

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАКВАСІЮК ЮЛІЯ АНАТОЛІЇВНА

УДК 517.956

**УСЕРЕДНЕННЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ
В ГУСТИХ З'ЄДНАННЯХ**

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичної фізики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Мельник Тарас Анатолійович,
Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, професор кафедри математичної фізики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Бігун Ярослав Йосипович,
Чернівецький національний університет імені
Юрія Федьковича, завідувач кафедри прикладної
математики факультету математики та інформатики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Бугрій Олег Миколайович,
Львівський національний університет імені
Івана Франка, доцент кафедри диференціальних
рівнянь механіко-математичного факультету.

Захист відбудеться «3» жовтня 2016 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України за адресою: 03022, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий «2» вересня 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради

Моклячук М.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Відомо, що деякі властивості матеріалів залежать від їх геометричної структури. Тому вивчення впливу мікроструктури матеріалу дозволяє глибше зрозуміти процеси, які відбуваються в тілах з таких матеріалів, покращити їх корисні властивості та зменшити небажані ефекти. Математичними моделями цих процесів є крайові задачі в областях складної структури: перфорованих областях, областях з швидко осцилюючою межею, з'єднанням тонких областей різної конфігурації, густих з'єднаннях тощо. Масштаб мікроструктури системи відображається наявністю деякого малого параметра в таких математичних моделях.

Часто складно або практично неможливо розв'язати ці задачі безпосередньо, використовуючи аналітичні або чисельні методи. Найбільш ефективними інструментами дослідження таких задач є асимптотичні методи теорії усереднення. Теорія усереднення для звичайних диференціальних рівнянь була в основному розроблена М.М.Криловим, М.М.Боголюбовим, Ю.О.Митропольським, А.М. Самойленком та їхніми учнями. Теорія усереднення для диференціальних рівнянь в частинних похідних почала розвиватися в 70-80 роки минулого століття в працях М.С. Бахвалова, В.В. Жикова, В.О. Марченка, О.А. Олійник, І.В. Скрипника, Є.Я. Хруслова, A. Bensoussan, D. Cioranescu, E. De Giorgi, J. L. Lions, F. Murat, G. C. Papanicolau, E. Sanchez-Palencia, S. Spagnolo, L. Tartar, і зараз продовжує активно розвиватися в роботах О.А. Ковалевського, Т.А. Мельника, С.О. Назарова, С.Є. Пастухової, Г.В. Сандракова, Г.О. Чечкіна, Т.А. Шапошнікової, P. Donato та інших як українських так і зарубіжних математиків.

Одним з типів крайових умов, які можуть бути заданими на межах областей складної структури, є умови Сіньоріні. Вперше така задача, відома тепер як задача Сіньоріні, була поставлена самим Сіньоріні в 1959 році для систем теорії пружності. У задачі Сіньоріні є два альтернативних набори крайових умов, які містять не тільки рівності, а також нерівності. Причому апіорі невідомо, який з двох наборів умов виконується для кожної точки. Умови Сіньоріні зустрічаються в багатьох прикладних задачах: в гідрогеології, в теорії пластичності, в теорії розповсюдження тріщин у пружних середовищах, в задачах оптимального керування, і т.п. Цікаві асимптотичні властивості виявлено при дослідженні крайових задач Сіньоріні в перфорованих областях.

Основним інструментарієм дослідження крайових задач Сіньоріні є теорія варіаційних нерівностей, основи якої були закладені в минулому столітті в фундаментальних роботах Ж.-Л. Люнса, Г. Стампаккьї, Р. Гловінскі, Р. Тремольєрі, Г.Дюво, Д. Кіндерлерера, А. Фрідмана та інших. За допомогою цієї теорії доводяться теореми існування та єдиності розв'язків крайових задач Сіньоріні.

У багатьох галузях природознавства застосовуються конструкції у формі густих з'єднань. Густим з'єднанням типу $k:p:d$ називається область в \mathbb{R}^n , яка складається із деякої області (тіло густого з'єднання) та великої кількості тонких областей, що ε -періодично розташовані вздовж деякої множини (зона приєднання) на межі тіла густого з'єднання. Тип $k:p:d$ густого з'єднання відповідає граничним розмірностям ($\varepsilon \rightarrow 0$) тіла з'єднання, зони приєднання та кожної з приєднаних тонких областей відповідно.

Різні конструкції, які мають форму густого з'єднання (див. Рис.1 та Рис.2), успішно використовуються в нанотехнологіях, мікротехніці, сучасних інженерних конструкціях, а також багатьох інших фізичних та біологічних системах, наприклад, в ефективних датчиках, густих абсорберах для очищення води від шкідливих органічних домішок тощо.

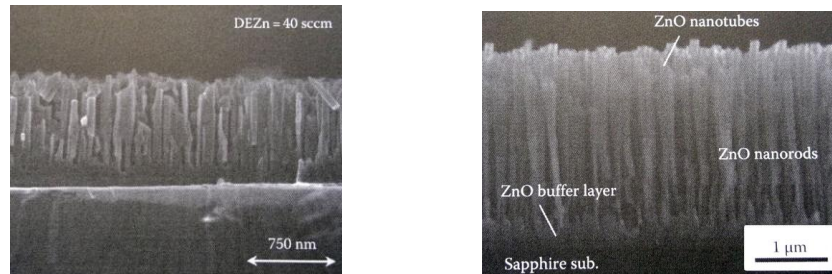


Рис. 1. Наноструктури у формі густих з'єднань



Рис. 2. Теплові радіатори у формі густих з'єднань

Першими роботами з дослідження крайових задач у густих з'єднаннях були праці Є.Я.Хрусова (1968) та його спільні роботи з В.П.Котляровим (1970), В.О.Марченком (1974) та Г.В.Сузіковим (1976).

В кінці минулого і на початку нинішнього століття Т.А.Мельником та С.О.Назаровим дана класифікація густих з'єднань, розроблено строгі математичні методи аналізу крайових задач в густих з'єднаннях різних типів. У цих роботах показано, що властивості розв'язків істотно залежать від типу густого з'єднання і від типу крайових умов, заданих на межах тонких областей.

В крайових задачах в густих з'єднаннях вивчається асимптотична поведінка розв'язків при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто коли кількість тонких приєднаних областей необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

Успішні застосування структур, що мають форму густих з'єднань, стимулювали активне вивчення крайових задач з сильно контрастними фізичними властивостями. Зокрема, в останні роки з'явилося багато робіт, присвячених асимптотичному аналізу крайових задач в густих багаторівневих з'єднаннях, в каскадних з'єднаннях, в густих з'єднаннях з розгалуженою структурою.

Огляд наукової літератури свідчить, що відсутні роботи, де б розглядалися задачі в густих з'єднаннях з крайовими умовами типу Сіньоріні. Якраз дана дисертація присвячена вивченню таких задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка в рамках державних бюджетних наукових тем № 06 БФ 038-01 «Якісні та аналітичні методи дослідження і моделювання нелінійних систем та фізико-механічних полів» (керівник: академік НАН України, професор М.О. Перестюк, номер державної реєстрації 0106U005863) та № 11 БФ 038-04 «Варіаційні та асимптотичні методи в задачах механіки суцільних середовищ» (керівник: д.ф.-м.н., професор О.С. Лимарченко, номер державної реєстрації 0111U004956).

Мета і завдання дослідження. *Мета досліджень* — вивчення асимптотичної поведінки розв'язків еліптичних та параболічних варіаційних нерівностей, як лінійних, так і квазілінійних в густих з'єднаннях різних типів, коли кількість компонент густого з'єднання необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

Об'єкт досліджень. *Об'єкт досліджень* — еліптичні та параболічні (як лінійні, так і квазілінійні) варіаційні нерівності в густих з'єднаннях різних типів.

