку досліджень.....	23
Розділ 2. Основні відомості з теорії пружних хвиль в обмежених та необмежених середовищах	24
2.1 Основні рівняння лінійної теорії пружності.....	24
2.2 Декомпозиція Гріна-Ламе.....	28
2.3 Вираження напружень і переміщень через пружні потенціали у декартовій системі координат.....	30
2.4 Плоскі хвилі у необмеженому пружному середовищі.....	32
2.4.1 Гармонічні хвилі в необмеженому середовищі.....	35
2.4.2 Поляризація пружних гармонічних хвиль у необмеженому середовищі.....	37
2.5 Хвилеводне поширення пружних хвиль.....	39
2.6 Поширення SH-хвиль у пружному шарі.....	39

Розділ 3. Проходження хвилі крізь згин хвилеводу	45
3.1 Нормальні хвилі хвилеводу сталої ширини.....	45
3.1.1 Метод часткових областей для задачі поширення нормальної SH-хвилі у нерегулярному хвилеводі.....	45
3.1.2 Постановка задачі.....	45
3.1.3 Нормальні хвилі криволінійного хвилеводу.....	46
3.2 Особливості проходження хвилі крізь згин хвилеводу при різних варіантах конструктивного оформлення зони згину.....	54
3.2.1 Метод часткових областей для хвилеводів з різними вигинами...	54
3.2.2 Поля переміщень у часткових областях.....	56
3.2.3 Побудова розв'язку для хвилеводу сталої ширини.....	58
3.2.4 Енергетичний аналіз.....	62
3.2.5 Аналіз чисельних результатів.....	63
3.3 Поширення імпульсного сигналу крізь округлений згин хвилеводу.....	71
3.3.1 Постановка задачі.....	71
3.3.2 Поля переміщень.....	73
3.3.3 Графічні результати.....	73
Висновки до розділу 3.....	77

Розділ 4. Поширення хвилі у хвилеводі за наявності різкої зміни ширини в області згину хвилеводу	78
4.1 Постановка задачі.....	78
4.2 Метод часткових областей для задачі поширення нормальної SH-хвилі у хвилеводі з різкою зміною ширини вигину.....	79
4.3 Побудова розв'язку.....	80

4.4 Аналіз чисельних результатів.....	81
Висновки до розділу 4.....	85
Розділ 5. Поширення хвилі у хвилеводі з подвійним згином у вигляді перископу.....	86
5.1 Постановка задачі.....	86
5.2 Побудова розв'язку.....	87
5.3 Аналіз чисельних результатів.....	92
Висновки до розділу 5.....	97
Висновки.....	98
Список використаних джерел.....	100

ВСТУП

Актуальність теми

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню процесу поширення гармонічних хвиль у вигнутих хвилеводах з різними конструктивними оформленнями зони вигину та дослідженню поширення імпульсного сигналу у хвилеводі з вигином сталої ширини.

Знання закономірностей хвильових полів у пружних об'єктах є важливим при конструюванні робочих елементів акустoeлектронних, акустооптичних і гідроакустичних пристроїв. Нерегулярні хвилеводні структури часто зустрічаються в конструкціях різноманітних пристроїв, тому зацікавленість до дослідження хвильового поля в них не слабшає [82, 109, 130]. Серед великого класу нерегулярностей, які мають місце у хвилеводах, можна виділити клас неоднорідностей, пов'язаних зі зміною геометрії хвилеводу, а саме, наявністю області вигину у хвилеводі. При цьому параметри середовища, що наповнює хвилевід, залишаються незмінними. Для ґрунтового дослідження полів в нерегулярних хвилеводах доцільно використовувати чисельно-аналітичні методи.

Якщо відношення характерних розмірів хвилеводу до довжини хвилі являє собою малу або досить значну величину то, зазвичай, використовують добре розроблені методи теорії дифракції. Хвилеводи з неоднорідностями, для яких характерний розмір порівняний з довжиною хвилі досліджені слабше, оскільки виникають труднощі при побудові строгого розв'язку відповідних граничних задач. У даній роботі розглядається хвилевід, геометричні розміри якого порівняні з довжиною хвилі.

У роботі розглядаються як гармонічні у часі хвилеві поля, так і імпульсне поширення хвилі. Слід відзначити, що в більшості робіт з хвилеводної тематики досліджується поширення саме гармонічної хвилі. Але в дійсності сигнал має скінченну в часі тривалість, або іншими словами, представляє собою імпульс.

Поширення імпульсу в хвилеводі супроводжується цілою низкою специфічних ефектів, що викликає значний інтерес до вивчення саме нестационарних процесів. Наукове та практичне значення розгляду нерегулярних хвилеводів і визначило тему даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана у рамках аспірантського плану кафедри теоретичної та прикладної механіки, затвердженого вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також бюджетних науково-дослідних тем: “Крайові задачі динаміки пружних тіл зі спряженими польовими фізико-механічними властивостями та їх застосування в неруйнівному контролі, сенсорних мікроелектромеханічних системах та хвильових гіроскопах” (2011–2013 рр., держреєстраційний № 0101U002477 : 11БФ038-05), “Математичні та експериментальні методи механіки спряжених коливальних процесів і хвильових полів та їх застосування в гіроскопічних геонавігаційних та мікроелектромеханічних системах” (2014–2015 рр., держреєстраційний № 0114U003474 : 14БП038-02).

Проведені дослідження та отримані результати можуть бути включеними до курсів та дисциплін кафедри теоретичної та прикладної механіки механіко-математичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка «Динамічні задачі механіки», «Теорія хвилеводів», «Механіка пружних хвиль».

Мета і завдання дослідження

Метою дослідження є розробка алгоритмів чисельно-аналітичного дослідження задачі поширення нормальних SH- хвиль у криволінійних хвилеводах з різними конструктивними оформленнями зони вигину та визначення закономірностей кінематичних та енергетичних характеристик при поширенні гармонічної у часі SH-хвилі та імпульсного сигналу. Основним

завданням є побудова розв'язку задачі поширення хвиль у хвилеводі, тобто визначення поля у хвилеводі та проведення енергетичного аналізу.

Для досягнення поставленої мети були розглянуті такі задачі:

- поширення гармонічної SH-хвилі в лінійно-пружному ізотропному хвилеводі зі згином з різними конструктивними оформленнями зони вигину:
 - ✓ сталої ширини,
 - ✓ з заокругленням,
 - ✓ зі зрізами,
 - ✓ у хвилеводі з різкою зміною ширини зони вигину,
 - ✓ у хвилеводі з подвійним згином;
- визначення дисперсійних співвідношень для хвилеводу сталої ширини;
- дослідження залежності енергетичного коефіцієнта проходження SH-хвилею зони нерегулярності хвилеводу.

Об'єктом дослідження є процес поширення стаціонарної та нестаціонарної хвилі у нерегулярному хвилеводі.

Предметом дослідження є закономірності процесу поширення нормальних SH-хвиль у пружному хвилеводі з вільними від напружень стінками, визначення енергетичних характеристик процесу поширення хвиль крізь зону неоднорідності хвилеводу.

Методом, що використовується в роботі є метод часткових областей. При застосуванні даного методу вся область існування хвильового поля ділиться на часткові області. У кожній такій області можна застосувати метод розділення змінних та записати хвильове поле у вигляді суми частинних розв'язків рівняння Гельмгольца. Далі необхідно записати умови спряження полів в єдину область існування хвильового поля. Нескінченна система лінійних алгебраїчних

рівнянь другого роду розв'язувалася методом редукції з необхідним контролем коректності отриманого розв'язку.

Наукова новизна одержаних результатів

1. Застосовано метод часткових областей для побудови розв'язку задачі про поширення нормальної SH-хвилі у хвилеводі з вигином для різних конструктивних оформлень зони вигину.

2. Проведено детальний енергетичний аналіз поширення хвилі крізь зону неоднорідності хвилеводу.

3. Показано, що заокруглення кутової області зі збереженням ширини хвилеводу на всій його довжині приводить майже до повної проникності криволінійної області в широкому діапазоні частот, при цьому структура поля за вигином суттєво залежить від геометричних параметрів хвилеводу.

4. Побудовано розв'язання задачі про поширення вузькосмугового імпульсного сигналу в заокругленому хвилеводі постійної ширини. Показано, що, підбираючи певним чином геометричні параметри хвилеводу, можна досягти збереження форми імпульсу на шляху його поширення.

Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів і висновків забезпечується використанням добре апробованого математичного апарату та застосуванням теоретично обґрунтованих числових методів. Достовірність чисельних результатів забезпечувалась перевіркою точності виконання умов спряження полів на границях поділу областей зони вигину, а також перевіркою точності виконання закону збереження енергії при поширенні хвилі вздовж хвилеводу. В дисертаційній роботі, в окремих випадках, перевірялась збіжність отриманих результатів з відомими.

Практичне значення одержаних результатів

Дисертація має як **теоретичне**, так і **практичне значення**. Отримані результати дозволяють застосовувати побудований чисельно-аналітичний

апарат до задач поширення пружних хвиль у хвилеводах з подібною геометрією. Оскільки криволінійні хвилеводи знаходять широке застосування в різноманітних пристроях, робота має практичне застосування.

Особистий внесок здобувача

Дисертація є самостійною науковою працею, в якій висвітлені розробки автора, що дозволили вирішити поставлені завдання. Робота містить теоретичні та методичні положення і висновки, сформульовані дисертантом особисто. Використані в дисертації ідеї, положення чи гіпотези інших авторів мають відповідні посилання і використані лише для підкріплення ідей здобувача. Науковому керівнику належить постановка задачі та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації

Основний зміст дисертаційної роботи було представлено на таких наукових конференціях:

- II Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки" присвячена 150-річчю кафедри теоретичної та прикладної механіки КНУ ім. Т. Шевченка, м. Київ, Україна, 28 – 30 серпня 2013 р., Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі.

- Акустичний симпозіум "Консонанс", НАН України, Інститут гідромеханіки, м. Київ, Україна, 1 – 2 жовтня 2013 р., Нормальні хвилі криволінійного хвилеводу.

- Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчю від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, м. Київ, Україна, 23 – 24 квітня 2014 р., Хвильовий процес у криволінійному хвилеводі з різкою зміною ширини хвилеводу.

Дисертація в цілому доповідалась та отримала позитивну оцінку на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник професор Я. О. Жук, травень 2015), на об'єднаному науковому семінарі кафедр теоретичної та прикладної механіки і механіки суцільних середовищ Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник професор Я. О. Жук, жовтень 2015), на науковому семінарі відділу гідродинамічної акустики Інституту гідромеханіки НАН України (керівник академік НАН України В. Т. Грінченко, листопад 2015).

Публікації

Поставлені цілі досягнуто на основі узагальнення і розробки даних, що опубліковані у 10 наукових роботах. З них 5 статей [15, 16, 56, 73, 74] у виданнях, затверджених МОН України; 1 стаття [72] у закордонному виданні.

Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи і пункти, висновків, списку використаних джерел.

У **вступі** охарактеризовано стан досліджуваної наукової проблеми і обґрунтовано актуальність обраної теми дисертації, визначено мету й завдання, об'єкт, предмет, методику дослідження; викладено зв'язок обраного напрямку дослідження з науковими програмами; висвітлено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, представлено особистий внесок аспіранта, апробацію отриманих результатів та публікації за темою дисертації.

У **першому** розділі міститься огляд літератури за тематикою дисертації та висвітлено сучасний стан проблеми вивчення питання хвилеводного поширення пружних хвиль. Показано, що дослідження, визначені метою і задачами даної роботи, базуються на сучасній теоретичній базі наукових публікацій.

Другий розділ являє собою стислий довідник понять і характеристик щодо явища поширення SH-хвиль у пружному шарі.

Третій розділ присвячений отриманню чисельно-аналітичного розв'язку задачі поширення нормальних SH-хвиль у нерегулярних хвилеводах з різними конструктивними оформленнями зони вигину. Досліджено нормальні хвилі криволінійного хвилеводу постійної ширини у хвилеводі з вільними межами. Розглянуто особливості проходження хвилі крізь згин хвилеводу при різних варіантах конструктивного оформлення зони вигину та показані закономірності поширення імпульсного сигналу крізь округлений згин хвилеводу постійної ширини.

У **четвертому** розділі розглянуто задачу про поширення пружної хвилі у хвилеводі з різкою зміною ширини зони вигину

У **п'ятому** розділі розглянуто задачу про поширення пружної хвилі у двох типах хвилеводів з подвійною зміною напрямку поширення хвилі. Досліджено енергетичні коефіцієнти проходження хвилі в залежності від параметрів хвилеводу.

У **висновках** наведені основні досягнення, які отримано в роботі.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У даному розділі дисертації описано відомості щодо розвитку теорії пружних хвиль, закономірностей розповсюдження хвиль в акустичних, твердотільних та електромагнітних хвилеводах. Розглядається сучасний стан даної проблеми.

Особлива увага приділяється питанням впливу наявності геометричних неоднорідностей на закономірності поширення пружних хвиль.

1.1 Аналіз літературних джерел

Поширення хвиль у вигнутих хвилеводах має довгу та багату історію досліджень, що сягає часів Дж. В. Стретта (Лорда Релея) [131] та триває до нашого часу [107].

Теоретичні основи сучасної теорії пружних хвиль також були закладені в роботі Лорда Релея “Теорія звуку” [64]. Подальший інтенсивний розвиток до сьогоднішніх днів можна прослідкувати в багатьох роботах [54, 28, 32, 88, 12]. Загальні результати теорії коливань приносять велику користь при розгляді хвильових процесів. Однак також виникають спеціальні питання, які пов’язані із властивостями середовища, геометрією тіла, яке піддається хвильовому збуренню.

Один із важливих етапів розвитку теорії, що описує опір тіл, при змінні їх об’єму чи форми, була гіпотеза, яку висунув Френель (1821), про поперечний характер коливань світла при поширенні в гіпотетичному середовищі – ефірі. Використовуючи цю гіпотезу Френель сформулював закони відбиття та заломлення світлової хвилі на прямолінійній границі розділу двох оптично прозорих середовищ.

В подальших роботах Пуасона (1828) і Стокса (1849) установили існування двох типів хвиль у необмеженому ізотропному пружному середовищі: перша відповідала за безвихрову зміну об’єму, а інша пов’язана із зміною форми.

Після відкриття цих двох типів хвиль, гіпотеза Френеля про поперечний характер хвиль світла була змінена. Завдяки експериментам Герца (1888) було показано, що світло не являє собою пружну хвилю.

Подальший розвиток теорії пружних хвиль привело до поняття дифракції. Перші роботи дослідження явища дифракції належать Стоксу (1849), який досліджував проходження акустичних хвиль через отвір в екрані. Ним було отримано амплітуди та поляризацію пружних хвиль на відстані від екрану. В роботі [32] зазначено, що першим дослідження дифракції пружних хвиль на неоднорідності провів Клебш. Значний вклад у вивчення явища дифракції світла вніс Релей (1871).

Багато акустичних задач зводиться до розв'язання граничних задач для рівняння Гельмгольца. Було побудовано багато часткових розв'язків для рівняння Гельмгольца в різних системах координат. Для задач випромінювання або розсіювання хвилі, коли гранична поверхня тіла співпадає із однією з координатних осей, тобто маємо канонічну область, отримано багато розв'язків граничних задач. Мабуть, найбільш повно такі матеріали зібрано в монографії [94].

Для задач розглянутих в монографії [94], реалізовано підхід, який використовується для розв'язання багатьох задач математичної фізики [13]. Ідея методу полягає в тому, що для області існування звукового, пружного чи електромагнітного поля на основі вибору відповідних часткових рішень рівняння Гельмгольца будується така їх сукупність, котра має можливість задовольнити довільним граничним умовам для тензора напружень чи переміщень на поверхні для пружних задач, чи для швидкості або тиску для акустичних задач на поверхні, яка обмежує область існування поля [32, 115, 7]. Коло задач, які можуть бути розглянуті подібним чином, досить обмежене. Практично в зазначеній вище монографії воно окреслено повністю.

В монографії [59] розглянуто поширення електромагнітних хвиль з різного роду включеннями. Наведено точні розв'язки у вигляді розкладу по спеціальних вектор-функціях для векторних граничних задач електродинаміки. Розглянуто задачі з різного роду включеннями. Для просторових задач в монографії [40] наведено точні розв'язки у вигляді розкладу по спеціальних вектор-функціях для векторних задач теорії пружності для тіл канонічної форми. Були розглянуті такі тіла як пружний шар, круговий циліндр, параболічний циліндр, просторовий клин, сфера та інші тіла. Розв'язок для всіх задач було знайдено однаковим методом. В роботах [59, 40, 38, 39] проводився якісний аналіз напруженого стану чи електромагнітного поля та отримано кількісні оцінки при наявності локального навантаження або нерегулярності границь пружного тіла.

Задачі розсіювання і випромінювання звуку для неканонічних областей є актуальним та перспективним напрямком теорії пружних хвиль. Різноманіття неканонічних областей досить значне. Серед великої кількості методів розв'язку задач розсіювання та випромінювання звуку в неканонічних областях можна виділити два основні напрямки: аналітико-чисельний та чисельний методи. Є суттєва відмінність між ними за сферою застосування та ефективністю кінцевого результату.

Зазвичай, не вдається отримати розв'язок задачі випромінювання або розсіювання пружних хвиль для областей загального вигляду в аналітичній формі, отже для таких задач застосовують прямі чисельні методи. Перевагою чисельних методів є їхня універсальність, оскільки при реалізації чисельних схем, вони, як правило, не містять формальних обмежень, що накладаються на розсіювач або випромінювач. Але при застосуванні чисельних методів іноді потрібне проведення непростих обґрунтувань достовірності отриманих результатів в тих випадках, коли алгоритм не є стійким або наближений розв'язок не збігається до точного розв'язку. Відзначимо наступні роботи з

чисельних методів [8, 59, 24, 42, 67]. Слід відзначити, що серед чисельних методів тільки метод скінченних різниць можна вважати виключно чисельним [67]. В такому випадку тільки при запису основних рівнянь використовується диференціальна форма задачі. При застосуванні методу скінченних різниць частинні похідні замінюються на скінченні різниці, а вихідний континуум замінюється системою зі скінченним числом степенем вільності. Всі інші чисельні методи в певній мірі використовують аналітичні методи при побудові розв'язку. Як правило, вихідна задача перетворюється до системи співвідношень, записаних для границі області. Типовим прикладом є метод граничних інтегральних рівнянь, в якому при побудові розв'язання задачі використовують зображення для функції Гріна у нескінченному просторі [132, 125].

В якості прикладу чисельно-аналітичних робіт [2, 3, 11, 95, 111], де використано комбінований метод скінченних елементів та метод граничних елементів для дослідження коливань та випромінювання тіл скінченних розмірів. В роботі [14] розглянуто задачу розсіювання акустичної хвилі еліпсоїдальною оболонкою сталої товщини. Тут використовується комбінація методів скінченних та граничних елементів, які узгодженні згідно роботи [105].

Не дивлячись на те, що чисельно-аналітичні мають більш складну реалізацію, ніж чисельні методи, проте вони виграють з точки зору ефективності та точності розрахунків. Тому розробка універсальних чисельно-аналітичних методів дослідження задач дифракції хвиль є актуальним напрямком дослідження.

Дана дисертаційна робота присвячена побудові аналітичного методу для розв'язання задачі поширення пружних хвиль у хвилеводах з вигинами. Ідейні основи для даної задачі були сформульовані в математичній фізиці і ґрунтуються на властивостях рівнянь Гельмгольца [60]. Слід відзначити зв'язок даної роботи з методом часткових областей [34, 61]. В роботі [5] вказується,

що в інженерній практиці широке застосування знайшли хвилеводні системи для пружних та електромагнітних хвиль. В прикладній електродинаміці теорія хвилеводів отримала поштовх до свого розвитку завдяки появі радіолокаційної техніки та освоєнню деци- та сантиметрового діапазонів довжин електромагнітних хвиль. Викликані практичними потребами теоретичні та експериментальні дослідження дозволили створити елементарну базу для конструювання радіосистем різного призначення. Хвилеводні структури для пружних хвиль, наповнені газом, рідиною чи твердотільні зустрічаються в пристроях різного призначення. Так, в ультразвукових технологічних пристроях тверді хвилеводи служать для передачі поздовжніх, згинних чи крутильних коливань від електроакустичного перетворювача до об'єкта ультразвукового впливу. В пристроях, що використовують принцип поверхневих акустичних хвиль, хвилеводи слугують для каналізації енергії хвилі, зміни напрямку її поширення, збільшення часу затримки і т. д. Таких прикладів можна привести багато, тому питанню поширення збурення різної природи у хвилеводі приділяється увага у значній кількості робіт [4, 45, 32, 41, 59, 81]. В монографії [82] проводиться розв'язання задач хвилеводного поширення в електромагнітних хвилеводах.

Розглянемо тепер роботи щодо задач розсіювання і випромінювання пружних та електромагнітних хвиль в складних областях. В монографії [51] розглянуті хвильові системи на з'єднанні хвилеводів, в тому числі розв'язана задача випромінювання прямокутним хвилеводом із нескінченним фланцем. Використовуючи результати цієї роботи в [6] досліджено випромінювання та відбиття електромагнітних хвиль від відкритого кінця прямокутного хвилеводу та секторних рупорних антен. Такі складені хвилеводи знаходять широке застосування в техніці. Так, у роботі [44] розглянуто поширення сферичної електромагнітної хвилі у хвилеводі, який має вигляд рупора. Випромінювачі різної форми хвилеводних структур (секторних, круглих, прямокутних)

розглянуті в роботі [93] у високочастотному діапазоні. В роботі [112] досліджується багатомодове випромінювання півнескінченною трубою. Слід відмітити чудові роботи, пов'язаних із дослідженням полів нерегулярних хвилеводів [70, 81, 82, 86, 85].

В роботі Шендерова [80] розглянута задача випромінювання плоскої хвилі плоским хвилеводом. Задача була зведена до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих амплітудних коефіцієнтів. Слід зазначити, що знаходження хвильових полів, які випромінюються чи розсіюються можна також проводити використовуючи метод Вінера-Хопфа. Приклади таких задач містяться в [9]. В монографіях [10, 45, 62, 75, 76, 77, 78, 79] розглянуто задачі випромінювання і розсіювання звуку з використанням інтегральних рівнянь. Так в роботі [83] досліджується задача випромінювання звуку диском при здійсненні осциляційних рухів. Багато досліджень стосуються випромінювання та розсіювання звукових чи електромагнітних хвиль скінченною кількістю об'єктів [22, 46, 48, 50, 52, 55, 122].

В дисертаційній роботі використовується метод часткових областей, який знайшов широке застосування при дослідженні питань, які пов'язані з випромінюванням або розсіюванням хвиль різної природи [59, 32, 69]. При цьому треба відзначити, що основні результати, досягнуті за допомогою методу відносяться до тих випадків, коли поверхні випромінювача або розсіювача та границі між частковими областями співпадають з частинами координатних поверхонь однієї системи координат. Але це обмеження звужує клас задач, які можуть бути розглянуті в рамках цього методу. Але як вказується в роботі [17], це обмеження не є необхідним для методу часткових областей. І якщо відмовитись від цього обмеження можливості методу суттєво зростають. У вказаній роботі показано можливість ефективного використання методу часткових областей для задач, коли зазначене вище обмеження для поверхонь

випромінювання чи розсіювання об'єктів та границь часткових областей не виконується. Так, у вказаній роботі використовується метод часткових областей для задачі випромінювання звуку циліндром скінченної висоти. В рамках методу часткових областей основним моментом при розв'язанні задачі є питання про розбиття всієї області існування поля на підобласті і побудови для кожної з них повного розв'язку рівняння Гельмгольца. Повнота розв'язку полягає в тому, що вираз для поля в кожній підобласті має можливість для задоволення граничних умов та умов спряження полів на границях підобластей. Задача про випромінювання циліндром скінченної висоти була раніше розглянута в роботах [35, 69, 126]. При розгляді зазначеної задачі використовуючи тільки циліндричну систему координат приходимо до досить складної системи сингулярних інтегральних рівнянь [35, 126]. В роботі ж потенціал швидкості для підобласті представляється у вигляді суперпозиції двох доданків: перший доданок задовольняє рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат та дає змогу задовольнити граничну умову на боковій поверхні циліндра, а другий доданок задовольняє рівняння Гельмгольца в сферичній системі координат та дозволяє задовольнити умови спряження полів на сферичній поверхні поділу часткових областей. При такому виборі полів при задоволенні граничних умов та умов спряження полів приходять до функціональної системи, після алгебраїзації якої отримали нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, яка була розв'язана методом редукції. Також використовуючи дві системи координат – циліндричну та сферичну, у вказаній роботі було розв'язано задачу випромінювання звуку круглим диском у сферичному екрані. Для ілюстрації ефективності даного підходу в роботі наведені дані про виконання граничних умов та умов спряження полів – при утриманні 20 невідомих помилка при виконанні граничних умов по амплітуді та по фазі складає не

більше 0.3% та 1° відповідно. Вказана можливість про розширення методу часткових областей знайшла своє застосування і в даній дисертаційній роботі.

В даній дисертаційній роботі досліджуються хвилеводи, характерний розмір яких порівняний з довжиною хвилі. Як вказано в роботі [70], якщо довжини характерного розміру хвилеводу до довжини хвилі у вільному просторі більше п'яти, то при дослідженні взаємодії хвилі з неоднорідністю хвилеводу можна використовувати добре розроблені методи теорії дифракції. Теорія хвилеводів з неоднорідностями, коли характерний розмір порівняний з довжиною хвилі розвинута значно слабше. Причиною цього є об'єктивні труднощі, які виникають при побудові строгого розв'язку відповідних граничних задач. Разом з тим виявилось, що цей діапазон зміни хвильових розмірів багатий різними хвилеводними ефектами, можливо часом несподіваними та такими, що мають практичну цінність. Дослідження в цьому напрямку проводились, в більшій мірі, спеціалістами в області електродинаміки з використанням, в основному, інтегральних методів. Слід відзначити роботу [116], в якій розглядається постановка таких граничних задач та обговорюються труднощі, які виникають при їх розв'язанні, а також монографію [82], в якій розв'язання акустичних задач, при певних граничних умовах, переноситься на електромагнітні хвилеводи.

Хвильові системи з неоднорідностями знаходять широке застосування в акустичних та радіоелектронних пристроях. Нерегулярні хвилеводи розглядаються також в роботі [57]. Розглядається прямолінійний хвилевід зі зломом. В роботі виявлено, що при збільшенні кута зламу хвилеводу значення енергетичного коефіцієнта проходження зменшується та спостерігаються провали при довжинах хвиль кратних половині ширини хвилеводу. Вказано про трансформацію енергії нульової моди в набігаючий області в більш високі моди в області за вигином. Можлива також обернена трансформація з більш високої у нижчу моду. Цікаво відмічено в даній роботі, що при кутах зламу

більше 90° та при досягненні певного хвильового розміру хвилевід стає практично звукопрозорим. Також у вказаній роботі розглянуто хвилевід, який складається з плоского та клиновидного хвилеводів. Для розв'язання задачі використовується полярна та декартова система координат, причому для кута розкриття менше та більше 90° виділяють різні часткові області: для кута розкриття менше 90° областю переходу є сектор, а для кута розкриття більше 90° перехідною областю стає сфера. В роботі досліджено частотні характеристики енергетичного коефіцієнту проходження в залежності від кута розкриття клиновидного хвилеводу. Отриманий результат при певному куті розкриття збірався з результатами роботи [8]. В роботі [27] для хвилеводу зі зломом розглядається перетворення енергії однієї моди в іншу. Для певного діапазону частот вдалося отримати перетворення енергії однієї моди в іншу при збереженні більше 90% енергії. Дана неоднорідність (злам) найбільш простий пристрій, який дозволяє проводити такі перетворення з високою ефективністю. Прикладом практичного застосування такого пристрою є трансформація енергії нульової нормальної моди в більш високі моди, що дозволяє скласти умови для ефективного поглинання звуку у хвилеводі [70]. Іншим практичним прикладом ефекту трансформації може бути можливість зміни характеристик направленості відкритого кінця хвилеводу, розташованого за зломом. Також у вказаній вище роботі розглядається задача випромінювання плоского поршня у рідинному хвилеводі зі зломом. Показано, що можна підібрати параметри хвилеводу таким чином, щоб доля енергії, що проникає за злам ставала малою, що може бути використано в задачах подавлення шуму в повітровідних системах.

