УДК 519.233.2+681.5

Олександр С. Слабоспицький,
к.ф.-м.н., доц.

Рекурентний алгоритм для оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів з найменшими відхиленнями від точок "тяжіння" для білінійних дискретних динамічних систем

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 4д,
м. Київ, 03680, Україна,
e-mail: sl@univ.kiev.ua

Alexander S. Slabospitsky,
Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Prof.

Recurrent algorithm for non-stationary parameter estimation by least squares method with least deviations from 'attraction' points for bilinear discrete dynamic systems

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
4d Glushkov av., Kyiv, 03680, Ukraine,

e-mail: sl@univ.kiev.ua

Розглядається задача оцінювання нестаціонарних параметрів для білінійної дискретної динамічної системи у випадку, коли для матриць невідомих параметрів їх точки "тяжіння" задані в кожен момент. Отримані явна та рекурентна форми представлення для оцінок матриць параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від точок "тяжіння" при некласичних припущеннях.

Ключові слова: рекурентне оцінювання нестаціонарних параметрів, оператор псевдообернення, білінійна система, метод найменших квадратів зі змінним фактором забування, точки "тяжіння".

The estimation problem of slowly time-varying parameter matrices is considered for bilinear discrete dynamic system in the presence of disturbances. The least squares estimate with variable forgetting factor is investigated for this object in non-classical situation when this estimate may be not unique and additionally 'attraction' points for unknown parameter matrices are given at any moment. The set of all above-mentioned estimates of these unknown matrices is defined through the Moore-Penrose pseudo-inverse operator. The least squares estimate with variable forgetting factor and least deviation norm from given 'attraction' point at any moment is proposed as unique estimate on this set of all estimates. The explicit form of representation is obtained for this unique estimate of the parameter matrices by the least squares method with variable forgetting factor and least deviation norm from given 'attraction' points under non-classical assumptions. The recurrent algorithm for this estimate is also derived which does not require the usage of the matrix pseudo-inverse operator.

Keywords: recurrent non-stationary parameter estimation, pseudo-inverse operator, bilinear system, least squares method with variable forgetting factor, 'attraction' points.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ. Побудова якісних математичних моделей для високотехнологічних об'єктів неможлива без ефективного розв'язання задачі знаходження оптимальних оцінок їх невідомих параметрів. В залежності від об'єму доступної апріорної інформації про невизначеності системи можна використовувати різні методи параметричного оцінювання [1, 2]. Досить широко при розв'язанні такого роду задач використовується метод найменших квадратів (МНК) [3].

При справедливості класичних припущень оцінка МНК буде єдиною, але якщо вони порушуються, то виникає потреба у використанні оператора псевдообернення за Муром-Пенроузом [4, 5]. Саме у останньому випадку оцінка МНК з найменшою нормою для стаціонарних параметрів регресійної моделі була досліджена у роботі [6]. Там же були отримані рекурентні алгоритми для цієї оцінки та відповідної залишкової суми квадратів. На випадок оцінювання нестаціонарних параметрів регресійної моделі за допомогою МНК зі змінним фактором забування останні результати було перенесено у роботах [7, 8].

Припустимо, що класичні припущення, які гарантують єдиність оцінки МНК можуть не мати місце, але нехай у кожен момент часу задані точки "тяжіння" для невідомих параметрів об'єкту, який досліджується. Тоді логічно в якості єдиної оцінки взяти оцінку МНК з найменшою нормою відхилення від цих заданих точок "тяжіння" для параметрів системи у кожен момент часу. Саме для такої оцінки стаціонарних параметрів регресійної моделі та відповідної залишкової суми квадратів рекурентні співвідношення були отримані у роботі [9]. Потім ці результати були узагальнені на випадок оцінювання нестаціонарних невідомих параметрів регресійної моделі [10, 11]. Згодом відповідні рекурентні алгоритми були отримані для оцінок матриць невідомих параметрів дискретних лінійних динамічних систем у публікації [12].

У даній роботі останні результати по оцінюванню нестаціонарних параметрів за допомогою МНК зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від заданих точок "тяжіння" у кожен момент часу поширюються на клас білінійних дискретних динамічних систем в умовах невизначеності.

2. Оцінка нестаціонарних параметрів білінійної динамічної системи. Розглянемо задачу оцінювання матриць невідомих параметрів $A, B_1, B_2, \dots, B_m, B$ дискретної системи

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{i=1}^{m} u_i(k) B_i x(k) + Bu(k) + \xi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де $x(k)$ - доступний для спостереження $n-$вимірний вектор фазового стану, $\xi(k)$ - вектор похибок моделі, $u(k) = (u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k))^T$ - відомий вектор керувань, $\mathbb{N}$ - множина натуральних чисел.