Предмет досліджень. *Предмет досліджень* — асимптотична поведінка розв'язків еліптичних та параболічних варіаційних нерівностей в густих з'єднаннях різних типів при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Методи дослідження. Для розв'язання сформульованих задач дисертаційної роботи використовуються методи теорії усереднення диференціальних рівнянь із частинними похідними, методи асимптотичного та нелінійного функціонального аналізу. При доведенні апріорних оцінок для параболічних крайових задач використовується метод штрафу. При доведенні теорем збіжності для всіх задач використовується метод спеціальних інтегральних тотожностей (Мельник Т. А.).

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації вперше одержано результати по усередненню варіаційних нерівностей як лінійних, так і нелінійних, в густих з'єднаннях різних типів. Основні результати, які визначають новизну і виносяться на захист такі:

1. Доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі Сіньоріні в плоскому густому з'єднанні типу 2:1:1.
2. Доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.
3. Доведено теорему збіжності для розв'язку лінійної параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 2:1:1.
4. Доведено теорему збіжності для розв'язку лінійної параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.
5. Доведено теорему збіжності для розв'язку квазілінійної еліптичної крайової задачі в багаторівневому густому з'єднанні типу 3:2:1 та досліджено вплив нелінійних сингулярно збурених крайових умов на асимптотичну поведінку розв'язку.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер та є вагомим внеском у теорію усереднення диференціальних рівнянь із частинними похідними в густих з'єднаннях. Вони мо-

жуть бути застосовані в різноманітних прикладних задачах, які моделюють фізичні та біологічні процеси в тонких складних конструкціях, які мають форму густих з'єднань. Результати можуть бути використані для подальших досліджень в Інституті НАН України, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником працях Т.А. Мельнику належать постановка задач, визначення загальної схеми дослідження та аналіз отриманих результатів. Крім того, в праці [2] професору В.Л. Вендланду належать результати пунктів 7-10.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на наступних наукових семінарах, міжнародних та всеукраїнських конференціях:

1. Науковий семінар кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка "Асимптотичні та аналітичні методи математичної фізики" (керівники: д. ф.-м. н., професор Т. А. Мельник, д. ф.-м. н., професор В. Г. Самойленко), Київ, 6 жовтня 2009 р., 3 квітня 2012 р., 27 травня 2015 р., 26 травня 2016 р.
2. Навчально-науковий семінар кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника "Прикладний нелінійний аналіз" (керівники: д. ф.-м. н., професор А.В. Загороднюк, к. ф.-м. н., доцент С.В. Шарин), Івано-Франківськ, 26 вересня 2012 р.
3. Семінар механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка "Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь" (керівники: професор М. І. Іванчов, професор П. І. Каленюк, член-кореспондент НАН України, професор Б.Й. Пташник), Львів, 5 жовтня 2012 р.
4. Четверта всеукраїнська наукова конференція: Нелінійні проблеми аналізу, 10-12.09.2008, м. Івано-Франківськ.
5. Second international conference for young mathematicians on differential equations and applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii, Donetsk, 11-14.11.2008.
6. Humboldt Kolleg " Mathematics and Life Sciences: Possibilities, Interlacements and Limits" , 05-08.08.2010, Kyiv.
7. Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, 28-29.04.2011, м. Київ.
8. П'ята всеукраїнська наукова конференція: Нелінійні проблеми аналізу, 19-21.09.2013, м. Івано-Франківськ.
9. Міжнародна математична конференція: Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки, 23-24.04.2014, м. Київ.
10. Міжнародна міждисциплінарна конференція молодих вчених: Шевченківська весна, 1-3.04.2015, м. Київ.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 5-ти статтях у наукових фахових виданнях [1-5] та додатково висвітлені в препринті [6], і 7 тезах доповідей на математичних конференціях [7-13].

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 143 сторінки. Список використаних джерел містить 116 найменувань. Дисертація містить 5 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, висвітлено наукову новизну і практичне значення отриманих результатів, наведено відомості про публікації, особистий внесок здобувача і ступінь апробації роботи.

У **першому розділі** подано огляд літератури за темою дисертації.

У **другому розділі** доведено теореми збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язків лінійних еліптичних крайових задач Сіньоріні в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1.

У підрозділі 2.1 розглядається плоске густе з'єднання Ω_ε типу 2:1:1 (див. Рис. 3), яке складається з тіла

$$\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < \gamma(x_1)\},$$

де $\gamma \in C^1([0, a])$, та великої кількості тонких стержнів

$$G_j(\varepsilon) = \left\{ x : \left| \frac{x_1}{\varepsilon} - \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \frac{h}{2}, x_2 \in [-l, 0] \right\}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

тобто $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon$, де $G_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^{N-1} G_j(\varepsilon)$. Тут a, l - додатні дійсні числа; h - фіксо-

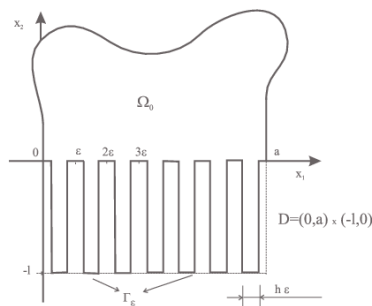


Рис. 3: Модельне плоске з'єднання типу 2:1:1.

ване число з інтервалу $(0, 1)$; N - велике натуральне число, тому величина $\varepsilon = \frac{a}{N}$ - малий дискретний параметр, який характеризує відстань між сусідніми тонкими стержнями, товщина яких рівна εh .

Позначимо через S_ε об'єднання вертикальних сторін тонких стержнів G_ε , а через Γ_ε - основи тонких стержнів.

В області Ω_ε розглядається задача

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon(x) = f(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) = 0, & x \in \Gamma_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon) \end{cases} \quad (1)$$

з неоднорідними крайовими умовами Сіньоріні на S_ε

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) \leq g(x), \quad \partial_\nu u_\varepsilon(x) \leq \varepsilon d(x), \\ (u_\varepsilon(x) - g(x))(\partial_\nu u_\varepsilon(x) - \varepsilon d(x)) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ - зовнішня нормальна похідна.

Вважаємо, що f, g, d -- задані функції, причому $f \in L^2(\Omega_1), d \in H^1(D_0), g \in H^1(D_0; I_l \cup I_0)$. Тут $\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{D_0}$, де $D_0 = (0, a) \times (-l, 0)$ -- прямокутник, який заповнюється тонкими стержнями в граничному переході, $H^1(D_0)$ - простір Соболева,

$$H^1(D_0; I_l \cup I_0) = \{v \in H^1(D_0) : v|_{I_l \cup I_0} = 0\}, \quad I_l = \{x : x_1 \in (0, a), x_2 = -l\}, \quad I_0 = \{x : x_1 \in (0, a), x_2 = 0\}$$

Нехай $K_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon) : \varphi \leq g \text{ м. с. на } S_\varepsilon\}$.

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1) -- (2) називається функція $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, яка задовольняє таку інтегральну нерівність

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi - u_\varepsilon) ds$$

для довільної функції $\varphi \in K_\varepsilon$.