В роботі [119] запропоновано метод для нерегулярних хвилеводів, які можуть складатися з плоскопаралельних хвилеводів, з'єднаних практично довільною областю, яка складається з набору відрізків. Розглядається модовий аналіз електромагнітної хвилі. При розв'язанні перехідна область розглядається

в циліндричних координатах. Розв'язок в цій області виражається через функції Бесселя. При подальшій побудові розв'язку в роботі виконується перетворення мод електромагнітної хвилі в перехідній області від циліндричних до декартових координат.

В роботі [100] розглядається аналітико-чисельний метод для довільної форми перехідної області між прямокутними хвилеводами, а також довільними включеннями в цій перехідній області, наприклад, у вигляді кіл, прямокутників чи трикутників. Нерегулярну частину хвилеводу разом з перешкодами розглядають в циліндричній системі координат. Структура хвилеводу визначається довільною кількістю портів (прямокутних хвилеводів), під'єднаних до нерегулярної частини хвилеводу, кожен з яких має довільний напрям та розмір.

В дисертації розглядається також імпульсне поширення пружної хвилі в хвилеводі з вигином сталої ширини. Слід зазначити, що в більшості робіт хвилеводного поширення розглядають гармонічну у часі хвилю. Але в дійсності сигнал має скінченну в часі тривалість, або іншими словами, представляє собою деякий імпульс. Поширення імпульсу в хвилеводі супроводжується цілою низкою специфічних ефектів, що викликає значний інтерес до вивчення саме нестационарних процесів [68]. Приймаючи це до уваги, в роботі [5] було зазначено, що є важливим подальше дослідження хвилеводного поширення імпульсного сигналу, де було розглянуто імпульсне поширення в плоскому регулярному хвилеводі з найбільш простою геометрією границь. Дану задачу можна вважати продовженням досліджень, окреслених в роботі [5] для хвилеводу з вигином постійної ширини. Часова залежність вихідного сигналу являє собою нескінченну періодичну послідовність імпульсів у вигляді відрізків синусоїди. Як зазначено у попередній роботі є дві причини, чому розглядається саме послідовність імпульсів, а не одиничний імпульс. По-перше, це дає можливість обмежити розгляд хвильового процесу інтервалом періоду

слідування імпульсів. По-друге, такі сигнали широко використовуються в локаційних пристроях різного призначення, наприклад, в локаторах з використанням електромагнітних чи пружних хвиль, медичних сканерах і т. д. Цей підхід дозволяє найбільш просто використати дані про поширення гармонічного сигналу для отримання кількісних оцінок поширення імпульсу.

Спочатку хвилеводи з вигинами були предметом дослідження в рамках електромагнітної теорії. Попередні дослідження квантових аспектів вигинів можна розділити на дві області. Це дослідження існування зв'язаного стану [110, 101, 102], спектру [117] та властивості розсіювання, обидва з яких розглядаються у [118]. Для того щоб описати квантове явище використовували декілька підходів у минулому: функція Гріна [128], чисельні розрахунки використовуючи скінченні різниці та сітку [114] та техніку знаходження мод використовуючи натуральні моди, тобто власні функції у вигині [98, 87, 127, 129, 117, 124].

В роботі [103] розглядається наближений пошук власних мод слабо вигнутого хвилеводу. Наближений пошук полягає у застосуванні до дисперсійного рівняння у вигині, яке формулюється через функції Бесселя першого та другого роду, апроксимації Дебая функції Бесселя. Використовуючи два члени асимптотики Дебая отримали гарне наближення власних мод слабо вигнутих областей. В якості малого параметру використовують безрозмірну кривину. В роботі [104] розглядається існування захвачених хвиль у вигнутих еластичних плитах.

В газах, рідинах і твердих тілах, можуть виникати пружні хвилі, викликані різними коливальними тілами. Їх називають звуковими хвилями. В однорідних твердих тілах умови розповсюдження пружних хвиль більш сприятливі, ніж, наприклад, в повітрі оскільки звук розповсюджується на велику відстань з набагато меншим поглинанням [47]. Розповсюдження хвиль в пружному тілі пов'язано зі зміщенням і деформацією його елемента. Таким чином збурення

передається від однієї точки пружного тіла до іншої. В твердих тілах, на відміну від рідин та газів, розповсюджуються не лише поздовжні хвилі, а й інші типи пружних хвиль. В даній роботі розглядається та досліджується розповсюдження SH-хвилі в твердих тілах. Відбиття SH-хвиль відбувається без виникнення інших типів руху хвиль [37, 32], що зумовлює відносну простоту структури хвильового поля в тілі. Явище поширення нормальних SH-хвиль у пружних хвилеводах принципово не відрізняється від хвилеводних рухів рідини в трубі чи в шарі. Також ці задачі споріднені із задачами хвилеводного поширення електро - магнітних хвиль. В роботах [32, 37] детально проаналізовано поширення нормальних SH-хвиль у пружному шарі, виявлено кінематичні та енергетичні характеристики такого процесу. У роботах [59, 71, 26, 30] вивчаються особливості поширення електромагнітних хвиль у хвилеводах.

При побудові наближених одновимірних теорій коливань стержнів значний інтерес представляє собою задача розповсюдження гармонічних хвиль в нескінченному пружному круговому циліндрі. В роботах Похгамера, Кри та в [134, 135, 84] було вперше згадано про можливість виразити характеристики хвильового поля в циліндрі через спеціальні функції. Найпростішими, і в той же час, найбільш популярними хвилеводними областями є шар та нескінченний циліндр. Поширення хвиль у шарі та циліндрі є предметом теоретичних та експериментальних досліджень багатьох вчених [81, 120, 121, 90, 91, 106].

Таким чином, за допомогою класичних досліджень, було вказано про складність хвилеводного розповсюдження при наявності границі (дисперсія) та побудовано набори точних розв'язків рівнянь руху. Більш складною задачею є задача розповсюдження гармонічних хвиль в прямокутному хвилеводі. Такою задачею займався Ламе, проте загального точного розв'язку задачі ним не було отримано.

Задача, що розглядається в роботі, пов'язана з випромінюванням вимушених хвильових коливань в хвилеводі. В зв'язку з наявністю нескінченного набору нормальних мод у хвилеводі дана задача відзначається значною складністю у порівнянні із задачами, наприклад, для півпростору.

Розгляд задачі розповсюдження вимушених коливань в хвилеводі являє собою логічний крок при дослідженні впливу границі при формуванні хвильового поля. Вибір набору нормальних мод в хвилеводі є важливим фактором при практичному застосуванні. При дослідженні SH-хвиль можна отримати розв'язок задачі та проаналізувати особливості резонансів при заданому зовнішньому навантаженні на поверхні хвилеводу.

Наведений вище огляд літератури дає загальне уявлення про велику цікавість і популярність до досліджень полів в неканонічних областях. Серед вказаних вище методів аналізу полів, метод часткових областей, на основі якого досліджувались задачі в даній дисертаційній роботі, займає вагоме місце. Метод детально досліджений і розвинутий в роботах В.Т. Грінченка та його учнів; відмітимо ряд із них [24, 18, 19, 20, 17, 21, 37, 36, 25].

1.2 Вибір напрямку досліджень

Нерегулярні хвилеводи з наявністю зони вигину знаходять широке застосування в акустичних та радіоелектронних пристроях. Тому, як показав огляд літературних джерел, і в теперішній час інтерес до дослідження хвильового поля в таких хвилеводах не слабшає. Напрямком досліджень даної роботи є побудова чисельно-аналітичних розв'язків задач про поширення хвиль у хвилеводі з вигином. Зона вигину може мати різне конструктивне оформлення. З цього випливає необхідність аналізу енергетики процесу поширення хвиль та структури поля за вигином для різних варіантів конструктивного оформлення зони вигину. Слід підкреслити, що дослідження буде проведено для хвилеводів, у котрих характерні розміри порівняні з довжиною хвилі.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ В ОБМЕЖЕНИХ ТА НЕОБМЕЖЕНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Даний розділ дисертаційної роботи присвячений теорії пружних хвиль у необмежених середовищах і середовищах з границями. Розглянуто визначаючі рівняння теорії пружних хвиль, різні типи граничних умов для обмежених середовищ, дисперсійні співвідношення для пружних хвиль.

2.1. Основні рівняння лінійної теорії пружності

Поширення хвиль у пружних тілах пов'язано з наявністю інерційних і поновлюючих сил у пружному середовищі. Вказані сили викликають переміщення і деформації у тілі та передають збурення від однієї точки пружного середовища до іншої. Існує принципова відмінність між рухом середовища, зв'язаного із розповсюдженням збурення, і самим розповсюдженням збурення. Закономірності цього процесу у пружному середовищі описують зв'язок між вектором переміщення \vec{u} , тензорами деформації \mathcal{E} і напруження \mathcal{P} , та густиною середовища ρ .

Ведемо до розгляду хвильові процеси, що відбуваються у лінійно-пружному ізотропному середовищі. Вказане пружне середовище характеризується трьома механічними характеристиками – двома пружними сталими та густиною середовища віднесених до незбуреного руху

Основні рівняння руху пружного середовища для області, записуються у вигляді наступних рівнянь [53, 43]:

$$\nabla \cdot \overset{\mu}{T} + \overset{s}{b} = \rho \frac{\partial^2 \overset{s}{u}}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

$$\overset{\mu}{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \overset{s}{u} + (\nabla \overset{s}{u})^T], \quad (2.2)$$

$$\overset{\mu}{T} = \lambda \nabla \cdot \overset{s}{u} \cdot \overset{\mu}{E} + 2\mu \overset{\mu}{\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Тут знаком " M^T " позначено операцію транспонування квадратної матриці M ; $\overset{\bullet}{E}$ – одиничний тензор другого рангу; λ і μ - пружні модулі (сталі Ламе); $\overset{s}{b}$ – вектор густини об'ємних сил.

Наведена вище в інваріантній формі повна система рівнянь для визначення всіх характеристик руху елемента пружного тіла, при розв'язанні певної задачі, повинна бути віднесена до певної системи координат. Оскільки в даній роботі розглядаються зміщення і швидкість елементів пружного тіла, а не зміщення і швидкість деякої точки, то будемо використовувати лагранжевий опис руху суцільного середовища.

Виберемо в якості основної характеристики (за допомогою якої можна повністю описати напружено - деформований стан розглянутого тіла) вектор переміщення $\overset{s}{u}$ частинок середовища. Із співвідношень (2.1)-(2.3) можна отримати векторне рівняння руху

$$\mu \nabla^2 \overset{s}{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \overset{s}{u}) + \overset{s}{b} = \rho \frac{\partial^2 \overset{s}{u}}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

та вводячи, для прикладу, деякий вектор \vec{a} в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \overset{s}{a} &= \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \quad - \text{оператор Лапласа,} \\
\nabla \overset{s}{a} &= \left\{ \frac{\partial a_x}{\partial x}; \frac{\partial a_y}{\partial y}; \frac{\partial a_z}{\partial z} \right\} - \text{оператор градієнта,} \\
\nabla \cdot \overset{s}{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad - \text{оператор дивергенції,} \\
\nabla \times \overset{s}{a} &= \left\{ \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}; -\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z}; \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right\} - \text{ротор.}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Враховуючи тотожність

$$\nabla^2 \overset{s}{u} = \nabla(\nabla \cdot \overset{s}{u}) - \nabla \times (\nabla \times \overset{s}{u}), \tag{2.6}$$

рівність (2.4) матиме вид:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \overset{s}{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \overset{s}{u}) + \overset{s}{b} = \rho \frac{\partial^2 \overset{s}{u}}{\partial t^2}. \tag{2.7}$$

Рівняння (2.4) і (2.7) називається рівнянням руху Ламе. Воно часто використовувалося в лінійній теорії пружності у роботах Коші, Нав'є, Ламе, Пуассона, Стокса та інших вчених. Детальний аналіз рівнянь Ламе проведено у великій кількості робіт по лінійній динамічній теорії пружності, як наприклад, [106, 89].

Розглянемо наступні величини

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \tag{2.8}$$

які мають розмірність швидкостей. Тоді рівняння (2.7) подається у вигляді

$$c_l^2 \nabla(\nabla \cdot \overset{s}{u}) - c_t^2 \nabla \times (\nabla \times \overset{s}{u}) + \overset{s}{b} = \frac{\partial^2 \overset{s}{u}}{\partial t^2}. \tag{2.9}$$

Використовуючи тотожність (2.4), отримаємо наступне рівняння

$$c_t^2 \nabla^2 \overset{s}{u} - \frac{\partial^2 \overset{s}{u}}{\partial t^2} + (c_l^2 - c_t^2) \nabla (\nabla \cdot \overset{s}{u}) + \frac{\overset{s}{b}}{\rho} = 0. \quad (2.10)$$

У випадку відсутності об'ємних сил, коли $\overset{s}{b} = 0$, з рівнянь (2.5), при використанні (2.4), отримуються два рівняння відносно часткових роз'язків $\overset{s}{u}_1$ і $\overset{s}{u}_2$ рівняння руху, а саме

$$\begin{aligned} c_l^2 \nabla^2 \overset{su}{u}_1 - \frac{\partial^2 \overset{su}{u}_1}{\partial t^2} &= 0, \quad \text{де} \quad \nabla \times \overset{su}{u}_1 = 0, \\ c_t^2 \nabla^2 \overset{su}{u}_2 - \frac{\partial^2 \overset{su}{u}_2}{\partial t^2} &= 0, \quad \text{де} \quad \nabla \cdot \overset{su}{u}_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

З рівнянь (2.11) видно, що часткові роз'язки для векторів переміщення $\overset{s}{u}_1$ та $\overset{s}{u}_2$ описують процес розповсюдження збурень з різними за величинами швидкостями c_l та c_t . Використовуючи властивості, що були накладені на вектори $\overset{s}{u}_1$ та $\overset{s}{u}_2$, швидкість c_l називають швидкістю безвихрової або поздовжної хвилі ($\nabla \times \overset{s}{u}_1 = 0$), а c_t - швидкістю поперечної хвилі ($\nabla \cdot \overset{s}{u}_2 = 0$).

З виразів для швидкостей поздовжної та поперечної хвиль (2.8), випливає, що $c_l > c_t$. В сейсмології ці швидкості називають первинною c_p і вторинною c_s швидкостями, відповідно.

Значимо, що швидкості поздовжної та поперечної хвиль не є незалежними одна від одної, та пов'язані наступним співвідношенням

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}, \quad (2.12)$$

де ν - коефіцієнт Пуассона. Те, що поздовжна та поперечна швидкості є залежними слідує з моделі розглядуваного суцільного середовища.

2.2. Декомпозиція Гріна - Ламе

Оскільки рівняння (2.4) відносно вектора переміщень $\overset{s}{u}$ є достатньо складним, тому один із шляхів зменшення складності рівнянь є представлення вектора переміщення $\overset{s}{u}$ в деякій області B у вигляді суми певних векторів, котрі задовольняють в розглядуваній області більш простим рівнянням (2.11).

Беручи до уваги теорему Гельмгольца з векторного аналізу, векторне поле $\overset{s}{b} / \rho$ можна представити у вигляді

$$\frac{\overset{s}{b}}{\rho} = -\nabla \kappa - \nabla \times \overset{s}{\gamma}, \quad \nabla \cdot \overset{s}{\gamma} = 0. \quad (2.13)$$

Тоді для вектора переміщення виконується розклад Гріна - Ламе

$$\overset{s}{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \overset{su}{\psi}, \quad (2.14)$$

де φ і $\overset{su}{\psi}$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} c_i^2 \nabla^2 u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \kappa, \\ c_i^2 \nabla^2 u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \overset{s}{\gamma}, \quad \nabla \cdot \overset{su}{u}_2 = \overset{s}{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Доведення того, що (2.17) задовольняє рівняння (2.14), проводиться безпосередньою підстановкою виразів (2.7) у рівняння (2.11) та використанням наступних тотожностей

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi, \quad \nabla \times (\nabla \times \overset{su}{\psi}) = -\nabla \times (\nabla^2 \overset{su}{\psi}). \quad (2.16)$$

Формально зображення (2.14) та (2.15) задає вирази трьох компонентів вектора переміщення через чотири інші функції – скалярний потенціал φ та три

компоненти векторного потенціала $\vec{\psi}$. Отже скалярний та векторний потенціали мають задовольняти ще одну додаткову умову.

Здебільшого, при розгляді загальних питань динаміки пружного тіла додатковою умовою слугує наступна

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = 0. \quad (2.17)$$

Вказана умова (2.17) використовується при доведенні повноти розкладу (2.14). Якщо вектор \vec{u} - розв'язок рівняння (2.7) в деякій області B , то існують функції φ і $\vec{\psi}$, що задовольняють рівняння (2.14) та (2.15) і додаткову умову (2.7). Строго доведення цього твердження зустрічається в багатьох роботах.

Слід також відмітити, що згідно теореми про повноту зображення (2.14) будь-який хвильовий процес в обмеженому чи необмеженому пружному тілі може бути представлений у вигляді суперпозиції хвильових рухів із швидкостями c_l та c_t . У необмеженому пружному тілі хвилі обох типів поширюються незалежно одна від іншої, але коли наявні границі у пружному тілі, такі дві хвилі вже не можуть поширюватись незалежно одна від іншої, більш того, вони взаємодіють, що призводить до появи нових типів хвиль з відмінними від c_l та c_t швидкостями. Прикладами є хвиля Релея для півпростору, чи хвиля Лемба для пружного шару чи циліндра. В такому випадку теж вектор переміщення \vec{u} можна представляти у вигляді композиції пружних потенціалів φ і $\vec{\psi}$. Слід зазначити, що представлення Гріна - Ламе (2.14), (2.15) не єдині.

2.3. Вираження переміщень і напружень через пружні потенціали у декартовій системі координат

Оскільки далі в роботі будуть розглядатись хвильові рухи пружного тіла B віднесеного до прямокутної декартової системи координат $Oxyz$, то розглянемо представлення компонентів вектора переміщення \vec{u} та компонентів тензора напружень $\vec{\tau}$ і деформацій $\vec{\varepsilon}$ через пружні потенціали φ і $\vec{\psi}$.

Нехай векторний пружний потенціал $\vec{\psi}$ у декартовій системі має вигляд $\vec{\psi} = \{\psi_x; \psi_y; \psi_z\}$, тоді співвідношення (2.14) і (2.15) в прямокутній декартовій системі координат запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}; \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{1}{c_t^2} \kappa, \\ \nabla^2 \psi_x - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{c_t^2} \gamma_x, \\ \nabla^2 \psi_y - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{c_t^2} \gamma_y, \\ \nabla^2 \psi_z - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} &= \frac{1}{c_t^2} \gamma_z, \end{aligned} \tag{2.19}$$

де κ і $\vec{\gamma} = \{\gamma_x; \gamma_y; \gamma_z\}$ визначені рівняннями (2.15).

Компоненти тензора деформацій пов'язані з компонентами вектора переміщення в декартовій системі координат наступними співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 2\varepsilon_{xy} &= 2\varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\
 2\varepsilon_{xz} &= 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \\
 2\varepsilon_{yz} &= 2\varepsilon_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Напруження та деформації пов'язані законом Гука, і мають в декартовій системі наступний вигляд

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\
 \sigma_y &= \lambda \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\
 \sigma_z &= \lambda \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z},
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right], \\
 \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right], \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

де λ , μ - пружні сталі Ламе; ν - коефіцієнт Пуассона.

Після підстановки замість компонент вектора переміщень виразів (2.18), компоненти тензора напружень можна переписуються так:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) \right], \\
\sigma_y &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) \right], \\
\sigma_z &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \right],
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) \right], \\
\tau_{yz} &= \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \right], \\
\tau_{xz} &= \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

2.4 Плоскі хвилі у необмеженому пружному середовищі

Слід розглянути деякі часткові випадки розв'язання рівняння (2.7), котрі описують плоскі хвилі у необмеженому пружному середовищі у випадку відсутності об'ємних сил.

Перший розв'язок відповідає випадку $\vec{\psi} = 0$ у виразах (2.14). Розв'язок хвильового рівняння (2.15) для скалярного потенціала має вигляд

$$\varphi = f(\vec{p} \cdot \vec{r} - ct). \tag{2.25}$$

Тут \vec{r} – радіус-вектор довільної точки пружного тіла; \vec{p} – одиничний вектор, який визначає напрям поширення хвилі (хвильовий вектор); t – часова змінна. З рівнянь (2.25) знаходяться відповідні переміщення

$$\vec{u} = \vec{p} f'(\vec{p} \cdot \vec{r} - ct), \tag{2.26}$$

де штрих f' означає похідну за часом від функції f .

З рівності (2.26) випливає, що в необмеженому пружному середовищі розповсюджується плоска хвиля, яка має швидкість c_l . Для цієї хвилі вектор переміщення співнапрямлений із хвильовим вектором \vec{p} . Така хвиля називається поздовжною. Рух частинок середовища, викликаний поздовжньою хвилею, безвихровий, тобто $\nabla \times \vec{u} = 0$. Схематично збурення в поздовжній хвилі зображені на рис. 2.1.

Інший тип часткових розв'язків рівнянь руху отримаємо у припущенні $\varphi = 0$ у рівняннях (2.14). Розв'язок у вигляді плоскої хвилі векторного хвильового рівняння (2.15) має вигляд

$$\vec{\psi} = \vec{A}_0 g(\vec{p} \cdot \vec{r} - c_l t). \quad (2.27)$$

Тут \vec{A}_0 – певний фіксований вектор.

Відповідно вектору $\vec{\psi}$, вектор переміщення точок пружного тіла задається рівністю

$$\vec{u} = (\vec{p} \times \vec{A}_0) g'(\vec{p} \cdot \vec{r} - c_l t). \quad (2.28)$$

Задовольняючи додаткову умову (2.17) для вектора $\vec{\psi}$, запишемо

$$\vec{A}_0 \cdot \vec{p} = 0, \quad (2.29)$$

тобто вектори \vec{A}_0 і \vec{p} є взаємноперпендикулярними.



Рис. 2.1 Схематичне зображення плоскої поздовжньої хвилі

Тобто в цьому випадку маємо плоску хвилю, яка поширюється зі швидкістю c , в напрямку вектора \vec{p} . Вектор переміщень частинок середовища є перпендикулярним до хвильового вектора \vec{p} . Тому, у зв'язку з такою властивістю хвильових рухів, маємо поперечну хвилю. При поширенні цієї хвилі об'єм виділеного елемента тіла залишається незмінним, тобто можна записати $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Для поперечних хвиль схематичний рисунок руху точок середовища зображений на наступному рис. 2.2.

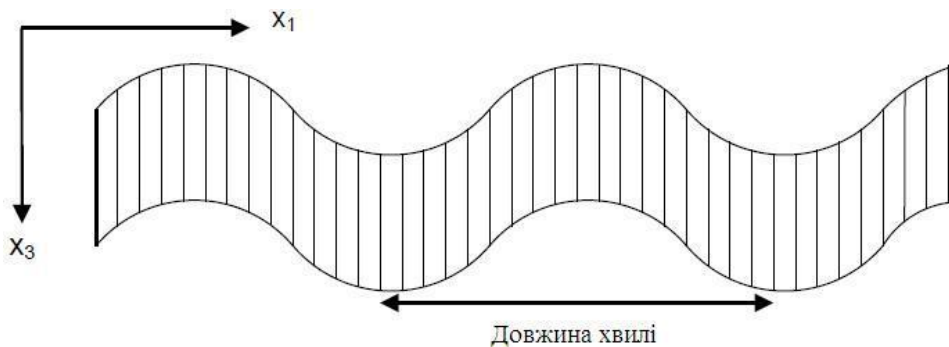


Рис. 2.2 Схематичне зображення поперечної хвилі

Зазначимо, що у часткових розв'язках (2.25) та (2.27) конкретний вид функцій не вводився.

Поглиблене вивчення задач динаміки в пружних тілах пов'язано з вивченням питання про конкретний вибір функцій f і g , що дає можливість задовольняти певні умови. Ці умови виражають взаємодію пружного тіла з іншими розглядуваними тілами, а також початковий стан пружного деформівного тіла. Довільний хвильовий рух пружного тіла утворюється у вигляді суперпозиції плоских хвиль, які мають конкретні сталі поширення та амплітудні фактори.

2.4.1 Гармонічні хвилі в необмеженому середовищі

В багатьох областях акустики і механіки пружних хвиль широко використовується спектральний метод дослідження хвильових рухів. В такому випадку зводять аналіз поведінки хвиль в загальному випадку до аналізу найпростіших гармонічних хвиль.

Вводячи припущення про гармонічність деякого процесу у часі необхідно ввести деяку просторову і часову повторюваність у хвильовому процесі. Тому, загальний вираз для скалярного потенціала гармонічної плоскої хвилі матиме вигляд

$$\varphi = \Phi_0(\mathbf{p}) \exp \left[i \frac{\omega}{c_t} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - c_t t) \right]. \quad (2.30)$$

Тут ω позначає кругову частоту хвильового процесу; $\Phi_0(\mathbf{p})$ – амплітуду плоскої хвилі.

Аналогічним чином для векторного хвильового рівняння розв'язок для плоскої гармонічної хвилі запишеться у наступному вигляді

$$\boldsymbol{\psi} = A_0(\mathbf{p}) \exp \left[i \frac{\omega}{c_t} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - c_t t) \right]. \quad (2.31)$$

Тут амплітудний вектор $\vec{A}_0(\vec{p})$ є деякою функцією від сталої поширення хвилі.

Метод суперпозиції, про який згадувалось вище, придатний і у випадку гармонічних хвиль. Тому відокремимо часовий множник $\exp(-i\omega t)$ у виразах (2.30), (2,31). У цьому випадку та при відсутності масових сил ($\vec{b} = 0$), хвильові рівняння (2.15) можна приймуть наступний вигляд

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + k_l^2 \varphi &= 0, \\ \nabla^2 \psi + k_t^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ці рівняння називаються рівняннями Гельмгольца для амплітудних факторів відповідних характеристик поля.

Введені у рівняннях (2.32) величини

$$k_l = \frac{\omega}{c_l}, \quad k_t = \frac{\omega}{c_t}, \quad (2.33)$$

є важливими характеристиками гармонічних хвиль, і називаються хвильовими числами.

За допомогою хвильових параметрів – швидкостей поздовжної і поперечної хвиль – c_l , c_t та кругової частоти – ω , можна визначити важливі в теорії хвиль величини, а саме довжини λ_l , λ_t і періоди $T = 2\pi / \omega$ поздовжних і поперечних хвиль:

$$\lambda_l = \frac{2\pi}{k_l}, \quad \lambda_t = \frac{2\pi}{k_t}. \quad (2.33)$$

2.4.2 Поляризація пружних гармонічних хвиль у необмеженому середовищі

Розглянемо таку важливу кінематичну характеристику гармонічної пружної хвилі як поляризація.

Поляризація хвилі вказує на зв'язок між напрямком поширення хвилі і напрямком переміщення (швидкостей) частинок середовища, в якому відбувається хвильовий процес.

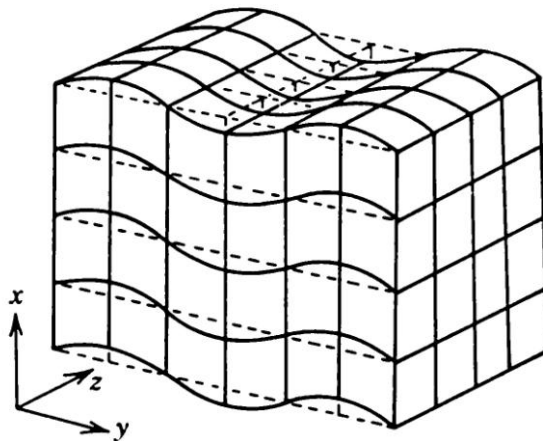


Рис. 2.3 Діаграма направленості руху частинок середовища для плоскої поперечної SV -поляризованої хвилі

Для поздовжніх хвиль напрямки поширення хвилі і переміщення частинок однакові. Така хвиля називається P -поляризованою.

Більш цікавий випадок маємо з поперечними хвилями. Нехай плоска поперечна хвиля, для визначеності, поширюється у напрямку осі Oy , тобто хвильовий вектор \vec{p} співпадає з напрямом осі Oy . Оскільки розглядається поперечна хвиля, то довільний рух у середовищі можна подати у вигляді суми двох взаємно перпендикулярних векторів переміщень \vec{u}_x і \vec{u}_z , направлених по вибраним осях Ox та Oz . Тут можливі наступні випадки.

