КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Кафедра системного аналізу та теорії прийняття рішень

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю 124 Системний аналіз

на тему:

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ ЕКСПЕРТІВ

Виконав студент 4-го курсу бакалаврату
Іванов Сергій Михайлович
____
(підпис)

Науковий керівник:
професор, доктор фіз.-мат. наук
Мащенко Сергій Олегович
____
(підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент __________
(підпис)

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень

«01» червня 2023 р.,
протокол № 13

Завідувач кафедри
О. Г. Наконечний __________
(підпис)

Київ – 2023

РЕФЕРАТ

Тема: Прийняття рішень нечіткою множиною експертів.

Автор: Іванов Сергій Михайлович.

Науковий керівник: професор, доктор фізико-математичних наук Мащенко Сергій Олегович.

Робота складається з: 39 сторінок, 6 рисунків, використаних джерел – 11.

Ключові слова: ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ, НЕЧІТКА МНОЖИНА ТИПУ-1, НЕЧІТКА МНОЖИНА ТИПУ-2, ФУНКЦІЯ НАЛЕЖНОСТІ, НЕЧІТКЕ ВІДНОШЕННЯ ТИПУ-2.

Предмет дослідження: задача колективного прийняття рішень.

Мета роботи: розробити підхід до розв’язання задачі вибору недомінованих альтернатив нечіткою множиною експертів.

Короткий огляд праці:

У першому розділі наведено базові поняття та визначення з теорії прийняття рішень та теорії нечітких множин.

У другому розділі представлено підхід до розв’язання задачі вибору альтернатив при нечіткій множині експертів.

У третьому розділі розроблений метод продемонстровано на прикладі задачі прийняття рішень нечіткою множиною компетентних експертів, зроблено порівняння з відомими методами, представлена програмна реалізація методу.

ЗМІСТ

ВСТУП 4

РОЗДІЛ 1. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН 5

1.1. Поняття нечіткої множини. Операцій з нечіткими множинами 5

1.2. Нечіткі відношення 7

1.3. Принцип узагальнення 8

1.4. Нечіткі множини типу 2 9

РОЗДІЛ 2. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ НЕЧІТКОМУ ВІДНОШЕННІ ПЕРЕВАГИ 12

2.1. Відношення переваги 12

2.2. Нечітка підмножина недомінованих альтернатив 14

2.3. Множина недомінованих альтернатив для нечіткої множини експертів . 18

РОЗДІЛ 3. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ТА ЙОГО ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ 27

3.1. Приклад задачі вибору альтернатив нечіткою множиною експертів 27

3.2. Порівняння з відомими методами вибору недомінованих альтернатив. . 29

3.3. Програмна реалізація методу 31

ВИСНОВКИ 34

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ 35

ДОДАТОК А 37

Код програми на Python 37

ВСТУП

Проблема прийняття рішень, або проблема вибору альтернатив – це, напевно, найбільш розповсюджений клас задач, з якими може стикнутись дослідник. Будь-які ситуації, які вимагають прийняття рішень, відбуваються, як правило, в умовах невизначеності, а особливо прийняття рішень в сучасних системах управління. Ця невизначеність обумовлена неточністю, або неповнотою вхідних даних, неможливістю представлення вхідних даних в чіткій математичній моделі функціонування, наявності людського фактору, нечіткістю мети та ін. Ситуація невизначеності в системі призводить до ризику прийняття неефективних рішень, які в результаті можуть призвести до негативних економічних, екологічних, соціальних та інших наслідків.

Методи прийняття рішень в умовах нечіткої інформації особливо корисні при неможливості побудування точної математичної моделі функціонування системи. Теорія нечітких множин уможливлює застосування для прийняття рішень неточні та суб’єктивні експертні оцінки без необхідності їх формалізації у вигляді традиційних математичних моделей.

Нечіткі множини дають змогу використовувати словесний опис складних процесів, встановлювати нечіткі відношення між поняттями, виконувати опис нечітких правил прийняття рішень, прогнозувати поведінку системи.

Метою цієї роботи є дослідження методів прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги, розробка підходу до розв’язання задачі вибору недомінованих альтернатив нечіткою множиною експертів та його програмна реалізацію.

Розділ 1. Базові поняття теорії нечітких множин

1.1. Поняття нечіткої множини. Операцій з нечіткими множинами

В традиційній математиці під множиною розуміють сукупність елементів, які мають певні спільні ознаки. Для будь-якого елемента при цьому розглядаються два варіанти: або цей елемент має ознаки множини, а отже і є її елементом, або не має їх, а отже не може бути її елементом. Тобто в чітких множинах присутній чіткий критерій належності певного елементу до неї. Проте, як уже зазначалось у вступі, сучасні системи працюють в умовах невизначеності. Через це, для опису математичних моделей таких систем, чітких множин вже недостатньо.

Поняття нечіткої множини – спроба математичної формалізації нечіткої інформації з метою її використання при подальшій побудові математичних моделей складних систем. Основною ідеєю нечітких множин є те, що кожен елемент має свою ступінь наявності певної ознаки, тобто має свою ступінь належності до певної множини.

Нехай X деяка множина елементів. Нечіткою множиною C в X називається [1] сукупність пар виду $(x, \mu_c(x))$, де $x \in X$, а μ_c– функція $X \to [0, 1]$, яка називається функцією належності нечіткої множини C. Значення $\mu_c(x)$ цієї функції для конкретного x називається ступенем належності цього елементу нечіткій множині C. Тобто $C = \left\{x, \mu_C(x) \mid x \in X, 0 \le \mu_C(x) \le 1\right\}$.

Л. Заде в своїй книзі [2] визначає нечіткі множини більш загального виду. Він вводить нечіткі множини, значення функцій належності яких є також нечіткими множинами інтервалу [0, 1]. Він приходить до такого визначення: нечітка множина є множиною типу *n = 1,2,3,…* , якщо значеннями її функції належності є нечіткі множини типу *n-1*.

Можна сказати, що чіткі множини є підкласом нечітких множин, адже будь-яку чітку множину можна представити сукупністю пар виду $(x, \mu_c(x))$ зі значенням функції належності 1, якщо елемент входить в множину, та 0, якщо ні. Таким чином, нечітка множина є являє собою більш широке поняття, ніж чітка, в тому плані, що функція належності нечіткої множини може бути довільною функцією, або навіть довільним відображенням.

Розглянемо основні операції над нечіткими множинами. Так як клас нечітких множин включає в себе чіткі множини, більшість операцій зберігаються. Це операції об'єднання, перетину, доповнення на різниці. Наведемо їх визначення.

Об'єднанням нечітких множин A і B в X називається нечітка множина $A \cup B$ з функцією належності виду $\mu_{A \cup B} = max\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\}, x \in X.$

Перетином нечітких множин A і B в X називається нечітка множина $A \cap B$ з функцією належності виду $\mu_{A \cup B} = min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right), x \in X.$

Доповненням нечіткої множини A в X називається нечітка множина A' з функцією належності виду $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in X.$

Різниця множин A і B в X визначається як нечітка множина $A \backslash B$ з функцією належності виду

$$\mu_{A \backslash B} = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x) \text{ при } \mu_A(x) \geq \mu_B(x), \\ 0 \text{ в іншому випадку}. \end{cases}$$

Нечіткі множини мають три унікальні операції, яких не мають звичайні чіткі множини. Це операції концентрування, розтягування та випукла оболонка.

Розглянемо операцію декомпозиції нечіткої множини та множини рівня.

Множиною рівня α нечіткої множини A в X називається множина в звичайному сенсі, складена з елементів $x \in X$, ступені належності яких нечіткій множини A не менше числа α, тобто $A_\alpha = \left\{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\right\}.$

Ця операція буде дуже корисна при роботі з нечіткими множинами типу 2, адже завдяки їй ми зможемо розбити нечіткі множини типу 2, на сукупність нечітких множин типу 1, що досить суттєво спростить нашу задачу прийняття рішення.

Нехай $(A \cup B)_\alpha$ і $(A \cap B)_\alpha$ - множини рівня α об'єднання та перетину множин A і B відповідно. Зв'язок цих множин з множинами A_α та B_α буде таким:

$$(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha,\ (A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha.$$

1.2. Нечіткі відношення

Нечіткі відношення є важливим математичним поняттям, завдяки якому можна формулювати та аналізувати математичні моделі реальних задач прийняття рішень. Нечітке відношення на множині альтернатив ми отримуємо від експерту, який досить часто може не мати чіткого уявлення про нього. Саме в таких випадках нечітке відношення є більш зручною та більш точною формою представлення відношення, ніж чітке.

Нечітким відношенням R на множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$, яка характеризується функцією належності $\mu_R: X \times X \to [0; 1]$. Значення $\mu_R(x, y)$ цієї функції треба розуміти як суб'єктивну міру чи ступінь виконання відношення xRy. Як і у випадку з чіткими множинами, чітке відношення можна розглядати як частинний випадок нечіткого відношення, функція належності якого приймає лише значення 0 та 1.

При аналізі задач прийняття рішень з нечіткими відношеннями переваги досить зручно використовувати множини рівнів нечіткого відношення. Так як нечітке відношення визначається як нечітка множина, то його множина рівня буде мати вигляд $R_\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in X \times X, \mu_R(x, y) \geq \alpha\}$.