У підрозділі 2.1 доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку задачі (1) -- (2). Введемо операцію продовження нулем для функцій з простору $H^1(G_\varepsilon)$:

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(x) = \begin{cases} y, & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in D_0 \setminus G_\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, що внаслідок прямолінійності меж тонких стержнів продовження \mathcal{Y}_ε належить анізотропному простору Соболева

$$H^{0,1}(D_0; I_l) = \left\{ v \in L^2(D_0) : \exists \text{ узагальнена похідна } \partial_{x_2} v \in L^2(D_0), \quad v|_{I_l} = 0 \right\}$$

та

$$\partial_{x_2}(\mathcal{Y}_\varepsilon) = \mathcal{Y}'_{x_2} u_\varepsilon \quad \text{м.с. в } D_0.$$

Теорема 2.1. Для розв'язку u_ε задачі (1) -- (2) мають місце такі співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} u_\varepsilon|_{\Omega_0} &\xrightarrow{w} u_0^+ && \text{слабко в } H^1(\Omega_0), \\ \mathcal{Y}_\varepsilon &\xrightarrow{w} hu_0^- && \text{слабко в } H^{0,1}(D_0; I_l), \\ \mathcal{Y}'_{x_1} u_\varepsilon &\xrightarrow{w} 0 && \text{слабко в } L^2(D_0), \end{aligned} \right\} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

де $u_0(x) := \begin{cases} u_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ u_0^-(x), & x \in D_0 \end{cases}$ є єдиним узагальненим розв'язком задачі (3) -- (4)

$$\begin{cases} -\Delta u_0^+(x) = f(x), & x \in \Omega_0, \\ \partial_\nu u_0^+(x) = 0, & x \in \partial\Omega_0 \setminus [0, a], \\ u_0^-(x_1, -l) = 0, & x_1 \in [0, a], \\ u_0^+(x_1, 0) = u_0^-(x_1, 0), & x_1 \in [0, a], \\ \partial_{x_2} u_0^+(x_1, 0) = h \partial_{x_2} u_0^-(x_1, 0), & x_1 \in [0, a], \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -h \partial_{x_2}^2 u_0^-(x) \leq h f(x) + 2d(x), & u_0^-(x) \leq g(x), \\ (u_0^-(x) - g(x))(h \partial_{x_2}^2 u_0^-(x) + h f(x) + 2d(x)) = 0, & x \in D_0, \end{cases} \quad (4)$$

яку будемо називати усередненою задачею для задачі (1) -- (2). Крім того, має місце збіжність інтегралів енергії

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E_0(u_0),$$

де

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx, \quad E_0(u_0) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_0^+|^2 dx + h \int_{D_0} |\partial_{x_2} u_0^-|^2 dx.$$

У підрозділі 2.2 розглядається густе з'єднання Ω_ε типу 3:2:1 (див. Рис. 4), що складається з тіла

$$\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x' = (x_1, x_2) \in \Xi_0 = (0, a) \times (0, a), -\gamma(x') < x_3 < 0\}$$

та великої кількості тонких криволінійних циліндрів $G_\varepsilon = \bigcup_{i,j=0}^{N-1} G_\varepsilon(i, j)$,

$$G_\varepsilon(i, j) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < h, \left(\frac{x_1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - i\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - j\right)^2 < \rho^2(x_3) \right\},$$

де функції γ та ρ - гладкі та додатні на $[0, a] \times [0, a]$ та $[0, h]$ відповідно. Крім того, $0 < \rho < \frac{1}{2}$. Зрозуміло, що тонкі криволінійні циліндри заповнюють паралелепіпед

$\Omega^+ = \Xi_0 \times (0, h)$ в граничному переході при $N \rightarrow +\infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Нехай

$$\zeta(x_3) = \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|}, \quad \omega(x_3) = \left\{ \xi' \in \mathbb{R}^2 : \left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\xi_2 - \frac{1}{2}\right)^2 < \rho^2(x_3) \right\},$$

де $|\omega(x_3)|$ -- площа $\omega(x_3)$, а $l_\omega(x_3)$ -- довжина $\partial\omega(x_3)$ для кожного фіксованого $x_3 \in [0, h]$.

В області Ω_ε розглядається задача:

$$\begin{cases} -\Delta_x u_\varepsilon(x) = f(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) = 0, & x \in \Gamma_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon) \end{cases} \quad (5)$$

з неоднорідними крайовими умовами Сіньоріні на S_ε

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) \leq g(x), & \partial_\nu u_\varepsilon(x) \leq \varepsilon d(x), \\ (u_\varepsilon(x) - g(x))(\partial_\nu u_\varepsilon(x) - \varepsilon d(x)) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

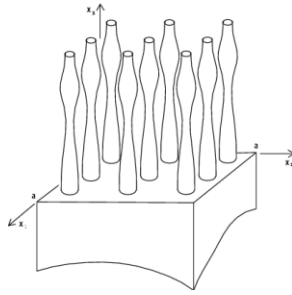


Рис. 4. Модельне густе з'єднання типу 3:2:1.

де $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ – зовнішня нормальна похідна. Через S_ε позначено об'єднання бічних поверхонь тонких циліндрів, а об'єднання основ тонких циліндрів G_ε при $x_3 = h$ позначено через Γ_ε .

Нехай f, g, d -- задані функції. Припускаємо, що $f \in L^2(\Omega_1)$, де $\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega^+}$, $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0, h)$, $\Xi_0 = \{x : x = (x_1, x_2) \in (0, a) \times (0, a), x_3 = 0\}$ а функція $g \in H^1(\Omega^+; \Xi_h \cup \Xi_0) = \{v \in H^1(\Omega^+) : v|_{\Xi_h \cup \Xi_0} = 0\}$, де $\Xi_h = \{x : x' \in (0, a) \times (0, a), x_3 = h\}$, та $d \in H^1(\Omega^+)$.

Нехай $K_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon) : \varphi \leq g \text{ м. с. на } S_\varepsilon\}$.

Означення 2. Узагальненим розв'язком задачі (5) -- (6) називається функція $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, яка задовольняє таку інтегральну нерівність

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon) dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} d(x)(\varphi - u_\varepsilon) ds$$

для довільної функції $\varphi \in K_\varepsilon$.

У підрозділі 2.2 доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку задачі (5) --(6). Через $\overset{\circ}{u}$ позначимо продовження нулем функції u в паралелепіпед $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0, h)$, який заповнюється тонкими криволінійними циліндрами в граничному переході при $\varepsilon \rightarrow 0$, а саме

$$\overset{\circ}{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega^+ \setminus G_\varepsilon. \end{cases}$$

Теорема 2.2. Для розв'язку u_ε задачі (5) -- (6) мають місце наступні співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} u_\varepsilon|_{\Omega_0} &\xrightarrow{w} u_0^- && \text{слабко в } H^1(\Omega_0), \\ \overset{\circ}{u}_\varepsilon &\xrightarrow{w} |\omega(x_3)| u_0^+ && \text{слабко в } L^2(\Omega^+), \\ \overset{\circ}{\partial}_{x_3} u_\varepsilon &\xrightarrow{w} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ && \text{слабко в } L^2(\Omega^+), \\ \overset{\circ}{\partial}_{x_i} u_\varepsilon &\xrightarrow{w} 0 && \text{слабко в } L^2(\Omega^+) \quad (i=1,2) \end{aligned} \right\} \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

де $u_0(x) = \begin{cases} u_0^-(x), & x \in \Omega_0, \\ u_0^+(x), & x \in \Omega^+ \end{cases}$ є єдиним узагальненим розв'язком задачі (7) -- (8)

$$\begin{cases} -\Delta_x u_0^-(x) = f(x), & x \in \Omega_0, \\ \partial_{\nu} u_0^-(x) = 0, & x \in \partial\Omega_0 \setminus \Xi_0, \\ u_0^+(x', h) = 0, & (x', h) \in \Xi_h, \\ u_0^-(x', 0) = u_0^+(x', 0), & (x', 0) \in \Xi_0, \\ \partial_{x_3} u_0^-(x', 0) = |\omega(0)| \partial_{x_3} u_0^+(x', 0), & (x', 0) \in \Xi_0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} -\partial_{x_3} (|\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+(x)) \leq \omega(x_3) |f(x) + l_{\omega}(x_3) d(x), \\ u_0^+(x) \leq g(x), \\ (u_0^+(x) - g(x)) (\partial_{x_3} (|\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+(x)) + |\omega(x_3)| f(x) + l_{\omega}(x_3) d(x)) = 0, \end{cases} \quad x \in \Omega^+, \quad (8)$$

яка називається усередненою задачею. Крім того, має місце збіжність інтегралів енергії

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = E_0(u_0),$$

де

$$E_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx, \quad E_0(u_0) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_0^-|^2 dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| |\partial_{x_3} u_0^+|^2 dx.$$

У **третьому розділі** розглядаються лінійні параболічні крайові задачі Сіньоріні в густих з'єднаннях, які описані в розділі 2.