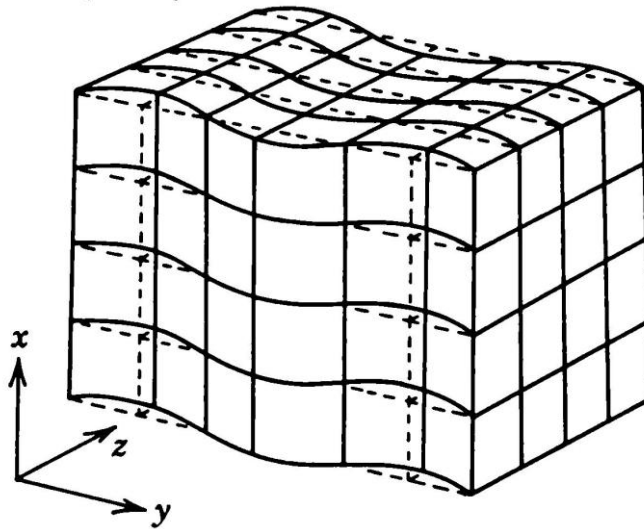


Рис. 2.4 Діаграма направленості руху частинок середовища для плоскої поперечної SH -поляризованої хвилі

Якщо $\vec{u}_z = 0$, то має місце хвиля, у якій вектор переміщення лежить у площині Oxy (див. рис. 2.4) і змінюється за законом

$$\vec{u}_x = U_x \hat{e}_x \exp i(k_T y - \omega t), \quad \vec{u}_y = \vec{u}_z = 0. \quad (2.33)$$

Описана вище хвиля, називається плоскополяризованою. Вираз (2.33) визначає вертикально поляризовану хвилю, або, як її ще називають SV -хвилею.

Аналогічно можна визначити горизонтально поляризовану хвилю (SH -хвилю). Переміщення частинок пружного середовища дається виразом

$$\vec{u}_z = U_z \hat{e}_z \exp i(k_T y - \omega t), \quad \vec{u}_x = \vec{u}_y = 0. \quad (2.36)$$

Діаграма направленості вектора переміщення для такої хвилі подана на рис. 2.4.

Довільні лінійні комбінації виразів (2.35) і (2.36) описують плоску хвилю з поляризацією по еліпсу, яка розповсюджується в напрямку осі Oy .

2.5 Хвилеводне поширення пружних хвиль

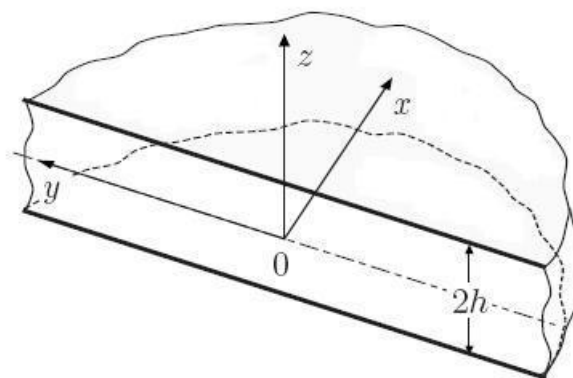


Рис. 2.6 Пружний ізотропний шар

Розглянемо важливі випадки, а саме, закономірності розповсюдження пружних хвиль в обмежених середовищах, для яких має значення не тільки взаємодія цих хвиль з границями, але і взаємодія самих границь. Прикладами таких середовищ можуть бути пружний шар та циліндр. Не відходячи від дисертаційних досліджень даної роботи, розглянемо закономірності хвилеводного поширення пружних хвиль у лінійно - пружному ізотропному шарі (див. рис. 2.6).

2.6 Поширення SH-хвиль у пружному шарі

Розглянемо поширення SH-хвиль у лінійно - пружному ізотропному шарі. З аналізу процесу відбиття пружних хвиль від плоскої вільної границі півпростору [37, 32] випливає важливе твердження, що відбиття SH-хвиль від границі кардинально відрізняється від процесу відбиття P-хвиль та SV-хвиль від плоскої границі, оскільки при відбитті SH-хвиль збурюються тільки SH-хвилі, та не збурюються інші типи хвиль.

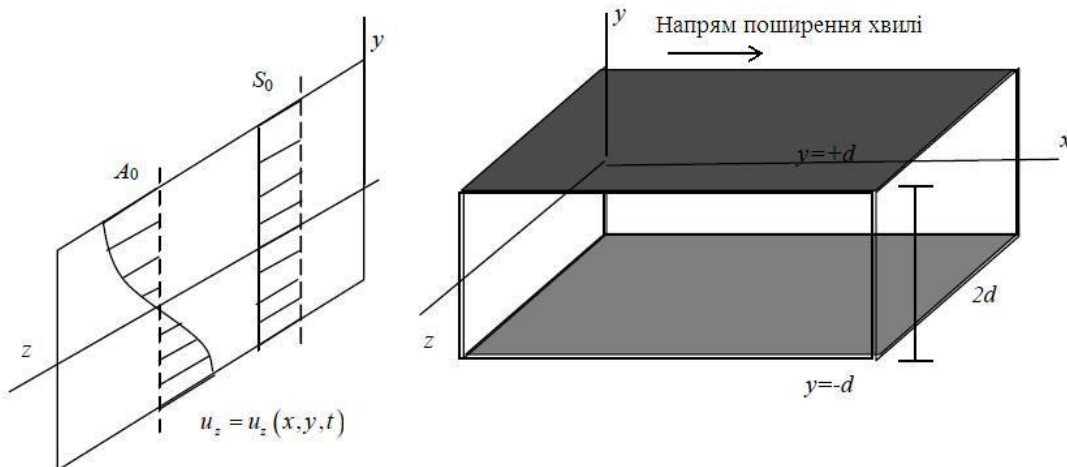


Рис. 2.7 SH-хвиля у пружному шарі товщини $2d$

Введемо до розгляду лінійно пружний ізотропний шар товщиною $2d$ як показано на рис. 2.7. Введемо систему координат таким чином, щоб площина Oxz лежала посередині пружного шару. Розглянемо поширення SH-хвилі вздовж осі Ox . Серед компонент вектора переміщення \vec{u} тільки одна компонента u_z не рівна нулю. Переміщення u_z задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2 u_z(x, y, t) = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (2.37)$$

Визначимо граничні умови для розглядуваного тіла, а саме рівність нулю напружень на стінках такого шару $\sigma_{yz} = 0$ при $y = \pm d$. Оскільки розглядаються гармонічні процеси, то можна записати:

$$u_z(x, y, t) = h(y) \exp i\xi x - \omega t, \quad (2.38)$$

де $h(y)$ – амплітудний фактор для такої хвилі. Підставляючи вираз (2.38) у рівняння (2.37) і опускаючи множник $\exp i\xi x - \omega t$, приходимо до диференціального рівняння відносно амплітудної функції $h(y)$

$$\frac{d^2 h(y)}{dy^2} + h(y)(i\xi)^2 = \frac{1}{c_t^2} (i\omega)^2 h(y). \quad (2.39)$$

Позначивши $\beta^2 = (\omega / c_t)^2 - \xi^2$, отримаємо

$$\frac{d^2 h(y)}{dy^2} + \beta^2 h(y) = 0. \quad (2.40)$$

Рівняння (2.40) є однорідне диференціальне рівняння, яке має розв'язок

$$h(y) = A_1 \sin \beta y + A_2 \cos \beta y, \quad (2.41)$$

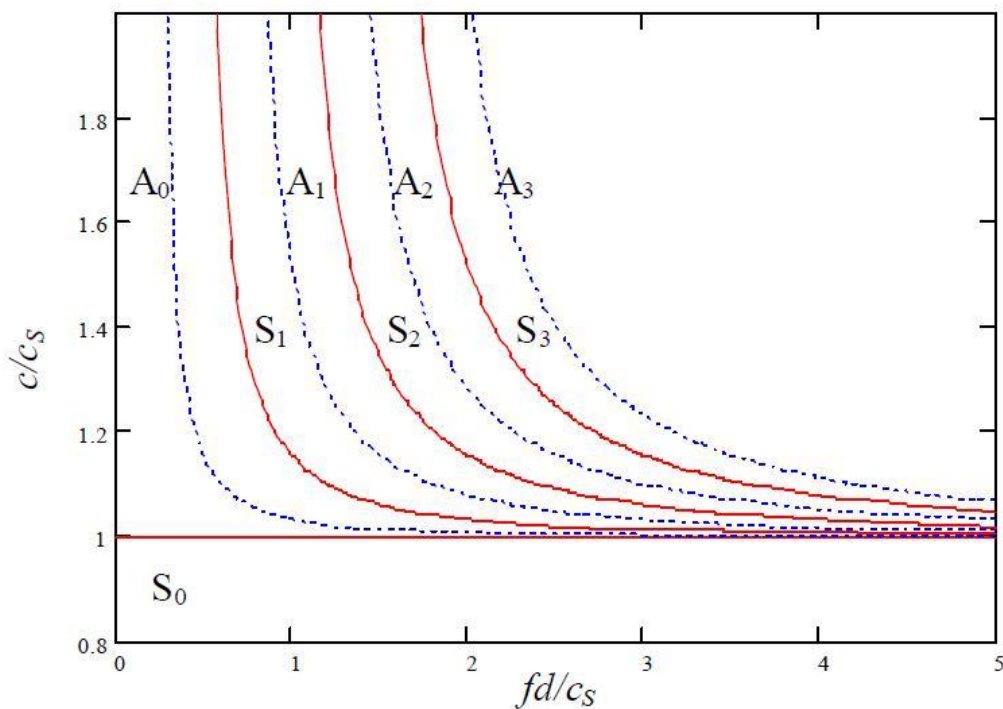


Рис. 2.8 Дисперсійні криві фазових швидкостей нормальних SH-хвиль. Суцільні лінії відповідають симетричним модам, а штриховані лінії – антисиметричним модам.

Отже, для переміщень u_z маємо вираз

$$u_z = A_1 \sin \beta y + A_2 \cos \beta y \exp i\xi x - \omega t, \quad (2.42)$$

Довільні сталі A_1 та A_2 можна визначити з граничної умови, а саме $\sigma_{yz} = 0$ при $y = \pm d$. Таким чином, задовольняючи цю граничну умову прийдемо до наступних рівнянь

$$\begin{cases} A_1 \cos \beta d - A_2 \sin \beta d = 0, & y = d, \\ A_1 \cos(-\beta d) - A_2 \sin(-\beta d) = 0, & y = -d. \end{cases} \quad (2.43)$$

Система рівнянь (2.43) має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю. З рівності нулю цього визначника, отримуємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} \sin \beta d = 0 &\rightarrow \beta d = \pi n, \\ \cos \beta d = 0 &\rightarrow \beta d = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Тому, відповідно до виразів (2.44), можна сформувати симетричні та антисиметричні поля переміщень, віднесені до серединної поверхні хвилеводу. З виразів (2.38), (2.44) і також враховуючи $\beta^2 = (\omega / c_t)^2 - \xi^2$, бачимо, що існує скінченна кількість нормальних SH-хвиль і нескінченна кількість неоднорідних нормальних хвиль (хвиль, які експоненціально затухають) для кожного добутку βd . Враховуючи співвідношення хвильового числа, частоти і довжини хвилі, поданих раніше, можна записати:

$$\beta d^2 = \left(\frac{\omega d}{c_t}\right)^2 - \left(\frac{\omega d}{c}\right)^2 = (2\pi)^2 \left[\left(\frac{d}{\lambda_t}\right)^2 - \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \right]. \quad (2.45)$$

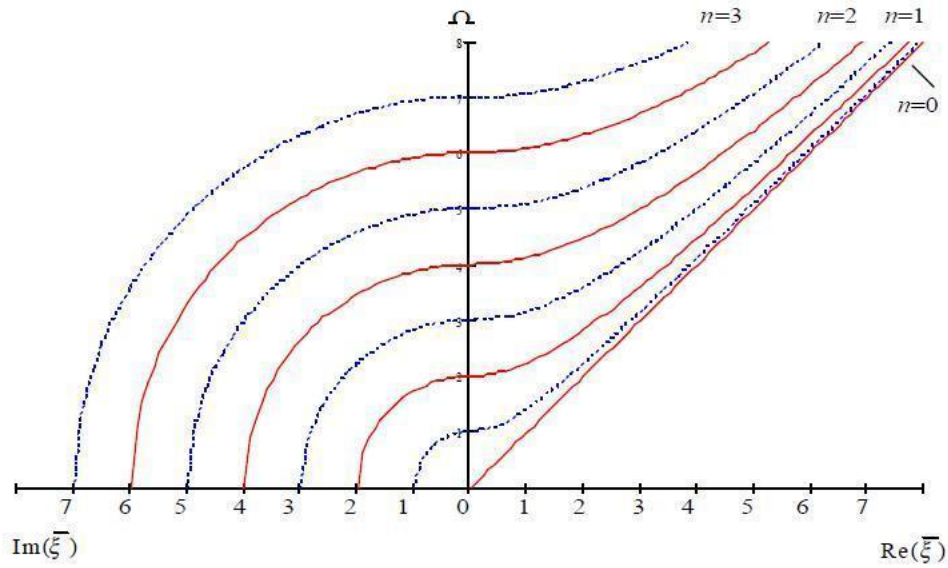


Рис. 2.9 Дисперсійні криві для нормальних SH-хвиль. Суцільні лінії відповідають симетричним модам; штриховані лінії – антисиметричним модам.

З рівнянь (2.44) і (2.45) можна визначити фазові швидкості для симетричних і антисиметричних нормальних SH-хвиль:

$$\frac{c}{c_t} = \left[1 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \left(\frac{fd}{c_t} \right)^{-2} \right]^{1/2}, \quad (2.46)$$

$$\frac{c}{c_t} = \left[1 - \left(\frac{2n+1}{4} \right)^2 \left(\frac{fd}{c_t} \right)^{-2} \right]^{1/2}.$$

Графік залежності фазової швидкості від хвильового розміру зображено на рис. 2.9, де для зручності введено такі безрозмірні змінні c/c_t та fd/c_t .

Зазначимо, що в теорії хвилеводів для наочності прийнято зображувати дисперсійні співвідношення для симетричних і антисиметричних нормальних SH-хвиль у вигляді залежності безрозмірної частоти $\Omega = 2\omega d / (\pi c_t)$ від безрозмірної сталої поширення $\bar{\xi} = 2\xi d / \pi$. Такі дисперсійні криві зображені на рис. 2.9.

РОЗДІЛ 3

ПРОХОДЖЕННЯ ХВИЛІ КРІЗЬ ЗГИН ХВИЛЕВОДУ

У даному розділі розглянуто процес поширення нормальної SH-хвилі у пружному хвилеводі з вільними від напружень стінками. Побудовано чисельно-аналітичний розв'язок задачі за допомогою методу часткових областей.

3.1 Нормальні хвилі хвилеводу сталої ширини

В цьому підрозділі отримаємо вигляд мод області вигину та проведемо порівняльний аналіз з модами плоско паралельного хвилеводу. Розглядається хвилевід сталої ширини.

3.1.1 Метод часткових областей для задачі поширення нормальної SH-хвилі у нерегулярному хвилеводі

Для побудови розв'язку задачі поширення пружних хвиль в нерегулярному хвилеводі застосування методу розділення змінних не є можливим. Але, враховуючи геометрію хвилеводу можна розбити область хвилеводу на підобласті і для кожної з підобластей виконати розділення змінних. В кожній з обраних підобластей поле переміщень представляється у вигляді нескінченної суми нормальних мод. Після цього необхідно задовольнити умови спряження полів переміщень та напружень на границях підобластей.

3.1.2 Постановка задачі

Розглянемо плоский хвилевід, поверхні якого на деякій ділянці являють собою дуги кола, рис. 3.1. До криволінійної ділянки примикають плоскопаралельні хвилеводи. Для опису геометрії хвилеводу та подальшої побудови розв'язку задачі поширення гармонічної хвилі в такому хвилеводі введемо три системи координат: дві декартові Ox_1x_3 , $Ox'_1x'_3$ і полярну $Or\varphi$ з загальним центром у точці O . Радіуси поверхонь криволінійної ділянки хвилеводу позначені r_1 та r_2 . Ширина хвилеводу на всій його довжині

залишається сталою і дорівнює $h = r_2 - r_1$. Кут розкриття криволінійної частини хвилеводу позначений як φ_0 . Всі поверхні хвилеводу будемо вважати вільними від напружень. Хвилевід являє собою лінійно-пружний ізотропний шар. Розглядається гармонічна у часі хвиля, залежність якої від часу $\exp -i\omega t$.

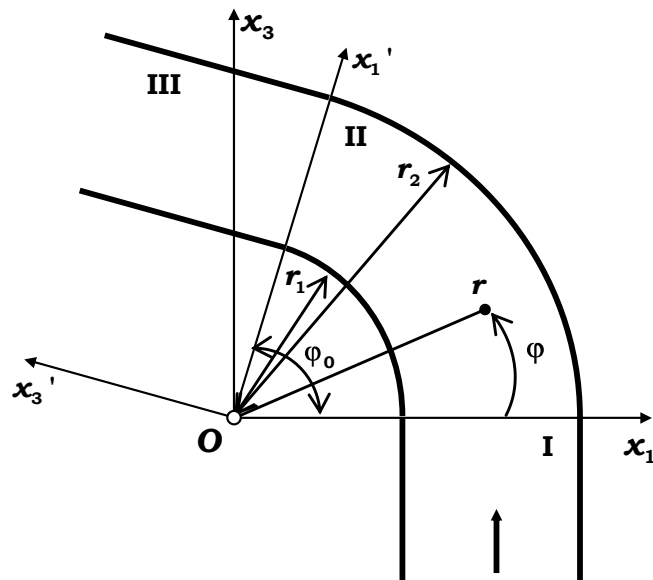


Рис. 3.1 Геометрія хвилеводу

3.1.3. Нормальні хвилі криволінійного хвилеводу

Закономірності поширення збурення у пружному середовищі описують зв'язок між вектором переміщення \hat{u} , тензорами деформації $\hat{\varepsilon}$ і напруження \hat{T} та густиною середовища ρ . Розглядається лінійно-пружне ізотропне середовище. Таке середовище охарактеризується трьома механічними характеристиками – двома пружними сталими та густиною середовища віднесених до незбуреного руху. У трьохвимірному випадку у хвилеводі можуть бути три види хвиль – поздовжня (Р-хвиля) та поперечні – вертикально та горизонтально поляризовані хвилі (SV- та SH-хвилі). Як було зазначено при поширенні нормальної SH-хвилі не збурюються інші типи хвиль, тому більш просто та наглядно буде встановлення закономірностей поширення саме SH-хвиль.

Застосовуючи метод часткових областей розіб'ємо область вихідного хвилеводу на три області:

- область I: $r_1 \leq x_1 \leq r_2, -\infty < x_3 \leq 0$;
- область II: $0 \leq \varphi \leq \varphi_0, r_1 \leq r \leq r_2$;
- область III: $r_1 \leq x_1' \leq r_2, 0 \leq x_3' < +\infty$.

У випадку розбиття таким чином для кожної з відокремлених областей можна застосувати метод розділення змінних.

Нехай в області I в напрямку осі Ox_3 розповсюджується нормальна SH-хвиля, що викликає зміщення вздовж осі Ox_2 і задається у вигляді

$$u_z^i = A \cos \frac{q\pi x_3}{a} e^{-\gamma_{qa} x_1}, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

де A – амплітуда набігаючої нормальної хвилі, а q – номер нормальної хвилі. Стала поширення вибирається таким чином, щоб для дійсного значення k результуюче значення для γ_n було від'ємним уявним числом для однорідних хвиль (хвиль, що поширюються вздовж хвилеводу) або додатним дійсним числом для неоднорідних хвиль (хвиль експоненціально затухаючих в напрямку їх поширення). Отже стала поширення задається у вигляді:

$$\begin{cases} \gamma_{qa} = +\sqrt{(q\pi/a)^2 - k_t^2}, & (q\pi/a)^2 > k_t^2, \\ \gamma_{qa} = +\sqrt{k_t^2 - (q\pi/a)^2}, & (q\pi/a)^2 < k_t^2, \end{cases}$$

тут $k_t = \omega / c_t$ – хвильове число поперечних хвиль.

Розглянемо лінійно пружний ізотропний шар товщиною h , як показано на рис. 3.1. Середовище хвилеводу характеризується густиною ρ та швидкістю поперечних хвиль c_t . Серед компонент вектора переміщення \hat{u} для SH-хвилі

лише компонента u_2 не рівна нулю. Переміщення u_2 задовольняє рівняння

Гельмгольца

$$\nabla^2 u_2(x_1, x_3) + k_t^2 u_2(x_1, x_3) = 0. \quad (3.1.1)$$

Оскільки розглядаються гармонічні в часі процеси, можна записати

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_2(x_1, x_3) e^{-i\omega t}.$$

Граничні умови на вільних межах хвилеводу – це рівність нулю

відповідних напружень при $x_3 = \pm h$ та мають наступний вигляд

$$\sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\sigma_{31} = \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = 0,$$

$$\sigma_{32} = \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0.$$

де μ - коефіцієнт Пуассона.

В SH-хвилі рух частинок середовища відбувається вздовж осі Ox_2 , тому проекції вектора зміщення \vec{u} в SH-хвилі на осі Ox_1 і Ox_3 , отже вираз для напружень прийме вигляд:

$$\sigma_{31} = 2\mu u_{31};$$

$$\sigma_{33} = 0; \quad \sigma_{31} = 0;$$

$$\sigma_{32} = \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0.$$

Отже граничні умови для розглядуваного тіла прийняли вигляд рівності нулю напружень на стінках хвилеводу $\sigma_{32} = 0$.

Хвильове рівняння в полярних координатах має наступний вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.1.4)$$

Нехай переміщення поля змінюється у часі за гармонічним законом, тобто

$$u(r, \varphi, t) = u(r, \varphi)e^{-i\omega t}; \quad (3.1.5)$$

Запишемо шукану функцію $u(r, \varphi)$ у вигляді добутку двох функцій від кожної функції окремо

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad (3.1.6)$$

Підставляючи $u(r, \varphi, t)$ у хвильове рівняння в полярних координатах, отримаємо рівняння Гельмгольца в полярних координатах

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + k^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (3.1.7)$$

$$\text{де } k_t = \frac{\omega}{c_t},$$

$$\text{або } \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad (3.1.8)$$

Остання рівність справедлива тільки за умови, що обидві частини дорівнюють окремо деякій сталій величині, яку позначимо v^2 ,

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + k^2 r^2 = v^2, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -v^2; \quad (3.1.9)$$

Перепишемо ці рівняння відносно у наступному вигляді

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (k^2 - \frac{v^2}{r^2})R = 0, \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + v^2 \Phi = 0,$$

Розв'язок рівняння (3.1.10) визначає біжучі хвилі вздовж r у протилежних напрямках.

$$R(r) = aJ_\nu(kr) + bN_\nu(kr); \quad (3.1.11)$$

$$\Phi(\varphi) = a_1 e^{i\nu\varphi} + b_1 e^{-i\nu\varphi};$$

$$u(r, \varphi) = [aJ_\nu(kr) + bN_\nu(kr)][a_1 e^{i\nu\varphi} + b_1 e^{-i\nu\varphi}]. \quad (3.1.12)$$

Співвідношення між введеними в розгляд системами координат Ox_1x_3 ,

$Ox'_1x'_3$ мають наступний вигляд:

$$x'_1 = x_1 \cos(\varphi_0) + x_3 \sin(\varphi_0);$$

$$x'_3 = -x_1 \sin(\varphi_0) + x_3 \cos(\varphi_0);$$

$$x'_1 = r \cos(\varphi - \varphi_0);$$

$$x'_3 = r \sin(\varphi - \varphi_0);$$

$$x_1 = x'_1 \cos(\varphi_0) - x'_3 \sin(\varphi_0);$$

$$x_3 = x'_1 \sin(\varphi_0) + x'_3 \cos(\varphi_0);$$

$$x_1 = r \cos(\varphi);$$

$$x_3 = r \sin(\varphi);$$

Нехай в області I в напрямку осі Ox_3 розповсюджується нормальна SH-хвиля, що викликає зміщення вздовж осі Ox_2 і задається у вигляді

$$u_2^0 = A \cos \alpha_n x_1 \exp -\gamma_n x_3, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

де A - амплітуда набігаючої хвилі нормальної хвилі; n - номер нормальної хвилі. Виходячи зі сказаного стала поширення дається виразом:

$$\begin{cases} \gamma_n = +\sqrt{\alpha_n^2 - k_t^2}, & \alpha_n^2 > k_t^2, \\ \gamma_n = -i\sqrt{k_t^2 - \alpha_n^2}, & \alpha_n^2 < k_t^2, \end{cases}$$

де $k_t = \omega / c_t$ хвильове число для поперечних хвиль.

Переміщення в областях I, II, III поля хвиль позначимо u_2^I , u_2^{II} та u_2^{III} відповідно.

Переміщення u_2^I , u_2^{III} (в плоско паралельних частинах хвилеводу I та III) задовольняють рівняння Гельмгольца

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + k_t^2 \right] u_2^s = 0, \quad (s = I, III)$$

та граничну умову на вільних межах хвилеводу і розрізу, а саме $\sigma_{32} = \mu \partial u_2 / \partial x_3 = 0$ (тут u_2 відповідає зміщенню в кожній з під областей, μ коефіцієнт Пуассона):

$$\frac{\partial u_2^I}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = r_1, \quad x_3 < 0;$$

$$\frac{\partial u_2^I}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = r_2, \quad x_3 < 0;$$

$$\frac{\partial u_2^{III}}{\partial x'_1} = 0, \quad x'_1 = r_1, \quad x'_3 > 0;$$

$$\frac{\partial u_2^{III}}{\partial x'_1} = 0, \quad x'_1 = r_2, \quad x'_3 > 0;$$

Природнім чином вся область існування розбивається на три області: області I та III – плоскопаралельні хвилеводи, область II – ділянка хвилеводу з криволінійними поверхнями. Тоді поля в областях I та III запишемо у вигляді суперпозиції відповідних мод плоскопаралельного хвилеводу. Для хвилеводу з вільними поверхнями поля переміщень мають вигляд

$$u_I = \cos \alpha_m x_1 - r_1 \exp i\gamma_m x_3 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \alpha_n x_1 - r_1 \exp -i\gamma_n x_3, \quad (3.1.13)$$

$$u_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \alpha_n x'_1 - r_1 \exp i\gamma_n x'_3, \quad (3.1.14)$$

$$\text{де } \alpha_n = n\pi / h, \quad \gamma_n = \sqrt{k_t^2 - \alpha_n^2}, \quad k_t = \omega / c_t.$$

Перед тим як записати поле в області II визначимо вираз для нормальних хвиль криволінійної частини хвилеводу. Частковий розв'язок рівняння Гельмгольца в полярних координатах для області II має вигляд [107]

$$u = \left[J_\nu kr + EY_\nu kr \right] \exp i\nu\varphi. \quad (3.1.15)$$

Використовуючи граничні умови на вільних поверхнях області II

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = r_1, r = r_2;$$

визначаємо сталу $E = -J'_v kr_2 / Y'_v kr_2$ та приходимо до дисперсійного рівняння, яке встановлює зв'язок між частотою $\omega = k_t c$ та сталою поширення v :

$$J'_v kr_2 Y'_v kr_1 - J'_v kr_1 Y'_v kr_2 = 0. \quad (3.1.16)$$

Вздовж вісі ординат відкладемо безрозмірну частоту $\Omega = kr_2 = \omega r_2 / c$, вздовж вісі абсцис – сталу поширення v , рис. 3.2 а. Радіус $r_1 = r_2 q$, де стала $q < 1$ (в даному випадку $q = 0,6$). Точкові криві відповідають плоскому хвилеводу з тим же, що і у криволінійного хвилеводу поперечним розміром. Цифри поблизу кривих визначають номер нормальної хвилі. Як бачимо, якщо критичні частоти мод криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів з графічною точністю співпадають, то подальший хід кривих відрізняється. Природно цей факт знаходить своє відображення при побудові частотних залежностей фазових та групових швидкостей нормальних хвиль (рис. 3.2 б).