Тепер розглянемо операції над нечіткими відношеннями. Як і у випадку нечітких множин, деякі з операцій є аналогами операцій для звичайних відношень, але існують операції, які характерні тільки для нечітких відношень.

Нехай на множині X задано два нечітких відношення A та B. Нечітку множину $C = A \cup B$ називають об'єднанням нечітких відношень. Функція належності відношення C матиме вигляд

$$\mu_C(x, y) = max\left(\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\right).$$

Нечітку множину $D = A \cap B$ називають перетином нечітких відношень. Функція належності відношення D матиме вигляд

$$\mu_D(x, y) = min\left(\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\right).$$

Доповнення в X нечіткого відношення A має функцію належності виду

$$\mu_{R'}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y),\ x, y \in X.$$

Обернене до A відношення A^{-1} на множині X визначається функцією належності таким чином

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x),\ \forall x, y \in X.$$

Досить велике значення при розв'язанні задач прийняття рішень має значення композиція нечітких множин. Їх існує три види: максимінна, мінімаксна та максимультиплікативна. В цій роботі буде розглядатись лише мінімаксна композиція.

Мінімаксна композиція нечітких відношень A та B на нечіткій множині X визначається функцією належності виду

$$\mu_{A \circ B} = \min_{x \in X} max\left\{\mu_A(x, z), \mu_B(z, y)\right\}.$$

1.3. Принцип узагальнення

Розглянемо тепер одну із фундаментальних ідей теорії нечітких множин, яка використовується в більшості задач прийняття рішень , а саме принцип узагальнення Заде. Наведемо його означення.

Нехай $\varphi : X \to Y$ – задане відображення, і нехай A – деяка нечітка підмножина множини X з функцією належності $\mu_A(x)$. Образ A при відображенні φ визначається як нечітка підмножина множини Y, яке являє собою сукупність пар виду

$$(y, \mu_B(y)) = (\varphi(x), \mu_A(x)),\ x \in X,$$

де $\mu_B: Y \to [0, 1]$ – функція належності образу. Функцію належності можна записати у вигляді

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x),\ y \in Y,$$

де множина $\varphi^{-1}(y)$ для будь-якого фіксованого $y \in Y$ має вигляд

$$\varphi^{-1}(y) = \{x | x \in X, \varphi(x) = y\},$$

тобто представляє собою множину всіх елементів $x \in X$, образом кожного з яких при відображенні φ являється елемент y.

Образом нечіткої множини A в X при нечіткому відображенні μ_φ: $X \times X \to [0, 1]$ називається нечітка множина з функцією належності виду

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\left\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\right\}.$$

Прообразом A нечіткої множини B в Y при нечіткому відображенні μ_φ: $X \times X \to [0, 1]$ називається об'єднання всіх нечітких множин, образи яких при цьому відображенні належать нечіткій множині B.

Якщо образ нечіткої множини α при відображенні μ_φ позначити як $\alpha \circ \mu_\varphi$, то прообразом нечіткої множини B є об'єднання всіх множин α, які задовольняють умові

$$\alpha \circ \mu_\varphi \subseteq B,$$

або умові

$$\sup_{x \in X} \min\left\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y)\right\} \le \mu_B(y), \quad \forall y \in Y.$$

На цьому ми закінчимо з оглядом теорії нечітких множин типу 1 та перейдемо до більш цікавих нечітких множин типу 2.

1.4. Нечіткі множини типу 2

Абстрактні нечіткі множини типу 2 дозволяють моделювати та мінімізувати вплив невизначеностей у системах нечіткої логіки, що базуються на правилах, наприклад [3]. Існує (щонайменше) чотири джерела невизначеності в нечітких множинах типу 1: значення слів, які використовуються в антецедентах і консеквентах правил, можуть бути невизначеними (слова означають різні речі для різних людей); наслідки можуть мати гістограму значень, пов'язаних з ним можуть бути зашумленими і, отже, невизначеними. Всі ці невизначеності призводять до невизначеності функцій належності нечітких множин. Нечіткі множини типу 1 не здатні безпосередньо моделювати такі невизначеності, оскільки їхні функції належності є абсолютно чіткими. З іншого боку, нечіткі множини типу 2 здатні моделювати такі невизначеності, оскільки їхні функції належності самі є нечіткими. Функції належності нечітких множин типу 1 є двовимірними, тоді як функції належності нечітких множин типу 2 є тривимірними. Це новий третій вимір нечітких множин типу 2, який надає додаткові ступені свободи, що дозволяють безпосередньо моделювати невизначеності.

Нечітка множина типу-2, позначається $\widetilde{A}$, характеризується функцією належності 2-типу $\mu_{\widetilde{A}}(x, u)$, де $x \in X$ і $u \in J_x \subseteq [0, 1]$, тобто

$$\bar{A} = \left\{ \left((x, u), \left(\mu_A(x, u) \right) \right) | \, \forall x \in X, \ \forall u \in J_x \subseteq [0, 1] \right\},$$

де $0 \leq \mu_{\widetilde{A}}(x, u) \leq 1$.

$\widetilde{A}$ також може бути представлена у вигляді

$$\bar{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\bar{A}}(x, u) / (x, u) \quad J_x \subseteq [0, 1],$$

де ∫∫ означає об'єднання над усіма допустимими x та u. В дискретному випадку ∫ заміняється на Σ.

При кожному x', двовимірна площина з вісями u та $\mu_{\widetilde{A}}(x', u)$ називається вертикальним перерізом $\mu_{\widetilde{A}}(x, u)$. Функція вторинної належності є вертикальним відтином від $\mu_{\widetilde{A}}$x, u) і має такий вигляд

$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', u) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{u \in J_{x'}} f_{x'}(u) / u \quad J_{x'} \subseteq [0, 1].$$

Завдяки цьому ми можемо визначити $\widetilde{A}$ у інший спосіб, а саме

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \, | \, \forall x \in X \},$$

або

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] \Big/ x \quad J_x \subseteq [0, 1].$$

Область, в якій виконується функція вторинної належності, називається первинною належністю x.

Амплітуда функції вторинної належності називається вторинною оцінкою.

Нечіткість в початковій належності 2-типу нечіткої множини складається з обмеженої області, яку ми називаємо відбитком нечіткості (FOU). Це є об’єднанням всіх початкових належностей, тобто

$$FOU(\widetilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x .$$

Для дискретних множин X та U, вкладена нечітка множина 2-типу $\widetilde{A}_e$ має N елементів, де $\widetilde{A}_e$ містить тільки один елемент з $J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_N}$, а саме u_1, u_2, …, u_N, кожна з яких асоціюється з вторинною оцінкою $f_{x_1}(u_1), f_{x_2}(u_2), \dots, f_{x_N}(u_N)$, тобто

$$\widetilde{A}_e = \sum_{i=1}^{N} \left[f_{x_i}(u_i) / u_i \right] x_i \quad u_{i \in J_{x_i}} \subseteq U = [0,\ 1].$$

Множина $\widetilde{A}_e$ є вкладеною в множину $\widetilde{A}$.

Для дискретних множин X та U, вкладена нечітка множина A_e 1-типу має N елементів з $J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_N}$, а саме u_1, u_2, …, u_N, кожна з яких асоціюється з вторинною оцінкою $f_{x_1}(u_1), f_{x_2}(u_2), \dots, f_{x_N}(u_N)$,

$$A_e = \sum_{i=1}^{N} u_i / x_i \quad u_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,\ 1].$$

Множина A_e є об’єднанням всіх первинних ступенів належності множини $\widetilde{A}_e$.

Нечітка множина типу 1 може бути представлена і як нечітка множина типу 2. Вона матиме вигляд *1/μF(x),* $\forall x$ є *X*. Це означає, що функція другорядної належності має тільки одне значення в її носії, яка називається первинною належністю, де вторинна оцінка дорівнює 1.

Розділ 2. Прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги

2.1. Відношення переваги

Розглянемо спочатку чітке відношення переваги.

Будемо казати, що альтернатива x строго краща альтернативи y, якщо одночасно $x \geq y$ і $y \ngeq x$, тобто $(x, y) \in R$ і $(y, x) \notin R$. Сукупність таких пар (x, y) називатимемо відношенням строгої переваги R^S на множині X. Це можна записати в такій формі

$$R^S = R \backslash R^{-1}.$$

Відношення байдужості. Пара $(x, y) \in R^I$ тоді і тільки тоді, коли або не виконана ні перевага $x \geq y$, ні перевага $y \geq x$, або дві ці переваги виконані одночасно. Тобто коли наявної інформації не достатньо щоб зробити вибір між альтернативами. Відношення R^I можна записати у такому вигляді

$$R^I = \left((X \times X) \backslash \left(R \cup R^{-1}\right)\right) \cup \left(R \cap R^{-1}\right).$$

Якщо $(x, y) \in R^S$, то будемо говорити, що альтернатива x домінує альтернативу y. Альтернативу $x \in X$ назвемо недомінованою в множині (X, R), якщо $(y, x) \in R^S$ для будь-якої альтернативи $y \in X$.

Множина недомінованих альтернатив визначається так

$$X^{н.д} = \{x \,|\, x \in X, (y, x) \notin R \backslash R^{-1} \ \ \forall y \in X\}.$$

Нечіткі відношення переваги. Перейдемо тепер до нечітких відношень переваги. Нечітким відношенням нестрогої переваги на X будемо називати будь-яке задане на цій множині рефлексивне нечітке відношення. Нечітке відношення переваги R на множині X будемо описувати функцією належності виду μ_R: $X \times X \to [0, 1]$, яка має властивість рефлексії.

