МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ПЕРЕСТЮК ЮРІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Капустян Олексій Володимирович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Петришин Роман Іванович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, перший проректор;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Журавльов Валерій Пилипович,
Житомирський національний агроекологічний університет, завідувач кафедри вищої та прикладної математики.

Захист відбудеться « 15 » травня 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022 м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою:
01033, м. Київ, вул. Володимирська, 58, зал №12

Автореферат розісланий « 12 » квітня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Моклячук М. П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Досліджуючи різноманітні задачі природознавства, часто доводиться мати справу з еволюційними процесами, що описуються звичайними диференціальними рівняннями і піддаються короткочасним збуренням. При математичному моделюванні такого роду процесів часто тривалістю таких збурень зручно знехтувати, вважаючи, що вони мають характер імпульсу (поштовху, удару).

Така ідеалізація приводить до необхідності вивчення систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких скачкоподібно змінюються. Але не тільки ідеалізація заміни короткочасних збурень на "миттєві" приводить до диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями. Часто розриви певних залежностей в системі, яку ми вивчаємо, є суттєвою її характеристикою.

Так, наприклад, вивчаючи рух сталевої кульки, що вільно падає з певної висоти на горизонтальну стальну пластину, бачимо, що в математичній моделі цього процесу в момент удару кульки об стальну пластину швидкість кульки "миттєво" змінює свій знак.

Багато конкретних задач, математичними моделями яких є диференціальні рівняння з розривними траєкторіями, можна знайти в різних областях математичного природознавства: механіці, електротехніці, хімії, біології та медицині, керуванні процесами, динаміці літальних апаратів, економіці та в інших галузях науки і техніки.

Перші математичні моделі в вигляді диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями з'явилися в 30-х роках минулого століття для розрахунку і аналізу точності годинника, де методами якісної теорії диференціальних рівнянь вивчали властивості системи диференціальних рівнянь з кусково-лінійними правими частинами. В ті ж само часи для моделювання процесів в розривних динамічних системах використовувались диференціальні рівняння з узагальненими функціями. Так, Крилов М.М. і Боголюбов М.М. в класичній монографії "Введение в нелинейную механику" , описуючи математичну модель ударного механізму годинника, застосували формалізм δ- функції Дірака і вперше показали, що метод усереднення можна успішно застосувати не тільки до класичних диференціальних рівнянь, а й до диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями.

Пізніше Самойленко А.М. асимптотичними методами нелінійної механіки дослідив широкий клас нелінійних диференціальних рівнянь з нерегулярними правими частинами.

Інтерес до вивчення і дослідження динамічних систем з розривними траєкторіями на сьогодні пов'язаний, насамперед, з запитами нової техніки, де імпульсні системи автоматичного регулювання, імпульсні обчислювальні системи посіли вагоме місце і інтенсивно розвиваються. Природно, що останнім часом істотно збільшилась кількість математичних робіт з диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями в математичних школах як в Україні, так і за її межами.

В передмові до монографії Самойленка А.М. і Перестюка М.О. "Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием" академік Митропольский Ю.О. написав: " ... однако наиболее систематические и глубокие исследования были выполнены в киевской научной школе нелинейной механики. Именно математикам этой школы удалось подойти к проблеме достаточно широко, рассмотреть ее в общем виде, поставить и решить ряд задач, актуальных для приложений, но не исследовавшихся ранее. С полным основанием можно сказать, что в результате усилий указанной группы киевских математиков сложилась математическая теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием - со своими методами, общими и глубокими результатами, специфическими задачами."

Справді, в працях Митропольского Ю.О., Самойленка А.М., Перестюка М.О., Бойчука О.А., Ахметова М.У., Мартинюка Д.І., Петришина Р.І., Слюсарчука В.Ю., Станжицького О.М., Самойленка В.Г., Теплінсьного Ю.В., Ткаченка В.І., Трофімчука С.І., Черевка І.М., Капустяна О.В., Короля І.І., Чуйка С.М., Хусаїнова Д.Я. та їх учнів глибоко розроблено теорію диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями.

Разом з тим, ця теорія інтенсивно зараз розвивається і ще далека від свого завершення. Зокрема, широке поле в цій теорії ще треба "виорати" навіть для систем диференціальних рівнянь на площині, особливо для нелінійних систем, де ще не завершено вивчення в достатній мірі питання про існування періодичних розв'язків (розривних циклів) таких систем, вплив характеру імпульсних сил на наявність чи відсутність в динамічній системі таких циклів. Важливою ділянкою дослідження є встановлення достатніх умов існування інваріантних множин розривних динамічних систем, визначених в прямому добутку m-вимірного тора та n-вимірного евклідового простору, дослідження їх стійкості і, по можливості, асимптотичного інтегрування. Такі системи є центральним об'єктом теорії розривних багаточастотних коливань, що зумовлює особливу прикладну цінність досліджень.