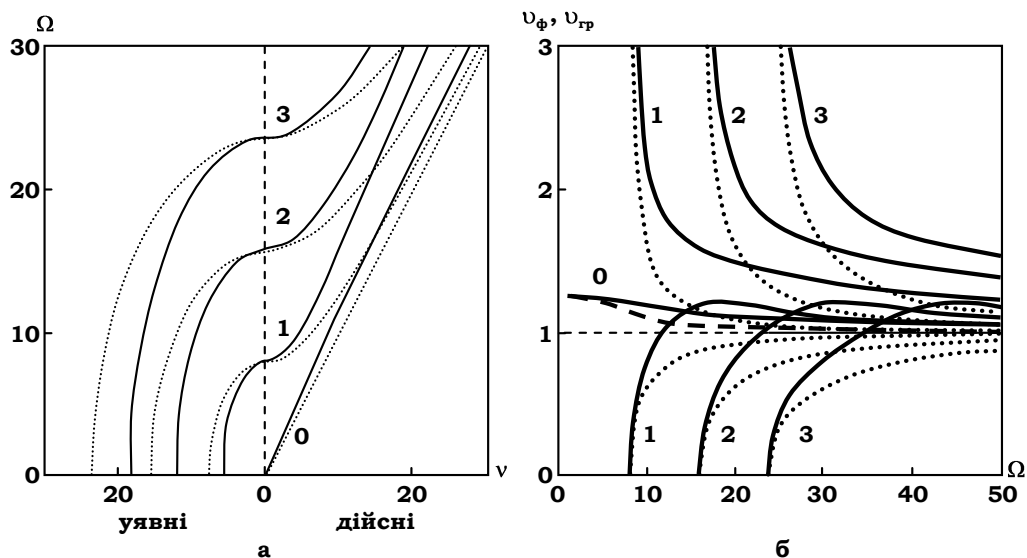


Рис. 3.2 Дисперсійні криві (а) та частотні залежності фазових (верхня група кривих) і групових (нижня група кривих) швидкостей (б) для криволінійного хвилеводу з вільними поверхнями, $q = 0,6$

Таким чином, n -ту моду хвилеводу можна представити у вигляді

$$u_n = R_{v_n} kr \exp iv_n \varphi, \quad (3.1.18)$$

де власні форми мод для хвилеводу з вільними межами записуються як

$$R_{v_n} kr = J_{v_n} kr - \frac{J'_{v_n} kr_2}{Y'_{v_n} kr_2} Y_{v_n} kr, \quad (3.1.19)$$

Отже, поле в області II запишемо у вигляді

$$u_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{v_n} kr \left[B_n \exp iv_n \varphi + C_n \exp iv_n (\varphi - \varphi_0) \right].$$

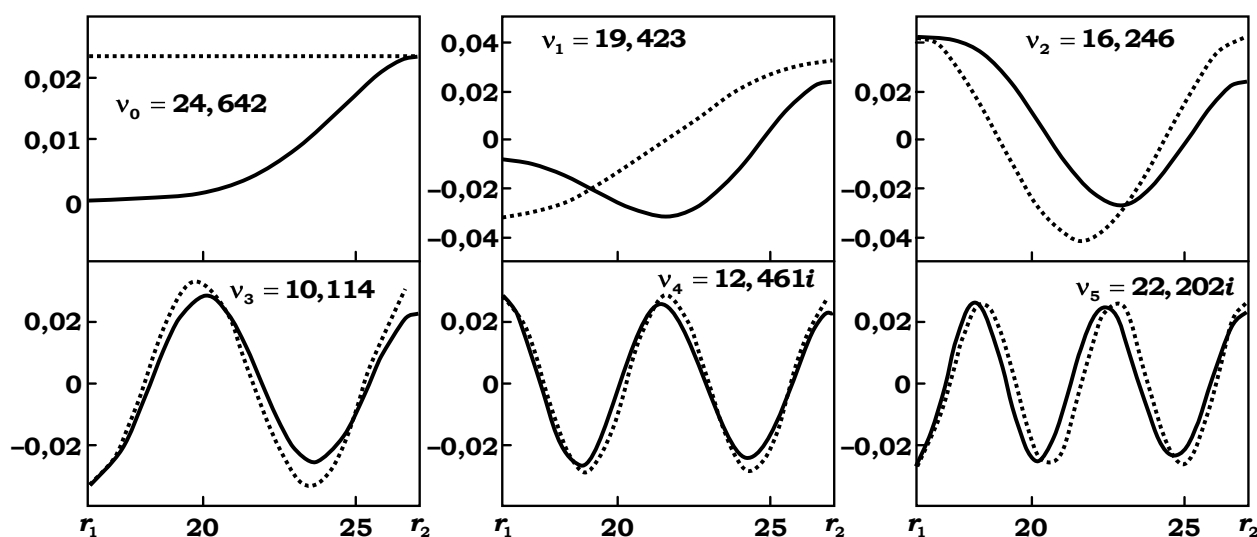


Рис. 3.3 Розподіл переміщень в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу для однорідних і перших неоднорідних мод

Як приклад, рис. 3.3 показано профілі розподілу переміщення в радіальному перерізі криволінійного хвилеводу для однорідних і перших неоднорідних мод при $\Omega = kr_2 = 27$ і $q = 0,6$. Точкові криві визначають власні форми плоского

хвилеводу з тією ж хвильовою шириною, що і у криволінійного хвилеводу. Як бачимо, власні форми перших мод зазначених хвилеводів істотно відрізняються.

3.2. Особливості проходження хвилі крізь згин хвилеводу при різних варіантах конструктивного оформлення зони згину.

В цьому розділі будуть розглянуті нерегулярні хвилеводи з різними конструктивними оформленнями зони вигину.

3.2.1 Метод часткових областей для хвилеводів з різними вигинами

На рис. 3.4 показано чотири варіанти плоского хвилеводу зігнутого під прямим кутом: хвилевід на рис. 3.4 *а* будемо називати "хвилевід зі зломом", на рис. 3.4 *б* показано хвилевід, у якого місця зламів заокруглені, при чому радіуси заокруглення в двох місцях зламу однакові. Такий хвилевід назвемо "хвилевід з заокругленням". На рис. 3.4 *в* місця заокруглення зрізані, такий хвилевід визначимо як "хвилевід зі зрізами". Слід відзначити, що характерною рисою вказаних хвилеводів є зміна поперечного розміру хвилеводу в області зламу в порівнянні з шириною самого хвилеводу h . Нарешті, на рис. 3.4, *г* представлено варіант заокруглення зламу хвилеводу, при якому ширина хвилеводу на всій його довжині залишається незмінною. Такий хвилевід назвемо "хвилевід з заокругленням постійної ширини".

Поверхні хвилеводу будемо вважати вільними. Хвилевід являє собою лінійно-пружний ізотропний шар.

Хвилевід зі зломом (рис. 3.4, *а*) детально розглянуто в роботі [27]. Тому, визначив розв'язки поставленої задачі для другого, третього та четвертого хвилеводів (рис. 3.4 *б*, *в*, *г*), порівняємо характеристики цих хвилеводів з характеристиками хвилеводу зі зломом.

Для опису геометрії хвилеводу та побудови розв'язку задачі поширення гармонічної хвилі у хвилеводі, зображеному на рис. 3.4 *б*, введемо чотири системи координат: дві декартові Ox_1x_3 , $Ox'_1x'_3$, полярну $O\rho\varphi$ зі спільним

центром в точці O та полярну систему координат $Or'\phi'$ з центром в точці O' . Радіуси заокруглення внутрішньої (точка O) та зовнішньої (точка O') частин зламу однакові; позначимо їх величину r_1 . Ширина плоскопаралельних хвилеводів, що примикають до зламу, дорівнює h . Таким чином, вихідними величинами, які задають геометрію хвилеводу, є h та r_1 .

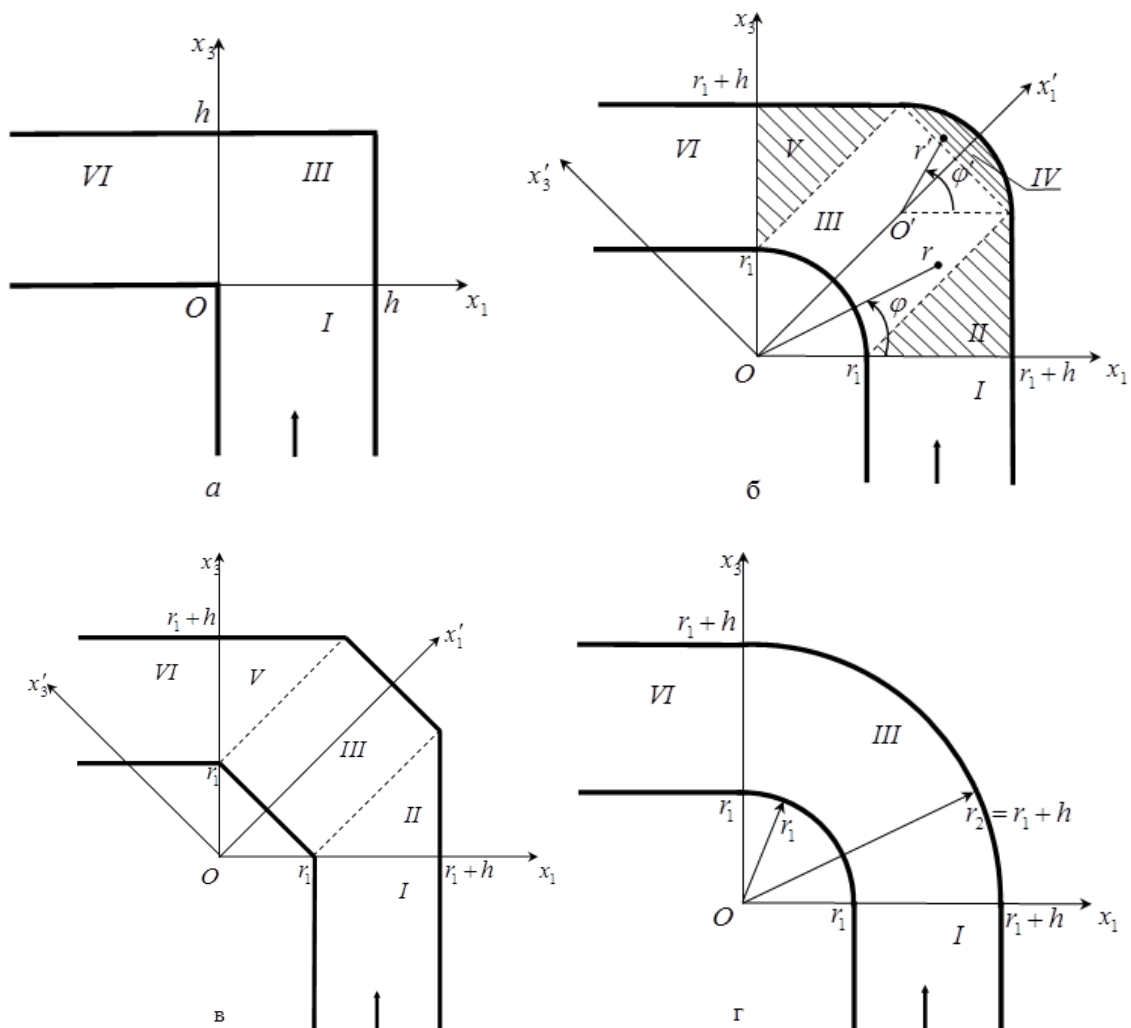


Рис. 3.4. Геометрія хвилеводів

Розв'язок задачі будується на базі метода часткових областей [31]. Вся область існування поля розбивається на шість областей: області I та VI – плоско

паралельні хвилеводи, області II, III, IV, V – формують зону згину. Рівняння границь вказаних областей легко визначаються на рис. 3.4 б.

3.2.2 Поля переміщень у часткових областях

Нехай в області I в додатному напрямку осі Ox_3 поширюється s -та мода плоскопаралельного хвилеводу $u_0^s = \cos \alpha_s x_1 - r_1 \exp i\gamma_s x_3$. Тоді поля в областях I та VI запишемо у вигляді суперпозиції відповідних мод плоскопаралельного хвилеводу. Для хвилеводу з вільними поверхнями поля переміщень мають вигляд

$$u_I = \cos \alpha_s x_1 - r_1 \exp i\gamma_s x_3 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^1 \cos \alpha_n x_1 - r_1 \exp -i\gamma_n x_3, \quad (3.2.1)$$

$$u_{VI} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^6 \cos \alpha_n y - r_1 \exp -i\gamma_n x, \quad (3.2.2)$$

де $\alpha_n = n\pi / h$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $k = \omega / c$, ω – частота. Часовий множник $\exp -i\omega t$ не пишемо.

Поля в областях II та V запишемо у вигляді

$$u_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{21} \cos \alpha_n x_1 - r_1 \exp i\gamma_n x_3 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{22} \cos \alpha_n x_3 \exp -i\gamma_n x_1 - r_1 + h + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{23} \cos \beta_n x'_1 - a \exp -i\eta_n x'_3 + a, \quad (3.2.3)$$

$$u_V = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{51} \cos \alpha_n x_3 - r_1 \exp i\gamma_n x_1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{52} \cos \alpha_n x_1 \exp -i\gamma_n x_3 - r_1 + h + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{53} \cos \beta_n x'_1 - a \exp i\eta_n x'_3 - a, \quad (3.2.4)$$

де $\beta_n = n\pi / H$, $\eta_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}$, а геометричні розміри границь зон визначаються величинами $H = \sqrt{2}h$ та $a = r_1 / \sqrt{2}$. Кожна з нескінченних сум

в виразах (3.2.3) та (3.2.4) представляє собою ряд Фур'є з відповідним набором функцій косинуса, які є повними та ортогональними на конкретній лінійній ділянці границі областей II та V, що дозволяє задовольнити довільним умовам на цих границях.

Границі областей III та IV містять криволінійні ділянки, тому поля переміщень в цих областях мають вигляд

$$\begin{aligned}
 u_{III} = & \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{31} \cos \beta_n x'_1 - a \exp i\eta_n x'_3 + a + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{32} \cos \beta_n x'_1 - a \exp -i\eta_n x'_3 - a + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{33} \cos \chi_n x'_3 + a \exp -i\mu_n x'_1 - a + H + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{34} \cos 2n\varphi \frac{H_{2n}^1 kr}{H_{2n}^{1'} kr_1},
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}
 u_{IV} = & \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{41} \cos \chi_n x'_3 + a \exp i\mu_n x'_1 - a + H + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{42} \cos 2n\varphi' \frac{J_{2n} kr'}{J_{2n}' kr_1},
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

де $\chi_n = n\pi / 2a$, $\mu_n = \sqrt{k^2 - \chi_n^2}$, $J_{2n} kr$ та $H_{2n}^1 kr$ – функції Бесселя та Ханкеля першого роду відповідно, штрих при цих функціях означає похідну по повному аргументу. Ряди в виразах (3.2.5) та (3.2.6), що містять функції Бесселя та Ханкеля, забезпечують виконання граничних умов на криволінійних поверхнях областей III і IV.

Для хвилеводу зі зрізами (рис. 3.4 в) область IV (рис. 3.4 б) відсутня, а криволінійну границю області III слід замінити лінійною ділянкою. При цьому, замість четвертої суми в формулі (3.2.5), пишемо суперпозицію мод відповідного плоскопаралельного хвилеводу.

3.2.3 Побудова розв'язку для хвилеводу сталої ширини

Для заокругленого хвилеводу сталої ширини (рис. 3.4 з) умови спряження полів на межах поділу часткових областей $x_3 = 0$, $x_1 = [r_1, r_2]$ і $x'_3 = 0$, $x'_1 = [r_1, r_2]$ мають вигляд

1. $u_I = u_{II}$, $x_1 = r_1, r_2$, $x_3 = 0$,
2. $\frac{\partial u_{II}}{r \partial \varphi} = \frac{\partial u_I}{r \partial \varphi}$, $r = r_1, r_2$, $\varphi = 0$,
3. $u_{II} = u_{III}$, $x'_1 = r_1, r_2$, $x'_3 = 0$,
4. $\frac{\partial u_{II}}{r \partial \varphi} = \frac{\partial u_{III}}{r \partial \varphi}$, $r = r_1, r_2$, $\varphi = \varphi_0$,

Поля переміщень мають наступний вигляд в кожній з підобластей

$$u_I = \cos(\alpha_q(x_1 - r_1))e^{i\gamma_q x_3} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n(x_1 - r_1))e^{-i\gamma_n x_3}$$

$$u_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n R_{\nu_n}(r)e^{i\nu_n \varphi} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_{\nu_n}(r)e^{-i\nu_n(\varphi - \varphi_0)}$$

$$u_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n(x'_1 - r_1))e^{i\gamma_n x'_3}$$

$$\text{де } \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{h}, \quad h = r_2 - r_1.$$

Для розв'язання задачі поширення хвилі в хвилеводі слід розписати умови спряження полів на межах часткових областей і скористатися властивістю ортогональності набору функцій $\cos \alpha_n x_1 - r_1$ при $x_1 = r_1, r_2$ та $R_{\nu_n} kr$ при $r = r_1, r_2$:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} R_{\nu_m}(kr) R_{\nu_n}(kr) dr, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь. В результаті одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно шуканих коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, D_n .

$$1) A_m \delta_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \overset{1}{T}_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \overset{1}{T}_{mn} e^{iv_n \varphi_0} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cdot 0 = -\delta_{mq},$$

$$\text{де } \overset{1}{T}_{mn} = \int_{r_1}^{r_2} R_{v_n}(r) \cos(\alpha_m(r - r_1)) dr, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} h, m = n = 0, \\ h / 2, m = n \neq 0, \\ 0, m \neq n. \end{cases}$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \overset{2}{T}_{mn} \gamma_n + B_m \overset{1}{\delta}_{mn} v_m - C_m \overset{1}{\delta}_{mn} v_m e^{iv_m \varphi_0} + \sum_{n=0}^{\infty} D \cdot 0 = \overset{2}{T}_{mq} \gamma_q,$$

$$\text{де } \overset{2}{T}_{mn} = \int_{r_1}^{r_2} \cos(\alpha_n(r - r_1)) R_{v_m}(r) dr = \overset{1}{T}_{mn}.$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \overset{1}{T}_{mn} e^{iv_n \varphi_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \overset{1}{T}_{mn} - D_m \delta_{mn} = 0.$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} A_m \cdot 0 + B_m \overset{1}{\delta}_{mn} e^{iv_n \varphi_0} v_n - C_m \overset{1}{\delta}_{mn} v_n - \sum_{n=0}^{\infty} D_n \gamma_n \overset{2}{T}_{mn} = 0$$

Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції. Достовірність отриманого розв'язку гарантується виконанням умов спряження полів на межах часткових областей I, III і III, VI, а також контролем виконання закону збереження енергії [31]. В усіх проведених розрахунках криві, які визначають спряження полів на межах часткових областей з графічною точністю співпадають. Така ситуація є типовою.

У другому варіанті запису поля в області III, згідно методу часткових областей [31], можна записати набори розв'язків рівняння Гельмгольца в різних системах координат, композиція яких дозволить задовольнити умовам на границях області III. Отже, другий варіант представлення поля в області III

матиме вигляд, в якому поле переміщень представляє собою суму чотирьох нескінчених рядів:

$$u_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \alpha_n (x_1 - r_1) \exp i\gamma_n x_3 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \alpha_n (x_3 - r_1) \exp i\gamma_n x_1 + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos 2n\varphi \frac{J_{2n} kr}{J'_{2n} kr_2} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos 2n\varphi \frac{Y_{2n} kr}{Y'_{2n} kr_1}. \quad 3.2.7$$

тут $r_2 = r_1 + h$, $J_{2n} kr$ та $Y_{2n} kr$ – функції Бесселя та Неймана, відповідно. Перші дві суми в формулі (3.2.7) дозволяють задовольнити умовам спряження полів на границях часткових областей I, III та III, VI. Однак попри умов спряження полів слід задовольнити граничні умови на вільних поверхнях криволінійної області II, тобто на поверхнях $r = r_1$, $\varphi = 0, \varphi_0$ та $r = r_2$, $\varphi = 0, \varphi_0$. За це відповідають третя та четверта суми в формулі (3.2.7), оскільки набір функцій $\cos 2n\varphi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ є повним та ортогональним на відріжку $\varphi = 0, \pi/2$.

Для розв'язання задачі поширення хвилі у хвилеводі необхідно розписати умови спряження полів на границях відокремлених часткових областей, які являють собою рівності переміщень та напружень на цих границях. Скориставшись властивістю ортогональності відповідних наборів функцій, приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів в записаних вище виразах для полів в часткових областях:

$$1. A_m h \delta_{mn} - C_m h \delta_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n r_1) t_{11mn} - \sum_{n=0}^{\infty} E_n t_{12mn} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n t_{13mn} = -h \delta_{mn};$$

$$\text{де } t_{11mn} = \int_{r_1}^{r_2} \cos(\alpha_m (x_1 - r_1)) e^{i\gamma_n x_1} dx;$$

$$t_{12mn} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{J_n(\beta_n, r)}{J'_n(\beta_n, r_2)} \cos(\alpha_m(x_1 - r_1)) dr;$$

$$t_{13mn} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Y_n(\beta_n, r)}{Y'_n(\beta_n, r_1)} \cos(\alpha_m(x_1 - r_1)) dr;$$

$$2. iA_m \gamma_m h \delta_{mn} - C_m i \gamma_m h \delta_{mn} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \alpha_n \sin(\alpha_n r_1) t_{21mn} = -i h \delta_{mq} \gamma_q;$$

$$\text{де } t_{21mn} = \int_{r_1}^{r_2} \cos(\alpha_m(x_1 - r_1)) e^{i \gamma_n x_1} dx;$$

$$3. B_m h \delta_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n r_1) t_{31mn} - D_m h \delta_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} E_n t_{32mn} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n t_{33mn} = 0;$$

$$\text{де } t_{31mn} = \int_{r_1}^{r_2} \cos(\alpha_m(x_3 - r_1)) e^{i \gamma_n x_3} dx_3;$$

$$t_{32mn} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{J_n(\beta_n, x_3)}{J'_n(\beta_n, r_2)} \cos(\alpha_m(x_3 - r_1)) dx_3;$$

$$t_{33mn} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Y_n(\beta_n, x_3)}{Y'_n(\beta_n, r_1)} \cos(\alpha_m(x_3 - r_1)) dx_3.$$

$$4. iB_m \gamma_m h \delta_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha_n \sin(\alpha_n r_1) t_{41mn} + iD_m \gamma_m h \delta_{mn} = 0;$$

$$\text{де } t_{41mn} = \int_{r_1}^{r_2} \cos(\alpha_m(x_3 - r_1)) e^{i \gamma_n x_3} dx_3.$$

Нескінченна система рівнянь розв'язувалась методом редукції. Достовірність отриманого розв'язку підтверджується виконанням умов спряження полів на границях часткових областей, а також контролем

виконання закону збереження енергії (дана процедура неодноразово та детально описана в монографії [31]).

3.2.4 Енергетичний аналіз

Найважливіше значення мають енергетичні характеристики процесу поширення хвилі у хвилеводі з вигином. Енергетичний коефіцієнт проходження W^s визначається як відношення середнього потоку потужності хвилі в області VI до середнього потоку потужності хвилі u_0^s в області I (рис. 3.4). Після низки перетворень отримується така формула для коефіцієнтів проходження [31, 27]

$$W^{(s)} = \sum_{n=0}^{N_6} W_n^{(s)}, \quad (3.2.8)$$

$$\text{де } W_n^{(s)} = \left| A_n^6 \right|^2 \cdot \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_s \operatorname{Re}(\gamma_s)}, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 0,5, \text{ при } n > 0. \quad (3.2.9)$$

Згідно виразів (3.2.8) та (3.2.9) коефіцієнт проходження W^s представляється у вигляді суми енергетичних коефіцієнтів збудження W_n^s нормальних хвиль в області VI, або, інакше, про вираз (3.2.8) можна казати як про суму коефіцієнтів трансформації s -ої нормальної хвилі області I в нормальні хвилі області VI. Як слідує з виразу (3.2.9), кількість доданків N_6 в формулі (3.2.9) рівне кількості хвиль, що поширюються, області VI (для них $\operatorname{Re} \gamma_n \neq 0$).

Аналогічно, коефіцієнт відбиття V^s , визначений як відношення середнього потоку потужності у відбитій хвилі до середнього потоку потужності s -ої нормальної хвилі області I, представляється у вигляді

$$V^{(s)} = \sum_{n=0}^{N_1} V_n^{(s)}, \quad W_n^{(s)} = \left| A_n^1 \right|^2 \cdot \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_s \operatorname{Re}(\gamma_s)}. \quad (3.2.10)$$

З закону збереження енергії слідує необхідність виконання умов $V^s + W^s = 1$.

3.2.5 Аналіз чисельних результатів

Нехай на вигин хвилеводу набігає нульова мода ($s = 0$) області I. Розглянемо хвилевід постійної ширини (рис. 3.4 г).

Хвилевід зі зломом та хвилевід з заокругленням

На рис. 3.5 а показані залежності коефіцієнта проходження W^0 для хвилеводу зі зломом та хвилеводу з заокругленням. Відразу слід відзначити, що при малому радіусі заокруглення (в нашому розрахунку $r_1 / h = 0,06$ для кривої 1) розрахункові криві для хвилеводу зі зломом та хвилеводу з заокругленням з графічною точністю співпадають. При збільшенні радіусу заокруглення (криві 2 – 4) середнє значення коефіцієнта проходження збільшується, однак нерегулярність частотної характеристики зберігається при всіх радіусах заокруглення.

При $h \ll \lambda$, незалежно від радіуса заокруглення згину хвилеводу, коефіцієнт проникнення W^0 дорівнює одиниці, що відповідає поширенню хвилі в "... дуже вузькій трубці. В такій трубці хвиля поширюється, не помічаючи зламів так само, якби труба була витягнута в пряму лінію" [45, с. 168].

Звертає на себе увагу наявність різкого провалу, аж до нульового значення, в характеристиках коефіцієнта проходження W^0 поблизу величини $h / \lambda = 0,5$ (рис. 3.5 а). Для хвилеводу зі зломом (крива 1) при величині h кратній половині довжини хвилі $\lambda / 2$ отримуємо нульові значення коефіцієнта проходження W^0 .

Для розуміння характеру кривих, представлених на рис. 3.5 а, звернемося до аналогічних залежностей коефіцієнтів збудження нормальних хвиль W_n^0 області VI. На рис. 3.5 б, в показані частотні залежності коефіцієнтів збудження

перших нормальних хвиль області VI (номер кривої визначає відповідну моду) при падінні на злам в області I нульової моди.