У підрозділі 3.1 розглядається наступна крайова задача в області Ω_{ε} (густе з'єднання типу 2:1:1)

$$\begin{cases} u'_{\varepsilon}(x, t) = \Delta_x u_{\varepsilon}(x, t) + f(x, t), & (x, t) \in \Omega_{\varepsilon} \times (0, T), \\ u_{\varepsilon}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Gamma_{\varepsilon} \times (0, T), \\ \partial_{\nu} u_{\varepsilon}(x, t) = 0, & (x, t) \in (\partial\Omega_{\varepsilon} \cap \partial\Omega_0) \times (0, T), \\ u_{\varepsilon}(x, 0) = 0, & x \in \Omega_{\varepsilon}, \end{cases} \quad (9)$$

з однорідними умовами Сіньоріні на $S_{\varepsilon} \times (0, T)$

$$u_{\varepsilon}(x, t) \leq 0, \quad \partial_{\nu} u_{\varepsilon}(x, t) \leq 0, \quad u_{\varepsilon}(x, t) \partial_{\nu} u_{\varepsilon}(x, t) = 0, \quad (10)$$

де $u'_{\varepsilon} = \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}$.

Задана функція f належить простору $L^2(\Omega_1 \times (0, T))$ та існує узагальнена похідна f' така, що

$$f' \in L^2(\Omega_1 \times (0, T)),$$

де Ω_1 -- внутрішність $\overline{\Omega_0} \cup \overline{D_0}$, $D_0 = (0, a) \times (-l, 0)$.

Нехай $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varepsilon}$ -- дужки спряження між $H^1(\Omega_{\varepsilon}; \Gamma_{\varepsilon}) := \{u \in H^1(\Omega_{\varepsilon}) : u|_{\Gamma_{\varepsilon}} = 0\}$

та спряженим до нього $(H^1(\Omega_{\varepsilon}; \Gamma_{\varepsilon}))^*$.

Розглянемо наступні функціональні простори:

$$W^{\varepsilon}(0, T) = \{v \in L^2(0, T; H^1(\Omega_{\varepsilon}; \Gamma_{\varepsilon})) : \exists v' \in L^2(0, T; (H^1(\Omega_{\varepsilon}; \Gamma_{\varepsilon}))^*)\},$$

$$W_0^{\varepsilon}(0, T) = \{v \in W(0, T) : v(\cdot, 0) = 0\}.$$

Також визначимо функціональні множини:

$$K_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) : v|_{S_\varepsilon} \leq 0 \text{ і. н. і.а. } S_\varepsilon\},$$

$$n_\varepsilon = \{v \in W^\varepsilon(0, T) : v(\cdot, t) \in K_\varepsilon \text{ для майже всіх } t \in [0, T]\},$$

$$n_\varepsilon^0 = \{v \in W_0^\varepsilon(0, T) : v(\cdot, t) \in K_\varepsilon \text{ для майже всіх } t \in [0, T]\},$$

де $v|_S$ позначає слід v на поверхні S .

Означення 3 Узагальненим розв'язком задачі (9) -- (10) називається така $u_\varepsilon \in K_\varepsilon^0$, що задовольняє нерівність

$$\langle u'_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon) dx$$

для майже всіх $t \in (0, T)$ та довільної функції $\varphi \in K_\varepsilon$ або, що еквівалентно, наступну нерівність

$$\int_0^T \langle u'_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon) dx dt \geq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon) dx dt \quad \forall \varphi \in K_\varepsilon.$$

В підрозділі 3.1 доведено теорему збіжності для розв'язку задачі (9) -- (10). Визначимо продовження нулем в D_0 функцій, визначених на G_ε :

$$u_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & (x, t) \in G_\varepsilon \times (0, T), \\ 0, & (x, t) \in (D_0 \setminus G_\varepsilon) \times (0, T). \end{cases}$$

Теорема 3.1. Для розв'язку u_ε задачі (9) -- (10) виконуються наступні співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} u_\varepsilon|_{\Omega_0} &\xrightarrow{w} u_0^+ \quad \text{слабко в } H^1(\Omega_0 \times (0, T)), \\ u_\varepsilon^0 &\xrightarrow{w} hu_0^- \quad \text{слабко в } L^2(0, T; H^{0,1}(D_0; I_1)), \\ \partial_{x_1} u_\varepsilon &\xrightarrow{w} 0 \quad \text{слабко в } L^2(0, T; L^2(D_0)), \\ \partial_t u_\varepsilon &\xrightarrow{w} h\partial_t u_0^- \quad \text{слабко в } L^2(D_0 \times (0, T)), \end{aligned} \right\} \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

де функція

$$u_0(x, t) := \begin{cases} u_0^+(x, t), & (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\ u_0^-(x, t), & (x, t) \in D_0 \times (0, T) \end{cases}$$

є єдиним узагальненим розв'язком задачі (11) -- (12):

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u_0^+(x, t) - \Delta_x u_0^+(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\ u_0^+(x_1, 0, t) &= u_0^-(x_1, 0, t), & (x_1, t) \in (0, a) \times (0, T), \\ \partial_{x_2} u_0^+(x_1, 0, t) &= h\partial_{x_2} u_0^-(x_1, 0, t), & (x_1, t) \in (0, a) \times (0, T), \\ \partial_\nu u_0^+(x, t) &= 0, & (x, t) \in (\partial\Omega_0 \setminus I_0) \times (0, T), \\ u_0^-(x_1, -l, t) &= 0, & (x_1, t) \in (0, a) \times (0, T), \\ u_0(x, 0) &= 0, & x \in \Omega_1, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\begin{cases} \partial_t u_0^-(x,t) - \partial_{x_2}^2 u_0^-(x,t) \leq f(x,t), \\ u_0^-(x,t) \leq 0, \\ u_0^- \cdot (\partial_t u_0^- - \partial_{x_2}^2 u_0^- - f) = 0, \end{cases} \quad (x,t) \in D_0 \times (0,T), \quad (12)$$

яка називається усередненою задачею для задачі (9) -- (10).

У підрозділі 3.2 області Ω_ε (густе з'єднання Ω_ε типу 3:2:1) розглянемо наступну крайову задачу:

$$\begin{cases} u'_\varepsilon(x,t) = \Delta_x u_\varepsilon(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,t) = 0, & (x,t) \in \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x,t) = 0, & (x,t) \in (\partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon)) \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon \times \{t=0\} \end{cases} \quad (13)$$

з однорідними умовами Сіньоріні на $S_\varepsilon \times (0,T)$

$$u_\varepsilon(x,t) \leq 0, \quad \partial_\nu u_\varepsilon(x,t) \leq 0, \quad u_\varepsilon(x,t) \partial_\nu u_\varepsilon(x,t) = 0. \quad (14)$$

Дана функція f належить простору $L^2(\Omega_1 \times (0,T))$, припускаємо, що для неї існує узагальнена похідна f' така, що

$$f' \in L^2(\Omega_1 \times (0,T)),$$

де $\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega^+}$, $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0,h)$.