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню як лінійних, так і нелінійних систем диференціальних рівнянь на площині, що піддаються імпульсному збуренню в момент проходження фазовою точкою певних заданих ліній, встановленню достатніх умов існування розривних одно- і дво-імпульсних циклів та побудові асимптотичних наближень до цих циклів. В роботі також проведено широке і повне дослідження існування інваріантних множин розривних динамічних систем, визначених в прямому добутку $m-$вимірного тора та $n-$вимірного евклідового простору, вказані достатні умови стійкості цих множин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках досліджень кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, тема №11БФ038-01 "Розроблення нових математичних методів моделювання, аналізу та побудови керувань для нелінійних еволюційних систем з складною динамікою" (номер держреєстрації 0111U006677).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження дисертаційної роботи є встановлення достатніх умов існування розривних циклів в лінійних і нелінійних розривних динамічних системах на площині, існування інваріантних множин імпульсних систем, визначених в прямому добутку m-вимірного тора T_m та n-вимірного евклідового простору R^n.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є розривні динамічні системи на площині і в фазовому просторі, що є прямим добутком тора T_m і евклідового простору R^n.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є одно- і дво-імпульсні розривні цикли, розривні інваріантні тороїдальні многовиди, умови їх існування та стійкості.

Методи дослідження. Для дослідження структури фазових портретів динамічних систем на площині застосовуються методи якісної теорії диференціальних рівнянь, метод усереднення. При дослідженні інваріантних множин використовуються методи інтегральних многовидів нелінійної механіки, метод функції Гріна-Самойленка та прямий метод Ляпунова дослідження стійкості.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

- встановлено необхідні і достатні умови існування розривних періодичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь на площині, що піддаються імпульсному збуренню при проходженні фазовою точкою фіксованих ліній;
- досліджено питання існування одно- і дво-імпульсних циклів слабо нелінійних розривних динамічних систем на площині;
- встановлено достатні умови асимптотичної стійкості широкого класу лінійних розширень динамічних систем на торі;
- досліджено питання існування інваріантних тороїдальних множин достатньо широкого класу розривних динамічних систем, визначених на прямому добутку m-вимірного тора T_m та n-вимірного евклідового простору R^n, встановлені достатні умови асимптотичної стійкості таких множин.

Практичне значення одержаних результатів. Робота носить теоретичний характер. Її результати можна застосовувати при дослідженні коливних процесів в різноманітних механічних та електромеханічних системах з розривними характеристиками, при дослідженні багаточастотних коливних процесів розривних динамічних систем.

Особистий внесок здобувача. Результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних роботах співавторам належать обговорення та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися:

- на науковому семінарі з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники - академіки НАН України Самойленко А.М. та Перестюк М.О.),
- на науковому семінарі з диференціальних рівнянь Ужгородського національного університету (керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Маринець В.В.),
- на науковому семінарі з диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І.І. Мєчнікова (керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Євтухов В.М.)

та на конференціях:

- Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 8–10 червня 2011, Київ, Україна.
- Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 27–29 вересня 2012, Ужгород, Україна.
- International Workshop "Qualitative Theory of Differential Equations" December 20–22, 2013, Tbilisi, Georgia.
- Міжнародна конференція "Боголюбовські читання "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" 23–30 червня 2013, Севастополь, Україна.
- Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова, 15–22 червня 2013, Одеса, Україна.
- International Workshop "Qualitative Theory of Differential Equations" December 18–20, 2014, Tbilisi, Georgia.
- XVI міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука, 14–15 травня 2015, Київ, Україна.
- Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", 19–21 травня 2016, Ужгород, Україна.
- Друга Всеукраїнська конференція "Прикладні задачі математики" 13–15 жовтня 2016, Івано-Франківськ, Україна.

Публікації. Основні результати роботи викладено у 18 наукових працях, з них 6 статей [1-6] опубліковано у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, з яких 2 статті [1,4] переклад яких індексований та включений до міжнародної наукометричної бази даних Scopus, 3 матеріалах конференцій [7-9], та 9 тез доповідей на міжнародних конференціях [10-18].

Структура дисертації. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації складає 149 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел, що містить 110 найменувань, займає 12 сторінок.

Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику доктору фізико-математичних наук професору Капустяну Олексію Володимировичу за постановку задачі, постійну увагу до роботи, всебічну підтримку та допомогу.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність теми дисертації, вказано на зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, темами, сформульовано мету, об'єкт та предмет дослідження, вказано використані в роботі методи дослідження, наукову новизну одержаних результатів та можливе їх практичне застосування, а також надано інформацію про апробацію отриманих в роботі результатів.

В першому розділі проведено огляд літератури, наведені основні поняття та означення, які використані в наступних розділах. Описується загальна характеристика систем диференціальних рівнянь, що піддаються імпульсному впливу, їх класифікація та основні властивості. Викладено основні відомості з теорії багаточастотних коливань, окреслено коло питань, які залишилися невирішиними та визначено місце результатів дисертаційної роботи у розв'язанні відкритих проблем.

В другому розділі проведене повне дослідження систем диференціальних рівнянь на площині, що піддаються імпульсному впливу на фіксованих прямих. Особливу увагу приділено питанню існування періодичних розв'язків (розривних циклів) таких систем та їх стійкості.