Нечіткі відношення байдужості, квазіеквівалентності та строгої переваги. По заданому на множині нечіткому відношенню переваги можна однозначно визначити три відповідних йому нечітких відношення: байдужості, квазіеквівалентності та строгої переваги. Розглянемо їх більш детально.

Ці три відношення можна визначити наступним чином

$$R^I = \left(X \times X \backslash R \cup R^{-1}\right) \cup \left(R \cap R^{-1}\right), \quad R^E = R \cap R^{-1}, \quad R^S = R \backslash R^{-1}.$$

Функції належності цих відношень мають вигляд:

- нечітке відношення байдужості

$$\mu_R^I(x, y) = max\left\{1 - max\left\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\right\}, min\left\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\right\}\right\}.$$

- нечітке відношення квазіеквівалентності

$$\mu_R^E(x, y) = min\left\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\right\}.$$

- нечітке відношення строгої переваги

$$\mu_R^S(x, y) = \begin{cases} \mu_R(x, y) - \mu_R(y, x) \; при \; \mu_R(x, y) \ge \mu_R(y, x), \\ 0 \; при \; \mu_R(x, y) \ge \mu_R(y, x). \end{cases}$$

Нечіткі відношення байдужості та квазіеквівалентності рефлексивні та симетричні. Нечітке відношення строгої переваги антирефлексивне та антисиметричне

Лінійність нечітких відношень. Відношення R на X називаєтсья лінійним, якщо цим відношенням або оберненим до нього відношенням зв'язані будь-які дві альтернативи даної множини. Іншими словами на множині X немає непорівнюваних між собою за перевагою альтернатив. Це еквівалентно такій характеристичній функції $\mu_R(x, y) = 0 \Rightarrow \mu_R(x, y) = 1$.

У випадку нечіткого відношення однозначно можна визначити тільки повну відсутність лінійності: нечітке відношення не є лінійним тоді і тільки тоді, коли знайдуться такі альтернативи x, $y \in X$, для яких буде виконана вірність $\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x) = 0$.

Нехай λ - деяке число із інтервалу [0, 1]. Нечітке відношення μ_R називається λ-лінійним, якщо його функція належності задовольняє умові: $max\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\} > \lambda$ при будь-яких x, $y \in X$.

Нечітке відношення μ_R називається сильно лінійним, якщо його функція належності задовольняє умові: $max\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\} = 1$ при будь-яких x, $y \in X$.

2.2. Нечітка підмножина недомінованих альтернатив

Нехай *X* – множина альтернатив і μ_R – задане на ній нечітке відношення переваги. Нечітка підмножина недомінованих альтернатив множини *(X,* μ_R*)* описується функцією належності виду

$$\mu_R^{н.д}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \mu_R^S(y, x), \quad x \in X.$$

Значення $\mu_R^{н.д}(x)$ являє собою ступінь, з якою альтернатива *x* не домінується жодною із альтернатив множини *X*.

Оскільки величина $\mu_R^{н.д}(x)$ є ступенем "недомінованості" альтернативи *x*, то раціональним вважати вибір альтернатив, які мають більшу ступінь належності нечіткій множині $\mu_R^{н.д}$, тобто тих альтернатив, які дають значення функції $\mu_R^{н.д}(x)$, по можливості найбільш близьке до величини

$$\sup_{x \in X} \mu_R^{н.д}(x) = 1 - \inf_{x \in X} \sup_{y \in X} \left[\mu_R(y, x) - \mu_R(x, y)\right].$$

Альтернативи, які дають в точності цю величину, тобто елементи множини

$$X^{н.д} = \left\{x \mid x \in X, \mu_R^{н.д}(x) = \sup_{z \in X} \mu_R^{н.д}(z)\right\},$$

будемо називати максимально недомінованими альтернативами множини *X*.

Чітко недоміновані альтернативи. Чітко недоміновані альтернативи позначатимемо $X^{ч.н.д.}$

$$X^{ч.н.д} = \left\{x \mid x \in X, \mu_R^{н.д}(x) = 1\right\}.$$

Ч.н.д. альтернативи можуть бути порівнянні тільки за відношенням квазіеквівалентності.

Нечіткі відношення переваги можуть мати тільки два типи лінійності:

- λ-лінійне н.в.н. $\mu_R^e(x_1, x_2) > \lambda$,
- сильно лінійне н.в.н. $\mu_R^e(x_1, x_2) = 1$.

Сукупність відношень переваги на множині альтернатив. Розглянемо метод [1] розв'язання задач прийняття рішень при декількох відношеннях переваг на множині альтернатив.

Задана множина альтернатив X і кожна альтернатива характеризується кількома відношеннями переваги R_j з номерами $j = 1, \ldots, m$. Маємо m відношень переваги R_j на множині X. Задача полягає в тому, щоб за даною інформацією зробити раціональний вибір альтернатив з множини $(X, R_1, \ldots, R_m)$.

Розв'язком даної задачі вибору є множина всіх ефективних альтернатив, тобто тих альтернатив, у яких більша оцінка корисності $f_j(x)$ відношенням j.

Кожна з функції корисності f_j описує звичайне відношення переваги на X наступного вигляду

$$R_j = \{(x, y) | x, y \in X, f_j(x) \geq f_j(y)\}.$$

Нехай $Q_1 = \bigcap_{j=1}^{m} R_j$. Тоді множина всіх ефективних (недомінованих) альтернатив в множині (X, Q_1) співпадає з множиною ефективних альтернатив для набору функцій f_j, $j = 1,\ldots,m$.

Представимо тепер перетин відношень R_jв іншій формі. Нехай

$$\mu_j(x, y) = \begin{cases} 1 \; при \; (x, y) \in R_j, \\ 0 \; при \; (x, y) \notin R_j, \end{cases}$$

- функція належності відношення R_j. Тоді перетину цих відношень відповідає функція належності

$$\mu_{Q_1}(x, y) = min\{\mu_1(x, y), \ldots, \mu_m(x, y)\},$$

аналогічна згортці критеріїв f_j виду $F(x) = \min_{j=1,\ldots,m} \lambda_j f_j$. Числа λ_j в цій згортці грають роль коефіцієнтів відносної важливості функцій, які розглядаються.

У визначенні цієї функції належності числа 0 та 1 треба розуміти не як значення булевої змінної, яка показує належність чи неналежність елемента множині R_j, а як крайні точки одиничного інтервалу можливих значень ступенів належності.

В результаті згортки вихідних відношень R_j отримуємо функцію належності виду

$$\mu_{Q_1}(x, y) = min\left\{\lambda_1\mu_1(x, y), \ldots, \lambda_m\mu_m(x, y)\right\}.$$

Тобто функцію належності нечіткого відношення переваги.

Введемо тепер згортку вихідних відношень іншого виду

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mu_j(x, y).$$

Побудуємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив множини *(X,* μ_{Q_2}*).*

$$\mu_{Q_2}^{н.д}(x) = 1 - \frac{1}{m}\sup_{y\in X}\sum_{j=1}^{m}\left[\mu_j(y, x) - \mu_j(x, y)\right], \quad x \in X.$$

Позначимо $X_1^{ч.н.д}$ підмножину альтернатив ч.н.д. альтернатив множини *(X,* μ_{Q_1}*)* і $X_2^{ч.н.д}$ – відповідну множину в *(X,* μ_{Q_2}*)* $X_1^{ч.н.д.} \subseteq supp\,\mu_{Q_2}^{н.д.}$.

Властиві альтернатив на множині supp $\mu_{Q_2}^{н.д}$ тобто альтернатив x є X, для яких $\mu_{Q_2}^{н.д} > 0$. Функція $\mu_{Q_2}^{н.д}$(x) приймає тільки значення виду *k*/*m* де *k* – натуральне число і $k \le m$. Це означає, що

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\mu_j(y, x') - \mu_j(x', y)\right] \le m - k$$

при будь-якому $y \in X$.

Оскільки члени цієї суми приймають значення лише 0 та +-1, з цього випливає, що різниця між числом членів цієї суми, рівних +1 , і числом членів рівних -1, не перевищує $1 - k$ при будь-якому $y \in X$.

Іншими словами, нехай *p(y, x)* – число функцій f_j із заданого набору, по кожній із яких альтернатива у строго краще *x*, і *q(y, x)* – число функцій, за якими *x* строго краще *y*. Тоді, якщо $\mu_{Q_2}^{н.д}(x') = k/m$, то $p(y, x') - q(y, x') \le m - k$ при будь-якому $y \in X$.

Функція $\mu^{\text{н.д}}_{Q_2}$ упорядковує альтернативи по ступені їх недомінованості.

Якщо взяти перетин множин $X^{\text{ч.н.д}}_1$ і $\mu^{\text{н.д}}_{Q_2}$, то отримаємо відповідне упорядкування на множині ефективних альтернатив, користуючись яким можна зробити вибір серед них.

Якщо ж у згортці ваги λ_j різні, то кожна із введених вище характеристик *p(y, x')* і *q(y, x')* буде представляти собою не число відповідних властивостей, а їх сумарну відносну вагу (важливість).