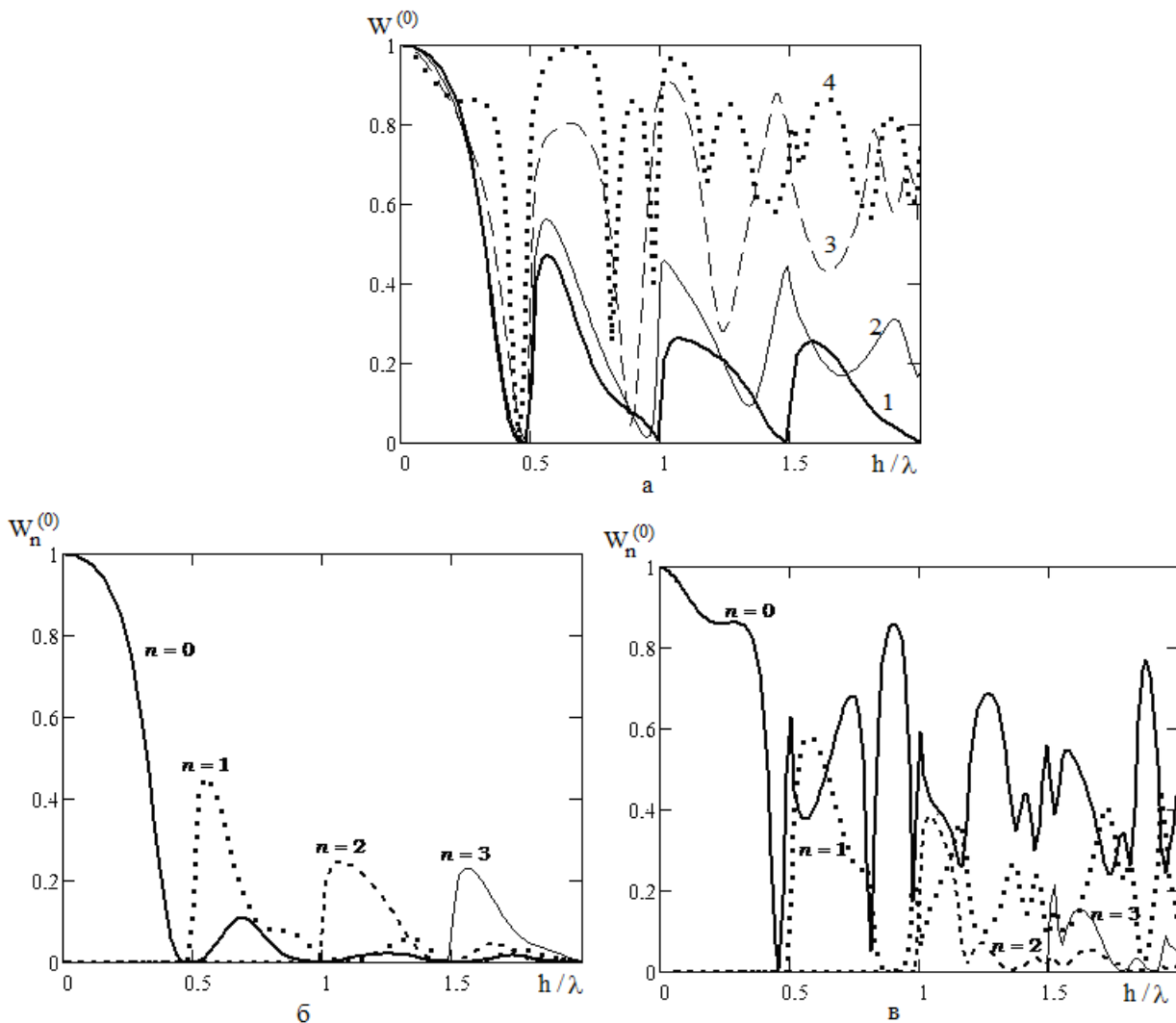


Рис. 3.5 Частотні характеристики коефіцієнтів проходження W^0 (а) та коефіцієнтів збудження нормальних хвиль області VI w_n^0 (б, в)

для хвилеводів зі зломом (б) та заокругленням (в):

а – крива 1 – $r_1/h = 0,06$ та хвилевід зі зломом,

2 – $r_1/h = 0,3$, 3 – $r_1/h = 0,6$, 4 – $r_1/h = 1$,

б – $r_1/h = 0,06$ та хвилевід зі зломом, в – $r_1/h = 1$

Нульова мода хвилеводу з вільними межами є розповсюджуючою при будь-якому хвильовому розмірі хвилеводу. Для області VI нормальна хвиля з номером $n > 0$ є розповсюджуючою при виконанні умови $h > n\lambda / 2$. В цьому випадку

середній потік потужності даної нормальної хвилі не дорівнює нулю. Графіки показують, що, якщо хвильовий розмір $h/\lambda < 0,5$, то в області VI поширюючою є тільки нульова нормальна хвиля (крива 0) та вона визначає проходження нульової моди області I через згин хвилеводу. Ситуація змінюється, якщо $h/\lambda > 0,5$. Так, для хвилеводу зі зломом (рис. 3.5 б) при $h/\lambda > 0,5$ збуджується перша нормальна хвиля (крива 1), яка по величині значно перевищує нульову, а при $h/\lambda > 1$ домінує друга нормальна хвиля (крива 2) та далі більш високі моди. Таким чином, можна казати про трансформацію енергії нульової нормальної хвилі в області I в нормальні хвилі області VI з номерами $n > 0$. В точках частотного діапазону, де величина h кратна половині довжини хвилі $\lambda/2$, коефіцієнти збудження мод, а звідси й коефіцієнти проходження, дорівнюють нулю, тобто присутній ефект "запирання" хвилеводу. Очевидно, що для хвилеводу зі зломом та хвилеводу з малим радіусом заокруглення "запирання" хвилеводу (рис. 3.5 а, крива 1) тісно пов'язане з моментом зародження наступної нормальної хвилі хвилеводу.

При збільшенні радіусу заокруглення згину хвилеводу характер кривих, представлених на рис. 3.5 б, змінюється. Поступово, починаючи з високих частот, усуваються нульові значення коефіцієнтів збудження мод в околі точок, для яких h/λ кратне половині довжини хвилі. Ефект запирання проявляється лише в околі точки $h/\lambda = 0,5$. В якості прикладу на рис. 3.5 в показані відповідні графіки для випадку $r_1/h = 1$. Як видно при величині $h/\lambda > 0,5$ спостерігається сильна нерівномірність в частотних характеристиках енергетичних коефіцієнтів збудження мод області VI.

В якості ілюстрації на рис. 3.6 показано поле амплітуди переміщень при $r_1/h = 1$, $h/\lambda = 0,453$. Дана ситуація відповідає запиранню хвилеводу (рис. 3.5 а), тобто коефіцієнт відбиття дорівнює одиниці та, як наслідок, в області I утворюється стояча хвиля. В поперечному перерізі області VI формується

розподіл переміщення відповідний першій моді, але оскільки при даному хвильовому розмірі h/λ перша мода є неоднорідною, то й потік енергії дорівнює нулю.

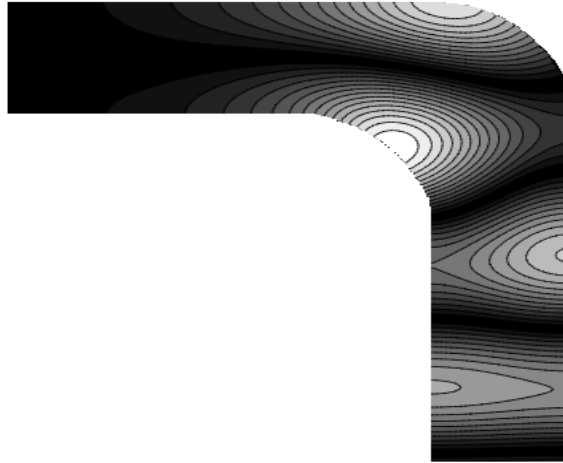


Рис. 3.6 Поле амплітуди переміщень в околі згину заокругленого хвильоводу:

$r_1/h = 1$, $h/\lambda = 0,453$, набігає нульова мода ($s = 0$)

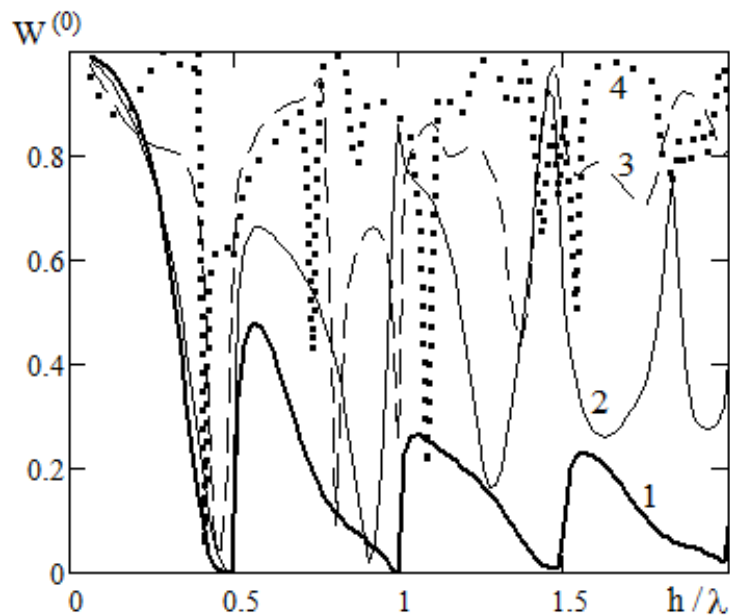


Рис. 3.7 Частотні характеристики коефіцієнта проходження w^0

для хвильоводів зі зрізами (рис. 3.4 в):

а – крива 1 – $r_1/h = 0,06$ та хвильовід зі зломом,

2 – $r_1/h = 0,3$, 3 – $r_1/h = 0,6$, 4 – $r_1/h = 1$

На рис. 3.7 показані частотні характеристики коефіцієнта проходження W^0 для хвильоводу зі зрізами (рис. 3.4 в). Розрахункові параметри відповідають хвильоводу з заокругленням постійної ширини. Порівнюючи рис. 3.5 а та рис. 3.7 можна відзначити спільну закономірність в поведінці представлених кривих. При цьому нерівномірність в частотних характеристиках для хвильоводу зі зрізами проявляється ще більше.

Тепер звернемося до заокругленого хвильоводу постійної ширини h , рис. 3.4 г. Тут r_1 – внутрішній радіус заокруглення, а зовнішній радіус заокруглення $r_2 = r_1 + h$.

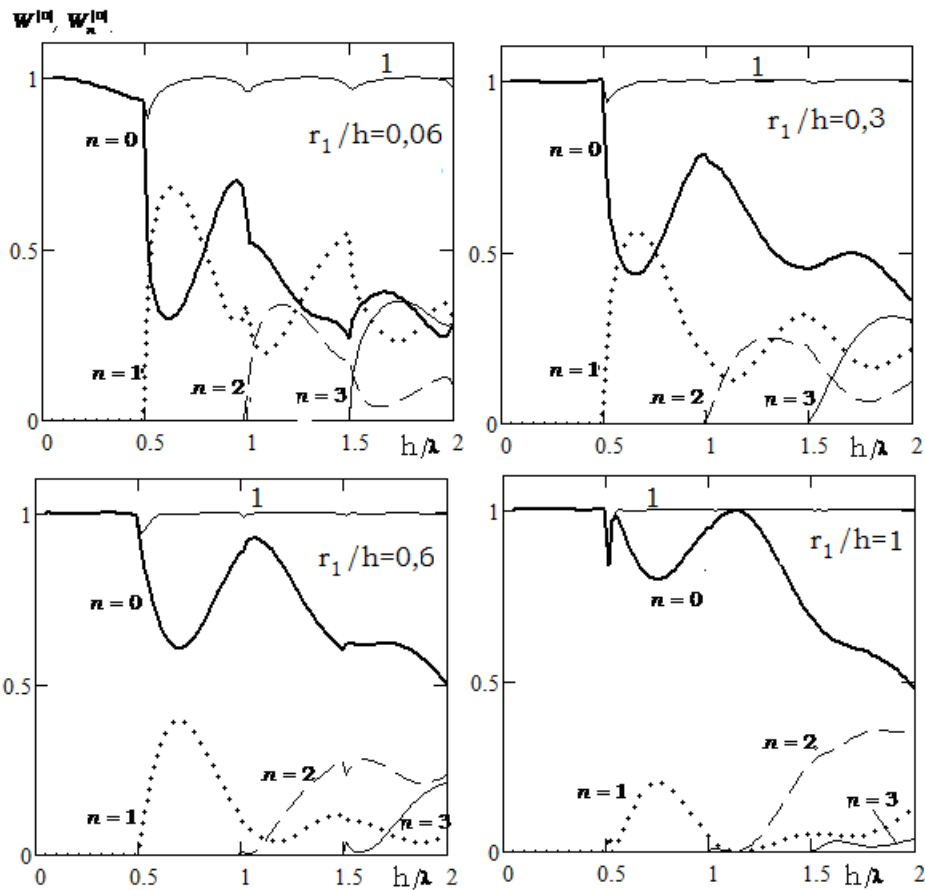


Рис. 3.8 Частотні характеристики коефіцієнта проходження w^0 (крива 1) та коефіцієнтів збудження нормальних хвиль області VI w_n^0

На рис. 3.8 показані частотні характеристики коефіцієнтів проходження W^0 (крива 1) та коефіцієнтів збудження нормальних хвиль області VI W_n^0 . Зразу відзначимо, що на відміну від залежностей представлених на рис. 3.5, хвилевід постійної ширини у всьому частотному діапазоні є практично прозорим. Проте, як видно на рис. 3.8, модова структура поля в області VI суттєво залежить від геометричних параметрів хвилеводу, тобто від відношення радіусу заокруглення до ширини хвилеводу r_1/h та хвильової ширини хвилеводу h/λ . Порівнюючи рис. 3.5 та рис. 3.8 можна вказати як на деякі схожі риси, так і на суттєві відмінності. Так в характеристиках хвилеводів можна виділити частотні діапазони, де домінує одна з мод хвилеводу. При цьому в заокругленому хвилеводі постійної ширини не спостерігається ефект "запирання" хвилеводу. Як бачимо на рис. 3.8 з ростом величини r_1/h домінування нульової моди проявляється більше.

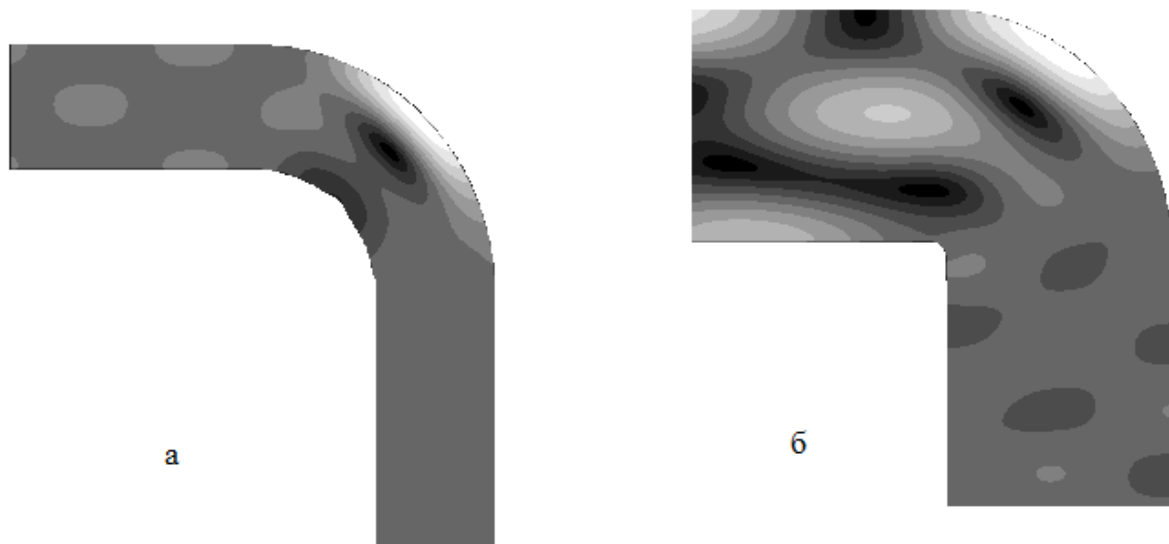


Рис. 3.9 Поля амплітуд переміщення в околі згину хвилеводу постійної ширини;
 $h/\lambda = 1,15$: а – $r_1/h = 1$, б – $r_1/h = 0,06$

Ілюстрацією сказаному є зображення полів амплітуди переміщення в околі згину хвилеводу постійної ширини, рис. 3.9. Тут набігає нульова мода, хвильова ширина $h / \lambda = 1,15$, (при такій ширині присутні три однорідні моди). Рис. 3.9 *a* відповідає радіусу $r_1 / h = 1$, рис. 3.9 *б* – $r_1 / h = 0,06$.

Як видно на рис. 3.9 *б* структура поля за вигином суттєво змінилась. Це є наслідком того, що всі три однорідні моди є енергонесучими (см. рис. 3.8). Навпаки, збільшення радіусу кривизни (рис. 3.9 *a*) призводить до того, що структура поля набігаючої хвилі за вигином практично не змінилась (тут домінує нульова мода). При цьому потік енергії в криволінійній області "притискається" до поверхні радіуса r_2 , обходячи тим самим зону зниженого переміщення.

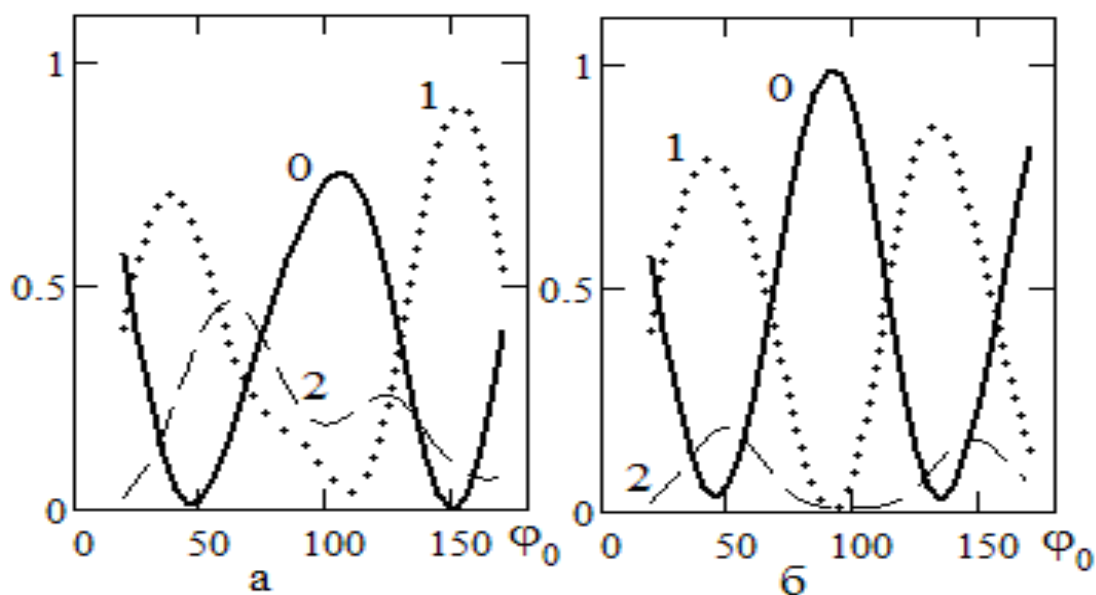


Рис. 3.10 Залежності енергетичних коефіцієнтів збудження мод w_n^0 в області VI від кута φ_0 , $h / \lambda = 1,15$: а – $r_1 / h = 0,3$, б – $r_1 / h = 1$

На рис. 3.10 показані залежності коефіцієнтів збудження мод в області III від кута розкриття області вигину φ_0 . Як бачимо, тут також можна виділити інтервали зміни кута вигину де домінує нульова або перша мода. При цьому

вплив другої моди на поле у хвилеводі стає більш вагомим при зменшенні величини r_1 / h .

Як приклад, на рис. 3.11 а показано поле амплітуди переміщення в околі вигину і на рис. 3.11 б – поле вектора інтенсивностей при таких параметрах хвилеводу: $\varphi_0 = 60^\circ$, $h / \lambda = 0,8$, $r_1 / h = 0,1$. Це ситуація коли домінує перша мода в області III (див. рис. 3.5 а). Як бачимо, при набіганні нульової моди, поле вектора інтенсивностей (рис. 3.11 б) стає значно неоднорідним та притискається до зовнішньої поверхні. Так, на виході області III амплітуда переміщення біля зовнішньої поверхні у два рази більша ніж біля внутрішньої.

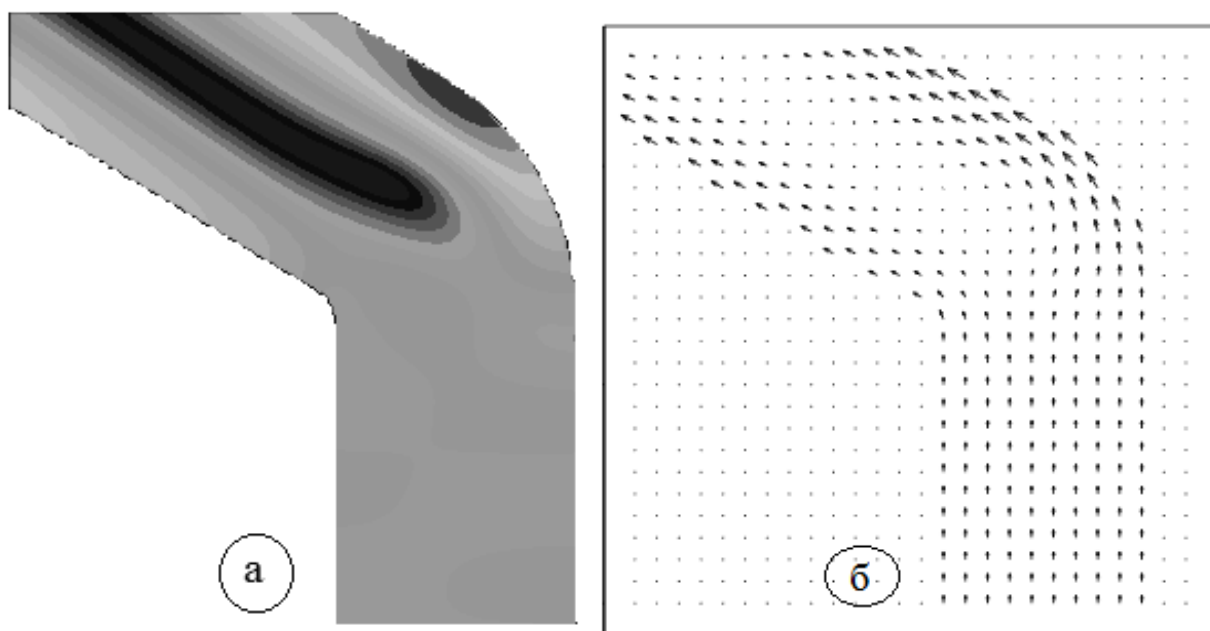


Рис. 3.11 Поля амплітуди переміщень (а) та вектора інтенсивності (б) в околі вигину: $\varphi_0 = 60^\circ$, $h / \lambda = 0,8$, $r_1 / h = 0,1$

3.3 Поширення імпульсного сигналу крізь округлений згин

хвилеводу

Очевидно, що зміна структури поля за вигином в порівнянні з набігаючою плоскою хвилею повинно вплинути на проходження імпульсного сигналу в такому хвилеводі. Звернемось до хвилеводного поширення імпульсного сигналу. В якості часової залежності вихідного сигналу візьмемо нескінчену періодичну послідовність імпульсів у вигляді відрізка синусоїди. Така модель дозволяє найбільш просто використовувати дані поширення гармонічного сигналу для отримання кількісних оцінок поширення імпульсу.

3.3.1 Постановка задачі

При поширенні імпульсного сигналу у хвилеводі його просторово-часова структура піддається впливу з боку хвилеводу через два основні механізми. Один з них обумовлен тим, що хвилевід є фільтром, оскільки на частотах менших критичної частоти дана нормальна хвиля є неоднорідною. Інший механізм визначається дисперсією хвиль, які поширюються в хвилеводі.

Отже, вихідний сигнал має вигляд [31]

$$u(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & , \quad 0 \leq t \leq \tau_i \\ 0 & , \quad \tau_i \leq t \leq T_i \end{cases}, \quad (3.3.1)$$

де $T_i = 2\pi / \Omega_i$, Ω_i і T_i – частота та період слідування імпульсів, $\omega_0 = 2\pi / T_0$, ω_0 і T_0 – частота та період несучої в імпульсі. Введемо параметри, які широко використовуються в імпульсній техніці, а саме скважність $q = T_i / \tau_i$ та кількість $N = \tau_i / T_0$ періодів T_0 несучої частоти $\omega_0 = 2\pi / T_0$.

Представимо вихідний сигнал (3.3.1) у вигляді ряду Фур'є

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j \cos \omega_j t + b_n \sin \omega_j t \right], \quad (3.3.2)$$

де коефіцієнти a_j та b_j визначаються по відомим формулам, величини $d_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$ мають сенс амплітуд окремих гармонічних складових. Частоти гармонік $\omega_j = 2\pi f_j = j\omega_1 = j\Omega_i$, $j = 1, 2, 3, \dots$ кратні частоті слідування імпульсів Ω_i . Згідно вихідного сигналу (3.3.1) постійна складова ($j = 0$) в ряді (3.3.2) відсутня.

Визначимо безрозмірний час як час t , нормований до тривалості імпульсу $\tau_i = NT_0$, тобто $t^0 = t / \tau_i$, а просторові величини будемо нормувати до довжини звукової хвилі $\lambda_0 = cT_0$ на частоті несучої ω_0 , наприклад, $h^0 = h / \lambda_0$.

Покладемо в чисельних розрахунках наступні значення параметрів: $N = 10$, $q = 10$. На рис. 3.12 представлено амплітудний спектр $d_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$, $j = 1, 2, \dots, 200$ та часова залежність сигналу. Частота сотої гармоніки дорівнює частоті несучої сигналу. Слід відзначити, що в полосі частот $\omega_{90}, \omega_{110}$ міститься 90% всієї енергії сигналу, тому даний імпульсний сигнал можна віднести до розряду вузько смугастих сигналів.

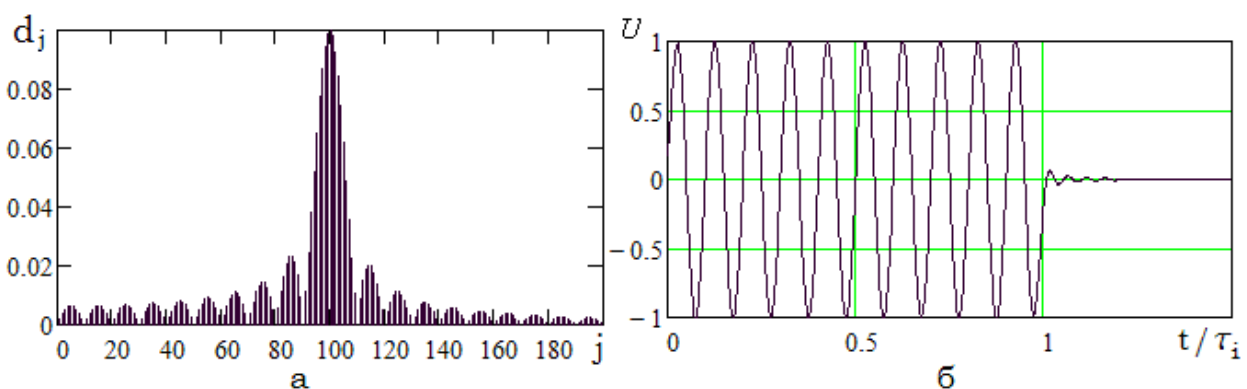


Рис. 3.12 Амплітудний спектр (а) та часова залежність (б) вихідного сигналу, утвореного рядом (12) при утриманні двохсот членів ряду; $N = 10$, $q = 10$.

Слід відзначити, що запропонована модель сигналу не дозволяє розглядати задачу поширення імпульсу у хвилеводі на довільному відрізку часу. Маючи на увазі наявність в ньому дисперсії можна сказати, що таке представлення імпульсу придатне до тих пір, поки запізнювання імпульсу не порівнюється з періодом слідування імпульсів.

3.3.2 Поля переміщень

Нехай в області I поширюється нульова мода хвилеводу з часовою залежністю (3.3.2), тобто

$$u_0 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j + ib_j \exp -i\omega_j t + i\gamma_{j,0} y . \quad (3.3.3)$$

Тоді поле в області VI слід записати у вигляді

$$u_{VI} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j + ib_j \sum_{n=0}^{\infty} D_{j,n} \cos \alpha_n x - r_1 \exp -i\omega_j t + i\gamma_{j,n} y , \quad (3.3.4)$$

де постійна поширення $\gamma_{j,n} = \frac{\omega_j}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_j^2}}$, а $\omega_n = n\pi c / h$ – критична частота

n -ої моди.

3.3.3 Графічні результати

Спочатку розглянемо ситуацію, коли в області VI домінує одна з мод хвилеводу. Наприклад, згідно рис. 3.8, при величинах $h / \lambda_0 = 1,15$ та $r_1 / h = 1$ визначальною є нульова мода. Оскільки дисперсія у нульовій моді відсутня, то імпульс буде зберігати свою форму на будь якій відстані від місця згину хвилеводу. Цей факт проілюстровано на рис. 3.13, на якому зліва показана часова залежність переміщення в серединній точці хвилеводу, а праворуч – часова залежність амплітуди переміщення в перерізі, що відстає від згину на відстань 150 довжин хвиль на частоті несучої.

