УДК 532.59: 534.29

Жук О.П.[1], д.ф.-м.н., пров.н.с.
Жук Я.О.[2], д.ф.-м.н., проф.

Дія радіаційної сили в звуковому полі на сферичну краплю в околі вільної поверхні ідеальної рідини

[1]Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

O.P. Zhuk[1], Dr.Sci., Leading Researcher.
Y.A. Zhuk[2], Dr.Sci., Prof.

Acoustic radiation force effect on a spherical drop placed in the vicinity of an ideal liquid free surface

[1]Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, 3, Petr Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

Розроблено метод для дослідження дії радіаційної сили в акустичному полі на сферичну краплю рідини, розташовану в ідеальній рідині в околі вільної поверхні. Одержано формули для обчислення величини і напряму її дії.
Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, сферична крапля рідини, гідродинамічна сила, радіаційна сила.

Acoustic radiation force effect on a liquid spherical drop placed in the vicinity of an ideal liquid free surface is studied. The problem of determination of the radiation forces acting on an obstacle in ideal liquid is formulated with respect to the Lagrange coordinate system. Thus, the radiation pressure is defined as time-averaged value of the acoustic pressure over the obstacle surface. This approach is adequate if, at determining of the acoustic pressure in a fluid, the deviation of the pressure from the harmonic law in time domain is taken into account in the obstacle vicinity. An action of the acoustic radiation force on a spherical drop of ideal liquid placed in turn in a liquid by its free plane surface is studied here for the case of the incident plane sound wave propagating perpendicularly to the liquid boundary. As a result, the liquid sphere is appeared to be located in the standing sound wave of pressure which has its displacement node at the free surface. Problem solution is obtained as a three step procedure. Initially, solution of the problem of an incident wave scattering at the drop is derived. With making use of the results obtained, the second step encompasses determining of hydrodynamic forces acting on the liquid spherical drop with their subsequent averaging over the suitable time interval at the third step. It is found there frequencies of the incident wave exist that provide zero radiation force acting on the drop which is immobile in this case. These equilibrium positions of the spherical drop could be stable or unstable with respect to the incident wave frequency variation.
Key Words: ideal liquid, plane acoustic wave, liquid spherical particle, hydrodynamic force, radiation force.

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

Дослідження сталих у часі сил в акустичному полі є важливим з огляду на ряд теоретичних і практичних задач [1]. Вивченню різних питань, пов'язаних із дією радіаційних сил на тверді й рідкі частинки, присвячено роботи [2–5]. У випадку перешкоди у вигляді рідкої сфери збурювані падаючою хвилею коливальні процеси в ній можуть істотно впливати на характер розсіювання хвилі [2].

Задачу обчислення радіаційної сили, яка діє в звуковому полі на перешкоду, розбивають на декілька етапів. На першому з них визначається хвиля, що розсіюється або відбивається перешкодою. Для цього необхідно скористатись розв'язком лінійної задачі дифракції про розсіювання акустичної хвилі на перешкоді. На другому етапі на основі результатів розв'язання цієї задачі визначається результуюча сила впливу рідини на перешкоду. На третьому етапі осередненням в часі останньої відфільтровується її стала за часом складова, яку й називають радіаційною силою.

В даній статті розглядається гнучка сферична частинка (крапля рідини, що відрізняється від зовнішньої), розташована біля межі зовнішньої рідини, яка є вільною поверхнею, що контактує з повітрям, перпендикулярно до якої поширюється плоска звукова хвиля.

2. Постановка задачі дифракції та її розв'язування

Розглядається ідеальна стислива рідина, в якій на відстані ℓ від її вільної поверхні розташована сферична крапля іншої рідини радіусу R (рис.1). Зовнішня рідина характеризується густиною ρ_0 і швидкістю звуку в ній a_0. Густина рідини краплі ρ_1 і швидкість звуку в ній a_1. В напрямі, перпендикулярному до поверхні рідини ($z = 0$) поширюється плоска звукова хвиля, потенціал Φ_i якої в системі координат $Oxyz$ (рис.1) має такий вигляд

$$\Phi_i = A\exp[i(kz - \omega t)], \qquad (1)$$

де A − амплітуда; $k = \omega/a_0$ – хвильове число; ω − кутова частота.

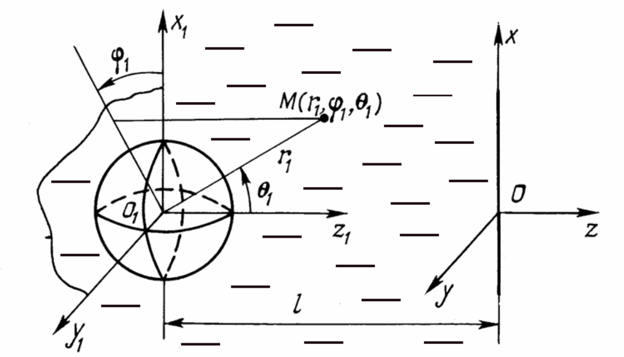

Рис. 1. Сферична крапля рідини в околі вільної поверхні зовнішньої рідини.