Об'єктом дослідження є лінійна розривна динамічна система на площині

$$\dot{x} = Jx, \quad < a, x > \neq 0, \quad \Delta x|_{<a,x>=0} = Bx. \qquad (1)$$

Тут $x = col(x_1,\ x_2),\ J$ - дійсна жорданова клітка, пряма

$< a, x >= 0,\ a_1x_1 + \ a_2x_2 = 0$ не є віссю координат і далі ми цю пряму запишемо так: $x_2 = kx_1,$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- задана стала матриця.

Рух фазової точки $(x_1(t),\ x_2(t))$ описується диференціальною системою $\dot{x} = Jx,$

коли ця точка знаходиться поза прямою $x_2 = kx_1$ і "миттєво" перекидається в точку

$$\begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1+b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

в момент t^*, коли $x_2(t^*) = kx_1(t^*)$, тобто в момент попадання фазової точки на пряму $x_2 = kx_1$.

Зауважимо, що лінійне однорідне відображення

$$(E+B) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to (E+B) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

переводить пряму $x_2 = kx_1$ в пряму $x_2 = \mu x_1$, де коефіцієнти k і μ пов'язані рівністю

$$\mu = \frac{k(1+b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}}. \qquad (3)$$

В параграфі 2.2 показано, що у випадку дійсних різних власних чисел матриці J поведінка розв'язків вихідної системи визначається відображенням Пуанкаре $x \to \gamma x$, де

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}.$$

Теорема 2.2.1.

Якщо $|\gamma| < 1$, то всі розв'язки вихідної системи, які починаються з точок прямої $x_2 = \mu x_1$ з часом прямують до нуля, коли $t \to \infty$; якщо

$|\gamma| > 1,$ то всі розв'язки вихідної системи, які при $t = 0$ починаються з точок прямої $x_2 = \mu x_1,$ прямують у нескінченність, коли $t \to \infty;$ якщо $\gamma = 1,$ то кожна точка $x_1 \in R$ є нерухомою точкою відображення h і така точка породжує одноімпульсний періодичний рух (одноімпульсний цикл).

Рух зображуючої точки по кожному з таких циклів є періодичним з одним і тим же періодом

$$T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}.$$

Ці цикли називатимемо одноімпульсними. Рухаючись по такому циклу, фазова точка один раз за період піддається імпульсному впливу. Крім одноімпульсних циклів у вихідній системі можуть бути так звані двоімпульсні розривні цикли, відмінні від одноімпульсних: рухаючись по такому циклу, фазова точка двічі за період піддається дії імпульсної сили.
Двоімпульсні цикли виникають у вихідній системі, коли її параметри задовольняють рівність

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = -1.$$

Вони породжуються точками $(x_1^0,\ \mu x_1^0),$ де x_1^0 - нерухома точка відображення $h^2 = h(h(x)).$
Ці цикли, як і одноімпульсні, заповнюють частину координатної площини, що лежить між прямими $x_2 = kx_1$ і $x_2 = \mu x_1.$
Рух фазової точки по кожному з таких циклів є періодичним з одним і тим же періодом

$$T = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}.$$

На відміну від одноімпульсних циклів, кожен з яких лежить в одному з координатних кутів, кожен двоімпульсний цикл належить двом координатним кутам: першому і третьому (або ж другому і четвертому).
В цьому ж параграфі досліджено розривну динамічну систему, власні числа матриці диференціальної частини якої рівні.

Теорема 2.2.3

Якщо в системі рівнянь (1) власні числа матриці J *від'ємні, то її розв'язки: стійкі тоді і тільки тоді, коли* $|\gamma| \leq 1;$ *асимптотично стійкі тоді і тільки тоді, коли* $|\gamma| < 1;$ *нестійкі, якщо* $|\gamma| > 1.$

В параграфі 2.3 встановлені необхідні і достатні умови існування одно- (двоімпульсних) розривних циклів, а також поведінку розв'язків лінійної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням у випадку, коли матриця диференціальної системи має комплексні власні числа.

Зокрема, показано, що в цьому випадку поведінка траєкторій розривної динамічної системи повністю визначається відображенням Пуанкаре

$$h : R \to R$$

$$h : x_1 \to e^{\dfrac{\alpha}{\beta}(arctg\mu - arctgk)} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+k^2}}(1 + b_{11} + kb_{12})x_1,$$

якщо $k < \mu$ і

$$h : x_1 \to -e^{\dfrac{\alpha}{\beta}(\pi + arctg\mu - arctgk)} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+k^2}}(1 + b_{11} + kb_{12})x_1,$$

якщо $k \geq \mu.$

Теорема 2.3.3

Нехай параметри системи (1) такі, що виконується нерівність

$$k < \frac{k(1+b_{22})+b_{21}}{1+b_{11}+kb_{12}}.$$

Якщо

$$e^{\frac{\alpha}{\beta}(arctg\mu - arctgk)} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+k^2}}|1+b_{11}+kb_{12}| < 1,$$

