

Математичні олімпіади

УДК 51(079)

DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.3>

Олександр БОРИСЕЙКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.

ORCID ID: 0009-0001-3023-5332

e-mail: boryseiko@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.

ORCID ID: 0000-0002-7465-3173

e-mail: perehuda@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

**ВСЕУКРАЇНЬСКА ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ  
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА З МАТЕМАТИКИ. ФІНАЛЬНИЙ ТУР**

*Анотація.* Розглянуто розв'язки задач Всеукраїнської олімпіади Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фінальний тур.

*Ключові слова:* олімпіада; рівняння; нерівність; координати точки.

## 1. Вступ

Фінальний тур Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2025 році зібрав цілу когорту зацікавлених випускників серед школярів. Майбутнім абітурієнтам була запропонована низка цікавих різнопланових задач з математики. Багато хто з них розглядав олімпіаду як черговий етап перевірки своїх знань та підготовки до національного мультимедійного тесту. Олімпіада відбувалася 6 квітня 2025 року на базі механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. У фінальному турі олімпіади прийняли участь 75 учасників з різних регіонів України.

## 2. Задачі фінального туру

Наведемо умови завдань фінального туру олімпіади з відповідними розв'язками або вказівками.

**Задача 1.** Обчислити значення виразу  $\sqrt{7\sqrt{3}-12} - \sqrt{4\sqrt{3}-6} + \sqrt{13\sqrt{3}-12}$ .

*Розв'язання:* Для розв'язання поставленої задачі перетворимо підкореневі вирази за допомогою винесення спільного множника і виділимо повні квадрати підкореневих виразів:

$$\sqrt{7\sqrt{3}-12} = \sqrt[4]{3}\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{4-4\sqrt{3}+3} = \sqrt[4]{3}\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt[4]{3}(2-\sqrt{3});$$

$$\sqrt{4\sqrt{3}-6} = \sqrt[4]{3}\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt[4]{3}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[4]{3}(\sqrt{3}-1);$$

$$\sqrt{13\sqrt{3}-12} = \sqrt[4]{3}\sqrt{13-4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{12-4\sqrt{3}+1} = \sqrt[4]{3}\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[4]{3}(2\sqrt{3}-1).$$

Таким чином, отримуємо відповідь  $2\sqrt[4]{3}$ .

*Відповідь:*  $2\sqrt[4]{3}$ .

**Задача 2.** Знайти розв'язки нерівності

$$(x^2 - 5x + 3) \lg\left(1 - \frac{x}{3}\right) \geq \lg\left(\frac{3}{3-x}\right).$$

*Розв'язання:* Визначаємо область допустимих значень невідомої змінної. Згідно визначення логарифмічної функції ця область є розв'язком системи нерівностей

$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{3} > 0, \\ \frac{3}{3-x} > 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 3).$$

Далі проводимо перетворення вихідної нерівності і розкладаємо отриманий у лівій частині вираз на множники:

$$(x^2 - 5x + 3) \lg\left(\frac{3-x}{3}\right) \geq -\lg\left(\frac{3-x}{3}\right);$$

$$(x^2 - 5x + 4) \lg\left(\frac{3-x}{3}\right) \geq 0;$$

$$(x-1)(x-4) \lg\left(\frac{3-x}{3}\right) \geq 0.$$

З використанням методу інтервалів отримаємо відповідь.

*Відповідь:*  $x \in (-\infty, 0] \cup [1, 3)$ .

**Задача 3.** Задано квадрат  $ABCD$ . Точка  $M$  розташована всередині квадрата.

Відомо, що відстань  $AM = \sqrt{27}$  см, відповідно  $DM = \sqrt{6}$  см,  $CM = \sqrt{3}$  см. Визначити значення площі квадрата.

*Розв'язання:* Розглянемо квадрат  $ABCD$ , розташований у першій чверті прямокутної декартової системи координат з точкою  $A$  у початку координат. Сторони квадрата  $AB$  та  $AD$  розташовані на осях  $Ax$  та  $Ay$  (див. рис. 1).

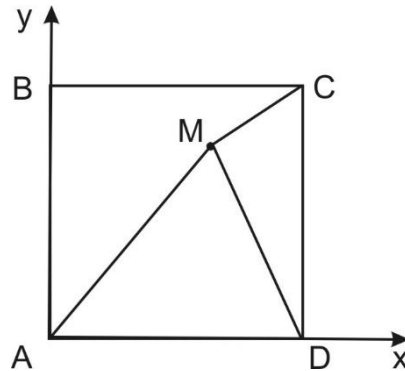


Рис. 1. Рисунок до задачі 3.

Покладемо довжину сторони квадрата рівною  $a$ ; невідомі координати точки  $M$  позначимо  $(x, y)$ ; точки  $C$  та  $D$  будуть мати координати  $(a, a)$  та  $(a, 0)$ , відповідно.