Нехай $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$ -- дужки спряження між простором $H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon) = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) : u|_{\Gamma_\varepsilon} = 0\}$ та спряженим до нього $(H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon))^*$.

Розглянемо наступні функціональні простори

$$W^\varepsilon(0,T) = \{v \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon)), \exists v' \in L^2(0,T; (H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon))^*)\},$$

$$W_0^\varepsilon(0,T) = \{v \in W^\varepsilon(0,T) : v(\cdot,0) = 0\}.$$

Також визначимо такі функціональні множини

$$K_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_\varepsilon) : v|_{S_\varepsilon} \leq 0 \text{ і на } S_\varepsilon\},$$

$$K_\varepsilon = \{v \in W^\varepsilon(0,T) : v(\cdot,t) \in K_\varepsilon \text{ для майже всіх } t \in (0,T)\},$$

$$K_\varepsilon^0 = \{v \in W_0^\varepsilon(0,T) : v(\cdot,t) \in K_\varepsilon \text{ для майже всіх } t \in (0,T)\},$$

де $v|_S$ позначає слід функції v на поверхні S .

Означення 4. Узагальненим розв'язком задачі (13) -- (14) називається функція $u_\varepsilon \in K_\varepsilon^0$, яка задовольняє нерівність

$$\langle u'_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon) dx$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_\varepsilon$ або, що еквівалентно, наступну нерівність

$$\int_0^T \langle u'_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx dt \geq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon) dx dt \quad \forall \varphi \in K_\varepsilon.$$

Позначимо через $\overset{\circ}{u}$ продовження нулем функції u в паралелепіпед $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0,h) \times (0,T)$, який заповнюється тонкими криволінійними циліндрами при $\varepsilon \rightarrow 0$, а саме

$$\overset{\circ}{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & (x,t) \in G_\varepsilon \times (0,T), \\ 0, & (x,t) \in (\Omega^+ \setminus G_\varepsilon) \times (0,T). \end{cases}$$

Теорема 3.2. Послідовність розв'язків u_ε задачі (13) -- (14) задовольняє співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} u_\varepsilon \Big|_{\Omega_0} &\xrightarrow{w} u_0^- && \text{слабко в } H^1(\Omega_0 \times (0, T)), \\ u_\varepsilon \Big|_{\omega} &\xrightarrow{w} |\omega(x_3)| u_0^+ && \text{слабко в } L^2(0, T; L^2(\Omega^+)), \\ \partial_{x_3} u_\varepsilon &\xrightarrow{w} |\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+ && \text{слабко в } L^2(0, T; L^2(\Omega^+)), \\ \partial_{x_i} u_\varepsilon &\xrightarrow{w} 0 && \text{слабко в } L^2(0, T; L^2(\Omega^+)), \quad (i=1, 2) \\ \partial_t u_\varepsilon &\xrightarrow{w} |\omega(x_3)| \partial_t u_0^+ && \text{слабко в } L^2(\Omega^+ \times (0, T)) \end{aligned} \right\}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ де функція

$$u_0(x, t) = \begin{cases} u_0^-(x, t), & (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\ u_0^+(x, t), & (x, t) \in \Omega^+ \times (0, T) \end{cases}$$

є єдиним узагальненим розв'язком задачі (15) -- (16)

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u_0^-(x, t) - \Delta_x u_0^-(x, t) &= f(x, t), && (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\ u_0^-(x', 0, t) &= u_0^+(x', 0, t), && (x', 0, t) \in \Xi_0 \times (0, T), \\ \partial_{x_3} u_0^-(x', 0, t) &= |\omega(0)| \partial_{x_3} u_0^+(x', 0, t), && (x', 0, t) \in \Xi_0 \times (0, T), \\ \partial_\nu u_0^-(x, t) &= 0, && (x, t) \in (\partial\Omega_0 \setminus \Xi_0) \times (0, T), \\ u_0^+(x', h, t) &= 0, && (x', h, t) \in \Xi_h \times (0, T), \\ u_0(x, 0, t) &= 0, && x \in \Omega_1 \end{aligned} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} |\omega(x_3)| \partial_t u_0^+(x, t) - \partial_{x_3} (|\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+(x, t)) &\leq |\omega(x_3)| f(x, t), \\ u_0^+(x, t) &\leq 0, && (x, t) \in \Omega^+ \times (0, T), \\ u_0^+(-|\omega(x_3)| \partial_t u_0^+ + \partial_{x_3} (|\omega(x_3)| \partial_{x_3} u_0^+) + |\omega(x_3)| f) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (16)$$

яку будемо називати усередненою задачею для задачі (13) -- (14).

У четвертому розділі розглядається квазілінійна еліптична крайова задача в багаторівневному густому з'єднанні типу 3:2:1 (див. Рис.5). Нехай B -- об'єднання скінченної кількості плоских однозв'язних областей B_1, \dots, B_m , що не перетинаються та не дотикаються. Крім того, $\partial B_k \in C^\infty$, $k=1, \dots, m$ та множина B строго розміщується в квадраті $\square := \{\xi' = (\xi_1, \xi_2) : 0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1\}$, тобто

$$B = \bigcup_{k=1}^m B_k \subset \square.$$

Розглянемо модельне багаторівневе густе з'єднання Ω_ε типу 3:2:1, яке складається з тіла

$$\Omega_0 = \{x \in R^3 : x' = (x_1, x_2) \in Q = (0, a) \times (0, a), 0 < x_3 < \gamma(x')\},$$

де $\gamma \in C^1(\bar{Q})$ та $\min_{x' \in \bar{Q}} \gamma(x') = \gamma_0 > 0$, та великої кількості тонких циліндрів

$$G_\varepsilon = \prod_{k=1}^m G_\varepsilon(k),$$

які розділені на m класів:

$$G_\varepsilon(k) = \prod_{i,j=0}^{N-1} \left\{ x : \left(\frac{x_1}{\varepsilon} - i, \frac{x_2}{\varepsilon} - j \right) \in B_k, x_3 \in (-d_k, 0] \right\}, k = 1, 2, \dots, m.$$

Тут N -- велике натуральне число, $\varepsilon = \frac{a}{N}$ -- малий дискретний параметр, що характеризує відстань між сусідніми тонкими циліндрами та їхню товщину. Кожен клас характеризується площею поперечного перерізу B_k та довжиною тонких циліндрів d_k .

Позначимо через $S_\varepsilon(k)$ -- об'єднання бічних поверхонь тонких циліндрів $G_\varepsilon(k)$ та через $S_\varepsilon := \bigcup_{k=0}^m S_\varepsilon(k)$. Також нехай $Q_\varepsilon(k) = \partial\Omega_0 \cap \partial G_\varepsilon(k)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) -- множина на $\partial\Omega_0$ по якій приєднуються тонкі циліндри $G_\varepsilon(k)$ до Ω_0 .

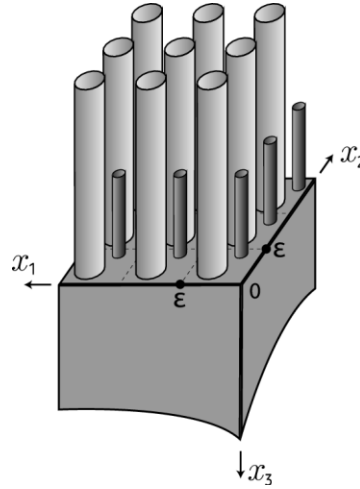


Рис. 5. Густе багаторівневе з'єднання типу 3:2:1.