то будь-який розв'язок вихідної системи прямує до нуля, коли $t \to \infty,$ *тобто система (1) є стійкою в цілому.*

Якщо

$$e^{\frac{\alpha}{\beta}(arctg\mu - arctgk)} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+k^2}}|1+b_{11}+kb_{12}| > 1,$$

то будь-який розв'язок вихідної системи прямує в нескінченність, коли $t \to \infty,$ *тобто система не є стійкою.*

Якщо ж

$$e^{\frac{\alpha}{\beta}(arctg\ \mu - arctg\ k)} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+k^2}}\,|1+b_{11}+kb_{12}| = 1,$$

то кожна точка $(x_1^0,\ \mu x_1^0)$ *прямої* $x_2 = \mu x_1$ *породжує одноімпульсний або ж двоімпульсний цикли.*

Як приклад розглядається можливість незатухаючих коливань лінійного осцилятора з великим тертям під дією імпульсної сили

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0,\ \dot{x} \neq 0,$$
$$\Delta\dot{x}|_{\dot{x}=0} = \gamma x,\ \Delta x|_{\dot{x}=0} = 0.$$

Встановлені співвідношення між параметрами системи, що забеспечують стійкі коливання в ній.

В третьому розділі досліджено питання існування та стійкості одно- і двоімпульсних циклів слабо нелінійних розривних динамічних систем на площині.

В параграфі 3.1 досліджено систему

$$\dot{x_1} = \lambda_1 x_1 + \varepsilon f(x_1, x_2), \qquad \dot{x_2} = \lambda_2 x_2 + \varepsilon g(x_1, x_2), \qquad x_2 \neq kx_1; \tag{4}$$
$$\Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{x_2 = kx_1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Для цієї системи доведено наступне твердження.

Теорема 3.1.1

Нехай в системі (4) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0;$ функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ є неперервно диференційовними в деякому крузі $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що виконується рівність

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)\left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = 1.$$

Якщо рівняння

$$F(x_1) \equiv \frac{1}{\mu x_1}\int\limits_0^a \left[\mu\lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f\left(e^{\lambda_1 s}x_1, e^{\lambda_2 s}\mu x_1\right) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g\left(e^{\lambda_1 s}x_1, e^{\lambda_2 s}\mu x_1\right)\right] ds = 0,$$

де $a = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}$, має ізольований корінь $x_1 = x_1^*$, такий, що $F'(x_1^*) \neq 0$, то при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ система (4) має ізольований розривний одноімпульсний цикл. Він є асимптотично стійким, якщо $F'(x_1^*) < 0$ і нестійким, якщо $F'(x_1^*) > 0$. Цей цикл розташований в деякому $U(\varepsilon)$ - околі $(U(\varepsilon) \to 0$, коли $\varepsilon \to 0)$ частини гіперболи

$$\left(\frac{x_1}{x_1^*}\right)^{\lambda_2} \cdot \left(\frac{x_2}{\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} = 1, \quad \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq 1.$$

З точністю до величини порядка ε^2 цей цикл задається рівністю

$$\ln \left(\frac{x_1}{x_1^*}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{x_2}{\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} = \frac{\varepsilon}{\mu x_1^*} \int\limits_0^t \left[\mu \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f(e^{\lambda_1 s} x_1^*, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^*)\right] ds -$$

$$-\frac{\varepsilon}{\mu x_1^*} \int\limits_0^t \left[\lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g\left(e^{\lambda_1 s} x_1^*, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^*\right)\right] ds,$$

в якій x_1^* - корінь рівняння $F(x_1) = 0$, а t змінюється в межах від нуля до $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}$.

В цьому параграфі доведено також теорему, яка встановлює достатні умови існування ізольованого розривного двоімпульсного циклу.

В параграфі 3.2 досліджено двовимірну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\dot{x_1} = Ax + \varepsilon f_0(x), \qquad x_2 \neq kx_1; \quad \Delta x\Big|_{x_2 = kx_1} = Bx, \tag{5}$$

в якій $x = col(x_1, x_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad f_0(x) = \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

для якої доведено таке твердження.

Теорема 3.2.1 Нехай в системі (5) $\lambda < 0,$ функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ є неперервно диференційовними в деякому крузі $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що $\mu < k$ і виконується рівність

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = 1.$$

Якщо рівняння

$$F_0(x_1) \equiv \frac{1}{x_1} \int\limits_0^{k-\mu} e^{-\lambda\tau} \left[g\left(x_1 e^{\lambda\tau}, x_1(\mu + \tau)e^{\lambda\tau}\right. - \right.$$

$$- \left(\mu + \tau + \frac{1}{\lambda}\right) f\left(x_1 e^{\lambda\tau}, x_1(\mu + \tau)e^{\lambda\tau}\right)]d\tau = 0$$

має ізольований корінь $x_1 = x_1^*,$ такий, що $F_0'(x_1^*) \neq 0,$ то при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ система (5) має розривний одноімпульсний цикл. Він є асимптотично стійким, якщо $F_0'(x_1^*) < 0$ і нестійким, якщо $F_0'(x_1^*) > 0.$

Цей цикл знаходиться в деякому $U(\varepsilon)$ - околі $(U(\varepsilon) \to 0,$ коли $\varepsilon \to 0)$ лінії

$$x_2 = x_1\left(\mu + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{x_1}{x_1^*}\right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \le \frac{x_1}{x_1^*} \le 1.$$

В цьому параграфі доведено також теорему, яка встановлює достатні умови існування ізольованого розривного двоімпульсного циклу.