Припустимо, що матриця параметрів $\mathfrak{A} = \left(A \,|\, B_1 \,|\, B_2 \,|\, \dots \,|\, B_m \,|\, B\right)$ може повільно змінюватися з плином часом і для неї у кожен момент часу N доступна інформація про її точку "тяжіння" $\mathfrak{A}_*\left(N\right) = \left(A_*\left(N\right) | B_{1*}\left(N\right) | B_{2*}\left(N\right) | \dots | B_{m*}\left(N\right) | B_*\left(N\right)\right), \quad N = 0,1,2, \dots$.

Множина усіх оцінок матриці параметрів $\mathfrak{A}$ у момент часу N методом найменших квадратів зі змінним фактором забування $\lambda(k)$ $\left(\lambda(k) \in (0,1],\ k \in \mathbb{N}\right)$, якщо можуть порушуватися класичні припущення, які гарантують її єдиність, визначається як

$$Arg \min_{\mathfrak{A}} Q\left(\mathfrak{A}, N\right), \tag{2}$$

де $Q(\mathfrak{A}, N) = \sum_{k=1}^{N} w\left(k, N\right) \left\|\xi\left(k\right)\right\|^2$, $\|\bullet\|$ - евклідова норма, $w(k,N) = \begin{cases} \prod_{i=k}^{N-1} \lambda(i), & якщо \quad k = \overline{1, N-1}, \\ 1, & якщо \quad k = N. \end{cases}$

Теорема 1. Оцінка $\hat{\mathfrak{A}}\left(N\right) = \left(\hat{A}\left(N\right) | \hat{B}_1(N) | \hat{B}_2(N) | \dots | \hat{B}_m(N) | \hat{B}(N)\right)$ методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $\mathfrak{A}_*\left(N\right)$ у кожен момент часу N для білінійної дискретної динамічної системи (1) має вигляд:

$$\hat{\mathfrak{A}}\left(N\right) = \left[\tilde{Z}_N^+ \tilde{X}_{2,N+1}\right]^T + \mathfrak{A}_*\left(N\right)\left[E_{n+nm+m} - \tilde{Z}_N^+ \tilde{Z}_N\right], \quad N \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

де $(^+)-$оператор псевдообернення за Муром-Пенроузом, E_n-одинична матриця порядку n,

$$\tilde{X}_{2,N+1} = \begin{pmatrix} \sqrt{w(1,N)} x^T(2) \\ \sqrt{w(2,N)} x^T(3) \\ \vdots \\ \sqrt{w(N,N)} x^T(N+1) \end{pmatrix}, \ \tilde{Z}_N = \begin{pmatrix} \sqrt{w(1,N)} z^T(1) \\ \sqrt{w(2,N)} z^T(2) \\ \vdots \\ \sqrt{w(N,N)} z^T(N) \end{pmatrix}, \ z(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ u(k) \otimes x(k) \\ u(k) \end{pmatrix},$$

$\otimes$ - операція тензорного добутку.

Доведення. Для цього представимо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\tilde{X}_{2,N+1}^T = \mathfrak{A}\tilde{Z}_N^T + \tilde{\Xi}_N^T, \quad N \in \mathbb{N},$$

де $\tilde{\Xi}_N^T = \left(\sqrt{w(1,N)}\xi(1), \sqrt{w(2,N)}\xi(2), \ \dots \ , \sqrt{w(N,N)}\xi(N)\right)$.

Так як $Arg \min_{\mathfrak{A}} Q\left(\mathfrak{A}, N\right) = Arg \min_{\mathfrak{A}} \left\|\tilde{\Xi}_N\right\|^2$, то згідно роботи [12] отримуємо потрібну оцінку (3).

3. Конструювання рекурентного алгоритму оцінювання. Перейдемо до побудови рекурентного представлення для оцінки (3).

Теорема 2. Для оцінки (3) методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $\mathfrak{A}_*\left(N\right)$ у кожен момент часу N для білінійної дискретної динамічної системи (1) справедливо таке рекурентне представлення:

$$\hat{\mathfrak{A}}\left(N+1\right)=\hat{\mathfrak{A}}\left(N\right)+[x(N+2)-\hat{\mathfrak{A}}\left(N\right)z(N+1)]z^T(N+1)R(N+1)+\left[\mathfrak{A}_*\left(N+1\right)-\mathfrak{A}_*\left(N\right)\right]P(N+1), \quad (4)$$

причому якщо $\delta(N+1)>0,$ то

$$\begin{cases} R(N+1)=\dfrac{1}{\lambda(N)}\left\{R(N)-\dfrac{1}{\delta(N+1)}\left[R(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N)+P(N)z(N+1)z^T(N+1)R(N)\right]+\right. \\ \qquad\qquad \left.+\dfrac{\gamma(N+1)}{\delta^2(N+1)}P(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N)\right\}, \\ P(N+1)=P(N)-\dfrac{1}{\delta(N+1)}P(N)z(N+1)z^T(N+1)P(N), \end{cases} \quad (5)$$

а у протилежному випадку

$$\begin{cases} R(N+1)=\dfrac{1}{\lambda(N)}\left\{R(N)-\dfrac{1}{\gamma(N+1)}R(N)z(N+1)z^T(N+1)R(N)\right\}, \\ P(N+1)=P(N), \end{cases} \quad (6)$$

з початковими умовами $\hat{\mathfrak{A}}(0)=\mathfrak{A}_*(0), \quad R(0)=\Theta_{n+nm+m}, \quad P(0)=E_{n+nm+m},$

де $\gamma(N+1)=\lambda(N)+z^T(N+1)R(N)z(N+1), \quad \delta(N+1)=z^T(N+1)P(N)z(N+1)$, Θ_n – нульова квадратна матриця порядку n.