Далі розглянемо квадрати відстаней між точкою  $M$  та точками  $A$ ,  $C$  та  $D$ :

$$AM^2 = x^2 + y^2 = 27;$$

$$DM^2 = (x - a)^2 + y^2 = 6;$$

$$CM^2 = (x - a)^2 + (y - a)^2 = 3.$$

Отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Виключимо з рівнянь системи  $x$  та  $y$  і отримаємо рівняння для визначення  $a$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 27, \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 6, \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = 3, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 27, \\ a^2 - 2ax = -21, \\ a^2 - 2ax + a^2 - 2ay = -24, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 27, \\ a^2 - 2ax = -21, \\ a^2 - 2ay = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 27, \\ x = \frac{a^2 + 21}{2a}, \\ y = \frac{a^2 + 3}{2a}. \end{cases}$$

Підставимо вирази для  $x$  та  $y$  у перше рівняння і, таким чином, отримаємо бікватратне рівняння, яке має наступний розв'язок:

$$\left(\frac{a^2 + 21}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + 3}{2a}\right)^2 = 27;$$

$$a^4 + 42a^2 + 441 + a^4 + 6a^2 + 9 = 108a^2;$$

$$2a^4 - 60a^2 + 450 = 0;$$

$$a^4 - 30a^2 + 225 = 0.$$

Отже,  $a^2 = 15$ .

Відповідь:  $15 \text{ см}^2$ .

**Задача 4.** Знайти розв'язки рівняння

$$\frac{5}{7 - 3 \sin^2 2x} = \frac{9 + 4 \sin 6x}{4 \sin^2 6x}.$$

Розв'язання. Легко помітити, що

$$\frac{5}{7 - 3 \sin^2 2x} \leq \frac{5}{4} \quad \text{і} \quad \frac{5}{4} \leq \frac{9 + 4 \sin 6x}{4 \sin^2 6x}.$$

Тому рівність можлива за умови

$$\begin{cases} \sin^2 2x = 1, \\ \sin 6x = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 6x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Знаходимо спільні значення множин розв'язків першого та другого рівнянь:

$$\frac{1}{4} + \frac{n}{2} = -\frac{1}{12} + \frac{k}{3} \Rightarrow \frac{n}{2} = -\frac{1}{3} + \frac{k}{3} \Rightarrow n = \frac{2k - 2}{3};$$

Тоді  $2k - 2 = 3mi$ ,  $k = 1 + \frac{3m}{2}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Отже,  $m = 2i$  – парне і  $x = \frac{\pi}{4} + \pi i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ .

Відповідь:  $x = \frac{\pi}{4} + \pi i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 5.** Визначити значення параметра  $a > 0$ , для якого найбільше значення виразу  $\sqrt{2-x-2y} + \sqrt{x+2} + \sqrt{ay+3a}$  дорівнює 5.

*Розв'язання.* Розглянемо наступні вектори:

$$\left(1; 1; \sqrt{\frac{a}{2}}\right) \text{ та } \left(\sqrt{2-x-2y}; \sqrt{x+2}; \sqrt{2y+6}\right).$$

Очевидно, що вираз який ми досліджуємо є їх скалярним добутком. Застосуємо нерівність для скалярного добутку:

$$\vec{a}\vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|.$$

Тоді найбільше значення виразу буде мати вигляд:

$$\sqrt{1+1+\frac{a}{2}}\sqrt{2-x-2y+x+2+2y+6} = \sqrt{\frac{4+a}{2}}\sqrt{10} = \sqrt{4+a}\sqrt{5}.$$

За умовою найбільше значення дорівнює 5:

$$\sqrt{4+a}\sqrt{5} = 5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4+a} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

*Відповідь:*  $a = 1$ .

### 3. Висновки

Участь у математичних олімпіадах – це неоціненний досвід для усіх хто щиро захоплюється математикою. Навіть якщо ви не здобудете призового місця, сам процес розв'язання складних задач допоможе вам краще зрозуміти матеріал, розвинути критичне мислення та підвищити рівень підготовки до вступних випробувань. Нехай вас не зупиняють виклики, адже кожна олімпіада – це крок до особистісного зростання. Бажаємо успіхів у подальшому вивченні математики та досягненні нових вершин!

#### Список використаних джерел

Федак І. В. (2003) Готуємося до олімпіади з математики: Посібник для ЗНЗ.

Сарана О.А. (2005) Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник.

Отримано редакцією журналу: 01.05.2025

Прорецензовано: 15.05.2025

Схвалено до друку: 10.06.2025

**Всеукраїнська олімпіада Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка з математики. Фінальний тур**

---

Борисейко О.Б., Перегуда О.В.

Oleksandr BORYSEIKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.  
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332  
e-mail: boryseiko@knu.ua  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.  
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173  
e-mail: perehudao@knu.ua  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

**ALL-UKRAINIAN MATHEMATICS OLYMPIAD OF TARAS SHEVCHENKO NATIONAL  
UNIVERSITY OF KYIV FROM MATHEMATICS. FINAL ROUND**

**Abstract.** *Solutions to the tasks of the Olympiad of Taras Shevchenko Kyiv National University were considered.*

**Keywords:** *Olympiad; equation; inequality; solution; point coordinates.*