Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
на тему:
К-ОПУКЛІ ОБОЛОНКИ ВИПАДКОВИХ ВИБІРОК
за спеціальністю 113 Прикладна математика

студента 4 курсу
Башука Олексія Олексійовича

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук
Маринич Олександр Віталійович

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № .... від .... 2021 р.

Завідувач кафедри
О. М. Іксанов .... підпис

Київ – 2021

Зміст

Вступ

Візьмемо опуклу на $\mathbb{R}^d$ множину K, що містить початок координат у своїй внутрішності. Ми будемо розглядати множину $\Xi_n := \{\xi_1, ..., \xi_n\}$, що складається з n незалежних копій випадкової величини ξ з рівномірним розподілом на K, а також її властивості, пов'язані з опуклими оболонками. Властивості опуклих оболонок Ξ_n у звичайному сенсі розглядались у роботах [1, Роз. 8], [2], [3], [4]. Було показано, що при зростаючому n кількість вершин опуклої оболонки Ξ_n росте до нескінченності, але при правильном нормуванні отримується нетривіальна границя.

Були розглянуті і інші види опуклих оболонок. Наприклад, в [5] було показано, що середня кількість граней кожної окремої розмірності сферичного багатогранника, побудованого як сферична опукла оболонка точок рівномірно розподілених на одиничній півсфері, збігається до певної скінченної константи. Ця збіжність була доведена шляхом стереографічної проекції півсфери та доведенням збіжності за розподілом певним чином нормованої проекції випадкових точок на сфері до пуассонівського процесу.

Аналогічні результати стосовно кількості вершин та "ребер" були наведені для так званих "кругових" опуклих оболонок. В стандартному розумінні опуклої оболонки, вона будується шляхом перетину всіх півпросторів, що містять початкову множину точок. Якщо замінити півпростори на круги фіксованого радіусу і брати перетин всіх зміщень цього кругу, що містять початкову множину точок, то матимемо кругову опуклу оболонку. Фактично, звичайне визначення опуклої оболонки є лише частковим випадком кругової опуклої оболонки з радіусом нескінченність. Відповідно, множину називають кругоопуклою, якщо вона рівна своїй круговій опуклій оболонці. У [6] було показано, що середня кількість вершин та ребер для одиничної кругової оболонки множини точок рівномірно розподілених в одиничному крузі в $\mathbb{R}^2$ збігається до $\pi^2/2$ при збільшенні кількості точок до нескінченності, а пізніше у [7] показали збіжність відповідної дисперсії.

Вивчення кругових оболонок випадкових процесів та їх властивостей, без перебільшення, має і практичну цінність. Яскравим прикладом може бути побудова радіовежі в населеному пунті. Подібну споруду не завжди є можливість розташувати в центрі населеного пункту, але при цьому сигнал має досягати всюди. Якщо вважати область покриття радіовежі за круг, то кругова оболонка прийомників сигналу тісно пов'язана з можливим розміщенням споруди. Якщо більш точно, то відстань від вежі до будь-якого прийомнику сигналу, а тому і до будь-якої точки відповідної кругової оболонки, має не перевищувати радіус області покриття. Тоді, взявши центр населеного пункту за початок координат, множина всіх можливих місць розташування радіовежі рівна різниці за Мінковським (див. [8]) області покриття, з центром в початку координат, та кругової оболонки приймомників сигналу, взятої зі знаком мінус. При цьому, наведена опукла оболонка є випадковою множиною, в силу випадковості розміщення приймомників сигналу, а тому ймовірнісний розгляд данної проблеми може дати більш гнучкі результати.

У цій роботі ж буде вивчатись кругова оболонка множини Ξ_n n незалежних рівномірно розподілених в одиничному колі точок, позначена через Q_n. Тобто,

$$Q_n = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^2 : \Xi_n \subseteq U + x} (U + x),$$

де U є одиничним кругом з центром в початку координат. Буде показана збіжність за ймовірністю нормованої різниці за Мінковським між U та Q_n до пуассонівської нульової клітки Z. Разом з цим буде показана збіжність за розподілом кількості вершин та ребер Q_n до фіксованих констант, заданих через кількості вершин та ребер нульової клітки Z. Для визначення вершин та ребер, а також їх кількостей для кругоопуклих множин, буде використаний новий підхід.