Завдяки цьому всьому можна звузити клас раціональних виборів до множини

$$X^{ч.н.д.} = \left\{x \middle| x \in X, \mu^{н.д.}_{Q_2}(x) = \sup_{x' \in X^{ч.н.д.}_2} \mu^{н.д.}_{Q_2}(x')\right\}.$$

В загальній задачі, коли на множині альтернатив задані m нечітких відношень переваги R_j, $j = 1, \ldots, m$, і задані коефіцієнти λ_j відносної важливості цих відношень, можна робити це таким способом.

Будуємо нечітке відношення Q_1(перетин вихідних відношень):

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min\left\{\mu_1(x, y), \ldots, \mu_m(x, y)\right\}$$

і визначаємо нечітку множину недомінованих альтернатив в множині *(X,* μ_{Q_1}*)*:

$$\mu^{н.д.}_{Q_1}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\left[\mu_{Q_1}(y, x) - \mu_{Q_1}(x, y)\right].$$

Будуємо нечітке відношення Q_2 (згортка відношень):

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j(x, y)$$

і визначаємо нечітку підмножину недомінованих альтернатив в множині *(X,* μ_{Q_2}*)*:

$$\mu^{н.д.}_{Q_2}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\left[\mu_{Q_2}(y, x) - \mu_{Q_2}(x, y)\right].$$

Знаходимо перетин множин $\mu^{\text{н.д}}_{Q_1}$ і $\mu^{\text{н.д.}}_{Q_2}$:

$$\mu^{н.д.}(x) = min\left\{\mu^{н.д.}_{Q_1}(x), \mu^{н.д.}_{Q_2}(x)\right\}.$$

Раціональним вважаємо вибір альтернатив з множини

$$X^{н.д} = \left\{x \mid x \in X, \mu^{н.д}_{R}(x) = \sup_{x' \in X} \mu^{н.д}_{R}(x')\right\}.$$

Суттєвими недоліками цього підходу є те, що результуюче відношення виходить нерефлексивним, а раз воно нерефлексивне, то воно не є відношенням переваги.

Зважаючи на ці недоліки – цей метод не варто використовувати для розв'язання задач прийняття рішень. Тому в цій роботі буде запропонований новий метод для прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги, в якому будуть відсутні недоліки методу [1].

2.3. Множина недомінованих альтернатив для нечіткої множини експертів

Вибір альтернатив групою експертів. Розглянемо задачу вибору альтернатив $x \in X$ множиною (групою) $N = \{1,...,n\}$ з n експертів. Інформація про попарне порівняння альтернатив кожним експертом представлена у формі повних НВП R_j, $j \in N$, яким відповідають строгі відношення переваги $S_j = \mathrm{R}_j^{-1}, j \in N$.

Припущення 2.1. Вважатимемо, що або універсальна множина альтернатив X є скінченною, або вона є компактною, а ФН $\mu_{R_j}(x, y)$ НВП R_j, $j \in N$ є неперервними. Розглянемо спочатку найпростішу ситуацію, коли для кожного $j \in N$ відношення R_j описується заданою функцією корисності $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$, де $\mathbb{R}$ є числовою віссю. Значення функції $f_j(x)$ можна розглядати як числову оцінку альтернативи $x \in X$ експертом $j \in N$. Альтернатива з більшою оцінкою $f_j(x)$ вважається кращою для j-го експерта. Задача полягає у виборі альтернатив, що мають якомога більші оцінки для всіх експертів. Відповідно до слабкості аксіоми Парето, альтернатива $x \in X$ строго краще за альтернативу $y \in Y$ для групи експертів (позначимо це відношення строгої переваги S), якщо $f_j(x) > f_j(y)$ для $\forall\, j \in N$. Це означає, що $S = \bigcap_{j \in N} S_j$. Отримане відношення строгої переваги відповідає повному відношенню переваги $R = \bigcup_{j \in N} R_j$. Це пояснюється тим, що повнота R випливає з повноти R_j, $j \in N$, і тоді з [4]

$$S = R \backslash R^{-1} = \bar{R}^{-1} \tag{2.1}$$

випливає відношення $S = \overline{R}^{-1} = \overline{\left(\bigcup_{j \in N} R_j\right)}^{-1} = \bigcap_{j \in N} S_j$.

Альтернатива $x \in X$ називається слабо Парето-оптимальною, якщо не існує такого $y \in X$, для якого виконуються нерівності $f_j(x) > f_j(y)$, $j \in N$. Позначимо P множину слабко Парето-оптимальних альтернатив. Тоді, використовуючи відношення строгої переваги отримаємо

$$P = \{x \in X : y\overline{S}x,\ \forall y \in X\}.$$

Згідно (2.1) отримаємо

$$P = \{x \in X : xRy,\ \forall y \in X\} \tag{2.2}$$

з ФН

$$\mu_P(x) = \inf_{y \in X} \mu_R(x, y). \tag{2.3}$$

Для знаходження множини недомінованих альтернатив для групи експертів $j \in N$ з індивідуальними повними НВП $R_j, j \in N$, можна використати об'єднання $R = \bigcup_{j \in N} R_j$ цих відношень з ФН $\mu_R(x) = \inf_{j \in N} \mu_{R_j}(x, y)$. Тоді згідно (2.2) множина недомінованих альтернатив на X набуде вигляду $P = \left\{x \in X\colon x\left(\bigcup_{j \in N} R_j\right)y,\ \forall y \in X\right\}$ з ФН

$$\mu_P(x) = \min_{y \in X} \max_{j \in N} \mu_{R_j}(x, y) \tag{2.4}$$

відповідно до (2.3). Слід зазначити, що такий підхід був використаний в [5, 6] для побудови множини Парето-оптимальних альтернатив, а мінімум в (2.4) існує згідно з Припущення 2.1.

Нечітка множина експертів. Нехай $\widetilde{N}$ на N є НМ експертів $j \in N$ з ФН $\mu_{\widetilde{N}}(j)$. Розглянемо питання, що є множиною недомінованих альтернатив на X

у разі, коли ми сформулюємо групове НВП $\bigcup_{\left(j,\mu_{\widetilde{N}}(j)\right)\in\widetilde{N}} R_j$ для НМ $\widetilde{N}=\left\{\left(j,\mu_{\widetilde{N}}(j)\right): j\in N\right\}$ експертів $j \in N$ з відповідними індивідуальними НВП $R_j, j \in N$. Іншими словами, якою буде множина недомінованих альтернатив X, якщо експерти $j \in N$ беруть участь у прийнятті рішення з відповідними ступенями належності $\mu_{\widetilde{N}}(j), j \in N$? Для запису такої множини недомінованих альтернатив використовуємо позначення $\widetilde{P}=\left\{x\in X: x\left(\bigcup_{\left(j,\mu_{\widetilde{N}}(j)\right)\in\widetilde{N}} R_j\right)y,\ \forall y\in X\right\}$.

Основна ідея підходу. Природне узагальнення P недомінованих альтернатив на випадок НМ $\widetilde{N}$ експертів призводить до припущення про те, що $\widetilde{P}=\left\{x\in X: x\left(\bigcup_{\left(j,\mu_{\widetilde{N}}(j)\right)\in\widetilde{N}} R_j\right)y,\ \forall y\in X\right\}$ матиме ФН подібну (2.4) такого виду

$$\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(x)=\min_{y\in X}\ \max_{\left(j,\mu_{\widetilde{N}}(j)\right)\in\widetilde{N}} \mu_{R_j}(x,y),\ x\in X. \tag{2.5}$$

Для дослідження (2.5) застосуємо відомий підхід [7] задання НМ її α-перерізами. Позначимо

$$N_\alpha=\left\{j\in N: \mu_{\widetilde{N}}(j)\geq\alpha\right\} \tag{2.6}$$

α-переріз, $\alpha\in[0,1]$ НМ $\widetilde{N}=\left\{\left(j,\mu_{\widetilde{N}}(j)\right): j\in N\right\}$ експертів.

Зауваження 2.1. Нехай A є множиною значень ступенів належності $\mu_{\widetilde{N}}(j),\ j \in N$ НМ $\widetilde{N}=\left\{\left(j,\mu_{\widetilde{N}}(j)\right): j\in N\right\}$ експертів. Оскільки ступені належності різних експертів можуть бути однаковими, то $|A| \leq n$. Цілком зрозуміло, що для того щоб отримати різні α-перерізи $N_\alpha=\left\{j\in N: \mu_{\widetilde{N}}(j)\geq\alpha\right\}\neq\varnothing$ НМ $\widetilde{N}$, слід замінити умову $\alpha\in[0,1]$ на $\alpha\in A$.

Для фіксованого $\hat{x} \in X$ та $\forall\alpha \in A$ розглянемо множину

$$D_\alpha(\hat{x})=\left\{(y(\alpha),j(\alpha)): \mu_{R_{j(\alpha)}}(\hat{x},y(\alpha))=\min_{y\in X}\ \max_{j\in N_\alpha}\mu_{R_j}(\hat{x},y)\right\}. \tag{2.7}$$

Ця множина складається з пар $(y(\alpha), j(\alpha))$, в яких $y(\alpha) \in X$ мінімізує функцію $\mu_{R_j}(\hat{x},y)$ за $y \in X$ і $j(\alpha)$ максимізує $\mu_{R_j}(\hat{x},y(\alpha))$ за $j \in N_\alpha$. У цьому разі оптимум (мінімакс) дорівнює $\mu_{R_{j(\alpha)}}(\hat{x},y(\alpha))$.