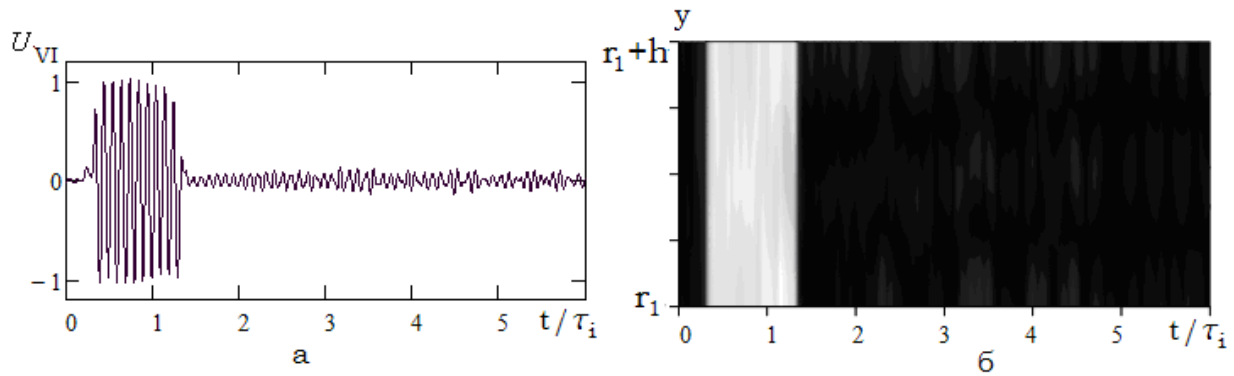


Рис. 3.13 Часові залежності переміщення в області VI округленого хвилеводу сталої ширини в точці з координатами $y - r_1 / h = 0,5$, $x / \lambda_0 = -150$ (а) та амплітуда переміщення в перерізі $x / \lambda_0 = -150$ (б); $h / \lambda_0 = 1,15$, $r_1 / h = 1$

Зменшимо значення відносного радіусу заокруглення, залишив ширину хвилеводу попередньою, а саме $h / \lambda_0 = 1,15$, $r_1 / h = 0,06$. В такому випадку, згідно рис. 3.8, присутні три моди, причому визначаючими будуть нульова та друга. При заданій ширині хвилеводу у виразі (3.3.4) будуть поширюватись моди з такими номерами: нульова мода ($n = 0$) при $j \geq 0$, перша мода ($n = 1$) при $j > 44$, друга мода ($n = 2$) при $j > 88$, тобто всі три моди захоплюють діапазон енергонесучих частот. На рис. 3.14 показано зміну форми імпульсу при його поширенні в області VI. Рис. 3.14 а відображає ситуацію входження імпульсу в область VI. В серединній точці хвилеводу маємо практично незмінений імпульс з амплітудою, що майже в 2 рази перевищує амплітуду набігаючого імпульсу області I. Як видно на рис. 3.14 а (справа) при переміщенні точки спостереження вздовж перерізу хвилеводу амплітуда імпульсу суттєво змінюється, що відповідає результатам обрахунку поля переміщень, що представлені на рис. 3.9. На рис. 3.14 б, в, при віддаленні точки спостереження від місця згину, починається просторове розділення нульової та другої мод, оскільки групова швидкість другої моди менша групової швидкості нульової моди, то вихідний імпульс зазнає сильних змін, фактично

розділяючись на два імпульси з приблизно однаковим рівнем. При цьому перший імпульс, утворений нульовими модами, має протяжність рівну вихідному імпульсу, а другий, утворений другими модами, внаслідок дисперсії, став розтягнутим у часі.

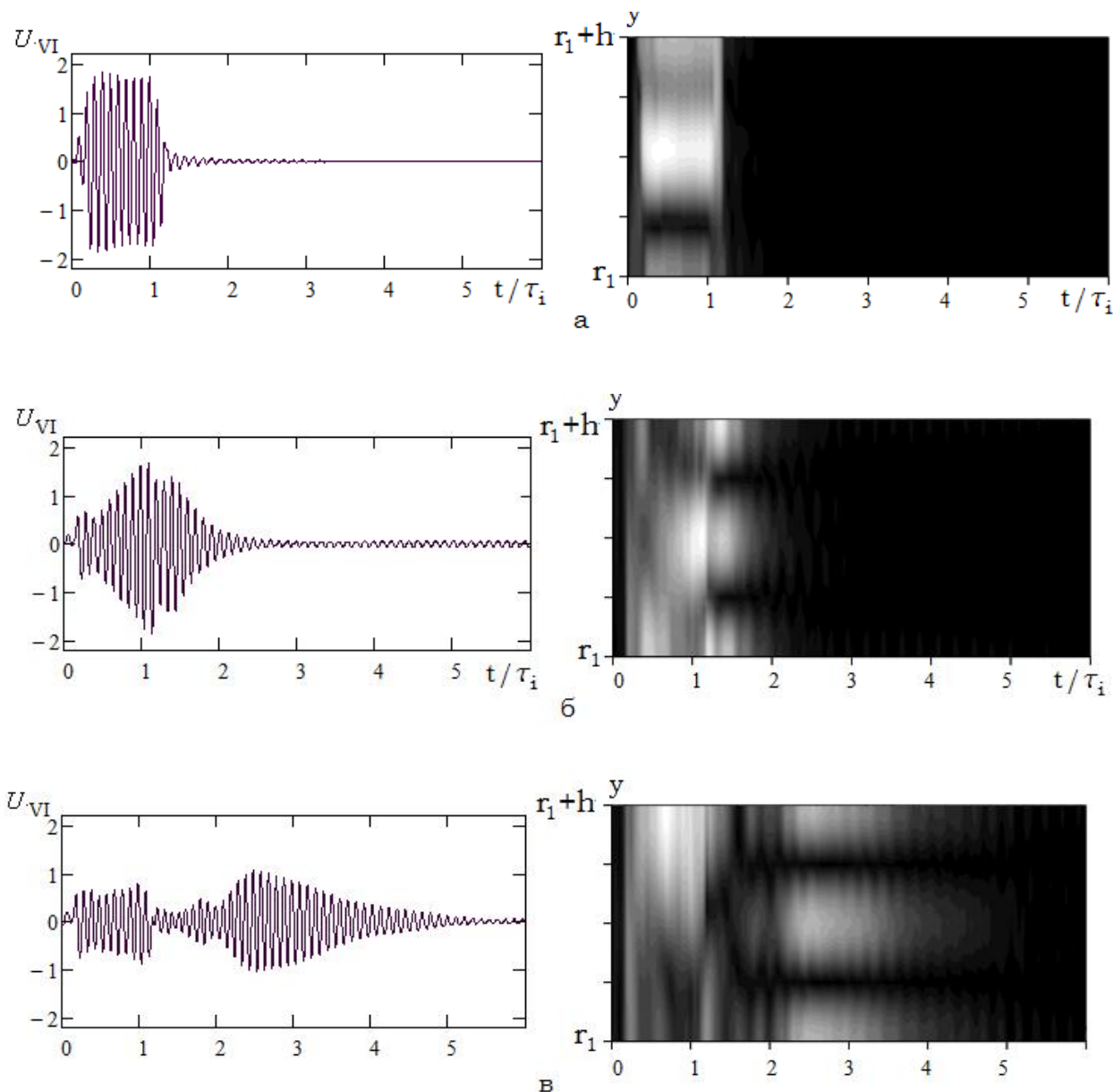


Рис. 3.14 Часові залежності переміщення в області VI заокругленого хвилеводу постійної ширини в точці з координатами $y - r_1 / h = 0,5$, x / λ_0 та амплітуда переміщення в перерізі x / λ_0 ; $h / \lambda_0 = 1,15$, $r_1 / h = 0,06$:
 а – $x / \lambda_0 = 0$, б – $x / \lambda_0 = -6$, в – $x / \lambda_0 = -20$

В якості ще одного прикладу на рис. 3.15 наведені аналогічні залежності при наступних параметрах: $h / \lambda_0 = 0,6$, $r_1 / h = 0,06$. Згідно рис. 3.8 поле за вигином утворюють нульова та перша моди, причому коефіцієнт збудження першої моди вище, ніж нульової. Поширюючими будуть перші моди з номерами $j > 84$. Точка спостереження розташована поблизу зовнішньої поверхні хвилеводу. При поширенні імпульс чітко розділяється на два імпульси, утворені нульовою та першою модами.

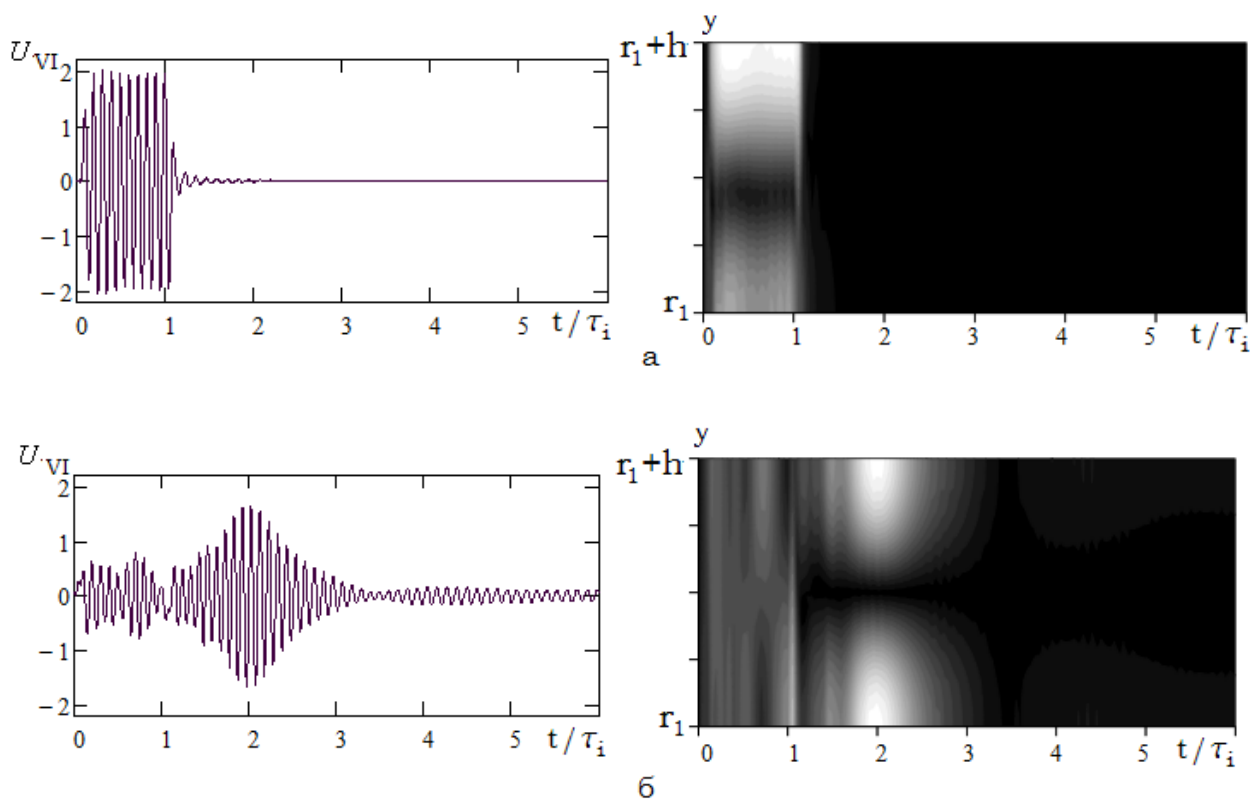


Рис. 3.15 Часові залежності переміщення в області VI заокругленого хвилеводу постійної ширини в точці з координатами $y - r_1 / h = 0,9$, x / λ_0 та амплітуда переміщення в перерізі x / λ_0 ; $h / \lambda_0 = 0,6$, $r_1 / h = 0,06$:

$$a - x / \lambda_0 = 0, \quad б - x / \lambda_0 = -17$$

Висновки до розділу 3

1. Проведено розв'язання задачі про поширення хвилі у хвилеводі зі згином з різними типами оформлення зони згину.

2. Показано, що при малому, в порівнянні з довжиною хвилі, радіусу заокруглення згину частотні залежності енергетичного коефіцієнта проходження хвилею зони вигину з графічною точністю співпадають з результатами відповідних розрахунків для хвилеводу зі зломом.

3. Показано, що зі збільшенням радіусу заокруглення аж до величини рівної ширини хвилеводу коефіцієнт проходження збільшується, однак нерегулярність частотної характеристики зберігається. Така ж тенденція має місце і для хвилеводу зі зрізами.

4. Показано, що заокруглення кутової області зі збереженням ширини хвилеводу на всій його довжині приводить майже до повної проникності криволінійної області в широкому діапазоні частот, при цьому структура поля за вигином суттєво залежить від геометричних параметрів хвилеводу.

5. Побудовано розв'язання задачі про поширення вузькосмугового імпульсного сигналу в заокругленому хвилеводі постійної ширини. Показано, що, підбираючи певним чином геометричні параметри хвилеводу, можна досягти збереження форми імпульсу на шляху його поширення.

РОЗДІЛ 4

ПОШИРЕННЯ ХВИЛІ У ХВИЛЕВОДІ ЗА НАЯВНОСТІ РІЗКОЇ ЗМІНИ ШИРИНИ В ОБЛАСТІ ЗГИНУ ХВИЛЕВОДУ

В даному розділі розглядається задача поширення нормальної SH-хвилі у хвилеводі з різкою змінною шириною зони вигину.

4.1 Постановка задачі

Розглянемо плоску задачу про поширення хвилі у хвилеводі, який складається з двох плоскопаралельних хвилеводів, з'єднаних криволінійною областю. При цьому в зоні вигину має місце різка зміна ширини вигину, рис. 4.1. Для опису задачі введемо три системи координат: дві декартові Ox_1x_3 , $Ox'_1x'_3$ і полярну $Or\varphi$ з загальним центром у точці O . Радіуси поверхонь криволінійної ділянки хвилеводу позначені r_1 та r_3 . Ширина хвилеводу в областях I та III залишається сталою і дорівнює $h = r_2 - r_1$, ширина криволінійної області II $H = r_3 - r_1$. Кут розкриття криволінійної частини хвилеводу позначений як φ_0 . Всі поверхні хвилеводу будемо вважати вільними. Хвилевід являє собою лінійно-пружне ізотропне тіло.

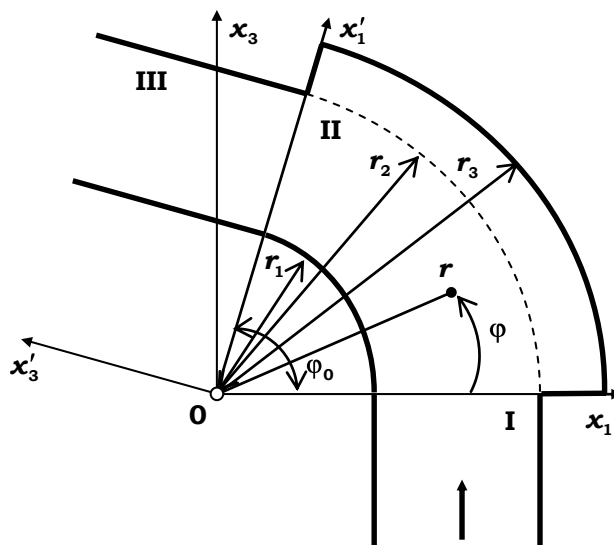


Рис. 4.1. Геометрія хвилеводу

4.2 Метод часткових областей для задачі поширення нормальної SH-хвилі у хвилеводі з різкою зміною ширини вигину

Природнім чином вся область існування поля розбивається на три області: області I та III – плоскопаралельні хвилеводи, область II – ділянка хвилеводу з криволінійними поверхнями. Нехай в області I в додатному напрямку вісі Ox_3 поширюється гармонічна з частотою ω m -та мода хвилеводу $u_I^0 = \cos \alpha_m x_1 - r_1 \exp i\gamma_m x_3$. Тоді поля в областях I і III запишемо у вигляді суперпозиції відповідних мод плоскопаралельного хвилеводу:

$$u_I = \cos \alpha_m x_1 - r_1 \exp i\gamma_m x_3 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \alpha_n x_1 - r_1 \exp -i\gamma_n x_3, \quad (4.1)$$

$$u_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \alpha_n x'_1 - r_1 \exp i\gamma_n x'_3, \quad (4.2)$$

де $\alpha_n = n\pi / h$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $k = \omega / c$. Розглядається гармонічна у часі хвиля, часового множника $\exp -i\omega t$ не пишемо.

Поле в області II запишемо у вигляді суперпозиції мод криволінійної області II

$$u_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n kr \cdot \left[C_n \exp iv_n \varphi + D_n \exp iv_n \varphi - \varphi_0 \right], \quad (4.3)$$

де власні форми мод

$$R_n kr = J_{v_n} kr - \frac{J'_{v_n} kr_3}{Y'_{v_n} kr_3} Y_{v_n} kr, \quad (4.4)$$

тут $J_{v_n} kr$ і $Y_{v_n} kr$ – функції Бесселя першого та другого роду. Штрих при функції Бесселя означає похідну по повному аргументу.

4.3 Побудова розв'язку

Умови спряження полів на межах поділу часткових областей мають вигляд

$$u_I = u_{II}, \quad x_1 = r_1, r_2, \quad x_3 = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u_{II}}{r \partial \varphi} = \begin{cases} \frac{\partial u_I}{r \partial \varphi}, & r = r_1, r_2, \quad \varphi = 0, \\ 0, & r = r_2, r_3, \quad \varphi = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$u_{II} = u_{III}, \quad x'_1 = r_1, r_2, \quad x'_3 = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u_{II}}{r \partial \varphi} = \begin{cases} \frac{\partial u_{III}}{r \partial \varphi}, & r = r_1, r_2, \quad \varphi = \varphi_0, \\ 0, & r = r_2, r_3, \quad \varphi = \varphi_0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Підставивши вирази (4.1)-(4.4) в умови (4.5)-(4.8), отримаємо функціональну систему рівнянь. Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь [31], використовуючи властивості повноти і ортогональності відповідного набору функцій: $\cos \alpha_n x_1 - r_1$ для рівняння (4.5), $\cos \alpha_n x'_1 - r_1$ – для рівняння (4.7), $R_n kr$ – для рівнянь (4.6) та (4.8). Як результат, приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, D_n . Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції. Достовірність отриманого розв'язку перевірялась виконанням умов спряження полів на межах часткових областей I, II та II, III, а також перевіркою виконання закону збереження енергії в процесі поширення хвилі у хвилеводі.

Зазначимо, що у всіх проведених нижче розрахунках умови спряження полів виконувалися з високою точністю. Криві, що визначають поле переміщення, з графічною точністю збігалися. Особливість біля кутових точок має локальний характер і не впливає на енергетичні характеристики [31]. Закон збереження енергії виконувався з точністю до четвертого знаку після коми.

Представлення поля в області III у вигляді суперпозиції нормальних мод криволінійного хвилеводу (4.3) не є єдиним. Можливо також представлення поля у вигляді суми часткових розв'язків рівняння Гельмгольца в різних системах координат:

$$u_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \alpha_n x_1 - r_1 \exp i\gamma_n x_3 + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \alpha_n x'_1 - r_1 \exp -i\gamma_n x'_3 + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos \beta_n \varphi \frac{J_{\beta_n} kr}{J'_{\beta_n} kr_3} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos \beta_n \varphi \frac{Y_{\beta_n} kr}{Y'_{\beta_n} kr_1}, \quad (4.9)$$

де $\beta_n = n\pi / \varphi_0$.

Перші дві суми в формулі (4.9) дозволяють задовольнити умовам спряження полів на межах часткових областей I, II та II, III. Також слід задовольнити граничні умови на вільних поверхнях криволінійної області II, $r = r_1$ та $r = r_2$, $\varphi = 0, \varphi_0$. За це відповідають третя та четверта суми в формулі (4.9).

4.4 Аналіз отриманих результатів

Енергетичний коефіцієнт проходження W^m m -ої моди можна записати у вигляді

$$W^{(m)} = \sum_{n=0}^{N_3} W_n^{(m)}, \quad W_n^{(m)} = |B_n|^2 \cdot \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_m \operatorname{Re}(\gamma_m)}, \quad (4.10)$$

де $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 0,5$, $n > 0$. Число доданків N_3 дорівнює кількості однорідних хвиль області III.

Зосередимо нашу увагу на випадку, коли в області I набігає нульова мода ($m = 0$). На рис. 4.2 представлені залежності енергетичного коефіцієнту проходження (зліва) від кута розкриття φ_0 області II при різних значеннях внутрішнього радіусу округлення, а саме $r_1 / \lambda = 1$ та $r_1 / \lambda = 0,2$. Хвильова ширина хвилеводу в областях I і III становить $h / \lambda = 1,1$, тобто в цих областях

маємо три однорідні моди. Хвильова ширина зони вигину $H / \lambda = 1,8$. Як бачимо, характер залежності W^0 від кута φ_0 практично не змінився незважаючи на те, що внутрішній радіус округлення r_1 у двох випадках відрізняється у п'ять разів. Зазначимо, що у випадку сталої ширини хвилеводу, тобто за відсутності різкої зміни ширини зони вигину, коефіцієнт проходження практично дорівнює одиниці для усіх кутів розкриття φ_0 .

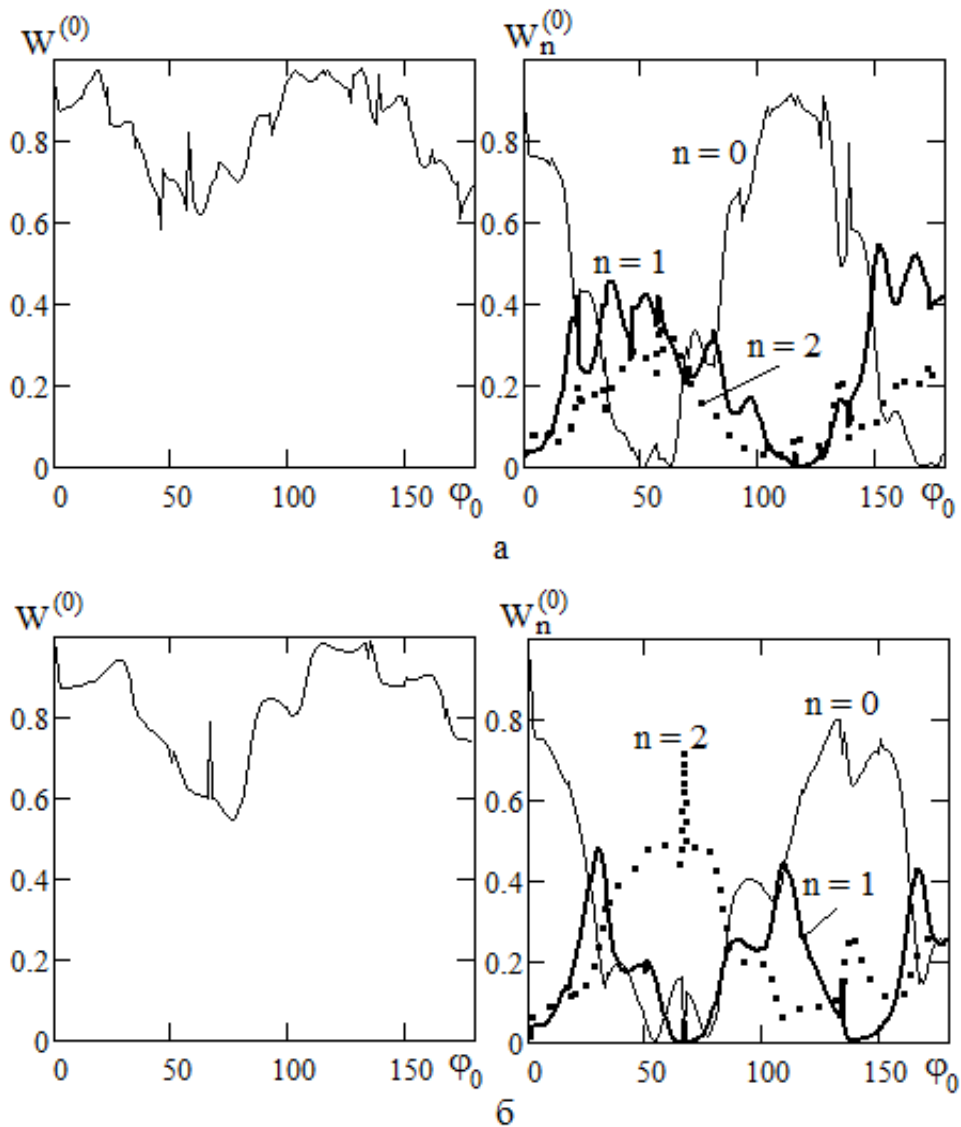


Рис. 4.2 Залежності енергетичних коефіцієнтів проходження W^0 (зліва) і збудження мод області III $W_n^{(0)}$ (праворуч) від кута розкриття φ_0 ; $h / \lambda = 1,1$, $H / \lambda = 1,8$: а – $r_1 / \lambda = 1$, б – $r_1 / \lambda = 0,2$

На рис. 4.2 праворуч показані відповідні залежності коефіцієнтів збудження $W_n^{(0)}$ мод області III. Порівнюючи графіки на рис. 4.2 зліва та праворуч можна сказати, що значення коефіцієнту проходження W^0 має значну величину, навіть близьку до одиниці, коли в області III домінуючою є нульова мода. Домінування вищих мод в області III супроводжується зниженням коефіцієнту проходження.

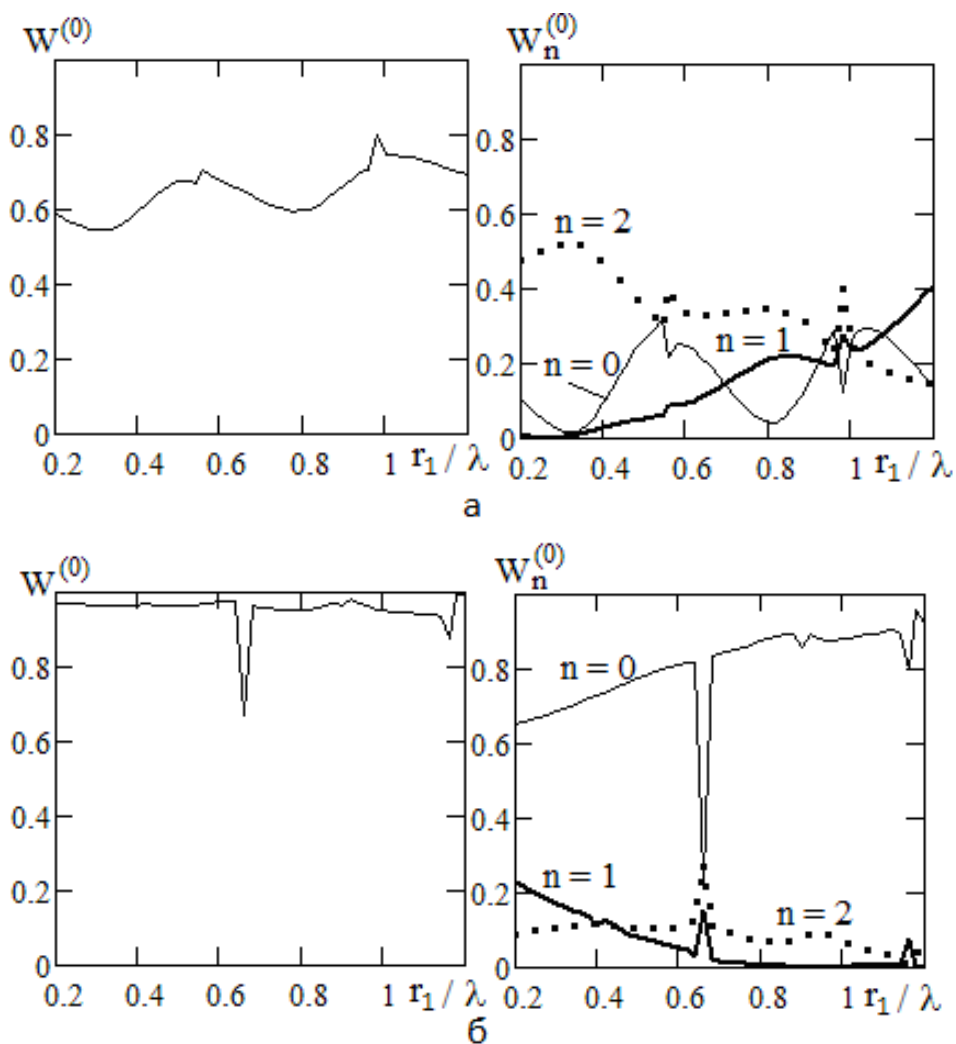


Рис. 4.3 Залежності енергетичних коефіцієнтів проходження W^0 (зліва) і збудження мод області III $W_n^{(0)}$ (праворуч) від r_1 / λ , $h / \lambda = 1,1$, $H / \lambda = 1,8$:

$$a - \varphi_0 = 70^\circ, \quad б - \varphi_0 = 120^\circ$$

На рис. 4.3 представлені подібні залежності де змінною величиною є радіус округлення r_1 / λ . Рис. 4.3 *a* відповідає куту $\varphi_0 = 70^\circ$, а рис. 4.3 *б* – $\varphi_0 = 120^\circ$. Вибрані кути належать тим інтервалам зміни кута φ_0 на рис. 4.2, де має місце зниження та зростання коефіцієнта проходження. Як бачимо, загальна тенденція зберігається: на рис. 4.3 *б* значення коефіцієнта W^0 близькі до одиниці, при цьому в області III домінує нульова мода. Напроти, на рис. 4.3 *a* коефіцієнт W^0 має менші значення і відповідно внесок вищих мод в області III є вагомим.