В параграфі 3.3 розроблені методи застосовані до дослідження розривних циклів слабо нелінійного імпульсного збуреного осцилятора.

Четвертий розділ присвячено питанню стійкості інваріантної тороїдальної множини одного класу лінійного розширення динамічної системи на торі.

В параграфі 4.2 у прямому добутку m - вимірного тора T_m та евклідового простору R^n розглядається система диференціальних рівнянь

де

$\varphi = col(\varphi_1, ..., \varphi_m), \quad x = col(x_1, ..., x_n),$

$a(\varphi), P(\varphi)$ - відповідно векторна та матрична неперервні 2π періодичні по кожній компоненті $\varphi_j, \ (j = \overline{1, m})$ функції, визначені на m вимірному торі $T_m.$ Щодо функції $a(\varphi)$ вимагатимемо, щоб вона задовольняла умову Ліпшиця по φ з деякою сталою Ліпшиця $L.$

Нагадаємо, що точку $\varphi \in T_m$ динамічної системи на торі

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) \tag{7}$$

називають блукаючою, якщо існують її окіл $U(\varphi)$ і додатне число T такі, що

$$U(\varphi)\bigcap\varphi_t(U(\varphi)) = \emptyset \quad \text{для} \quad t \geq T.$$

Позначимо множину блукаючих точок через $W,$ а множину неблукаючих точок - через $\Omega = T_m \setminus W.$ Множина W блукаючих точок є інваріантною і відкритою множиною, бо разом з φ блукаючими є всі точки околу $U(\varphi).$

Множина Ω неблукаючих точок, в силу компактності тора $T_m,$ є непорожньою замкненою інваріантною множиною.

Справедливі такі теореми.

Теорема 4.2.1

Якщо в системі рівнянь (6) матриця $P(\varphi)$ така, що найбільше з власних чисел $\Lambda(\varphi)$ симетричної матриці $\hat{P}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(P(\varphi) + P^T(\varphi)\right)$ є від'ємним на множині Ω неблукаючих точок динамічної системи (7), то тривіальний тор системи (6) є експоненціально стійким.

Умови теореми виконуються, якщо матрична функція $P(\varphi)$ задовольняє нерівність

$\forall\varphi \in T_m, \quad \forall x \in R^n < P(\varphi)x, x > \leq \gamma(\varphi)\left\|x\right\|^2,$ де $\gamma(\varphi) < 0 \quad \forall\varphi \in \Omega.$

Теорема 4.2.2. Нехай для системи рівнянь (6) існує додатно визначена квадратична форма

$$V(\varphi, x) =< S(\varphi)x, x >$$

з симетричною матирцею $S(\varphi)$ така, що повна похідна її, складена в силу вихідної системи (6), тобто квадратична форма

$$\frac{d}{dt}V(\varphi, x) =< \hat{S}(\varphi)x, x >,$$ де

$$\hat{S}(\varphi) = \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot a(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S(\varphi),$$

є від'ємно визначеною на множині Ω неблукаючих точок системи (7). Тоді тривіальний тор системи рівнянь (6) є експоненціально стійким.

Теорема 4.2.3 Нехай в системі (6) матриця $P(\varphi)$ є сталою матрицею $P(\varphi) = P_0$ на множині Ω. Якщо дійсні частини власних чисел матриці P_0 від'ємні, то існує додатно визначена квадратична форма $V(\varphi, x) =< S(\varphi)x, x >$ з симетричною матрицею $S(\varphi)$ така, що її похідна в силу системи (6) є від'ємно визначеною квадратичною формою на множині Ω, а, отже, тривіальний тор системи (6) є експоненціально стійким.

В параграфі 4.3 розглядається випадок коли матриця $P(\varphi)$ системи (6) вздовж розв'язків першого з рівнянь комутує з своїм інтегралом (випадок Лаппо-Данилевського), тобто для будь-яких $t, \tau, \ t \geq \tau$ і $\varphi \in T_m$

$$P(\varphi_t(\varphi)) \cdot \int_\tau^t P(\varphi_s(\varphi))ds = \int_\tau^t P(\varphi_s(\varphi))ds \cdot P(\varphi_t(\varphi)). \qquad (8)$$

Теорема 4.3.1

Нехай при $t \geq \tau, \quad \varphi \in T_m$ виконується умова Лаппо-Данилевського (8) та рівномірно по $\varphi \in T_m$ існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{\tau}^{t} P(\varphi_s(\varphi))ds = A,$$

де A - стала матриця.

Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A від'ємні, то тривіальний тор системи рівнянь (6) експоненціально стійкий.