Радіаційна сила, яка діє на сферичну краплю рідини, визначається звуковим полем, утвореним інтерференцією первинної хвилі Φ_i, хвилі, відбитої від вільної поверхні $z = 0$, хвилі, розсіяної на сферичній краплі, а також частиною останньої хвилі, відбитої від вільної поверхні $z = 0$ рідини. Потенціали трьох останніх із вказаних хвиль позначимо відповідно Φ_s, $\Phi_d^{(1)}$, і $\Phi_s^{(1)}$. Для їх визначення необхідно, як вказано вище, розв'язати багатозв'язну лінійну задачу дифракції хвилі з потенціалом Φ_i на сферичній краплі і на вільній поверхні рідини. В такому випадку потенціали швидкостей Φ повинні задовольняти рівнянню

$$\Delta\Phi - \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0\,. \qquad (2)$$

В рамках постановки задачі дифракції вільну поверхню рідини $z = 0$ вважаємо ідеальною [2–4], тому відбита від неї хвиля (1) буде мати потенціал

$$\Phi_s = -A\exp[-i(kz + \omega t)]\,. \qquad (3)$$

Отже можемо потенціал $\Phi_0 = \Phi_i + \Phi_s$ розглядати як потенціал первинної (падаючої) хвилі.

Введемо зв'язану із краплею рідини сферичну систему координат $O_1r_1\varphi_1\theta_1$. Потенціал $\Phi_d^{(1)}$ розсіяної на сфері (відбитої від неї) хвилі представимо узагальненим рядом Фур'є по сферичних хвильових функціях

$$\Phi_d^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) P_n(\cos\theta_1)\exp(-i\omega t)\,. \quad (4)$$

де $h_n^{(1)}(kr_1)$ – сферична функція Ганкеля першого роду, $P_n(\cos\theta_1)$ – поліноми Лежандра.

У випадку лінійної постановки задачі дифракції тиск p і швидкість $\vec{v}$ рідини визначаються через потенціали Φ поля швидкості формулами

$$p = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad \vec{v} = \operatorname{grad}\Phi\,. \qquad (5)$$

При формулюванні граничних умов на поверхні сферичної краплі не враховуємо поверхневий натяг і вважаємо, що амплітуда коливань поверхні краплі є малою величиною і тому можемо прийняти $R = const$.

Вважаємо сферичну краплю нерухомою. Тоді граничні умови на її поверхні S_1 мають такий вигляд:

$$v\big|_{S_1} = \overline{v}\big|_{S_1}\,,\ p\big|_{S_1} = \overline{p}\big|_{S_1}\,, \qquad (6)$$

а на вільній поверхні зовнішньої рідини тиск дорівнює нулю

$$p\big|_{z=0} = 0\,. \qquad (7)$$

Риска над символом позначає величини, які характеризують стан рідини краплі.

Для визначення потенціалу $\Phi_s^{(1)}$ відбитої від вільної поверхні $z = 0$ частини розсіяної на сфері хвилі $\Phi_d^{(1)}$ скористаємось методом уявних зображень [5]. Для цього задачу про акустичне поле у півпросторі з краплею рідини N_1, обмеженому абсолютно м'якою поверхнею, замінимо задачею про акустичне поле в необмеженому просторі, в якому симетрично відносно вільної поверхні розміщена уявна сферична крапля N_2. Розсіяна на ній акустична хвиля з потенціалом $\Phi_d^{(2)}$ повинна створювати в точках абсолютно м'якої поверхні тиск, рівний за величиною і протилежний по знаку тиску, викликаному хвилею з потенціалом $\Phi_d^{(1)}$. Таким чином, відбита від вільної поверхні частина хвилі $\Phi_d^{(1)}$ (тобто хвиля-луна, яка визначається потенціалом $\Phi_s^{(1)}$) – це акустичне поле, яке створюється у актуальному півпросторі розсіяною на уявній сферичній краплі N_2 хвилею Φ_0.

Зв'яжемо з уявною краплею сферичну систему координат $O_2r_2\varphi_2\theta_2$, а потенціал $\Phi_s^{(1)}$ запишемо в такому вигляді:

$$\Phi_s^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} h_n^{(1)}(kr_2) P_n(\cos\theta_2)\exp(-i\omega t), \quad (7)$$

який задовольняє умови випромінювання на нескінченності.