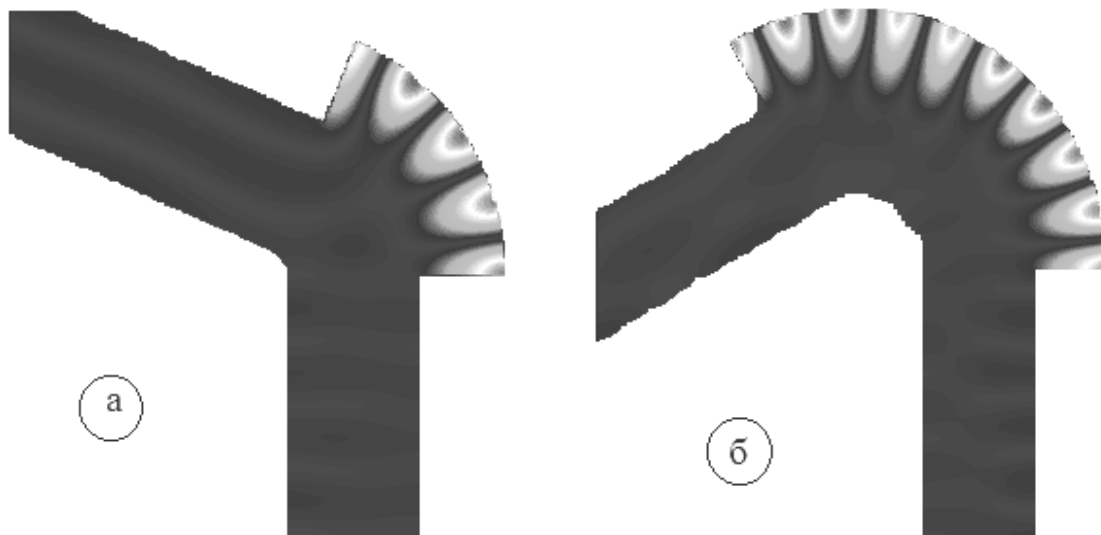


Рис. 4.4 Поле переміщення в області вигину, $h / \lambda = 1,1$, $H / \lambda = 1,8$:

$$a - \varphi_0 = 67^\circ, r_1 / \lambda = 0,2, W^0 = 0,79,$$

$$б - \varphi_0 = 120^\circ, r_1 / \lambda = 0,66, W^0 = 0,67$$

Слід відзначити, що значення коефіцієнта W^0 на рис. 4.3, в діапазоні зміни r_1 / λ , досить стабільні. Виключенням є суттєве зниження величини W^0 на рис. 4.3 *б* при $r_1 / \lambda = 0,66$. Очевидно, дана ситуація пов'язана з явищем просторового резонансу, який має місце в області вигину хвилеводу. Таку думку підтверджує рис. 4.4 *б*, де у відтінках сірого кольору показано поле

переміщення в області вигину та його околі для даної ситуації. Тут чорний колір відповідає мінімуму, а білий колір – максимуму. Як бачимо на зовнішній стінці зони вигину чергуються області стиснення і розрідження, утворюючи своєрідну стоячу хвилю. Причому максимум амплітуди переважає амплітуду хвилі, що набігає в області I, у 15 разів. Аналогічна ситуація зображена на рис. 4.4 а при інших параметрах хвилеводу.

Можна стверджувати, що зміна хвильової ширини H / λ та кута розкриву φ_0 зони вигину буде приводити до різких змін в частотній характеристиці коефіцієнта проходження. Така ситуація обумовлена резонансними явищами, які виникають в області II, коли геометричні розміри зони вигину стають приблизно пропорційні половині довжини хвилі.

Висновки до розділу 4

1. Побудовано розв'язання плоскої задачі поширення хвилі у хвилеводі, який складається з двох плоскопаралельних хвилеводів, з'єднаних областю вигину з різкою зміною ширини.

2. Показано, що енергетичний коефіцієнт проходження нульовою модою зони вигину залежить від кута розкриву області II φ_0 . При цьому значення коефіцієнту проходження суттєво залежить від наявності однорідних мод в області за вигином. Так, у випадку домінування нульової моди, маємо великі значення коефіцієнту проходження. Якщо ж домінують вищі моди, то коефіцієнт проходження зменшується.

3. Показано, що в частотній характеристиці коефіцієнту проходження можливі різкі зміни. Це пов'язано з тим, що область вигину, на певних частотах, поводить себе як об'ємний резонатор.

РОЗДІЛ 5

ПОШИРЕННЯ ХВИЛІ У ХВИЛЕВОДІ З ПОДВІЙНИМ ЗГИНОМ У ВИГЛЯДІ ПЕРИСКОПУ

Продовжуючи тематику поширення SH-хвиль в нерегулярних хвилеводах, розглядається плоский хвилевід з подвійним згином. Геометричні розміри хвилеводу порівняні з довжиною хвилі.

5.1 Постановка задачі

Розглянемо плоску задачу про поширення хвилі у хвилеводі, в якому має місце подвійна зміна напрямку поширення хвилі. Два варіанти такого хвилеводу показані на рис. 5.1. На рис. 5.1 а хвилевід має два злами під кутом 90° , а хвилевід на рис. 5.1 б – два вигини також під кутом 90° .

Всі поверхні хвилеводу будемо вважати вільними. Хвилевід являє собою лінійно-пружне ізотропне тіло.

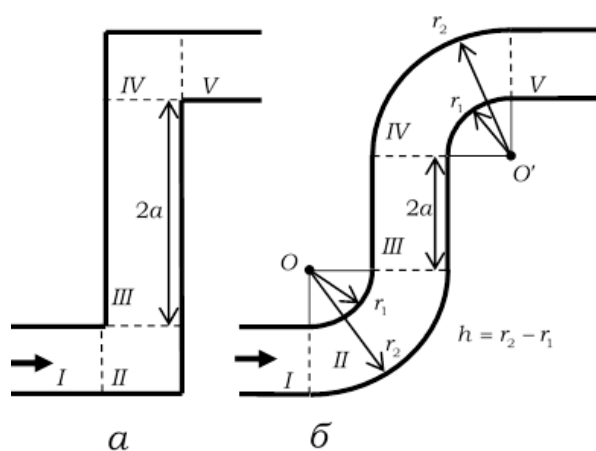


Рис. 5.1 Геометрія хвилеводів

Спочатку розглянемо хвилевід на рис. 5.1 а. Природнім чином вся область існування поля розбивається на п'ять областей (межі між областями виділені на рис. 5.1 штриховими лініями): області I і V – напівнескінченні плоскопаралельні хвилеводи шириною h , область III – плоскопаралельний хвилевід довжиною $2a$ і шириною h . Области II та IV – зони згину хвилеводу,

які оформлені у вигляді зламу. В перерізі ці області являють собою квадрати зі стороною h . Для опису задачі введемо декартову систему координат Ox_1x_3 . Нехай в області I в додатному напрямку вісі Ox_1 поширюється гармонічна з частотою ω m -та мода хвилеводу:

$$u_I^0 = \cos \alpha_m x_3 + a + h \exp i\gamma_m x_1 .$$

5.2 Побудова розв'язку

Тоді поля в областях I і V запишемо у вигляді суперпозиції мод плоскопаралельного хвилеводу:

$$u_I = \cos \alpha_m x_3 + a + h \exp i\gamma_m x_1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \alpha_n x_3 + a + h \exp -i\gamma_n x_1 , \quad (5.1)$$

$$u_V = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \alpha_n x_3 - a \exp i\gamma_n x_1 - h , \quad (5.2)$$

де $\alpha_n = n\pi / h$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $k = \omega / c$. Часовий множник $\exp -i\omega t$ не пишемо.

Поле в області III представимо у вигляді суперпозиції мод біжучих назустріч одна одній:

$$u_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^1 \cos \alpha_n x_1 \exp i\gamma_n x_3 + a + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \cos \alpha_n x_1 \exp -i\gamma_n x_3 - a . \quad (5.3)$$

Поля в областях II і IV запишемо у вигляді стоячих хвиль з урахуванням граничних умов на вільних поверхнях цих областей

$$u_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^1 \cos \alpha_n x_3 + a + h \frac{\cos \gamma_n x_1 - h}{\cos \gamma_n h} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 \cos \alpha_n x_1 \frac{\cos \gamma_n x_3 + a + h}{\cos \gamma_n h} , \quad (5.4)$$

$$u_{IV} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^1 \cos \alpha_n x_3 - a \frac{\cos \gamma_n x_1}{\cos \gamma_n h} + \sum_{n=0}^{\infty} E_n^2 \cos \alpha_n x_1 \frac{\cos \gamma_n x_3 - a - h}{\cos \gamma_n h} . \quad (5.5)$$

Умови спряження полів на межах поділу часткових областей (рис. 5.1) полягають у рівності переміщень та напружень:

- 1) $u_I = u_{II}, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = [-a - h; -a];$
- 2) $\frac{\partial u_I}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{II}}{\partial x_1}, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = -a - h; -a ;$
- 3) $u_{II} = u_{III}, \quad x_1 = 0; h, \quad x_3 = -a;$
- 4) $\frac{\partial u_{II}}{\partial x_3} = \frac{\partial u_{III}}{\partial x_3}, \quad x_3 = -a, \quad x_1 = 0, h ;$
- 5) $u_{III} = u_{IV}, \quad x_1 = [0; h], \quad x_3 = a;$
- 6) $\frac{\partial u_{III}}{\partial x_3} = \frac{\partial u_{IV}}{\partial x_3}, \quad x_1 = [0, h], \quad x_3 = a;$
- 7) $u_{IV} = u_V, \quad x_1 = h, \quad x_3 = [a, a + h];$
- 8) $\frac{\partial u_{IV}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_V}{\partial x_1}, \quad x_1 = h, \quad x_3 = a; a + h ;$

Розписуючи ці умови, отримуємо функціональну систему рівнянь. Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи властивості повноти і ортогональності відповідного набору власних форм плоскопаралельного та криволінійного хвилеводів. Як результат, приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів:

$$1) \quad A_m \delta_{mn} - B_m \delta_{mn} - C_n \overset{1}{T}_{mn} = -\delta_{mq};$$

$$2) \quad iA_m \gamma_m \delta_{mn} + B_m \frac{\prod(-\gamma_m h)}{\cos(\gamma_n h)} \delta_{mn} = i\gamma_q \delta_{mq};$$

$$\text{де } \overset{1}{T}_{mn} = \int_{-a-h}^{-a} \cos(\alpha_m(x_3 + a + h)) \frac{\cos(\gamma_n(x_3 + a + h))}{\cos(\gamma_n h)} dx_3;$$

$$3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n - 1 \overset{2}{T}_{mn} + C_m \delta_{mn} - D_m \delta_{mn} - E_m e^{i\gamma_m 2a} \delta_{mn} = 0;$$

$$\text{де } T_{mn}^2 = \int_0^h \cos(\alpha_m x_1) \frac{\cos(\gamma_n(x_1 - h))}{\cos(\gamma_n h)} dx_1;$$

$$4) \quad C_m \frac{\Pi(\gamma_m h)}{\cos(\gamma_n h)} \delta_{mn} - iD_m \gamma_m \delta_{mn} + iE_m \gamma_m e^{i2\gamma_m a} \delta_{mn} = 0;$$

$$5) \quad D_m e^{i\gamma_m 2a} \gamma_n \delta_{mn} + E_m \delta_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} B1_n T_{mn}^3 - C1 \delta_{mn} = 0;$$

$$\text{де } T_{mn}^3 = \int_0^h \cos(\alpha_m x_1) \frac{\cos(\gamma_n x_1)}{\cos(\gamma_n h)} dx_1;$$

$$6) \quad iD_m \gamma_m e^{i\gamma_m 2a} \delta_{mn} - iE_m \gamma_m \delta_{mn} - C1_m \frac{\Pi(-\gamma_m h)}{\cos(\gamma_n h)} \delta_{mn} = 0;$$

$$7) \quad B1_m \delta_{mn} + \sum_{n=0}^{\infty} C1_n (-1)^n T_{mn}^4 - F_m \delta_{mn} = 0;$$

$$\text{де } T_{mn}^4 = \int_a^{a+h} \cos(\alpha_m(x_3 - a)) \frac{\cos(\gamma_n(x_3 - a - h))}{\cos(\gamma_n h)} dx_3;$$

$$8) \quad B1_m \frac{\Pi(\gamma_m h)}{\cos(\gamma_n h)} \delta_{mn} - iF_m \gamma_m \delta_{mn} = 0.$$

Тепер звернемося до хвилеводу на рис. 5.1 б. Тут області згину II і IV оформлені у вигляді вигину з радіусами кривизни r_1 та r_2 відповідно, причому $r_2 - r_1 = h$. Це призводить до того, що ширина хвилеводу на всій його довжині залишається сталою і дорівнює h .

Для опису задачі введемо чотири системи координат: декартову Ox_1x_3 і полярну $Or\varphi$ з загальним центром у точці O та декартову $Ox'_1x'_3$ і полярну $Or'\varphi'$ з загальним центром у точці O' .

Поля в областях I, V, III запишемо у вигляді суперпозиції мод плоскопаралельного хвилеводу, подібно до формул (5.1) – (5.3), але з урахуванням певної системи координат на рис. 5.1 б:

$$u_I = \cos \alpha_m x_3 - r_1 \exp i\gamma_m x + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \alpha_n x_3 - r_1 \exp -i\gamma_n x_1, \quad (5.6)$$

$$u_V = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \alpha_n x'_3 - r_1 \exp -i\gamma_n x'_1, \quad (5.7)$$

$$u_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^1 \cos \alpha_n x_1 - r_1 \exp -i\gamma_n x_3 + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \cos \alpha_n x_1 - r_1 \exp i\gamma_n x_3 + 2a. \quad (5.8)$$

Поле в областях II і IV запишемо у вигляді суперпозиції мод криволінійного хвилеводу, біжучих назустріч одна одній:

$$u_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n kr \cdot \left[D_n^1 \exp iv_n \varphi + D_n^2 \exp -iv_n \varphi - \pi/2 \right], \quad (5.9)$$

$$u_{IV} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n kr' \cdot \left[E_n^1 \exp iv_n \varphi' + E_n^2 \exp -iv_n \varphi' - \pi/2 \right], \quad (5.10)$$

де власні форми мод

$$R_n kr = J_{v_n} kr - \frac{J'_{v_n} kr_2}{Y'_{v_n} kr_2} Y_{v_n} kr, \quad (5.11)$$

тут $J_v kr$ і $Y_v kr$ – функції Бесселя першого та другого роду. Штрих при функції Бесселя означає похідну по повному аргументу.

Умови спряження полів на межах поділу часткових областей (рис. 5.1) полягають у рівності переміщень та напружень:

- 1) $u_I = u_{II}, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = [r_1; r_2];$
- 2) $\frac{\partial u_I}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{II}}{\partial x_1}, \quad r = (r_1, r_2), \quad \varphi = 0;$
- 3) $u_{II} = u_{III}, \quad x_1 = [r_1, r_2], \quad x_3 = 0;$
- 4) $\frac{\partial u_{II}}{\partial x_3} = \frac{\partial u_{III}}{\partial x_3}, \quad r = [r_1, r_2], \quad \varphi = \varphi_0;$

$$5) \quad u_{III} = u_{IV}, \quad x'_1 = [r_1; r_2], \quad x'_3 = 0;$$

$$6) \quad \frac{\partial u_{III}}{\partial x'_3} = \frac{\partial u_{IV}}{\partial x'_3}, \quad r' = [r_1, r_2], \quad \varphi' = 0;$$

$$7) \quad u_{IV} = u_V, \quad x'_1 = 0, \quad x'_3 = [r_1, r_2];$$

$$\frac{\partial u_{IV}}{\partial x'_1} = \frac{\partial u_V}{\partial x'_1}, \quad r' = [r_1, r_2], \quad \varphi' = \varphi_0.$$

Розписуючи ці умови, отримаємо функціональну систему рівнянь. Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь [31], використовуючи властивості повноти і ортогональності відповідного набору власних форм плоскопаралельного та криволінійного хвилеводів. Як результат, приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно коефіцієнтів A_n , B_n , $C_n^{1,2}$, $D_n^{1,2}$, $E_n^{1,2}$:

$$1) \quad A_m \delta_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_{mn}^1 - \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_{mn}^1 e^{iv_n \varphi_0} = -\delta_{mq}, \quad m = 0 \dots N;$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} h, m = n = 0, \\ h/2, m = n \neq 0, \\ 0, m \neq n. \end{cases} \quad T_{mn}^1 = \int_{r_1}^{r_2} R_{\nu_n}(kx_1) \cos(\alpha_m(x_1 - r_1)) dx_1$$

$$2) \quad -\sum_{n=0}^{\infty} A_n T_{mn}^2 \gamma_n - B_m \delta_{mn} \nu_m + C_m \delta_{mn} \nu_m e^{iv_m \varphi_0} = -\gamma_q T_{mq}^2, \quad m = 0 \dots N1; \text{ де}$$

$$T_{mn}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \cos(\alpha_n(r - r_1)) R_{\nu_m}(kr) dr = T_{mn}^1,$$

$$\delta_{mn}^1 = \begin{cases} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} R_{\nu_m}(kr) R_{\nu_n}(kr) dr, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_{mn}^1 e^{iv_n \varphi_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_{mn}^1 - D_m \delta_{mn} - E_m \delta_{mn} = 0, \quad m = 0 \dots N;$$

$$\text{де } T_{mn}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \cos(\alpha_m(x_1 - r_1)) R_{v_n}(kx_1) dx_1;$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} A_m \cdot 0 + B_m v_m e^{iv_m \varphi_0} \delta_{mn}^1 - C_m v_m \delta_{mn}^1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \gamma_n T_{mn}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \gamma_n e^{i\gamma_n a} T_{mn}^2, \quad m = 0..N1;$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} A_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_m \cdot 0 + D_m e^{i\gamma_m a} \delta_{mn} + \\ + E_m \delta_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_{mn}^1 - \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{iv_n \varphi_0} T_{mn}^1 = 0;$$

$$6) \sum_{n=0}^{\infty} A_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{i\gamma_n a} \gamma_n T_{mn}^2 - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} E_n \gamma_n T_{mn}^2 - B_m v_m \delta_{mn}^1 + C_m v_m e^{iv_m \varphi_0} \delta_{mn}^1 = 0;$$

$$7) \sum_{n=0}^{\infty} A_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} D_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} E_m \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_{mn}^1 e^{iv_n \varphi_0} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_{mn}^1 - F_m \delta_{mn} = 0;$$

$$8) B_m v_m e^{iv_m \varphi_0} \delta_{mn}^1 - C_m v_m \delta_{mn}^1 - \sum_{n=0}^{\infty} F_n \gamma_n T_{mn}^2 = 0.$$

Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції. Достовірність отриманого розв'язку визначалася завдяки контролю за виконанням умов спряження полів на межах часткових областей, та перевіркою виконання закону збереження енергії. Зазначимо, що у всіх проведених нижче розрахунках умови спряження полів виконувалися з високою точністю так, що відповідні криві з графічною точністю збігалися. Закон збереження енергії виконувався з точністю до четвертого знаку після коми.

5.3 Аналіз чисельних результатів

Енергетичний коефіцієнт проходження крізь зони згину m -ої нормальної хвилі W^m хвилеводу можна записати у вигляді

$$W^{(m)} = \sum_{n=0}^{N_5} W_n^{(m)}, \quad W_n^{(m)} = |B_n|^2 \cdot \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_m \operatorname{Re}(\gamma_m)} \quad (5.12)$$

де $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_n = 0,5$, $n > 0$. Число доданків N_5 дорівнює кількості однорідних хвиль області V.

Зосередимо нашу увагу на випадку, коли в області I набігає нульова мода ($m = 0$). На рис. 5.2 показані частотні залежності коефіцієнту проходження нульової моди W^0 для трьох варіантів довжини області III, а саме $2a/h = 1, 3, 5$.

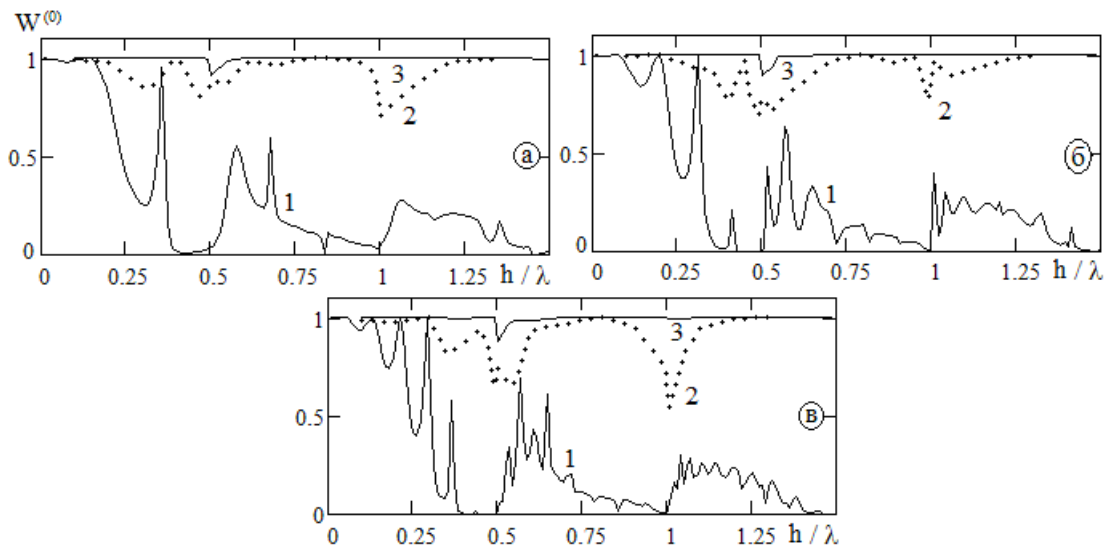


Рис. 5.2. Частотні залежності коефіцієнту проходження нульової моди W^0 :
 а – $2a/h = 1$, б – $2a/h = 3$, в – $2a/h = 5$,
 1 – хвилевід зі зламами, 2 – округлений хвилевід, $r_1/h = 0,01$,
 3 – округлений хвилевід, $r_1/h = 1$

Крива 1 відповідає хвилеводу зі зламами, криві 2 та 3 – хвилеводу з заокругленням. При цьому для кривої 2 радіус заокруглення становить $r_1/h = 0,01$, тобто фактично відповідає зламу під кутом 90° . Для кривої 3 радіус заокруглення дорівнює $r_1/h = 1$, що обумовлює плавний перехід між областями I і III та III і V.

Відразу зазначимо, що коли $h = \lambda/2$, хвилевід являє собою, так звану, "дуже вузьку трубу", поширення хвилі в котрій не залежить від того, пряма її

вісь чи вигнута чи навіть має згини [45] та коефіцієнт проходження дорівнює одиниці.

На трьох рисунках криві 1 для хвилеводу зі зламами (рис. 5.1 *a*) мають схожий характер. Весь частотний діапазон поділяється на ділянки, межами котрих можна означити значення хвильової ширини h/λ кратні половині довжини хвилі. На цих ділянках коефіцієнт проходження сягає певних локальних максимумів. В околі значень h/λ кратних половині довжини хвилі маємо глибокі мінімуми, аж до нульових значень коефіцієнта проходження. Особливо широка зона мінімальних значень W^0 прилягає до величини $h/\lambda = 0,5$. Надалі у хвилеводі зі зламами (крива 1) спостерігається загальна тенденція до зменшення коефіцієнту проходження з наявністю різких підйомів та спадів частотної характеристики.

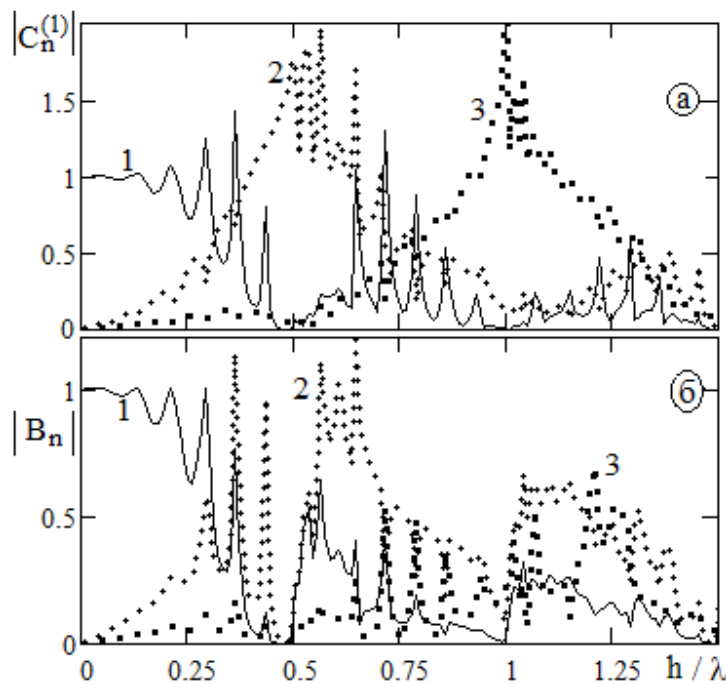


Рис. 5.3 Частотні залежності коефіцієнтів $|C_n^1|$ (область III) та $|B_n|$ (область V) у хвилеводі зі зламами, $2a/h = 5$: криві 1, 2, 3 – $n = 0, 1, 2$

Щоб осмислити наявність суттєвого зниження коефіцієнту проходження у хвилеводі зі зламами при h/λ кратному половині довжини хвилі звернемося до рис. 5.3. На ньому показані частотні залежності амплітудних коефіцієнтів $|C_n^1|$ (область III) та $|B_n|$ (область V), n – номер моди. Нерівність $h/\lambda > 0,5n$, $n = 1, 2, \dots$ є умовою, за якою вищі моди хвилеводу стають однорідними. Рис. 5.3 а наочно демонструє той факт, що в околі точки $h/\lambda = 0,5$ частотного діапазону значну амплітуду збурення має перша мода (крива 2, $n = 1$), а в околі точки $h/\lambda = 1$ – друга мода (крива 3, $n = 2$). Оскільки при $h/\lambda < 0,5n$ мода (перша чи друга) є неоднорідною, то, як результат, величина коефіцієнту проходження різко падає. Ілюстрацією до сказаного слугує рис. 5.4 а, на котрому представлено поле амплітуди переміщень у відтінках сірого. Тут білий колір відповідає максимуму амплітуди, а чорний – мінімуму (фактично нулю переміщення). Чітко видно як в областях II та III формується домінуюча перша неоднорідна мода, котра і призводить до "запирання" хвилеводу.

Ситуація корінним чином змінюється, коли хвилевід має заокруглену зону вигину. Незважаючи на провали в частотній характеристиці на певних ділянках діапазону, коефіцієнт проникнення має високі значення. Отже наявність навіть однієї поверхні заокруглення робить хвилевід значною мірою прозорим. В якості ілюстрації наведено рис. 5.4, де хвилеводи мають однакову ширину і для хвилеводу на рис.5.4 а коефіцієнт проходження складає 0.015, а для хвилеводу на рис. 5.4 б – 0.81.

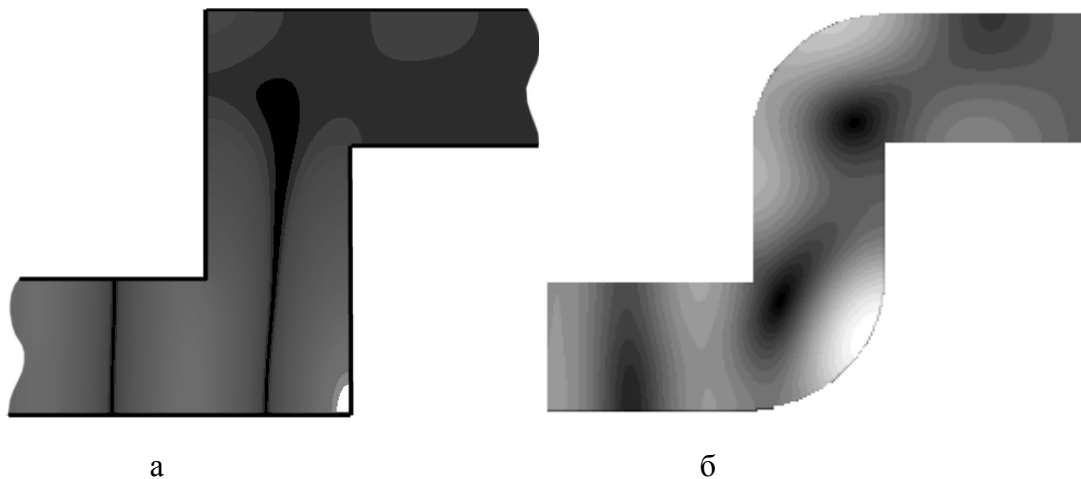


Рис. 5.4 Поле амплітуди переміщення, $h / \lambda = 0,4645$, $2a / h = 1$:
 а – хвилевід зі зламами, $W^{(0)} = 0,015$;
 б – заокруглений хвилевід сталої ширини, $r_1 / h = 0,01$, $W^{(0)} = 0,81$

На рис. 5.3 б показано як ситуація представлена на рис. 5.3 а (вхід в область III) трансформується у відповідні частотні залежності коефіцієнтів $|B_n|$ нормальних хвиль в області V. Рисунок показує котра з мод на певному частотному інтервалі є більш "енергоємною".