Параграф 4.4 присвячений встановленню достатніх умов стійкості інваріантної тороїдальної множини імпульсної системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \qquad \dot{x} = P(\varphi)x, \varphi \in T_m \setminus \Gamma, x \in R^n,$$
$$\Delta x_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x, \tag{9}$$

в якій векторна функція $a(\varphi)$ та матричні функції $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ визначені для всіх $\varphi \in T_m$ неперервні і 2π-періодичні по кожній змінній φ_ν. Щодо $B(\varphi)$, то достатньо, щоб вона була визначена на множині Γ.

Щодо множини Γ вважаємо, що вона є підмножиною тора T_m і задається рівнянням

$$\Gamma = \{\varphi \in T_m : \Phi(\varphi) = 0\},$$

де $\Phi(\varphi)$ - неперервно диференційовна 2π-періодична по кожній змінній $\varphi_\nu, \quad \nu = \overline{1, m},$ функція. Вважатимемо також, що кожна з траєкторій системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ перетинає множину Γ трансверсально. Для цього достатньо виконання умови

$$\langle grad\Phi(\varphi), \quad a(\varphi)\rangle \neq 0, \quad \varphi \in \Gamma.$$

Позначимо через $t = t_i(\varphi)$ розв'язки рівняння

$$\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0. \qquad (10)$$

Будемо вважати також, що розв'язки (10) існують і

$$\lim_{i \to \pm\infty} t_i(\varphi) = \pm\infty.$$

Вимагатимемо також існування границі

$$\lim_{T \to \infty} \frac{i(t,\, t+T)}{T} = p,$$

рівномірно по $t \in R$ та $\varphi \in T_m$, де $i(t,\ t+T)$ - кількість розв'язків рівняння (10), що знаходяться між t і $t+T$.
В цьому параграфі доведено такі твердження.

Теорема 4.4.1 Нехай в системі рівнянь (9) матриці $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ такі, що для $x \in R^n$

$$\langle P(\varphi)x,\, x\rangle \leq \gamma(\varphi)\,\langle x,\, x\rangle\,, \qquad \varphi \in T_m,$$

$$\left\langle (E + B^T(\varphi))(E + B(\varphi))x,\, x\right\rangle \leq \alpha^2(\varphi)\,\langle x,\ x\rangle\,, \qquad \varphi \in \Gamma.$$

Якщо

$$\gamma_0 + p \ln \alpha_0 < 0, \tag{11}$$

де $\gamma_0 = \max_{\varphi \in T_m} \gamma(\varphi), \ \alpha_0 = \max_{\varphi \in \Gamma} \alpha(\varphi),$ то тривіальний тор системи рівнянь (9) асимптотично стійкий.

Теорема 4.4.2 Нехай в системі рівнянь (9) функції $a(\varphi), \ P(\varphi), \ B(\varphi)$ такі, як і в попередній теоремі.

Якщо для неперервних функцій $\gamma(\varphi), \ \ \alpha(\varphi) > 0$ виконується нерівність (11),

$$\gamma_0 = \max_{\varphi \in \Omega} \gamma(\varphi), \quad \alpha_0 = \max_{\varphi \in \Gamma \cap \Omega} \alpha(\varphi),$$

де Ω множина неблукаючих точок динамічної системи (7), то тривіальний тор системи рівнянь (9) асимптотично стійкий.

В параграфі 4.5 за умов попереднього параграфу досліджується питання існування інваріантних розривних тороїдальних множин системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi), \quad \varphi \in T_m \setminus \Gamma,$$

$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi), \tag{12}$$

Поряд з цією системою розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \qquad t \neq t_i(\varphi),$$

$$\Delta x|_{t=t_i(\varphi)} = B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)x,$$

яка залежить від $\varphi \ \in \ T_m$ як від параметра.

Позначимо через $X_\tau^t(\varphi)$ матрицант системи, а через

$G_0(\tau, \varphi)$ - функцію Гріна-Самойленка.

Якщо

$$\left\| X_\tau^t(\varphi) \right\| \leq K e^{-\gamma \left| t - \tau \right|}, \quad t, \tau \in R,$$

для деяких $K \geq 1, \quad \gamma > 0,$ що не залежать від $\varphi \in T_m,$ то інваріантна тороїдальна множина системи рівнянь (12) може бути представлена у вигляді

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau +$$

$$+ \sum_{-\infty < t_i(\varphi) < \infty} G_0(t_i(\varphi) + 0, \varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)).$$

Теорема 4.5.1

Нехай в системі рівнянь (12) матриця $P(\varphi)$ задовольняє умови теореми 4.3.1.

Тоді, якщо $\gamma + p \ln \alpha < 0,$ де

$$\gamma = \max_{j=1,\ldots,n} Re \lambda_j(A), \quad A = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int\limits_\tau^t P(\varphi_{t_1}(\varphi)) dt_1,$$

$$\alpha^2 = \max_{\varphi \in \Gamma} \max_{j=1,\ldots,n} \lambda_j((E + B(\varphi))^T (E + B(\varphi))),$$

то система рівнянь (12) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину

$$x = u(\varphi) \equiv \int\limits_{-\infty}^{0} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_i(\varphi)<0} G_0(t_i(\varphi) + 0, \varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)).$$

В цьому параграфі наведені також достатні умови збереження асимптотично стійкого інваріантного многовиду системи (12) при малих збуреннях.