Зауваження 2.2. Згідно з зауваженням 2.1 $N_\alpha \neq \emptyset$. Також завдяки Припущенню 2.1 множина $D_\alpha(\hat{z})$ оптимальних розв'язків мінімаксної задачі (2.5) не порожня, тобто $D_\alpha(\hat{x}) \neq \emptyset$.

Позначимо $P(\alpha) = \left\{\left(x, \mu_{P(\alpha)}(x) : x \in X\right)\right\}$ НМ на X з ФН

$$\mu_{P(\alpha)}(x) = \min_{y \in X} \max_{j \in N_\alpha} \mu_{R_j}(x, y), \ x \in X . \tag{2.8}$$

Ця функція набуває значення мінімаксу у (2.7) при $x = \hat{x}$, тобто $\mu_{P(\alpha)}(\hat{x}) = \min_{y \in X} \max_{j \in N_\alpha} \mu_{R_j}(\hat{x}, y)$. З (2.4) і (2.6) випливає, що множина

$$P(\alpha) = \left\{x \in X : x\left(\bigcup_{j \in N_\alpha} R_j\right)y, \ \forall y \in X\right\} \tag{2.9}$$

збігається з множиною недомінованих альтернатив на X для експертів $j \in N_\alpha$, де N_α є α-перерізом вхідної НМ $\widetilde{N}$ експертів. Далі називатимемо $P(\alpha)$ множиною недомінованих альтернатив рівня $\alpha \in A$. При фіксованому $\hat{x} \in X$ вираз (2.5) можна класифікувати як мінімаксну задачу оптимізації функції $\mu_{R_j}(\hat{x}, y)$ на чіткій множині X (за змінною y) та на НМ $\widetilde{N}$ (за змінною j). Тому для побудови ФН нечіткої множини розв'язків цієї задачі необхідно кожній парі $(y, j) \in X \times N$ приписати ступінь належності до цієї множини. Таким чином, роз'язком задачі (2.5) Називатимемо НМ $D(\hat{x})$ на $X \times N$ *з ФН*

$$\mu_{D(\hat{x})}(y, j) = \begin{cases} \max\left\{\alpha \in A : (y, j) \in D_\alpha(\hat{x})\right\}, & (y, j) \in \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha(\hat{x}); \\ 0, & (y, j) \notin \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha(\hat{x}); \end{cases} \tag{2.10}$$

де множина $D_\alpha(\hat{x})$, $\alpha \in A$ визначені за (2.7). Нечіткому розв'язку $D(\hat{x})$ відповідає НМ значень $\widetilde{M}_{\widetilde{P}} = \min_{y \in X} \max_{\left(j, \mu_{\widetilde{N}}(j)\right) \in \widetilde{N}} \mu_{R_j}(\hat{x}, y), y \in X$ з ФН $\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u), u \in [0, 1]$, де закритий інтервал [0, 1] є універсальною множиною НМ значень $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$ мінімакса (2.5). Сама НМ $\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})$ є образом НМ $D(\hat{x})$ при відображенні (y, j) $\rightarrow \mu_{R_j}(\hat{x}, y)$ з $X \times N$ в [0, 1]. Відповідно до [17] отримаємо

$$\mu_{\widetilde{M}_{\widetilde{P}}(\hat{x})}(u) = \max_{(y, j) \in \left[\mu_{R_j}(\hat{x}, y)\right]^{-1}(u)} \mu_{D(\hat{x})}(y, j), \text{ де } \left[\mu_{R_j}(\hat{x}, y)\right]^{-1}(u) = \left\{(y, j) \in X \times N : \mu_{R_j}(\hat{x}, y) = u\right\}.$$

Звідки

$$\mu_{\tilde{M}_{\tilde{P}}(\hat{x})}(u)=\begin{cases}\max\limits_{y\in X,\, j\in N}\left\{\mu_{D(\hat{x})}(y,j):\mu_{R_j}(\hat{x},y)=u\right\}, & \exists(y,j)\in X\times N:\mu_{R_j}(\hat{x},y)=u;\\ 0, & \textit{у протилежному випадку};\end{cases} \tag{2.11}$$

Розглянемо властивості НМ $\widetilde{M}_{\tilde{P}}(\hat{x})$.

Властивість 2.1. Носій НМ $\widetilde{M}_{\tilde{P}}(\hat{x})$ має форму

$$supp\widetilde{M}_{\tilde{P}}(\hat{x})=\left\{u\in[0,\,1]:\,u=\mu_{P(\alpha)}(\hat{x}),\,\alpha\in A\right\}. \tag{2.12}$$

Властивість 2.2. Функція належності НМ $\widetilde{M}_{\tilde{P}}(\hat{x})$ має форму

$$\mu_{\tilde{M}_{\tilde{P}}(\hat{x})}(u)=\max_{\alpha\in A}\left\{\alpha\,:\,u=\mu_{P(\alpha)}(\hat{x})\right\},\,u\in supp\widetilde{M}_{\tilde{P}}(\hat{x}).$$

Таким чином, для фіксованих $\hat{x}\ \in X$ значення $\widetilde{M}_{\tilde{P}}(\hat{x})$ утворюють НМ на [0, 1] з ФН $\mu_{\widetilde{M}_{\tilde{P}}(x)}(u),\, u\in[0,1]$. Згідно (2.5) $\widetilde{M}_{\tilde{P}}(x)$ є ФН нечіткої множини $\tilde{P}$. Тому можна дійти до висновку, що $\tilde{P}$ є НМ на X з ФН, значення якої також утворюють НМ. Отже за [8] $\tilde{P}$ є НМТ-2. За [9] НМТ-2 має форму $\tilde{P}=\left\{\left(x,\,\widetilde{M}_{\tilde{P}}(x)\right):\,x\in X\right\}=\left\{\left(x,\,\left\{\left(u,\,\mu_{\tilde{M}_{\tilde{P}}(x)}(u)\right):\,u\in J_x\subseteq[0,\,1]\right\}\right):x\in X\right\}$, де $\mu_{\widetilde{M}_{\tilde{P}}(x)}(u), u\in J_x\subseteq$ [0, 1] є функцією належності НМ $\widetilde{M}_{\tilde{P}}(x)=\left\{\left(u,\,\mu_{\tilde{M}_{\tilde{P}}(x)}(u)\right):\,u\in J_x\subseteq[0,\,1]\right\}$ значень нечіткого ступеня належності елемента $x\ \in X$ НМТ-2 $\tilde{P}$. В цьому виразі $J_x=supp\widetilde{M}_{\tilde{P}}(x)$ є множиною первинних ступенів належності елемента $x\ \in X$. Відповідно до [10] НМТ-2 $\tilde{P}$ на X можна також характеризувати функцією належності типу-2 (ФНТ-2) такого вигляду

$$\mu_{\tilde{P}}(x,\,u)=\begin{cases}\mu_{\tilde{M}_{\tilde{P}}(x)}(u),\; u\in J_x;\\ 0, \quad u\in J_x.\end{cases}$$

Значення ФНТ-2 $\mu_{\tilde{P}}(x,u)$ називається вторинною оцінкою, або вторинним ступенем належності, первинного ступеня належності $u\in[0,1]$ альтернативи

$x \in X$. Тоді $\tilde{P} = \left\{ \left((x,\, u),\, \mu_{\tilde{P}}(x,\, u) \right) : x \in X,\, u \in [0,\, 1] \right\}$ і таку форму будемо використовувати далі.

Недоміновані альтернативи для нечіткої множини експертів. Ця форма дозволяє нам ввести наступне поняття.

Означення 2.1. Множиною $\tilde{P} = \left\{ x \in X \colon x \left(\bigcup_{\left(j,\, \mu_{\tilde{N}}(j)\right) \in \tilde{N}} R_j \right) y,\ \forall y \in X \right\}$ недомінованих альтернатив для НМ $\tilde{N}$ експертів $j \in N$ називається НМТ-2

$$\tilde{P} = \left\{ \left((x,\, u),\, \mu_{\tilde{P}}(x,\, u) \right) : x \in X,\, u \in [0,\, 1] \right\} \tag{2.13}$$

з ФНТ-2

$$\mu_{\tilde{P}}(x,\, u) = \begin{cases} \max\limits_{\alpha \in A} \left\{ \alpha : u = \mu_{P(\alpha)}(x) \right\},\ u \in J_x; \\ \qquad 0, \qquad\qquad u \notin J_x. \end{cases} \tag{2.14}$$

В цьому означенні

$$J_x = \left\{ u \in [0,\, 1] \colon u = \mu_{P(\alpha)}(x),\, \alpha \in A \right\} \tag{2.15}$$

є множиною первинних ступенів $u \in [0, 1]$ належності із строго додатними вторинними оцінками $\mu_{\tilde{P}}(x,\, u)$ (за (2.12) J_x є носієм $supp\tilde{M}_{\tilde{P}}(x)$ НМ $\tilde{M}_{\tilde{P}}(x)$ значень максиміна (2.5));

$$\mu_{P(\alpha)}(x) = \min_{y \in X} \max_{j \in N_\alpha} \mu_{R_j}(x,\, y) \tag{2.16}$$

є функцією належності НМ

$$P(\alpha) = \left\{ \left(x,\, \mu_{P(\alpha)}(x) : x \in X \right) \right\} \tag{2.17}$$

недомінованих альтернатив $\alpha \in A$, яка є множиною недомінованих альтернатив для α-перерізу N_α НМ $\tilde{N}$ експертів, тому згідно (2.9) $P(\alpha) = \left\{ x \in X : x \left(\bigcup_{j \in N_\alpha} R_j \right) y,\ \forall y \in X \right\}$;

$$N_\alpha = \left\{ j \in N \colon \mu_{\tilde{N}}(j) \ge \alpha \right\} \tag{2.18}$$

є α-перерізом НМ $\widetilde{N}$ експертів, $\alpha \in A$ і A є множиною значень ступенів належності $\mu_{\widetilde{N}}(j)$, $j \in N$ НМ $\widetilde{N} = \left\{\left(j, \mu_{\widetilde{N}}(j)\right) : j \in N\right\}$ експертів відповідно до Зауваження 2.1.