Основна частина

1 Кругоопуклість з огляду на опуклі множини

Нехай $\mathcal{C}^2$ - це множина всіх компактних множин у $\mathbb{R}^2$. Тоді для всіх $L \in \mathcal{C}^2$ і $x \in \mathbb{R}^2$ позначимо

$$L + x := \{y + x : y \in L\}, -L := \{-x : x \in \mathbb{R}^2\}$$

зміщення множини L на x та відображення L відносно початку координат, відповідно. Також надалі будемо позначати ∂L границю множини L.

Тоді в наших позначеннях сума та різниця за Мінковським множин $K, L \in \mathcal{C}^2$ виглядатимуть

$$K + L := \bigcup_{x \in K} (x + L) = \{x + y : x \in K, y \in L\}$$

та

$$K \ominus L := \{x \in \mathbb{R}^2 : L + x \subseteq K\} = \{x : \forall y \in L, x \in K - y\} = \bigcap_{y \in L} (K - y), \quad (1.1)$$

відповідно, див. [8].

Визначення 1.1. *Круговою оболонкою множини $A \in \mathcal{C}^2$ будемо називати множину перетину всіх зміщень одиничного круга U, що містять множину A, і позначатимемо*

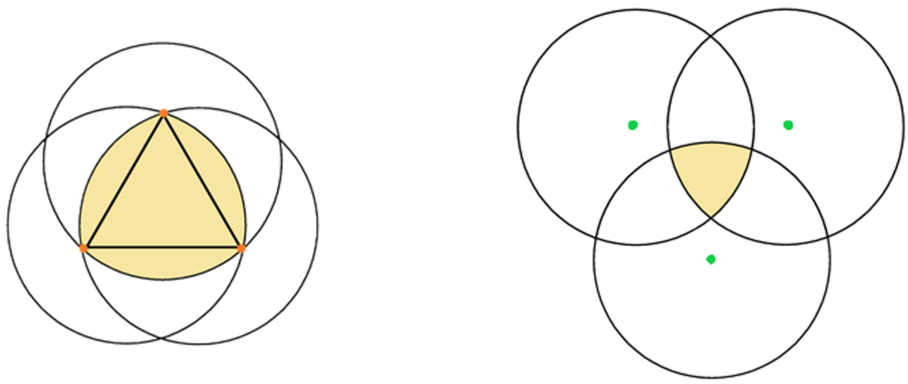
$$bh(A) := \bigcap_{x \in \mathbb{R}^2 : A \subseteq U + x} (U + x).$$

Якщо A не міститься в жодному зміщенні U, вважатимемо $bh(A) = \mathbb{R}^2$. Дивись рисунок 1.1.

Визначення 1.2. *Множину A називають кругоопуклою, якщо $A = bh(A)$.*

Згідно з визначенням

$$bh(A) = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^2 : A \subseteq U + x} (U + x) = U \ominus \{-x \in \mathbb{R}^2 : A \subseteq U + x\} =$$
$$= U \ominus \{x \in \mathbb{R}^2 : A \subseteq U - x\} = U \ominus (U \ominus A). \quad (1.2)$$



$$bh(A) := \bigcap_{x\in\mathbb{R}^2 : A\subseteq U+x} (U+x) \qquad U \ominus A = \bigcap_{y\in A} (U-y)$$

Рис. 1.1: Кругова оболонка $bh(A)$ та різниця за Мінковським $U \ominus A$ для множини A, що складається з трьох помаранчевих вершин правильного трикутнику. Зелені точки позначають множину $-A$.

Тоді оператор $A \to (U \ominus A)$ можна вважати дуальним до оператора взяття кругової оболонки множини A.

Твердження 1.3. *Для всіх $A \in \mathcal{C}^2$, маємо*

$$U \ominus A = U \ominus bh(A)$$

і $U \ominus A$ є кругоопуклою. Крім того, $A \in \mathcal{C}^2$ буде кругоопуклою тоді і тільки тоді, коли

$$A = U \ominus (U \ominus A). \tag{1.3}$$

Доведення. Очевидно, що $A \subseteq bh(A)$, а тому $U \ominus bh(A) \subseteq U \ominus A$. Тепер в інший бік. Нехай $x \in U \ominus A$. Тоді за визначенням різниці за Мінковським $A \subseteq U - x \Rightarrow bh(A) \subseteq U - x \Rightarrow x \in U \ominus bh(A)$. Тоді $U \ominus A = U \ominus bh(A)$.