ВИСНОВКИ

Основні наукові результати дисертаційної роботи стосуються дослідження широкого класу розривних динамічних систем на площині і в прямому добутку m-вимірного тора T_m та n-вимірного евклідового простору R^n. Ці результати полягають в наступному:

- Доведено необхідні і достатні умови існування розривних періодичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь другого порядку, що піддаються імпульсному збуренню в момент проходження фазовою точкою фіксованої прямої;
- доведено теореми про існування одно- і дво-імпульсних розривних циклів слабо нелінійних розривних динамічних систем на площині, встановлено достатні умови асимптотичної стійкості і нестійкості цих циклів;
- встановлені достатні умови асимптотичної стійкості та нестійкості розв'язків широкого класу лінійних розширень динамічних систем на торі;
- доведено теореми про існування інваріантних тороїдальних множин достатньо широкого класу розривних динамічних систем, фазовим простором яких є прямий добуток m-вимірного тора T_m та n-вимірного евклідового простору R^n, сформульовані достатні умови асимптотичної стійкості таких множин.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях України:

1. Перестюк Ю.М. Розривні коливання в одній імпульсній системі / Ю.М. Перестюк // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. 15, – №4, – С. 494–503. (English translated: Yu.M. Perestyuk Discontinuous oscilations in one impulsive system / Yu. M. Perestyuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 194, – № 4. P. 404–413.)

2. Перестюк Ю.М. Про розривні коливання в одній імпульсній системі / Ю.М. Перестюк // Вісник Ужгородського університету. Ужгород. Серія: математика і інформатика, – 2012. – Т.23. – №2. – С.131–136.
3. Фекета П.В. Про інваріантні тори багаточастотних систем у випадку Лаппо-Данилевського / П.В. Фекета, Ю.М. Перестюк // Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки – 2012. – №3. – С. 105–110.
4. Фекета П.В. Теореми про збурення для многочастотної системи з імпульсами / П.В. Фекета, Ю.М. Перестюк // Нелінійні коливання. – 2015. –Т. 18, – № 2, – С. 280–289. (English translated: Feketa P. Perturbation Theorems for a Multifrequency System with Pulses / Feketa P., Yu Perestyuk // Journal of mathematical sciences. – 2016. – Vol. 217, – № 4. P. 515–524.)
5. Перестюк М.М. Про стійкість тороїдального многовиду одного класу динамічних систем / М.М. Перестюк, Ю.М. Перестюк // Нелінійні коливання. – 2016. – Т. 19 , – №4, С. 555–563.
6. Перестюк М.М. Стійкість інваріантного многовиду одного класу систем диференціальних рівнянь / М.М. Перестюк, Ю.М. Перестюк // Науковий вісник Ужгородського університету, Ужгород. Серія: математика і інформатика, – 2016, – Т. 28, – №1, С. 97–104.

Додаткові публікації:

7. Korol I. Discontinuous Cycles of Impulsive Autonomous System in the plane / I. Korol, Y. Perestyuk // Mathematical analysis, differential equations and their applications. Sofia – 2011. – P. 111–120.
8. Mamsa K. A certain class of discontinuous dynamical systems in the plane / K. Mamsa, Y. Perestyuk // Mathematical analysis, differential equations and their applications. Sofia – 2011. – P. 121–128.
9. Perestiuk Yu. On discontinuous cycles in one impulsive system / Yu. Perestiuk // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 3rd International Scientific Conference of Students and Young Scientists, Kyiv: Bukrek, – 2013. – P. 187–192.

Тези доповідей:

10. Мамса К.Ю. Періодичні розв'язки одного класу розривних динамічних систем на площині / К.Ю. Мамса, Ю.М. Перестюк // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 8-10 червня 2011, Київ, Україна, С. 115.
11. Перестюк Ю.М. Про коливні розв’язки в одній імпульсній системі / Ю.М. Перестюк // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", 27–29 вересня 2012 Ужгород, Україна. С. 76.
12. Perestiuk Yu. On a Certain Discontinuous Dynamical System in the Plane / Yu. Perestiuk // Tbilisi Georgia International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2013", December 20-22, 2013, Tbilisi, Georgia. P. 116–117.
13. Мамса К.Ю. Про розривні коливання в двовимірних імпульсних системах / К.Ю. Мамса, Ю.М. Перестюк // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013". 23-30 червня 2013, Севастополь, Україна, С. 137.