Декомпозиція множини недомінованих альтернатив. Слід зазначити, що користуватися Означенням 2.1 безпосередньо досить незручно. Крім цього інтерпретація НМТ-2 $\widetilde{P}$ недомінованих альтернатив недостатньо наочна. Тому давайте зараз спробуємо представити НМТ-2 $\widetilde{P}$ у зручній для розуміння та використання формі. Для цього застосуємо декомпозиційний підхід. Використаємо відомі поняття вкладених НМ типу-1 та типу-2 [9] та формалізуємо їх для НМТ-2 $\widetilde{P} = \left\{\left((x, u), \mu_{\widetilde{P}}(x, u)\right) : x \in X, u \in [0, 1]\right\}$.

Зауваження 2.3. Відповідно до [9] кожен елемент НМТ-2 слід розглядати як підмножину, тому сукупність представляється як класичне об'єднання її елементів у сенсі "звичайних" нечітких множин типу-1.

Нехай для $\forall x \in X$ задано єдиний первинний ступінь належності $u_x \in [0, 1]$ НМТ-2 $\widetilde{P}$. Вкладену НМТ-2 $\widetilde{P}^e$ в $\widetilde{P}$ визначимо як $\widetilde{P}^e$ $\widetilde{P}^e = \left\{\left(\left(x, u_x\right), \mu_{\widetilde{P}}\left(x, u_x\right)\right) : x \in X\right\}$. НМ $\left\{\left(x, u_x\right) : x \in X\right\}$ типу-1 назвемо вкладеною в НМТ-2 $\widetilde{P}$. Будемо використовувати НМТ-2 із сталими вторинними оцінками згідно з [22-24]. Нехай A є скінченною множиною додатних значень ступенів належності $\mu_{\widetilde{N}}(j)$, $j \in N$ НМ $\widetilde{N} = \left\{\left(j, \mu_{\widetilde{N}}(j)\right) : j \in N\right\}$ експертів згідно із Зауваженням 2.1. За (2.14) множина A включає всі додатні значення вторинних оцінок НМТ-2 $\widetilde{P}$.

Означення 2.2. Будемо говорити, що вкладена НМТ-2 $\widetilde{P}^e = \left\{\left(\left(x, u_x\right), \mu_{\widetilde{P}}\left(x, u_x\right)\right) : x \in X\right\}$ в $\widetilde{P}$ має сталу оцінку $\alpha \in A$, якщо $\forall x \in X$ існує єдина первинна ступінь належності $u_x(\alpha) \in [0, 1]$, на якої $\mu_{\widetilde{P}}\left(x, u_x(\alpha)\right) \equiv \alpha$, $\alpha \in A$.

Теорема 2.3. НМТ-2 недомінованих альтернатив може бути представленою сукупністю

$$\tilde{P} = \{(P(\alpha), \alpha) : \alpha \in A\} \tag{2.19}$$

вкладених НМТ-2 $\tilde{P}_{\alpha}^{e} = \{(P(\alpha), \alpha)\} = \left\{\left(\left(x, \mu_{P(\alpha)}(x)\right), \alpha\right) : x \in X\right\}$ із сталими вторинними оцінками $\alpha \in A$, ле вкладена НМ $P(\alpha) = \left\{x \in X : x\left(\bigcup_{j \in N_{\alpha}} R_j\right)y,\ \forall y \in X\right\}$ типу-1 є НМ недомінованих альтернатив на X для експертів $j \in N_{\alpha}$, $\alpha \in A$.

Таким чином, результуюча НМТ-2 $\tilde{P}$ недомінованих альтернатив може бути розкладеною за вторинними оцінками на набір відповідних НМ. До того ж Теорема 2.3 спрощує обчислення НМТ-2 $\tilde{P}$ недомінованих альтернатив. Якщо записати скінченну множину значень ступенів належності НМ $\tilde{N}$ експертів у вигляді $A = \left\{\alpha_1, \dots, \alpha_{|A|}\right\}$, то отриману НМТ-2 $\tilde{P}$ можна інтерпретувати відповідно до [11] в такий спосіб. Множина недомінованих альтернатив, що отримана за участю НМ $\tilde{N}$ експертів, може дорівнювати: $P(\alpha_1)$ зі ступенем істинності α_1; $P(\alpha_2)$ зі ступенем істинності α_2; …; $P(\alpha_{|A|})$ зі ступенем істинності $\alpha_{|A|}$.

Властивості НМТ-2 недомінованих альтернатив. НМТ-2 недомінованих альтернатив у формі $\tilde{P} = \{(P(\alpha), \alpha) : \alpha \in A\}$ має деякі корисні властивості, на які вказує Теорема 2.4.

Теорема 2.4. Нехай НМТ-2 $\tilde{P}$ недомінованих альтернатив представлено у формі (2.19). Тоді справедливі такі властивості:

1) для $\forall \alpha', \alpha'' \in A$, для яких виконується рівність $\alpha' \geq \alpha''$, справедливі відношення $N_{\alpha'} \subseteq N_{\alpha''}$ і $P(\alpha') \subseteq P(\alpha'')$;
2) якщо альтернатива $x \in X$ має ступінь належності $\mu_{P(\alpha*)}(x)$ НМ $P(\alpha*) = \left\{x \in X : x\left(\bigcup_{j \in N_{\alpha*}} R_j\right)y,\ \forall y \in X\right\}$ недомінованих альтернатив для α^*-перерізу $N_{\alpha*} = \left\{j \in N : \mu_{\tilde{N}}(j) \geq \alpha*\right\}$ НМ $\tilde{N}$ експертів, то x має первинний ступінь належності $u = \mu_{P(\alpha*)}(x)$ НМТ-2 недомінованих

альтернатив $\tilde{P}$ із вторинною оцінкою (ступенем істинності) не манше за α^*, тобто $\mu_{\tilde{P}}\left(x, \mu_{P(\alpha^*)}(x)\right) \geq \alpha^*$.

Таким чином, за Теоремою 2.4 більш широкі вкладені НМ недомінованих альтернатив (яким відповідають більш широкі перерізи НМ експертів) мають менші ступені істинності.

Наслідок 2.1. Припустимо, що альтернатива $x \in X$ має різні ступені належності $u', u'' \in J_x, u' < u''$ НМТ-2 $\tilde{P}$ із вторинними оцінками $\mu_{\tilde{P}}(x, u')$ і $\mu_{\tilde{P}}(x, u'')$, відповідно. Тоді $\mu_{\tilde{P}}(x, u') \geq \mu_{\tilde{P}}(x, u'')$.

Іншими словами, за Наслідком 2.1, більші первинні ступені належності альтернативи НМТ-2 $\tilde{P}$ недомінованих альтернатив мають менші ступені істинності.

Розділ 3. Програмна реалізація методу та його порівняльний аналіз.

3.1. Приклад задачі вибору альтернатив нечіткою множиною експертів

Проілюструємо розроблений підхід на прикладі.

Приклад 3.1. Розглянемо 4 альтернативи: Iphone 11, Iphone 13, Samsung Galaxy 22 та Xiaomi 13. Матриці індивідуальних переваг чотирьох експертів мають наступний вигляд:

$$C_{R_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix},\ C_{R_2}=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{R_3}=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 1 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix},\ C_{R_4}=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 1 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що нечітка множина компетентних експертів має такий вигляд: $\tilde{N}=\{(1;\,0{,}4),(2;\,0{,}4),(3;\,1),(4;\,1)\}$. $\tilde{N}$ є НМ на множині N експертів з ФН $\mu_{\tilde{N}}(1)=\mu_{\tilde{N}}(2)=0{,}4$ і $\mu_{\tilde{N}}(3)=\mu_{\tilde{N}}(4)=1$. Знайдемо множину недомінованих альтернатив для НМ $\tilde{N}$ експертів. Згідно із Зауваженням 2.1, множина значень ступенів належності НМ $\tilde{N}$ експертів має вигляд $A=\{0{,}4;\,1\}$. Спочатку для $\alpha=1$ побудуємо за (2.18) α-переріз $N_1=\{3,4\}$ НМ $\tilde{N}$ експертів. За (2.16) одержимо ФН $\mu_{P(1)}(x)=\min_{y\in X}\max\left\{\mu_{R_3}(x,y),\mu_{R_4}(x,y)\right\}$ НМ $P(1)=\left\{\left(x,\mu_{P(1)}(x)\right):\,x\in X\right\}$, яка є множиною недомінованих альтернатив на X для експертів $j\in N_1=\{3,4\}$. Отримаємо $\mu_{P(1)}(x_1)=\min_{y\in\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}\max\left\{\mu_{R_3}(x_1,y),\mu_{R_4}(x_1,y)\right\}=0{,}4$. Аналогічно одержимо $\mu_{P(1)}(x_2)=0{,}7,\ \mu_{P(1)}(x_3)=0{,}5$ та $\mu_{P(1)}(x_4)=0{,}5$. Тоді НМ недомінованих альтернатив $\alpha=1$ має вигляд

$$P(1)=\left\{\left(x_1;\,0{,}4\right),\left(x_2;\,0{,}7\right),\left(x_3;\,0{,}5\right),\left(x_4;\,0{,}5\right)\right\}.$$

Тепер для $\alpha = 0{,}4$ побудуємо за (2.18) α-переріз $N_{0,4} = \{1, 2, 3, 4\}$ НМ $\tilde{N}$ експертів. Далі за (2.16) одержимо ФН $\mu_{P(0,4)}(x) = \min_{y \in X} \max\left\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y), \mu_{R_3}(x, y), \mu_{R_4}(x, y)\right\}$.