Тоді $bh(A) = U \ominus (U \ominus A) = U \ominus (U \ominus bh(A))$. Відповідно A буде кругоопуклою тоді і тільки тоді, коли $A = U \ominus (U \ominus A)$. З цього випливає, що $U \ominus (U \ominus (U \ominus A)) = U \ominus bh(A) = U \ominus A$, а отже $U \ominus A$ є кругоопуклою. $\square$

Визначення 1.4. *Множину A називають доданком множини C, якщо існує така множина B в $\mathbb{R}^2$, якщо $C = A + B$.*

Очевидно, що якщо A та B є такими, що $C = A + B$, то $C \ominus A = B$ і $C \ominus B = A$, а отже для обох множин при $C = U$ виконується умова 1.3. Відповідно всі доданки U є кругоопуклими. Щоб показати зворотнє твердження введемо поняття генеруючої множини. Керуючись [9] та [3], опуклу множину $K \in \mathcal{C}^2$ називають генеруючою, якщо кожен перетин зміщень множини K є доданком K. Відомо, що кожен круг, як і будь-яке інше двовимірне опукле тіло, є генеруючою множиною, див. [8, Роз. 3.2] і [10, Теорема 2]. Відповідно, всі кругоопуклі множини є доданками U.

Визначення 1.5. *Опуклу множину $A \in \mathcal{C}^2$ називають строго опуклою, якщо ∂A не містить жодного власного сегменту.*

Лема 1.6. *Всі кругоопуклі множини є строго опуклими.*

Доведення. Якщо A є кругоопуклою множиною, то вона є доданком U. Тоді, якщо A буде мати власний сегмент, то і U повинен мати, що не є вірним. Відповідно A не може мати власного сегменту, а тому є строго опуклою. □

Визначення 1.7. *Нехай задана множни $L \subseteq \mathbb{R}^2$. Множину L^0 називають полярною і визначають*

$$L^0 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall y \in L \ \langle x, y \rangle \leq 1\}, \tag{1.4}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$. Якщо L є опуклою, замкненою та містить початок координат у своїй внутрішності, то L^0 є опуклою множиною, що містить початок координат у своїй внутрішності, а $(L^0)^0 = L$, див. [8, Теорема 1.6.1].

За [8, Теорема 1.6.3] відомо, що полярна множина до перетину опуклих компактних множин, що містять початок координат в своїх внутрішностях, рівна замиканню опуклої оболонки об'єднання їхніх полярних множин, а тому згідно 1.1

$$(U \ominus L)^0 = cl\ conv(\bigcup_{y \in L} (U - y)^0), \tag{1.5}$$

де cl позначає замикання. Якщо множина L скінченна, то оператором замикання можна знехтувати.

Остання формула буде відігравати важливу роль у подальших викладках, де ми будемо визначати вершини та "ребра" $bh(A)$ через вигляд полярної різниці $(U \ominus A)^0$ в наступних двох розділах.

2 Структура граней сімей строгоопуклих тіл

Для подальшої роботи нам потрібно ввести нову структуру. Але спершу пригадаємо деякі визначення опуклої геометрії.

Гранню опуклої множини $L \in \mathcal{C}^2$ називають опуклу підмножину $F \subseteq L$ таку, що для будь-яких $x, y \in L$ таких, що $(x+y)/2 \in F$, x і y теж лежать в F. Сім'ю граней множини L позначають $\mathfrak{F}(L)$. Найбільшою з них за оператором включення є сама множина L, а найменшою - $\varnothing$. Всі інші грані з множини $\mathfrak{F}(L)$ називають власними і позначають $\mathfrak{F}'(L) := \mathfrak{F}(L) \setminus \{L, \varnothing\}$. Розмірність грані $F \in \mathfrak{F}(L) \setminus \{\varnothing\}$ визначають розмірністю найменшого афінного підпростору, що містить F. Сім'ю граней розмірності k множини L позначають $\mathfrak{F}_k(L)$. Внутрішності усіх граней $F \in \mathfrak{F}(L) \setminus \{\varnothing\}$ відносно топології відповідного підпростору утворюють диз'юнктний розклад множини L. В свою чергу, границя ∂L множини L диз'юнктно розкладається по внутрішностях усіх граней $F \in \mathfrak{F}'(L)$ у відповідних їм підпросторах.