14. Перестюк Ю.М. Обгрунтування методу усереднення для одного класу імпульсних систем / Ю.М. Перестюк // Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова, 15–22 червня 2013, Одеса, Україна, С. 81.
15. Feketa P.V. Invariant Manifolds of a Certain Class of Differential Equations / P.V. Feketa, Yu.M. Perestyuk // Tbilisi Georgia International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2014" December 18-20, 2014, Tbilisi, Georgia, P. 44–46.
16. Перестюк Ю.М. Періодичні коливання маятника в середовищі з тертям / Ю.М. Перестюк // XVI міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 14–15 травня 2015, Київ, Україна, С. 185–186.
17. Мамса К.Ю. Розривні цикли однієї імпульсної системи / К.Ю. Мамса, Ю.М. Перестюк // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", 19–21 травня 2016, Ужгород, Україна, С. 96.
18. Перестюк Ю.М. Про стійкість тороїдального многовиду / Ю.М. Перестюк // Друга Всеукраїнська наукова конференція Прикладні задачі математики, 13–15 жовтня 2016, Івано-Франківськ, Україна, С. 70–72.

АНОТАЦІЯ

Перестюк Ю.М. Дослідження одного класу розривних динамічних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню як лінійних, так і слабо нелінійних систем диференціальних рівнянь на площині, що піддаються імпульсному збуренню в момент проходження фазовою точкою заданих ліній, встановленню необхідних і достатніх умов існування сім'ї розривних одно- і дво-імпульсних траєкторій розривних періодичних розв'язків, а також достатніх умов існування таких ізольованих циклів, побудові асимптотичних наближень до них.

Запропоновано метод дослідження широкого класу нелінійних механічних систем маятникового типу в середовищі з великим опором, які піддаються імпульсному збуренню. Показано, що за рахунок лінійного імпульсного збурення навіть "затухаючий маятник" можна перетворити в коливальний.

Встановлені достатні умови асимптотичної стійкості та нестійкості розв'язків широкого класу лінійних розширень динамічних систем на торі, а також досліджено питання існування інваріантних тороїдальних множин розривних динамічних систем, фазовим простором яких є прямий добуток m-вимірного тора T_m та n-вимірного евклідового простору R^n, сформульовані достатні умови асимптотичної стійкості таких множин.
***Ключові слова*:** розривна динамічна система, імпульсний цикл, інваріантна множина, асимптотична стійкість, тороїдальний многовид.

АННОТАЦИЯ

Перестюк Ю.Н. Исследование одного класса разрывных динамических систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Киевський национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена исследованию как линейных так и слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений на плоскости, которые подвергаются импульсным возмущениям в момент прохождения фазовой точкой заданных линий, установлению необходимых и достаточных условий существования семьи разрывных одно и дво-импульсных траекторий разрывных периодических решений, а так же достаточных условий существования таких изолированных циклов, построению асимптотических приближений к ним. Этот метод дает возможность в практически важных задачах получать сравнительно простые вычислительные схемы и детально исследовать характер эволюции колебательных процесов.

Впервые показано, что даже в сильно дисипативных системах за счет импульсного возмущения возможно существование однопараметрической семейства разрывных периодических траекторий.

Предложено метод исследования широкого класса нелинейных механических систем маятникового типа в среде с большим сопротивлением, которые подвергаются импульсному возмущению. Показано, что за счет линейного импульсного возмущения даже "затухающий маятник" можна преобразовать в раскачивающийся.

Установлены достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости решений широкого класса линейных расширений динамических систем на торе, а так же исследован вопрос существования инвариантных тороидальных множеств разрывных динамических систем, фазовым пространством которых есть прямое произведение m-мерного тора T_m и n-мерного эвклидового пространства R^n, сформулированы достаточные условия асимптотической устойчивости таких множеств.

Получены достаточные условия сохранения асимптотически устойчивого инвариантного тороидального множества, которые требуют малости возмущения не на всем торе T_m, а лишь на множестве неблуждающих точек соответствующей динамической системы на этом торе.

***Ключевые слова*:** разрывная динамическая система, импульсный цикл, инвариантное множество, асимптотическая устойчивость, тороидальное многообразие.

ABSTRACT

Perestyuk Yu. An investigation of the certain class of discontinuous dynamical systems. – Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Science in the speciality 01.01.02 – Differential Equations. – Kyiv Taras Shevchenko National University, MES of Ukraine, Kyiv, 2017.

This thesis is concerned with establishment of the sufficient conditions for the linear and weakly nonlinear systems of differential equations on the plane, with impulsive perturbations when phase point crosses the lines set, establish necessary and sufficient conditions of the family explosive one- and two-impulse trajectories discontinuous periodic solutions, sufficient conditions for the existence of such isolated cycle, construction of asymptotic approximation to them.

Proposed method for studying a wide class of nonlinear mechanical systems pendulum in an environment with a high resistance, which are subjected to an impulse perturbations. It is shown that due to the linear impulse perturbation even "damped pendulum" can be converted into swinging.

Sufficient conditions for asymptotic stability and instability of solutions of a wide class of linear extensions of dynamical systems on the torus, and also investigated the existence of invariant toroidal set of discontinuous dynamical systems, phase space all others are direct product of *m*-dimensional torus T_m and *n*-dimensional euclidean space R^n, formulated sufficient conditions of asymptotic stability set.

Key words**:** discontinuous dynamic system, impulse cycle, invariant set, asymptotical stability, toroidal manifold.