НМ $P(0{,}4) = \left\{\left(x, \mu_{P(0,4)}(x)\right) : x \in X\right\}$ є множиною недомінованих альтернатив X для експертів $j \in N_{0,4} = \{1, 2, 3, 4\}$. Отримаємо $\mu_{P(0,4)}\left(x_1\right) = \min_{y \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}} \max\left\{\mu_{R_1}\left(x_1, y\right), \mu_{R_4}\left(x_2, y\right), \mu_{R_3}\left(x_1, y\right), \mu_{R_4}\left(x_1, y\right)\right\} = 0{,}7$.

Аналогічно одержимо $\mu_{P(0,4)}\left(x_2\right) = 0{,}7$, $\mu_{P(0,4)}\left(x_3\right) = 0{,}6$ та $\mu_{P(0,4)}\left(x_4\right) = 0{,}6$. Тоді НМ недомінованих альтернатив $\alpha = 0{,}4$ має вигляд

$$P(0{,}4) = \left\{\left(x_1; 0{,}7\right), \left(x_2; 0{,}7\right), \left(x_3; 0{,}6\right), \left(x_4; 0{,}6\right)\right\}.$$

Тепер за допомогою (2.14) побудуємо вкладені НМТ-2 зі сталими вторинними оцінками $\alpha = 1$ та $\alpha = 0{,}4$. Вони матимуть вигляд $\tilde{P}_1^e = \{(P(1); 1)\} = \left\{\left(\left(x_1; 0{,}4\right); 1\right), \left(\left(x_2; 0{,}7\right); 1\right), \left(\left(x_3; 0{,}5\right); 1\right), \left(\left(x_4; 0{,}5\right); 1\right)\right\}$ та $\tilde{P}_{0,4}^e = \{(P(0{,}4); 0{,}4)\} = \left\{\left(\left(x_1; 0{,}7\right); 0{,}4\right), \left(\left(x_2; 0{,}7\right); 0{,}4\right), \left(\left(x_3; 0{,}6\right); 0{,}4\right), \left(\left(x_4; 0{,}6\right); 0{,}4\right)\right\}$ відповідно. Звідси за (2.19) отримаємо НМТ-2 $\tilde{P} = \{(P(1); 1), (P(0{,}4); 0{,}4)\}$ недомінованих альтернатив. НМТ-2 $\tilde{P}$ можна інтерпретувати в такий спосіб. Множина недомінованих альтернатив на $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ для НМ $\tilde{N} = \{(1; 0{,}4), (2; 0{,}4), (3; 1), (4; 1)\}$ експертів дорівнює $P(1) = \left\{\left(x_1; 0{,}4\right), \left(x_2; 0{,}7\right), \left(x_3; 0{,}5\right), \left(x_4; 0{,}5\right)\right\}$ зі ступенем істинності 1, та $P(0{,}4) = \left\{\left(x_1; 0{,}7\right), \left(x_2; 0{,}7\right), \left(x_3; 0{,}6\right), \left(x_4; 0{,}6\right)\right\}$ зі ступенем істинності 0,4.

З отриманих результатів можна зробити такі висновки. Якщо брати до уваги тільки думки експертів зі ступенем істинності 1, а це третій та четвертий експерти, раціональним треба вважати вибір альтернативи x_2 .

Якщо ми приймаємо думку експертів з рівнем довіри від 0,4, тобто в даному прикладі це всі експерти, то раціональним треба вважати вибір альтернатив x_1 та x_2 .

В цьому прикладі множину недомінованих $P(1)$ можна також використати для уточнення раціонального вибору альтернативи з множини недомінованих альтернатив $P(0,4)$. Тобто при наявності двох раціональних для вибору альтернатив на нижчому рівні довіри до експертів, для одностайного вибору альтернативи можна розглянути раціональну для вибору альтернативу на вищому рівні довіри до експертів. В нашому, внаслідок такої дії альтернативу можна вважати раціональноюю для вибору в множині недомінованих альтернатив $P(0,4)$.

3.2. Порівняння з відомими методами вибору недомінованих альтернатив.

Розглянемо роботу методу [1] на цьому ж прикладі та порівняємо отримані результати. Маємо таку ж саму множину з 4 експертів та 4 альтернатив. Ваги експертів залишаються також незмінними.

Першим етапом буде побудування відношення Q_1 , що є перетином всіх відношень переваги експертів, тобто матиме вигляд $Q_1 = C_{R_1} \cap C_{R_2} \cap C_{R_3} \cap C_{R_4}$. Побудуємо таке відношення:

$$\mu_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,6 & 0,5 & 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$$

і знайдемо підмножину недомінованих альтернатив в множині $\left(X, \mu_{Q_1}\right)$:

$$\mu_{Q_1}^{н.д}(x_i) = \left(0,8;\ 0,8;\ 0,9;\ 0,7 \right).$$

Для побудови другого відношення нам необхідно нормувати значення ваг експертів. Отримаємо такі нормовані значення:

$\tilde{N} = \{(1;\ 0,14), (2;\ 0,14), (3;\ 0,36), (4;\ 0,36)\}$.   Побудуємо відношення $Q_2 = 0,14\left(\mu_1(x_i, x_j) + \mu_2(x_i, x_j)\right) + 0,36\left(\mu_3(x_i, x_j) + \mu_4(x_i, x_j)\right)$:

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0,49 & 0,44 & 0,72 \\ 0,62 & 1 & 0,65 & 0,58 \\ 0,69 & 0,51 & 1 & 0,59 \\ 0,41 & 0,58 & 0,52 & 1 \end{pmatrix}$$

і знайдемо підмножину недомінованих альтернатив в множині $\left(X, \mu_{Q_2}\right)$:

$$\mu_{Q_2}^{н.д}\left(x_i\right) = \left(\ 0{,}75;\ \ 1;\ \ 0{,}86;\ \ 0{,}69\ \right).$$

Результуюча множина недомінованих альтернатив буде перетином множин $\mu_{Q_1}^{н.д.}$ та $\mu_{Q_2}^{н.д.}$:

$$\mu^{н.д.}\left(x_i\right) = (0{,}75;\ 0{,}8;\ 0{,}86;\ 0{,}69).$$

Звідси можна зробити висновок, що в даному прикладі раціональним треба вважати вибір третьої альтернативи, тобто тієї, яка має найбільшу ступінь недомінованості.

Порівняємо отримані результати з результатами прикладу 3.1.

За новим методом раціональною до вибору альтернативами є дві альтернативи, а саме перша та друга зі ступенем істинності 0,4, та друга альтернатива зі ступенем істинності 1. Якщо обирати одну альтернативу в якості рішення цієї задачі, краще обрати другу альтернативу, так як можна вважати, що при невизначеності в множині раціональних до вибору альтернатив з нижчим ступенем істинності, можна використовувати раціональні до вибору альтернативи з вищим ступенем належності. В такому випадку раціональною до вибору буде друга альтернатива. В цей час за методом [1] треба обрати третю альтернативу. Порівняємо їх індивідуальні переваги кожного з експертів та подивимось, яка альтернатива більш вірогідно є рекомендованою до вибору.

Перший експерт встановив для цих двох альтернатив однакові відношення, а саме 0,6. Всі інші експерти віддали перевагу другій альтернативі над третьою з такими значеннями: 0,7 до 0,5, 0,6 до 0,5 та 0,7 до 0,5. Як видно після попарного порівняння, три з чотирьох експертів віддаються перевагу другій альтернативі, з чого можна зробити висновок, що новий метод видає більш коректні результати.

3.3. Програмна реалізація методу

Для програмної реалізації методу розв’язання задачі вибору альтернатив нечіткою множиною експертів була використана мова програмування Python та середовище розробки Jupyter. Для роботи з матрицями переваг експертів була використана бібліотека Numpy.

Програма отримує на вхід дані про кількість експертів, їх ступені належності, матриці відношення переваг кожного з експертів. В результаті роботи, програма видає матриці переваг кожного з експертів, розбиття на множини рівня, а також підмножини недомінованих альтернатив з яких обирає раціональну до вибору альтернативу. Перейдемо до роботи програми.

На першому кроці програма запитує кількість експертів та їх ступені довіри через вікно вводу:

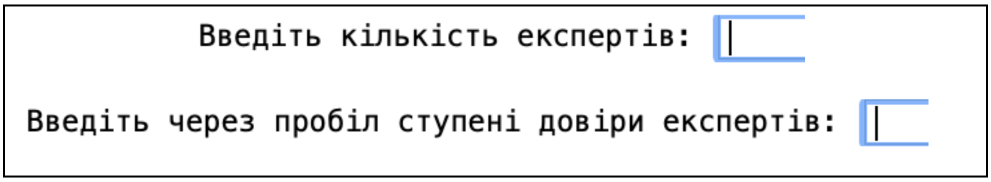

Рис. 3.1. Запит даних про кількість експертів та їх ступені довіри.