Із граничної умови на вільній поверхні ($p = 0$, при $z = 0$) встановлюється зв'язок між коефіцієнтами $A_n^{(1)}$ і $A_n^{(2)}$

$$A_n^{(2)} = (-1)^{n+1} A_n^{(1)}. \quad (8)$$

Для визначення коефіцієнтів $A_n^{(1)}$ використовуються граничні умови (6) на поверхні S_1 сферичної краплі. При цьому швидкість у зовнішній рідині зумовлюється потенціалами звукового поля

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_d^{(1)} + \Phi_s^{(1)}. \quad (9)$$

Хвильове поле в рідині краплі опишемо потенціалом

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{A}_n^{(1)} j_n(\overline{k}r_1) P_n(\cos\theta_1)\exp(-i\omega t). \quad (10)$$

Зауважимо, що потенціали Φ_0 і $\Phi_s^{(1)}$ необхідно записати в сферичній системі координат, зв'язаній з краплею N_1. В результаті отримаємо

$$\Phi(r_1,\theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)Ab_n j_n(kr_1) + A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) + S_n^{(2)} j_n(kr_1)\right] P_n(\cos\theta_1) e^{-i\omega t}, \quad (11)$$

де $j_n(kr_1)$ – сферичні функції Бесселя,

$$b_n = -2i\sin(k\ell - n\pi/2),$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} A_p^{(1)} Q_{0n0p}^{(1,2)}(2k\ell,\pi),$$

$$Q_{0n0p}^{(1,2)}(2k\ell,\pi) = 2i^{p-n} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} (-1)^{\sigma} b_{\sigma}^{(n0p0)} h_{\sigma}^{(1)}(2k\ell),$$

$$b_{\sigma}^{(p0n0)} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n+3)}{2(2\sigma+1)}}\,(pn00|\sigma 0)^2,$$

$$(pn00|\sigma 0) = (-1)^{\sigma+\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{s}{2}\right)!}{\left(\frac{s}{2}-n\right)!\left(\frac{s}{2}-p\right)!\left(\frac{s}{2}-\sigma\right)!} \times \left[(2\sigma+s)!(s-2n)!(s-2p)!(s-2\sigma)!\right]^{\frac{1}{2}},$$

якщо s парне і $(pn00|\sigma 0) = 0$, якщо s непарне.

Задовольнивши граничні умови на поверхні S_1 сферичної краплі (6), одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, яка має такий вигляд:

$$\frac{h_n^{(1)}(\alpha)}{j_n(\alpha)} A_n^{(1)} + S_n^{(2)} - \eta \frac{j_n(\xi\alpha)}{j_n(\alpha)} \overline{A}_n^{(1)} = -A(2n+1)b_n,$$

$$\frac{h_n^{(1)'}(\alpha)}{j_n'(\alpha)} A_n^{(1)} + S_n^{(2)} - \xi \frac{j_n'(\xi\alpha)}{j_n'(\alpha)} \overline{A}_n^{(1)} = -A(2n+1)b_n,$$

Вона розв'язується методом редукції. В рівняннях введено позначення:

$$\alpha = kR, \xi = a_0/a_1, \eta = \rho_1/\rho_0, \xi\alpha = \overline{k}R.$$

Визначенням потенціалів (10) і (11) закінчується розв'язання задачі дифракції.

3. Обчислення радіаційної сили, що діє на тверду сферичну частинку

Радіаційну силу обчислимо, осереднюючи в часі гідродинамічну силу, яка діє в звуковому полі з боку рідини на сферичну краплю. Внаслідок осьової симетрії хвильового поля з потенціалом (11) відносно осі Oz гідродинамічна сила, з якою звукове поле діє на сферичну краплю, напрямлена вздовж цієї осі та за величиною дорівнює

$$F_z = -2\pi R^2 \int_0^{\pi} p \sin\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1. \quad (12)$$

Для визначення радіаційної сили застосуємо підхід [2,3], який передбачає обчислення тиску p

$$p = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho(\mathrm{grad}\Phi)^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{a_0^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 \quad (13)$$

з точністю до доданків другого порядку по числу Маха, використовуючи дійсну частину потенціалу (11)