Пряму H у просторі $\mathbb{R}^2$ називають опорною до опуклої множини $L \in \mathcal{C}^2$, якщо H перетинає множину L, а також множина L повністю міститься в одній з двох підплощин розділених прямою H. Будь-який непорожній перетин L опорною прямою H називають відкритою гранню L. Будь-яка відкрита грань є власною гранню L, і будь-яка власна грань є підмножиною деякої відкритої грані L, див. [8, ст. 75].

Тепер, нехай у нас є скінченна сім'я строго опуклих компактних множин $\mathfrak{L} := \{L_i, i \in I\} \subseteq \mathcal{C}^2$. Опуклою оболонкою сім'ї $\mathfrak{L}$ будемо називати

$$conv(\mathfrak{L}) := conv(\bigcup_{i \in I} L_i)$$

Для кожної підмножини A відкритої грані F множини $conv(\mathfrak{L})$ визначимо підсім'ю сім'ї $\mathfrak{L}$, як

$$M(\mathfrak{L}, A) := \{L \in \mathfrak{L} : L \cap A \neq \varnothing\}.$$

Виходячи з теореми Каратеодорі, див. [8, Теорема 1.1.4], кожну точку A опуклої оболонки деякої множини $A \in \mathcal{C}^2$ можна подати у вигляді скінченної опуклої комбінації (не більше ніж трьох) точок $x_i \in A$. Тоді для кожної x точки будь-якої грані $F \in \mathfrak{F}(conv(\mathfrak{L}))$ існує опукла комбінація точок $x_i \in \bigcup_{i \in I} L_i$, а отже, за означенням грані, ці $x_i \in F$. Отже кожну точку x будь-якої грані $F \in \mathfrak{F}(conv(\mathfrak{L}))$

можна подати у вигляді опуклої комбінації точок з $L \cap F$ для $L \in M(\mathfrak{L}, F)$. Оскільки кожна $L \cap F \subseteq F$ для $L \in M(\mathfrak{L}, F)$, стає очевидно, що будь-яку грань $F \in \mathfrak{F}(conv(\mathfrak{L}))$ можна подати у вигляді опуклої оболонки $conv(\bigcup_{L \in M(\mathfrak{L},F)} L \cap F)$.

Визначення 2.1. *Казатимемо, що сім'я множин $\mathfrak{L}$ знаходиться в загальній позиції, якщо для кожної закритої підмножини A будь-якої відкритої грані $conv(\mathfrak{L})$ виконується*

$$\sum_{L \in M(\mathfrak{L},A)} (1 + dim(A \cap L)) \leq dim(A) + 1, \tag{2.1}$$

де dim - це розмірність найменшого афінного простору натягнутого на відповідну множину.

При $A \in \mathfrak{F}(conv(\mathfrak{L}))$ досягається рівність, бо $dim(conv(B_1 \cup B_2)) \leq dim(B_1) + dim(B_2) + 1$, а тому

$$1 + dim(A) = 1 + dim(conv(\bigcup_{L \in M(\mathfrak{L},A)} L \cap A)) \leq \sum_{L \in M(\mathfrak{L},A)} (1 + dim(L \cap A)).$$

Твердження 2.2. *Сім'я множин $\mathfrak{L}$ буде знаходитись в загальній позиції тоді і тільки тоді, коли для кожної грані (або для кожної відкритої грані) F у $conv(\mathfrak{L})$, сім'я $M(\mathfrak{L}, F)$ складається рівно з $dim(F) + 1$ множин.*

Доведення. Якщо сім'я множин $\mathfrak{L}$ знаходиться в загальній позиції, то для кожної грані $F \in \mathfrak{F}(conv(\mathfrak{L}))$ згідно до визначення 2.1 виконується

$$\sum_{L \in M(\mathfrak{L},F)} (1 + dim(L \cap F)) = 1 + dim(F).$$

З іншого боку, оскільки всі множини з сім'ї $\mathfrak{L}$ є строго опуклими, то $\forall L \in M(\mathfrak{L}, F)$, $L \cap F$ є множиною, що складається з однієї точки (надалі сінглтон). Відповідно, $dim(L \cap F) = 0$, а $\sum_{L \in M(\mathfrak{L},F)} (1 + dim(F \cap L)) =$ потужності (надалі $card(\cdot)$) множини $M(\mathfrak{L}, F)$. Відповідно з загальної позиції випливає, що для кожної грані F у $conv(\mathfrak{L})$, сім'я $M(\mathfrak{L}, F)$ складається рівно з $dim(F) + 1$ множин.