В області Ω_ε розглядається наступна крайова задача:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_\varepsilon + \mu_0(u_\varepsilon) = f, & x \in \Omega_0, \\ -a_k \Delta u_\varepsilon + \mu_k(u_\varepsilon) = 0, & x \in G_\varepsilon(k), \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_0, \\ \partial_\nu u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\Gamma_0 \cup S_\varepsilon), \\ u_\varepsilon|_{x_3=0+0} = u_\varepsilon|_{x_3=0-0}, \partial_{x_3} u_\varepsilon|_{x_3=0+0} = a_k \partial_{x_3} u_\varepsilon|_{x_3=0-0} & x \in Q_\varepsilon(k) \end{array} \right. \quad (17)$$

з квазілінійними крайовими умовами на $S_\varepsilon(k)$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon \leq g_k, \quad a_k \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_k} h_k(u_\varepsilon) \leq 0, \\ (u_\varepsilon - g_k)(a_k \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_k} h_k(u_\varepsilon)) = 0, \end{array} \right. \quad (18)$$

де $\Gamma_0 \in \partial\Omega_0 \cap \{x : x_3 > 0\}$, $|\Gamma_0|_2 > 0$, $a_k > 0$, де $|\Gamma_0|_2$ - поверхнева міра Лебега Γ_0 .

Нехай $\overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_0 \cup \bigcup_{k=1}^m \overline{D}_k$. Тут $D_k = Q \times (-d_k, 0)$, $k=1, \dots, m$ -- паралелепіпеди, що заповнюються циліндрами k -го рівня відповідно в граничному переході при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Відносно функцій, заданих в постановці задачі, будемо вважати, що виконуються наступні умови:

- 1) функція f належить простору $L^2(\Omega_1)$;
- 2) функції $\{g_k\}_{k=1}^m$ належать простору $H^1(D_k; Q) = \{\varphi \in H^1(D_k) : \varphi|_Q = 0\}$;
- 3) функції $\{\mu_k\}_{k=0}^m, \{h_k\}_{k=1}^m$ неперервні за Ліпшицем (що еквівалентно умові $\mu_k, h_k \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbf{R})$) та існують додатні сталі $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$, такі, що $c_1 \leq \mu'_k(s) \leq c_2$, $c_1 \leq h'_k(s) \leq c_2$, $k=1, \dots, m$ для майже всіх $s \in \mathbf{R}$;
- 4) у випадку $\alpha_{k_0} < 1$ припускаємо, що $g_{k_0} \equiv 0$ та $h_{k_0}(0) = 0$ (умови нульової абсорбції).

У просторі Соболева $H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0) = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) : u|_{\Gamma_0} = 0\}$ визначимо підмножину

$$K_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0) : \varphi|_{S_\varepsilon(k)} \leq g_k|_{S_\varepsilon(k)} \text{ і.н.і. } S_\varepsilon(k), k=1, \dots, m\},$$

де через $\varphi|_S$ позначено слід функції φ на поверхні S . Множина K_ε -- замкнена та опукла для кожного фіксованого значення $\varepsilon > 0$.

Оскільки для кожного $k \in \{1, \dots, m\}$ функція g_k належить до $H^1(D_k; Q)$, то можна вважати, що $g_k = 0$ в Ω_0 . Отже, функція

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0, \\ g_k, & x \in G_\varepsilon(k), k=1, \dots, m \end{cases}$$

належить до $H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0)$ та $G \in K_\varepsilon$.

Позначимо через $(H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0))^*$ спряжений простір до $H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0)$ та визначимо нелінійний оператор $A_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0) \rightarrow (H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0))^*$ наступним співвідношенням

$$\begin{aligned} \langle A_\varepsilon(u), v \rangle_\varepsilon &= \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{k=1}^m a_k \int_{G_\varepsilon(k)} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega_0} \mu_0(u) v dx + \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{G_\varepsilon(k)} \mu_k(u) v dx + \sum_{k=1}^m \varepsilon^{\alpha_k} \int_{S_\varepsilon(k)} h_k(u) v d\sigma_x \quad \forall u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0), \end{aligned}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$ дужки спряження між $(H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0))^*$ та $H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_0)$.

Означення 5. Узагальненим розв'язком задачі (17) -- (18) називається функція $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, яка задовольняє таку нерівність

$$\langle A_\varepsilon(u_\varepsilon), \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon \geq \langle F, \varphi - u_\varepsilon \rangle_\varepsilon \quad \forall \varphi \in K_\varepsilon.$$

У четвертому розділі доведено теореми збіжності для різних випадків, які залежать від значення коефіцієнтів збурення $\{\varepsilon^{\alpha_k}\}_{k=1}^m$ в крайових умовах. Продовження нулем функції, визначеної на $G_\varepsilon(k)$, позначимо через:

$$v_\varepsilon^{0(k)}(x) = \begin{cases} v_\varepsilon(x), & x \in G_\varepsilon(k), \\ 0, & x \in D_k \setminus G_\varepsilon(k). \end{cases}$$

Зрозуміло, що продовження належать анізотропному простору Соболева $W^{0,0,1}(D_k) = \{v \in L^2(D_k) : \exists \text{ узагальнена похідна } \partial_{x_3} v \in L^2(D_k)\}$ із скалярним добутком

$$(u, v)_{W^{0,0,1}(D_k)} = \int_{D_k} (uv + \partial_{x_3} u \partial_{x_3} v) dx.$$

Теорема 4.1. [випадок $\alpha_k \geq 1, k=1, \dots, m$] Нехай виконуються умови 1)-3). Послідовність розв'язків $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ задачі (17) -- (18) задовольняє співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} u_\varepsilon \Big|_{\Omega_0} &\xrightarrow{w} u_0^+ \quad \text{слабко в } H^1(\Omega_0; \Gamma_0), \\ u_\varepsilon^{\otimes(k)} &\xrightarrow{w} |B_k| u_0^{(k)} \quad \text{слабко в } W^{0,0,1}(D_k), \\ \partial_{x_i} u_\varepsilon^{(k)} &\xrightarrow{w} 0 \quad \text{слабко в } L^2(D_k), i=1,2 \end{aligned} \right\} \text{їдè } \varepsilon \rightarrow 0$$

для $k=1, \dots, m$. Тут багатоліста функція

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ u_0^{(k)}(x), & x \in D_k, k=1, \dots, m \end{cases}$$

є єдиним розв'язком задачі (19) -- (20):

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta_x u_0^+ + \mu_0(u_0^+) &= f, & x \in \Omega_0, \\ u_0^+ &= 0, & x \in \Gamma_0 \in \partial\Omega_0, \\ \partial_\nu u_0^+(x) &= 0, & x \in \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma_0 \cup Q), \\ u_0^{(k)} \Big|_{x_3=0} &= u_0^+ \Big|_{x_3=0}, \quad k=1, \dots, m, \\ \partial_{x_3} u_0^+(x', 0) &= \sum_{k=1}^{K_0} a_k |B_k| \partial_{x_3} u_0^{(k)}(x', 0), & (x', 0) \in Q, \\ (\partial_{x_3} u_0^{(k)}) \Big|_{x_3=-d_k} &= 0, \quad k=1, \dots, m, \\ \left\{ \begin{aligned} a_k |B_k| \partial_{x_3 x_3}^2 u_0^{(k)} + |B_k| \mu_k(u_0^{(k)}) &\leq -\delta_{\alpha_k, 1} l_k h_k(u_0^{(k)}), \quad u_0^{(k)} \leq g_k, \\ (u_0^{(k)} - g_k) \cdot (-a_k |B_k| \partial_{x_3 x_3}^2 u_0^{(k)} + |B_k| \mu_k(u_0^{(k)}) + \delta_{\alpha_k, 1} l_k h_k(u_0^{(k)})) &= 0, \end{aligned} \right. & x \in D_k, \end{aligned} \right. \quad (19)$$

яку будемо називати усередненою задачею для задачі (17) -- (18).