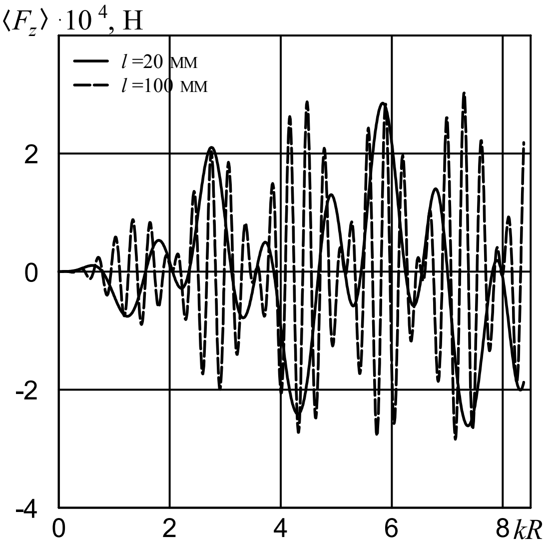

Рис. 2

$$\mathrm{Re}\Phi\left(r_1,\theta_1,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[K_n\left(kr_1\right)\sin\omega t+\right.$$
$$\left.+L_n\left(kr_1\right)\cos\omega t\right]P_n\left(\cos\theta_1\right). \qquad (14)$$

$$K_n\left(kr_1\right)=B_n y_n\left(kr_1\right)+\left[C_n-2\left(2n+1\right)A\times\right.$$
$$\left.\times\sin\left(kl-n\frac{\pi}{2}\right)+G_n\right]j_n\left(kr_1\right),$$

$$L_n\left(kr_1\right)=\left(B_n+D_n\right)j_n\left(kr_1\right)-C_n y_n\left(kr_1\right),$$
$$A_n^{(1)}=B_n+iC_n, S_n^{(2)}=D_n+iG_n$$

Беручи до уваги, що крапля є нерухомою та використовуючи в (12) співвідношення (13) і (14), після осереднення (12) в часі одержимо формулу для обчислення радіаційної сили, яка діє в акустичному полі з потенціалом (11) на сферичну краплю в околі вільної поверхні рідини

$$\left\langle F_z\right\rangle=2\pi\rho_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\left(2n+1\right)\left(2n+3\right)}\left\{\left[M_n\left(\alpha\right)M_{n+1}\left(\alpha\right)+\right.\right.$$
$$\left.+N_n\left(\alpha\right)N_{n+1}\left(\alpha\right)\right]\alpha^2+\left[K_n\left(\alpha\right)K_{n+1}\left(\alpha\right)+\right.$$
$$\left.\left.+L_n\left(\alpha\right)L_{n+1}\left(\alpha\right)\right]\left[n\left(n+2\right)-\alpha^2\right]\right\}, \qquad (15)$$
$$M_n\left(kr_1\right)=\frac{1}{r_1}\frac{dK_n}{dr_1}\ ,\quad N_n\left(kr_1\right)=\frac{1}{r_1}\frac{dL_n}{dr_1}$$

На рис. 2 подано типовий результат розрахунку залежності радіаційної сили від частоти первинної хвилі. Відзначимо, що радіаційна сила, яка діє на краплю в околі вільної поверхні рідини, на відміну від випадку твердої сфери в необмеженому середовищі, може мати напрямок, що співпадає з напрямком поширення хвилі, так і протилежний напрямок.

Список використаних джерел

1. King L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres / L. V. King // Proc. Roy. Soc., Ser. A. – 1934.– Vol. 147, No. 861. – P. 246–265.
2. Guz A.N. Effect of Acoustic Radiation in a Viscous Liquid on a Spherical Drop of Ideal Liquid / A.N. Guz and A.P. Zhuk // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No 6. – P.605–614.
3. Жук О.П. Дія радіаційної сили в звуковому полі на тверду сферичну частинку в околі вільної поверхні рідини / О. П. Жук , Я. О. Жук // Вісник Київського нац. ун-ту імені Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 3. – С.55–58.
4. Zhuk A.P. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity / A.P. Zhuk, V.D. Kubenko, Y.A. Zhuk // Journal of the Acoustical Society of America (JASA). – 2012. – Vol. 132, No. 4. – P. 2189–2197.
5. Исакович М.А. Общая акустика / М.А. Исакович. – М.: Наука, 1973. – 496 с.

References

1. KING L.V. (1934) On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proc. Roy. Soc., Ser. A.* 147(861). p. 246–265.
2. GUZ A.N. & ZHUK A.P. (2014) Effect of Acoustic Radiation in a Viscous Liquid on a Spherical Drop of Ideal Liquid. *International Applied Mechanics.* 50(6). p. 605–614.
3. ZHUK A.P. & ZHUK Y.A. (2017) Acoustic radiation force effect on a rigid spherical particle placed in the vicinity of a liquid free surface. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser. Physics & Mathematics*. No. 3. p. 55–58.
4. ZHUK A.P., KUBENKO V.D., ZHUK Y.A. (2012) Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity. *Journal of the Acoustical Society of America*. 132(4). p. 2189–2197.
5. ISAKOVICH M. A. (1973) *Obshchaya akustika*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 14.06.19