Загальна тенденція до зменшення коефіцієнту проходження у хвилеводі зі зламами (крива 1 на рис. 5.2) при збільшенні величини h / λ пояснюється тим, що розподіл переміщення на межі областей I і II як своєрідне джерело стає все більш направленим, що і призводить до зниження рівня поля, котре проникає в область III.

Ситуація корінним чином змінюється, коли хвилевід має округлену зону вигину. Крива 3 на рис. 5.2 відповідає округленому хвилеводу з $r_1 / h = 1$, тобто реалізується плавний перехід між областями плоскопаралельних хвилеводів. Як бачимо, хвилевід є практично прозорим. Для кривої 2 радіус заокруглення $r_1 / h = 0,01$, що фактично відповідає зламу під кутом 90^0 . Незважаючи на провали в частотній характеристиці на певних ділянках

діапазону, коефіцієнт проходження має високі значення. Отже наявність навіть однієї поверхні заокруглення робить хвилевід значною мірою прозорим.

Зазначимо зв'язок предмета наших досліджень з музикою. Для ряду духових інструментів характерна наявність складної системи згинів звукопровідних труб [1]. Наприклад, валторна, тромбон та інші. Опираючись на результати, отримані в даній роботі, можна сказати, що кількість поворотів та їх геометричні параметри, по суті, визначають темброве забарвлення даного інструменту.

Висновки до розділу 5

1. Побудовано розв'язок плоскої задачі про поширення хвилі у хвилеводі з подвійною зміною напрямку поширення хвилі. Розглянуто два варіанти області згину: злам та заокруглення.

2. Показано, що енергетичний коефіцієнт проходження нульовою модою зони зламу хвилеводу суттєво залежить від хвилевої ширини хвилеводу. В частотній характеристиці спостерігається наявність інтервалів, де коефіцієнт проходження зменшується практично до нуля. Ці інтервали примикають до частот, котрі визначають зародження чергової моди хвилеводу.

3. Показано, що заокруглення зони згину робить хвилевід практично прозорим навіть за наявності заокруглення тільки з зовнішнього боку згину.

ВИСНОВКИ

1. Проведено порівняльний аналіз мод плоскопаралельного та криволінійного хвилеводів однакової ширини. Показано, що власні форми однорідних мод (особливо перших номерів) криволінійного і плоскопаралельного хвилеводів можуть суттєво відрізнятися.

2. Проведено розв'язання задачі про поширення хвилі у хвилеводі зі згином з різними типами заокруглення зони згину. Показано, що при малому, в порівнянні з довжиною хвилі, радіусу заокруглення згину частотні залежності енергетичного коефіцієнта проходження хвилею зони вигину з графічною точністю співпадають з результатами відповідних розрахунків для хвилеводу зі зломом. Показано, що зі збільшенням радіусу заокруглення аж до величини рівної ширини хвилеводу коефіцієнт проходження збільшується, однак нерегулярність частотної характеристики зберігається. Така ж тенденція має місце і для хвилеводу зі зрізами.

3. Показано, що заокруглення кутової області зі збереженням ширини хвилеводу на всій його довжині приводить майже до повної проникності криволінійної області в широкому діапазоні частот, при цьому структура поля за вигином суттєво залежить від геометричних параметрів хвилеводу.

4. Побудовано розв'язання задачі про поширення вузькосмугастого імпульсного сигналу в заокругленому хвилеводі постійної ширини. Показано, що, підбираючи певним чином геометричні параметри хвилеводу, можна досягти збереження форми імпульсу на шляху його поширення.

5. Проведено розв'язання плоскої задачі поширення хвилі у хвилеводі, який складається з двох плоскопаралельних хвилеводів, з'єднаних областю вигину з різкою зміною ширини. Показано, що енергетичний коефіцієнт проходження нульовою модою зони вигину залежить від кута розкриття області вигину. Показано, що в частотній характеристиці коефіцієнту проходження можливі різкі зміни. Це пов'язано з тим, що область вигину, на певних частотах, поводить себе як об'ємний резонатор.

6. Проведено розв'язання плоскої задачі про поширення хвилі у хвилеводі з подвійною зміною напрямку поширення хвилі. Розглянуто два варіанти області згину: злам та заокруглення. Показано, що енергетичний коефіцієнт

проходження нульовою модою зони зламу хвилеводу суттєво залежить від хвилевих параметрів хвилеводу. В частотній характеристиці спостерігається наявність інтервалів, де коефіцієнт проходження зменшується практично до нуля. Показано, що заокруглення зони згину робить хвилевід практично прозорим навіть за наявності заокруглення тільки з зовнішнього боку згину.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ананьев А. Б. Элементы музыкальной акустики / А. Б. Ананьев // – К.: Феникс, 2008. – 224 с.
2. Балабаев С. М. Анализ пьезопреобразователей комбинированным методом конечных и граничных элементов / С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина // Акуст. журн. – 1996. – Т. 42, № 2. – С. 172-178.
3. Балабаев С. М. Акустическое излучение водозаполненной пьезокерамической оболочки / С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина // Акуст. журн. – 1999. – Т. 45, № 3. – С. 293-300.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах / Бреховских Л. М // Москва: Наука. – 1973. – 343 с.
5. Буланная М. А. Особенности распространения звукового импульсного сигнала в плоском регулярном волноводе / М. А. Буланная, И. В. Вовк, В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура // Акустичний вісник. – 2008. – Т.11, №4. – С. 9-23.
6. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / П.Н. Вабищевич // – М.: Изд-во Московского ун-та, 1991. – С.156.
7. Вайнпггейн И. А. Электромагнитные волны / И.А. Вайнпггейн // 2-е изд. – М.: Рад. и связь, 1998. – 440 с.
8. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации / Л.А. Вайнштейн // – М.: Издательство Советское радио, 1966. – 431 с.
9. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения / Е.Н. Васильев // – М.: Радио и связь, 1987. – 272 с.
10. Векслер Н. Д. Рассеяние акустической волны эллипсоидальной оболочкой / Н.Д. Векслер, Б. Дюбюс, А. Леви // Акуст. журн. – 1999. – Т. 45, № 1. – С. 53-58.

11. Весник М. В. Аналитическое решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца / М.В. Весник // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 1. – С. 66-76.
12. Виноградова М. Б. Теория волн / М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков // – 2-изд. – М.: Наука, 1990. -432 с.
13. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров // 5 изд. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
14. Власов А. Г. Решение краевых задач для областей, ограниченных поверхностью с изломами. Сборник статей, посвященный 80-летию с дня рождения академика А.А. Лебедева / А.Г. Власов, Г.М. Савицкий // – Л.: Машиностроение, 1973. – 23-31 с.
15. Вовк І. В. Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі / І.В. Вовк, В.Т. Маципура, О.О. Трунов // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Фіз.-мат. науки. – 2013. – №3. – с. 192-195.
16. Вовк І. В. Поширення хвилі у криволінійному хвилеводі з різкою зміною ширини вигину / І.В. Вовк, В.Т. Маципура, О.О. Трунов // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Фіз.-мат. науки. – 2014. – №3, с. 28-31.
17. Вовк И. В. О расширении возможностей метода частичных областей применительно к задачам излучения и рассеивания волн / И. В. Вовк, В. Т. Гринченко // Акустический журнал. Т. XXXV 1989 Выпуск 1. С. 29 – 36. Акустический журнал. Т. XXXV 1989 Выпуск 1. С. 29 – 36.
18. Вовк И. В. Дифракция звука на решетке, состоящей из полных упругих брусьев, заполненных газом / И.В. Вовк // Акуст. журн. – 1979. – Т.25, № 4. – С.502-506.
19. Вовк И. В. Излучение звука конечной решеткой, состоящей из открытых цилиндрических пьезокерамических оболочек / И.В. Вовк // Акуст. журн. – 1992. – Т.38, №3. – С. 427-434.

20. Вовк И. В. Акустические свойства сферического излучателя, нагруженного на биконический рупор конечных размеров / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко // Акуст. журн. – 1974. – Т.20, №2. – С. 207-213.
21. Вовк И. В. Излучение звука конечным набором соосных пьезокерамических оболочек / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко // Акуст. журн. – 1991. – Т.37, №2. – С. 259-269.
22. Вовк И.В. Излучение звука решеткой, образованной соосными цилиндрическими пьезокерамическими оболочками с торцевыми экранами / И.В. Вовк, В.Т. Маципура // Акуст. вісн. – 2001. –Т.4, №2. –С.11-17.
23. Воскресенский Г. В. Излучение из плоского волновода с фланцем / Г.В. Воскресенский, С.М. Журав // Радиотехника и электроника. – 1976. –Т.21, № 7. –С. 1390-1395.
24. Галаненко В. Б. Обобщение метода поперечных сечений на задачу распространения волн в упругом слое с плавно изменяющимися параметрами / В.Б. Галаненко // Акустичний вісник. – 1998. – Т.1, №2. – С. 41-47.
25. Галаненко В.Б. Об активном подавлении мешающего сигнала в зоне тени источника / В.Б. Галаненко, К.В. Ковальчук, В.Т. Маципура, Ю.Н. Рябуха // Акуст. журн. – 1987. – Т.33, № 6. –С. 992-997.
26. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме / В.Л. Гинзбург // – М.: Наука, 1960. -552 с.
27. Гончарова И. Ю. Распространение звука в волноводе с изломом / И. Ю. Гончарова, В. Т. Мацыпура // Акуст. вісн. – 1998. – 1, № 2. – С. 57–64.
28. Горелик Г.С. Колебания и волны. (Введение в акустику, радиофизику и оптику) / Горелик Г.С. // – 2-изд. – М.: Физматгиз, 1959. – 572 с.
29. Григорьян Ф. Е. Об использовании каналов с искривленными пористыми стенками в целях шумоглушения / Ф. Е. Григорьян //Акустический журнал. – 1970. – Т.XVI, Вып.2.

30. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г.А. Гринберг // – М. – Л.: Изд. Ак. Наук СССР, 1948. – 731 с.
31. Гринченко В.Т. Волновые задачи акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура // – Киев: Интерсервис, 2013. – 572 с.
32. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко // – К.: Наукова думка, 1981. – 284 с.
33. Гринченко В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности Т.3. Равновесие упругих тел канонической формы / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко // – К.: Наукова думка, 1985. – 280 с.
34. Гринченко В.Т. Развитие метода решения задач излучения и рассеивания звука в неканонических областях / В.Т. Гринченко // Гидромеханика. – 1996. – Т.70. – С.27-40.
35. Гринченко В. Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк // Киев: Наукова думка, 1986. 238с.
36. Грінченко В.Т. Особливості розповсюдження хвиль в фізично та геометрично неоднорідних хвилеводах / В.Т. Грінченко, В.Т. Мацыпура // VI Міжнародна наук. конфер. «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур». – Л., 2003. – С.125-128.
37. Грінченко В.Т. Основи акустики / В.Т. Грінченко, І.В. Вовк, В.Т. Мацыпура // – К.: Наукова думка, 2007. – 640 с.
38. Гузь А.Н. Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью / А.Н. Гузь // Прикл. мех. – 1980. – Т.10. - С.10-20.
39. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах / / А.Н. Гузь, В.Т. Головчан // – К.: Наукова думка, 1972. – 255 с.

40. Дорошенко В.А. Возбуждение конической щелевой антенны / В.А. Дорошенко, Е.К. Евсюкова, В.Ф. Кравченко // Рад. и электр. – 2001. – Т.46, № 8. – С.954-960.
41. Завадский В. Ю. Вычисление волновых ролей в открытых областях и волноводах / В. Ю. Завадский // Москва: Наука. – 1972. – 558 с.
42. Зуев В.С. Главная волна в биконическом рупоре при конечной проводимости материала стенок / В.С. Зуев, А.В. Францессон // Рад. и электрон. -1998. – Т.43, № 9. – С.1097-1103.
43. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин // 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1978. – С. 287.
44. Иофе В.К. Электроакустика / В.К. Иофе // – М.: Связьиздат, 1954. - 184 с.
45. Исакович М.А. Общая акустика / М.А. Исакович // – М.: Наука, 1973. – 495 с.
46. Клюкин И.И. Акустические измерения в судостроении / И.И. Клюкин, А.Е. Колесников // – Л.: Судостроение, 1966. -396 с.
47. Красильников В.А. Звуковые волны / В.А. Красильников // М.-1954, с.440.
48. Кюн Р. Микроволновые антенны / Р. Кюн // – Л.: Судостроение, 1967. -517 с.
49. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – Т. VII. Теория упругости. -248 с.
50. Левин Л. Современная теория волноводов / Л. Левин // – М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
51. Левицкий Л.А. О дифракции звука на сочленении двух волноводов / Л.А. Левицкий // Акуст. журн. – 1987. – Т.33, № 1. – С.66-71.

52. Лейко А.Г. Поле рассеяния для системы акустически мягких эллиптических цилиндров / А.Г. Лейко, В.И. Маяцкий // Акуст. журн.- 1973. – Т.19, № 3. – С. 378-385.
53. Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв // – М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
54. Мандельштам Л. Полное собрание трудов. Том IV. Лекции по теории колебаний / Л. Мандельштам // – М.: Изд-во АН СССР, 1955.
55. Мануилов М.Б. Рассеивание волн на системе щелей в общей стенке волноводов / М.Б. Мануилов, В.Н. Шведов, Г.П. Синявский // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т.43, № 6. – С.661-667.
56. Маципура В.Т. Особенности прохождения волны через округленный изгиб плоского волновода / В.Т. Маципура, О.О. Трунов // Акустический вестник. – 2014.
57. Мацыпура В. Т. Звуковые поля в нерегулярных волноводах / В. Т. Мацыпура // Київ. 1-3 жовтня 2003. ІГМ НАН України. С. 131 – 135
58. Меркулов Л.Г. Расчет спектра волновых чисел для волн Лэмба в пластине / Л.Г. Меркулов, С.И. Рохлин, О.П. Зобнин // Дефектоскопия. -1970. – Т.4. – С12-16.
59. Митра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Митра, С. Ли // – М.: Мир, 1974. -324 с.
60. Морс Ф.М. Методы теоретической физики / Ф. М. Морс, Г. Фешбах // В 2-х т. – М.: ИИЛ, 1960. –Т.2. – С.886.
61. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / З.Т. Назарчук // – К.: Наукова думка, 1989. -254 с.
62. Нефедов Е.Н. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах / Е.Н. Нефедов // – М.: Наука, 1979. -272 с.
63. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий // – М.: Мир, 1975. - 872 с.

64. Релей Д. Теория звука / Д. Релей // В 2 т. / Под ред. С.М.Рытов. – М.: Гос. изд. технико-теор. лит., 1955.
65. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука / С.Н. Ржевкин // – М.: МГУ, 1960. – 336 с.
66. Седов Л. И. Механика сплошной среды: в 2-х т. / Л.И. Седов // – М.: Наука, 1970. – Т.2. – С. 568.
67. Селезов И.Т. Дифракция волн на симметричных неоднородностях / И.Т. Селезов, В.В. Яковлев // – К.: Наукова думка, 1978. – 145 с.
68. Сиренко Ю. К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах / Ю. К. Сиренко // ЭДЭНА, Харьков. 2003. – 363 с.
69. Скучик Е. Основы акустики / Е. Скучик // Т. 2. Москва. Мир. 1976. 429 с.
70. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы / Е. Скучик // – М.: Мир, 1971. -558 с.
71. Тамм С.П. Основы теории электричества / С.П. Тамм // -9-е изд. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
72. Трунов А. А. Волновое поле в волноводе с двумя изгибами / А. А. Трунов // Естественные и технические науки. – 2015. – №5 (83). – С. 24-25.
73. Трунов О.О. Хвильове поле у хвилеводі з вигином / О.О. Трунов // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Фіз.-мат. науки. – 2014. – №2. – с. 83-86.
74. Трунов О.О. Поширення хвилі у хвилеводі з подвійним вигином / О.О. Трунов // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Фіз.-мат. науки. –2014. – №4.
75. Хенл Х. Теория дифракции / Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль // – М.: Мир, 1964. – 428 с.
76. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики / Н.А. Хижняк // – К.: Наукова думка, 1986. – 280 с.

77. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики / Е.Л. Шендеров // – Л.: Судостроение, 1972. – 348 с.
78. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука / Е.Л. Шендеров // – Л.: Судостроение, 1989. – 301 с.
79. Шендеров Е.Л. Рассеяние плоской звуковой волны на полубесконечном волноводе с жестким фланцем / Е.Л. Шендеров // Акуст. журн. – 1998. –Т. 44, № 1. – С.106-115.
80. Шендеров Е.Л. Излучение звука осциллирующим диском без экрана / Е.Л. Шендеров // Акуст. журн. – 1988. –Т.34, № 2. – С. 326-335.
81. Шестоपालов В.П. Резонансное рассеяние волн. Том 1. Дифракционные решетки / В.П. Шестоपालов, А.А. Кириленко, С.А. Масалов, Ю.К. Сиренко. – К.: Наукова думка, 1986. – 231 с.
82. Шестоपालов В.П. Резонансное рассеяние волн. Т.2. Волноводные неоднородности / В.П. Шестоपालов, А.А. Кириленко, Л.А. Рудь // – Киев: Наукова думка, 1986. – 214 с.
83. Шестоपालов В.П. Дифракционная электроника / В.П. Шестоपालов // – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1976. -239 с.
84. Шульга Н.А. Поверхностные электромагнитные и термоупругие волны в регулярно-слоистых средах / Н.А. Шульга // ДАН Укр. Сер. А. -1979. – Т.3. –С 204-208.
85. Ямпольский В.Г. Анализ секториальных рупорных антенн // Радиотехника. – 1981. –Т.7. –С.70-74.
86. Abrachams I. D. On the scattering of sound by two parallel staggered plates and explicit matrix Winer-Hopf factorization / I. D. Abrachams, G. R. Wickham // Proc. Roy. Soc. London. - 1988. – Vol. № A 420. – P. 131-156.
87. Accation L. Modal analysis of curved waveguides / L. Accation, G. Bertin // Proc.20th Eur, MicrowaveConf. Budapest, sep. 1990.

88. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids / J. D. Achenbach // – Amsterdam, North-Holland Publish. Co, 1973. – P. 425.
89. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids / B. A. Auld // New York: A Wiley-Interscience Publication, 1973. –P.423.
90. Billi M. Experimental identification of a resonance due to the finite dimensions of a specimen subjected to an external acoustic excitation / M. Billi // J. Acoust. Soc. Am. – 1995. –Vol. 98. –P. 661-664.
91. Biot M.A. General theorems on the equivalence of group velocity and energy transport / M.A. Biot // Phys. Rev. -1957. –Vol. 105, № 4. – P. 1129-1137.
92. Bocher M. Annals of mathematics / Dr. Maxime Bocher // – 1892. – Vol. VI. (6).
93. Bossut R. Finite element modeling of radiating structures using dipolar damping elements / R. Bossut, J. N. Decarpigny // J. Acoust. Soc. Amer. -1989. – Vol.86, № 4. – P. 1234-1244.
94. Bowman J. I. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shaper / J. I. Bowman, N. B. A. Senior, P. L. E. Usleghi // – Amsterdam: North-Holland Publ.Co., 1969. – 727 p.
95. Bukingham M. J. An analytical solution for benchmark problem. The ideal wedge / M. J. Bukingham, I. Tolstoy // J. Acoust. Soc. Amer. – 1990. –Vol.87. –P. -1511-1513.
96. Buyukaksoy A. A bifurcated waveguide problem / A. Buyukaksoy, B. Polat // ARI. – 1999. – Vol. 51. – P. 196-202.
97. Chapman C. J. The asymptotic theory of dispersion relations containing Bessel functions of imaginary order / C. J. Chapman // Proceedings of the Royal Society A. – 2012. – October 22.
98. Cochran J. A. Mode propagation in continuously curved waveguides / J. A. Cochran, R. G. Pecina // – Radio science, 1966. – **34**. – 679-696 p.

99. Davis A.M.J. Two dimensional acoustic diffraction by penetrable wedge / A.M.J. Davis // *J. Acoust. Soc. Amer.* -1996. – Vol. 100 (№ 3). –P. 1316-1324.
100. Esteban H. A New Hybrid Mode-Matching Numerical Method for the Analysis of Arbitrarily Shaped Inductive Obstacles and Discontinuities in Rectangular Waveguides / H. Esteban, S. Cogollos, V. E. Boria, A. San Blas, M. Ferrando // *IEEE Trans. Microwave theory and techniques.* – 2002. – Vol. 50 N 4. – P. 364 – 372.
101. Exner P. Bound states in curved quantum waveguides / P. Exner, P. Seba // *J. Math. Phys.* – 1989. – 30. – 25. – 74–80 p.
102. Exner P. Bound states in quantum waveguides of slowly decaying curvature / P. Exner // *J. Math. Phys.* – 1993. – 34. – 23–28 p.
103. Gridin D. Quasi-modes of a weakly curved waveguide / D. Gridin, R. V. Craster // 2003 *Proc. R. Soc. Lond. A* 459.
104. Gridin D. Trapped modes in curved elastic plates // D. Gridin, R. V. Craster, A. T. I. Adamou // 2005 *Proc. R. Soc. A* 4611181–1197.
105. Grinchenko V.T. On radiation of sound from open end of an irregular wedgestaped waveguide / V.T. Grinchenko, V.T. Matsipura // *J. Acoust. Soc. Am.* - 2001. – Vol.5, Pt. 2. –P.2438. –Meeting Acoustical Society of America. Chicago, Illinois, 4-8 June 2001.
106. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity / M.E. Gurtin // – Berlin: Springer, 1972. – Vol. *Handbuch der Physik* – 6a/2. – P. 295.
107. Horvat M. The bends on quantum waveguide and cross-products of Bessel functions / M. Horvat, T. Prosen // *J. Phys. A.: Math. Gen.* – 2007. – 1. – 34 p.
108. Hurd R.A. H-plane bifurcation of rectangular waveguides / R.A. Hurd, H. Gruenberg // *Can J Phys.* – 1954. – Vol. 32, № 11. –P. 694-701.
109. Hwang W.S. A boundary integral method for acoustic and scattering / W.S. Hwang // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1997. – 101, № 6. – P. 3330–3335.

110. Jensen H. Quantum mechanics with constraints / H. Jensen, H. Koppe // *Ann. Phys.* – 1971. – 63. – 586–91.
111. Joseph P. Multimode radiation from an unflanged, semi infinite circular duct / P. Joseph, C.L. Morfey // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1999. – Vol. 105, № 5. – P. 2590-2600.
112. Keller J.B. Geometrical theory of diffraction / J.B. Keller // *J. Opt. Soc. Amer.* -1962. –Vol. 52. – P. 116-130.
113. Lamb H. On waves in an elastic plate / H. Lamb // *Proc. Roy. Soc. (London)*. – 1917. – Vol. 93, № 48. - P. 14-128.
114. Lent C. S. Transmission through a bend in an electron waveguide / C. S. Lent // *Appl. Phys. Lett.* – 1990. – 56. – 2554–6.
115. Lewin L. Electromagnetic waves and curved structures / L. Lewin, D. C. Chang, E. F. Kuester // – *IEEE. El. M.W.Ser.*, 1977. –P. 198.
116. Lewin L. On the inadequacy of discrete mode-matching techniques in some waveguide discontinuity problems / L. Lewin // *IEEE Trans. Microwave theory and techniques.* – July 1970. – Vol. MTT-18. 7. – P. 364–372.
117. Lin K. Bound states and threshold resonances in quantum wires with circular bends / K. Lin, R.L. Jaffe // *Phys. Rev.* – 1996. – B 54 5750–62.
118. Londergan J.T. Binding and scattering in two-dimensional systems: application to quantum wires, waveguides and photonic crystals / J.T. Londergan, J. Carini, D. P. Pand Murdock. // *Lecture Notes in Physics*, – 1999. Volume 60 (Berlin [etc]: Springer Verlag).
119. MacPhie R. H. A full-wave modal analysis of arbitrary shaped waveguide discontinuities using the finite plane-wave series expansion / R. H. MacPhie // *IEEE Trans. Microwave theory and techniques.* – 1999. – Vol.47, № 2. – P. 232-237.
120. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides / J. Miklowitz // – Amsterdam: A.S.M.E., 1978. –P. 618.

121. Mindlin R.D. Wave and vibrations in isotopic elastic plate / R.D. Mindlin // *Structural Mechanics / Proc. 1-st Symp. On Nayal Struc. Mech.* – Oxford-L.-N.-Y.: 1960. –P. 199-232.
122. Morgan P.A. Influence of shape and absorbing surface a numerical study of railway barriers / P.A. Morgan, D.C., D.C. Hothersall, S.N. Chander-Wilde // *J. Sound Vib.* -1998. – Vol. 217, № 3. –P. 405-417.
123. Petrusenko I.V. Analytic-numerical Analysis of Waveguide Bends / I.V. Petrusenko // *Gebze Institute of Technology: Electromagnetics*, 24:237-254, 2004.
124. Rashid M. A. Analysis of propagation properties in junctions between straight and bend waveguides using cylindrical functions of complex orders / M. A. Rashid, M. Kodama // *Proc. ITC-CSCC-2002 Conference July, 2002, Phuket, Thailand.*
125. Reiter J. Rigorous analysis of arbitrarily shaped h-and e-plane discontinuities in rectangular waveguides by a full-wave boundary contours mode-matching method / J. Reiter, F. Arndt // *IEEE Trans. Microwave theory and techniques.* – 1995. – Vol.43, № 8. –P. 796-801.
126. Sandman B. E. Fluid – loading influence coefficients for a finite cylindrical shell / B. E. Sandman // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1976. V. 60. №6. P. 1256 – 1264.
127. Sols F. Circular bends in electron waveguides / F. Sols, M. Macucci // *Phys. Rev.* – 1990. – B 41. – 11887–91.
128. Spivack M. Electromagnetic propagation in the curved two-dimensional waveguide / M. Spivack, J. Ogilvy, C. Sillence // *Waves Random Media.* – 2002. – 12. – 47–62.
129. Sprung D. W. L. Understanding quantum wires with circular bends / D. W. L. Sprung , H. Wu // *J. Appl. Phys.* – 1992. – 71. – 515–7.

130. Sridhara B. S. Review of theoretical and experimental aspects of acoustical modeling of engine exhaust systems / B. S. Sridhara, M. J. Crocker // J. Acoust. Soc. Amer. – 1994. – 95, № 1. – P. 2363–2370.

131. Strutt J. W. On the passage of electric waves through tubes or the vibrations of dielectric cylinders / J. W. Strutt // Phil. Mag. (Ser. 5) 53 – 1897. – P. 125–132.

132. Tonaka K. New boundary integral equations for cad of waveguide circuits / K. Tonaka, M. Nakahara // IEEE Trans. Microwave theory and techniques. - 1992. – Vol. 40, № 8. – P.1647-1653.

133. Tu L.Y. Dispersion of ultrasonic pulse velocity in cylindrical rods / L.Y. Tu, J.N. Brennan, J.A. Sauer // J. Acoust. Soc. Am. -1955. – Vol. 27 (3). –P. 550-555.

134. Zemanek J. An experimental theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder / J. Zemanek // J. Acoust. Soc. Am. – 1972. – Vol 51 (1). – P. 265-283.

135. Zemanek J. Attenuation and dispersion of elastic waves in a cylindrical bar / J. Zemanek, I. Rudnick // J. Acoust. Soc. Am. – 1961. – Vol. 33(10). – P.1283-1288.