Тепер припустимо, що для деякого $k=k_0$ параметр $\alpha_{k_0} < 1$ та інші параметри $\{\alpha_k\}$ більші або рівні 1; для визначеності нехай $k_0=1$, тобто, $\alpha_1 < 1, \alpha_k \geq 1, k=2, K, m$.

Теорема 4.2. [випадок $\alpha_1 < 1, \alpha_k \geq 1, k=2, K, m$] Нехай виконуються умови 1)-4). Послідовність розв'язків $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ задачі (17) -- (18) задовольняє співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} u_\varepsilon \Big|_{\Omega_0} &\xrightarrow{w} u_0^+ \quad \text{слабко в } H^1(\Omega_0; \Gamma_0), \\ u_\varepsilon^{\otimes(k)} &\xrightarrow{s} 0 \quad \text{слабко в } L^2(D_1), \\ u_\varepsilon^{\otimes(k)} &\xrightarrow{w} |B_k| u_0^{(k)} \quad \text{слабко в } W^{0,0,1}(D_k), \\ \partial_{x_i} u_\varepsilon^{(k)} &\xrightarrow{w} 0 \quad \text{слабко в } L^2(D_k), \quad i=1,2 \end{aligned} \right\} \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

для $k \in \{2, \dots, m\}$ де u_0^+ є єдиним розв'язком наступної задачі:

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta_x u_0^+ + \mu_0(u_0^+) &= f & \text{в } \Omega_0, \\ u_0^+ &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0 \cup Q, \quad \text{та } \partial_\nu u_0^+ = 0 \quad \text{та } \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma_0 \cup Q) \end{aligned} \right.$$

для всіх $k \in \{2, \dots, m\}$, функція $u_0^{(k)}$ є єдиним узагальненим розв'язком наступної задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_k |B_k| \partial_{x_3 x_3}^2 u_0^{(k)} + |B_k| \mu_k(u_0^{(k)}) \leq -\delta_{\alpha_k, 1} l_k h_k(u_0^{(k)}), \quad u_0^{(k)} \leq g_k, \\ (u_0^{(k)} - g_k)(-a_k |B_k| \partial_{x_3 x_3}^2 u_0^{(k)} + |B_k| \mu_k(u_0^{(k)}) + \delta_{\alpha_k, 1} l_k h_k(u_0^{(k)})) = 0, \\ u_0^{(k)}|_{x_3=0} = 0, \quad (\partial_{x_3} u_0^{(k)})|_{x_3=-d_k} = 0. \end{array} \right. \quad x \in D_k,$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджена асимптотична поведінка узагальнених розв'язків лінійних еліптичних та параболічних крайових задач Сіньоріні в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1 та квазілінійної еліптичної крайової задачі в багаторівневому густому з'єднанні з сингулярно збуреними нелінійними крайовими умовами типу Сіньоріні, коли кількість компонент густого з'єднання необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

Основні результати дисертаційної роботи:

1. Доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі Сіньоріні в плоскому густому з'єднанні типу 2:1:1.
2. Доведено теорему збіжності та збіжність інтегралів енергії для розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.
3. Доведено теорему збіжності для розв'язку лінійної параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 2:1:1.
4. Доведено теорему збіжності для розв'язку лінійної параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1.
5. Доведено теорему збіжності для розв'язку квазілінійної еліптичної крайової задачі в багаторівневому густому з'єднанні типу 3:2:1 та досліджено вплив нелінійних сингулярно збурених крайових умов на асимптотичну поведінку розв'язку.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Kazmerchuk Iu. A.* Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick plane junction / Iu. A. Kazmerchuk, T. A. Mel'nyk // *Nonlinear oscillations* – 2009. – V. 12, № 1. – P. 44-58.
2. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick junction and boundary integral equations for the homogenized problem / T. A. Mel'nyk, Iu. A. Nakvasiuk, W. L. Wendland // *Mathematical methods in the applied science* – 2011. – V. 34, № 7 – P. 758-775.
3. *Мельник Т. А.* Усреднение параболической краевой задачи Синьорини в густом соединении / Т.А. Мельник, Ю.А. Наквасюк // *Проблемы математического анализа* – 2012. – Т. 63, январь, – С. 67-82, (english translation in *Journal of mathematical sciences* – 2012. – V. 181, № 5. – P. 613-631).

4. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the parabolic Signorini boundary-value problem in a thick junction of type 3:2:1 / T. A. Mel'nyk, Iu. A. Nakvasiuk // Carpathian mathematical publications – 2012. – V. 4, № 1, – P. 90-110.
5. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of a semilinear variational inequality in a thick multi-level junction / T. A. Mel'nyk, Iu. A. Nakvasiuk // Journal of Inequalities and Applications – 2016. – V. 2016, № 104, – P. 1-22, DOI: 10.1186/s13660-016-1051-y.
6. *Kazmerchuk Iu. A.* Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick plane junction / Iu. A. Kazmerchuk, T. A. Mel'nyk // Preprint. – 2008. – arXiv:0807.2160v.-13 p.
7. *Казмерчук Ю.А.* Усереднення крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні / Ю.А. Казмерчук // Четверта всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу", 10-12 вересня 2008 р.: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2008. – С. 42.
8. *Казмерчук Ю. А.* Про асимптотичну поведінку розв'язку крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні / Ю.А. Казмерчук // Second international conference for young mathematicians on differential equations and applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii, 11-14 листопада 2008 р.: Тези доповідей. – Донецьк, 2008 – С. 74.
9. *Наквасюк Ю. А.* Усереднення параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні / Ю.А. Наквасюк // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, 28-29 квітня 2011 р.: Тези доповідей. – Київ, 2011 – С. 37-38.
10. *Наквасюк Ю. А.* Асимптотичний аналіз крайової задачі Сіньоріні в дворівневому густому з'єднанні // П'ята всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу", 19-22 вересня 2013.: Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013 – С. 52.
11. *Наквасюк Ю. А.* Усереднення квазілінійних нерівностей в густих багаторівневих з'єднаннях // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки", 23-24 квітня 2014 р.: Тези доповідей. – Київ, 2014 – С. 95.
12. *Наквасюк Ю. А.* Усереднення квазілінійних нерівностей в густих багаторівневих з'єднаннях // Міжнародна міждисциплінарна конференція молодих вчених "Шевченківська весна", 1-3 квітня 2015 р.: Тези доповідей. – Київ, 2015 – С. 36-38.
13. *Nakvasiuk Iu. A.* Homogenization of the parabolic Signorini boundary-value problem in a thick plane junction / Iu. A. Nakvasiuk // Humboldt Kolleg "Mathematics and life sciences: possibilities, interlacements and limits", 05-08 August 2010, Kyiv: Book of abstracts. – Kyiv, 2010 – p.71.

АНОТАЦІЯ

**Наквасюк Ю.А. Усреднения вариационных неравенств в густых з'єднаннях---
На правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 -- диференціальні рівняння.--Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню лінійних еліптичних та параболічних крайових задач Сінборіні в густих з'єднаннях типу 2:1:1, 3:2:1 та квазілінійної еліптичної задачі в багаторівневому густому з'єднанні типу 3:2:1 з нелінійними крайовими умовами типу Сінборіні, які залежать від значень коефіцієнтів збурення.