Наступним кроком програма запитує кількість альтернатив:

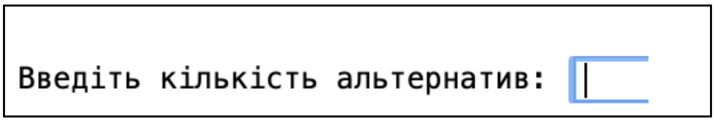

Рис. 3.2. Запит даних про кількість альтернатив.

Потім програма запитує вектори переваг кожної альтернативи для кожного експерту:

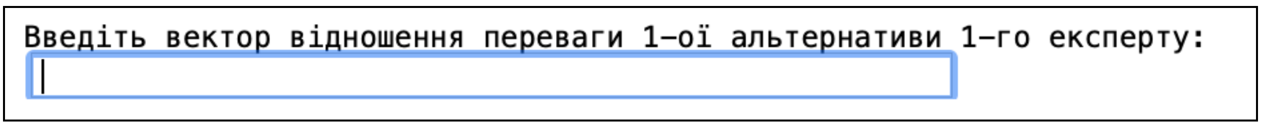

Рис. 3.3. Запит векторів переваги кожної альтернативи для кожного експерту (на даному рисунку наведений приклад запиту вектору переваг для 1-ої альтернативи 1-го експерту).

На цьому процедура введення даних задачі завершується. Введемо дані задачі з прикладу 3.1, подивимось на результат роботи програми та порівняємо їх з результатами при ручному розв’язанні прикладу.

На першому кроці програма демонструє введені користувачем матриці переваг кожного експерту. Для нашого прикладу вони матимуть такий вигляд:

```
Матриця відношення переваг 1-го експерту:
[1.  0.9 0.4 0.8]
[0.3 1.  0.6 0.2]
[0.7 0.6 1.  0.4]
[0.5 0.9 0.6 1. ]
Матриця відношення переваг 2-го експерту:
[1.  0.3 0.7 0.5]
[0.8 1.  0.7 0.6]
[0.9 0.5 1.  0.7]
[0.6 0.4 0.3 1. ]
Матриця відношення переваг 3-го експерту:
[1.  0.6 0.4 0.9]
[0.6 1.  0.6 0.7]
[0.6 0.5 1.  0.6]
[0.2 0.7 0.5 1. ]
Матриця відношення переваг 4-го експерту:
[1.  0.3 0.4 0.6]
[0.7 1.  0.7 0.6]
[0.7 0.5 1.  0.6]
[0.5 0.4 0.6 1. ]
```

Рис. 3.4. Вивід матриці переваги для кожного експерту.

Настуним кроком демонструються множини рівня, та альтернативи, які до них увійшли. Для нашого прикладу вони матимуть такий вигляд:

```
Множини рівня:
N(0.4) = {x1, x2, x3, x4}
N(1.0) = {x3, x4}
```

Рис. 3.5. Вивід множин рівня та альтернатив, які до них увійшли.

Фінальним кроком виводяться множини недомінованих альтернатив та раціональна до вибору альтернатива. В нашому випадку – це:

```
P(0.4) = {(x1; 0.7), (x2; 0.7), (x3; 0.6), (x4; 0.6)}
Раціональна(і) до вибору альтернатива(и) є: x1.x2.

P(1.0) = {(x1; 0.4), (x2; 0.7), (x3; 0.5), (x4; 0.5)}
Раціональна(і) до вибору альтернатива(и) є: x2.
```

Рис. 3.6. Вивід множин недомінованих альтернатив та раціональної до вибору альтернативи з цих множин.

Як можемо бачити з отриманих результатів, програма працює коректно, виводячи рішення ідентичне до рішення в прикладі 3.1.

ВИСНОВКИ

В роботі наведено огляд з теорій нечітких множин та нечітких відношень типу-1 та типу-2. Були розглянуті їхні основні властивості та операції над ними.

Проведено аналіз відомого методу для розв’язання задачі колективного прийняття рішень множиною експертів, компетентність яких задається ваговими коефіцієнтами, показано його недоліки та штучну природу.

Запропоновано новий метод для розв’язання задачі колективного прийняття рішень нечіткою множиною експертів, продемонстровано його на прикладі, проведено порівняння отриманих результатів з відомим методом вагових коефіцієнтів, проаналізовані переваги розробленого методу.

Розроблено програмну реалізацію методу, яка може розв’язувати задачі з довільною кількістю експертів та матрицями індивідуальних переваг довільної розмірності.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981, 208 с.
2. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. – В сб. “Математика сегодня“. – М.: Знание, 1974, с. 5 – 49.
3. Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001.
4. Herrera-Viedma E., Herrera F., Chiclana, F. Luque, M. Some issues on consistency offuzzy preference relations. Eur. J. Oper. Res. 2004. Vol. 154, N 1. P. 98–109.
5. Mashchenko S. O. Generalization of Germeyer's criterion in the problem of decisionmaking under the uncertainty conditions with the fuzzy set of the states of nature. Journal ofAutomation and Information Sciences. 2012. Vol.44, N.10, P. 26–34.
6. Mashchenko S.O., Bovsunivskyi O.M. Effective alternatives of decision makingproblems with the fuzzy set of preference relations. Journal of Automation and InformationSciences. 2013. Vol. 45, N. 11. 32–42.
7. Zadeh L. The concept of a linguistic variable and its application to approximatereasoning - I. Inform. Sci. 1975. Vol. 8, N.3. P. 199–249.
8. Zadeh L. A. Quantitative fuzzy semantics. Inform. Sci. 1971. Vol. 3, N.2. P. 159–176.
9. Mendel J. M., John R. I. Type-2 fuzzy sets made simple. IEEE Transactions on FuzzySystems. 2002. Vol. 10, N. 2. P. 117–127.

10. Harding J., Walker C., Walker E. The variety generated by the truth value algebra ofT2FSs. Fuzzy Sets and Systems. 2010. Vol. 161, N.5. P. 735–749.
11. Mendel J. M. Type-2 fuzzy sets: some questions and answers. IEEE Connections,Newsletter of the IEEE Neural Networks Society. 2003. Vol. 1, P. 10–13.

ДОДАТОК А

Код програми на Python

Програмний код, що використовувася для розв'язку задачі в розділі 3.3. Написаний мовою Python у програмному середовищі Jupyter notebook.

```
import numpy as np

num_experts = int(input("Введіть кількість експертів: "))
N = list(map(float,
        input("Введіть через пробіл ступені довіри експертів:
").strip().split()))[:num_experts]
num_options = int(input("Введіть кількість альтернатив: "))
experts = np.zeros((num_experts, num_options, num_options))

for i in range(num_experts):
    for j in range(num_options):
        a = list(map(float,
        input("Введіть вектор відношення переваги %i-ої альтернативи %i-го
експерту: " % ((j+1), (i+1))).strip().split()))[:num_options]
        experts[i][j] = a

same_lvl = []
same_lvl_del = []
nd_alternatives = []
counter = 0

for i in range(len(N)):
    new_lvl = []
    for j in range(len(N)):
```

```
        if N[i] <= N[j]:
            new_lvl.append(j)
    same_lvl.append(new_lvl)

for i in range(len(same_lvl)):
    for j in range(len(same_lvl)):
        if j != i:
            if same_lvl[i] == same_lvl[j] and same_lvl[j] not in same_lvl_del:
                same_lvl_del.append(same_lvl[j])
                del N[j - counter]
                counter += 1

for i in range(num_experts):
    print("Матриця відношення переваг %i-го експерту:" % (i+1))
    for j in range(num_options):
        print(experts[i][j])

print("Множини рівня:")
for i in range(len(same_lvl_del)):
    same_lvl.remove(same_lvl_del[i])

for i in range(len(same_lvl)):
    print("N(%.1f) = {" % N[i], end = "")
    for j in range(len(same_lvl[i])):
        if j == (len(same_lvl[i]) - 1):
            print("x%i" % (same_lvl[i][j] + 1), end = "")
        else:
            print("x%i, " % (same_lvl[i][j] + 1), end = "")
    print("}")
```

```
for i in range(len(same_lvl)):
    max_list = []
    for j in range(len(experts[i])):
        row_els = []
        for k in range(len(experts[i])):
            el_list = []
            for l in range(len(same_lvl[i])):
                if j != k:
                    el_list.append(experts[same_lvl[i][l]][j][k])
            if j != k:
                row_els.append(el_list)
        els_for_max_list = []
        for m in range(len(row_els)):
            els_for_max_list.append(max(row_els[m]))
        max_list.append(els_for_max_list)
    for n in range(len(max_list)):
        max_list[n] = min(max_list[n])
    nd_alternatives.append(max_list)

for i in range(len(nd_alternatives)):
    print("P(%.1f) = {" % N[i], end = "")
    for j in range(len(nd_alternatives[i])):
        if j != len(nd_alternatives[i]) - 1:
            print("(x%i; %.1f), " % (j + 1, nd_alternatives[i][j]), end = "")
        else:
            print("(x%i; %.1f)" % (j + 1, nd_alternatives[i][j]), end = "")
    print("}")
```