Доведення. Потрібне рекурентне представлення (4)-(6) випливає з вигляду оцінки (3) та застосовування до неї результатів з побудови рекурентну з роботи [12].

4. Висновок. В якості оцінки матриці параметрів $\mathfrak{A}$ білінійної дискретної динамічної системи (1) при некласичних припущеннях запропоновано використовувати оцінку методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $\mathfrak{A}_*\left(N\right)$ у кожен момент часу N. Для цієї оцінки отримані явна та рекурентна форми представлення, а саме (3) та (4)-(6) відповідно.

Список використаних джерел

1. *Eykhoff P.* System Identification: Parameter and State Estimation / P. Eykhoff. – Chichester, England: Wiley, 1974. – 555 p.
2. *Ljung L.* System Identification: Theory for the User / L. Ljung. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987. – 544 p.
3. *Hsia T.C.* System Identification. Least-Squares Methods / T.C. Hsia. – Toronto: Lexington Books, 1977. – 165 p.
4. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix / E. H. Moore // Bull. American Mathematical Society. – 1920. – V. 26, № 9. – pp. 394 – 395.
5. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices / R. Penrose // Proc. Cambridge Philoc. Soc. – 1955. – V. 51, № 3. – pp. 406 – 413.

References

1. EYKHOFF, P. (1974) *System Identification: Parameter and State Estimation*. Chichester, England: Wiley.
2. LJUNG, L. (1987) *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
3. HSIA, T.C. (1977) *System Identification. Least-Squares Method*. Toronto: Lexington Books.
4. MOORE, E. H. (1920) On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bull. American Mathematical Society*, V. 26, № 9, pp. 394–395.
5. PENROSE, R. (1955) A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philoc. Soc.*, V. 51, № 3, pp. 406–413.

6. *Albert A.* Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse / A. Albert. – New York: Academic Press, 1972. – 180 p.
7. *Слабоспицький О.С.* Рекурентний алгоритм оцінювання методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 1999. – № 4. – С. 237-240.
8. *Слабоспицький О.С.* Рекурентне оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – № 1. – С. 282-285.
9. *Слабоспицький О.С.* Використання додаткової інформації в рекурентному оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – №4. – С. 179-182.
10. *Слабоспицький О.С.* Оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та мінімальною нормою відхилення від точок "тяжіння" для систем при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – № 4. – С. 199-202.
11. *Слабоспицький О.С.* Рекурентне оцінювання нестаціонарних параметрів систем при некласичних припущеннях методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від точок "тяжіння" / О.С. Слабоспицький // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2012. – № 2 (108). – С. 59-65.
12. *Слабоспицький О.С.* Рекурентний алгоритм для оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшими відхиленнями від точок "тяжіння" для лінійних динамічних систем при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2016. – № 3. – С. 106-110.

6. ALBERT, A. (1972) *Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse*. New York: Academic Press.
7. SLABOSPITSKY, A.S. (1999) Recursive algorithm of least squares estimation with variable forgetting factor under nonclassical assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*, 4, pp. 237-240.
8. SLABOSPITSKY, A.S. (2000) Recursive estimation of nonstationary parameters by the least squares method with variable forgetting factor under nonclassical assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*, 1, pp. 282-285.
9. SLABOSPITSKY, A.S. (2008) Usage of supplementary information in the recurrent parameter estimation of the systems with discrete time by the least squares method under non-classical assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*, 4, pp. 179-182.
10. SLABOSPITSKY, A.S. (2012) Non-stationary parameter estimation by the least squares method with variable forgetting factor and minimal deviation norm from 'attraction' points for systems under non-classical assumptions. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, 4, pp. 199-202.
11. SLABOSPITSKY, A.S. (2012) Recurrent non-stationary parameter estimation of systems under non-classical assumptions by the least squares method with variable forgetting factor and least deviation norm from 'attraction' points. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2 (108), pp. 59-65.
12. SLABOSPITSKY, A.S. (2016) Recurrent algorithm for non-stationary parameter estimation by the least squares method with variable forgetting factor and least deviations from 'attraction' points for linear dynamic systems under non-classical assumptions. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, 3, pp. 106-110.

Надійшла до редколегії 09.10.2018.