У задачі Сінборіні є два альтернативних набори крайових умов та апріорі невідомо який з двох наборів умов виконується для кожної точки. Основним інструментарієм дослідження крайових задач Сінборіні є теорія варіаційних нерівностей.

Густим з'єднанням типу $k:p:d$ називається область в \mathbb{R}^n , яка складається із деякої області (тіло густого з'єднання) та великої кількості тонких областей, що ε -періодично розташовані вздовж деякої множини (зона приєднання) на межі тіла густого з'єднання. Тип $k:p:d$ густого з'єднання відповідає граничним розмірностям ($\varepsilon \rightarrow 0$) тіла з'єднання, зони приєднання та кожної з приєднаних тонких областей відповідно.

Густе багаторівневе з'єднання – це густе з'єднання, в якому тонкі області, які приєднуються, поділені на скінченне число рівнів в залежності від їх геометричної конфігурації і крайових умов, заданих на їх межах. Крім того, тонкі області кожного рівня ε -періодично чергуються вздовж зони приєднання.

Досліджена асимптотична поведінка розв'язків вказаних задач, коли кількість приєднаних тонких областей необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Для всіх задач доведено теореми збіжності, для лінійних еліптичних задач доведено збіжність інтегралів енергії. Для квазілінійної крайової задачі вивчено вплив коефіцієнтів збурення в крайових умовах на асимптотичну поведінку розв'язку.

Ключові слова: теорія усереднення, лінійні та квазілінійні еліптичні та параболічні варіаційні нерівності, густе з'єднання, крайові умови Сінборіні.

АННОТАЦИЯ

**Наквасюк Ю.А. Усреднение вариационных неравенств в густых соединениях ---
На правах рукописи.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 --- дифференциальные уравнения. --- Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, Министерство образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию линейных эллиптических и параболических краевых задач Синьорини в густых соединениях типа 2:1:1, 3:2:1 и квазилинейной эллиптической задачи в многоуровневом густом соединении типа 3:2:1 с

нелинейными краевыми условиями типа Синьорини, которые зависят от значений коэффициентов возмущения.

В задаче Синьорини есть два альтернативных набора краевых условий и априори неизвестно какой из двух наборов условий выполняется для каждой точки. Основным инструментарием исследования краевых задач Синьорини является теория вариационных неравенств.

Густым соединением типа $k:p:d$ называется область в R^n , состоящая из некоторой области (тело густого соединения) и большого количества тонких областей, ε -периодически расположенных вдоль некоторого множества (зона присоединения) на границе тела густого соединения. Тип $k:p:d$ густого соединения соответствует предельным размерностям $k:p:d$ тела соединения, зоны присоединения и каждой из присоединяемых тонких областей соответственно.

Густое многоуровневое соединение – это густое соединение, в котором тонкие области, которые присоединяются, разделены на конечное число уровней в зависимости от их геометрической конфигурации и краевых условий, заданных на их границах. Кроме того, тонкие области каждого уровня ε -периодически чередуются вдоль зоны присоединения.

Исследовано асимптотическое поведение решений указанных задач, когда количество присоединенных тонких областей неограниченно растет, а их толщина стремится к нулю. Для всех задач доказаны теоремы сходимости, для линейных эллиптических задач доказана сходимость интегралов энергии. Для квазилинейной краевой задачи изучено влияние коэффициентов возмущения в краевых условиях на асимптотическое поведение решения.

Ключевые слова: теория усреднения, линейные и квазилинейные эллиптические и параболические вариационные неравенства, густое соединение, краевые условия Синьорини.

ABSTRACT

Nakvasiuk Iu. A. Homogenization of variational inequalities in thick junctions.

The thesis for obtaining the Candidate's degree of Physical and Mathematical Sciences on the speciality 01.01.02 --- differential equations. --- Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the investigation of linear elliptic and parabolic boundary-value problems in thick junctions of type 2:1:1 and 3:2:1 and quasi-linear elliptic problem with nonlinear boundary condition of Signorini type, which depend on perturbation parameter.

In the Signorini problems there are two alternative sets of boundary conditions involving not only equalities but also inequalities which must satisfy the solution on any point. But it is not a priori known what of the two sets is satisfied for each point. Such problems can be recast as variational inequalities.

A thick junction (or thick multi-structure) of type $k:p:d$ is the union of some domain in R^n , which is called the junction's body, and a large number of ε -periodically situated thin domains along some manifold on the boundary of the junction's body. This manifold is called the joint zone. Here ε is a small parameter, which characterizes the distance between neighboring thin domains and their thickness. The type $k:p:d$ of a thick junction

refers to the limiting dimensions of the body, the joint zone, and each of the attached thin domains, respectively.

A thick multi-level junction is the thick junction with the domains divided into finitely many levels depending on their geometric structure and boundary conditions imposed on their surfaces. Besides, the thin domains from each level ε -periodically alternated along the joint zone.

We consider mixed boundary-value problems for the Poisson equation in a plane thick junction Ω_ε which is the union of a domain Ω_0 and a large number of ε -periodically situated thin rods and in a thick junction Ω_ε which is the union of a domain Ω_0 and a large number of ε -periodically situated thin cylinders. Then nonuniform Signorini conditions are given on the vertical sides of the thin rods and on the lateral surfaces of the cylinders. The asymptotic analysis of these problems is made as $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e., when the number of the thin rods and thin cylinders infinitely increases and their thickness tends to zero. With the help of the integral identity method we prove the convergence theorems and show that the nonuniform Signorini conditions are transformed (as $\varepsilon \rightarrow 0$) in the limiting variational inequalities in the region that is filled up by the thin rods and by the thin cylinders in the limit passage. The existence and uniqueness of the solutions to this non-standard limit problem is established. The convergence of the energy integrals is proved as well.

Also we consider parabolic Signorini boundary-value problems in a thick plane junction Ω_ε which is the union of a domain Ω_0 and a large number of ε -periodically situated thin rods and in a thick junction Ω_ε which is the union of a domain Ω_0 and a large number of ε -periodically situated thin cylinders. The Signorini conditions are given on the vertical sides of the thin rods and on the lateral surfaces of the cylinders. The asymptotic analysis of these problems is done as $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e., when the number of the thin rods infinitely increases and their thickness tends to zero and when the number of the thin cylinders infinitely increases and their thickness tends to zero. With the help of the integral identity method we prove convergence theorems and show that the Signorini conditions are transformed (as $\varepsilon \rightarrow 0$) in differential inequalities in the region that is filled up by the thin rods and by the thin cylinders in the limit passage.

We consider a semilinear variation inequality in a thick multi-level junction Ω_ε , which is the union of a domain Ω_0 and a large number of thin cylinders. The thin cylinders are divided into m classes depending on the geometrical characteristics and the semilinear perturbed boundary conditions of the Signorini type given on their lateral surfaces. In addition, the thin cylinders from each class are ε -periodically alternated along some manifold on the boundary of the junction's body. The purpose is to study the asymptotic behavior of the solution u_ε of this variation inequality as $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e. when the number of the thin cylinders from each class infinitely increases and their thickness tends to zero. The passage to the limit is accompanied by special intensity factors $\{\varepsilon^{\alpha_k}\}_{k=1}^m$ in the boundary conditions. We establish two qualitatively different cases in the asymptotic behavior of the solution depending on the value of parameters $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$. For each case we prove a convergence theorem. As a consequence, we see that u_ε converges (as $\varepsilon \rightarrow 0$) to the solution of the corresponding nonstandard homogenized problem and show that the semilinear boundary conditions are transformed in the limiting variational inequalities in the region that is filled up by the thin cylinders from each class.

Key words: homogenization, linear and quasi-linear elliptic and parabolic variational inequalities, thick junction, Signorini boundary condition.