Оскільки кожна відкрита грань є гранню, то якщо виконується останнє, то очевидно і для кожної відкритої грані F у $conv(\mathfrak{L})$, сім'я $M(\mathfrak{L}, F)$ складається рівно з $dim(F) + 1$ множин.

Залишилось показати, що якщо для кожної відкритої грані F у $conv(\mathfrak{L})$, сім'я

$M(\mathfrak{L}, F)$ складається рівно з $dim(F)+1$ множин, то сім'я множин знаходиться в загальній позиції.

Візьмемо деяку закриту підмножину A відкритої грані F. Як ми вже виявили, оскільки всі множини з сім'ї $\mathfrak{L}$ є строго опуклими, то множина $M(\mathfrak{L}, F)$ складається з сінглтонів, яких, за нашою умовою, має бути $dim(F)+1$. Нехай рівно $l+1$ з них перетинає множину A, тобто $M(\mathfrak{L}, A) = \{x_1, ..., x_{l+1}\}$, а решта $x_{l+2}, ..., x_{dim(F)+1}$ - ні. Тоді, оскільки $\{x_1, ..., x_{dim(F)+1}\} \subseteq A \cup \{x_{l+2}, ..., x_{dim(F)+1}\}$, то

$$F = conv(\bigcup_{L \in M(\mathfrak{L}, F)} L \cap F) = conv(\{x_1, ..., x_{dim(F)+1}\}) = conv(A \cup \{x_{l+2}, ..., x_{dim(F)+1}\}).$$

Відповідно, маємо

$$card(A) + dim(F) - l = 1 + dim(F) \leq 1 + dim(A) + \\ + \sum_{i=l+2}^{dim(F)+1} (1 + dim(x_i)) = 1 + dim(A) + dim(F) - l,$$

а тобто

$$\sum_{L \in M(\mathfrak{L}, A)} (1 + dim(A \cap L)) = card(A) \leq 1 + dim(A),$$

що і треба було довести. $\square$

Тепер будемо розглядати сім'ї в загальній позиції. Нехай

$$M(\mathfrak{L}) := \{M(\mathfrak{L}, F) : F \in \mathfrak{F}'(conv(\mathfrak{L}))\}.$$

Як вже зазначалось раніше $card(\mathfrak{M}(\mathfrak{L}, F)) = dim(F) + 1 \leq 2$ для будь-якої $F \in \mathfrak{F}'(conv(\mathfrak{L}))$. Отже справедливо, що $\forall M in M(\mathfrak{L}) : card(M) \leq 2$. Тоді нехай для $k = 0, 1$ будемо позначати $M_k(\mathfrak{L}) := \{M \in M(\mathfrak{L}) : card(M) = k+1\}$.

Визначення 2.3. *Нехай сім'я строго опуклих множин $\mathfrak{L}$ знаходиться в загальній позиції. Будемо називати елементи множини $M_0(\mathfrak{L})$ вершинами $\mathfrak{L}$, а елементи множини $M_1(\mathfrak{L})$ - її ребрами. Іншими словами будемо називати k-вимірними гранями $\mathfrak{L}$ елементи множини $M_k(\mathfrak{L})$.*

Також введемо поняття f-вектору множини $\mathfrak{L}$, як $f(\mathfrak{L}) := (f_0(\mathfrak{L}), f_1(\mathfrak{L}))$, де $f_k(\mathfrak{L}) = card(M_k(\mathfrak{L}))$.

Зауваження 2.4. *Грані сім'ї* $\mathfrak{L}$ *та грані* $conv(\mathfrak{L})$ *- це абсолютно різні речі.*

Неформально, в такий спосіб ми узагальнили поняття опуклих багатокутників. Дійсно, будь-який опуклий багатокутник з вершинами в точках $x_1, x_2, ..., x_n$, пронумерованих за годинниковою стрілкою, можна розглядати, як сім'ю $\mathfrak{L} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_n\}\}$, її множину вершин $M_0(\mathfrak{L}) = \{\{\{x_1\}\}, \{\{x_2\}\}, ..., \{\{x_n\}\}\}$ і множину ребер $M_1(\mathfrak{L}) = \{\{\{x_1\}, \{x_2\}\}, ..., \{\{x_{n-1}\}, \{x_n\}\}, \{\{x_n\}, \{x_1\}\}\}$.

Забігаючи наперед, таке представлення ми використаємо для визначення вершин та ребер кругоопуклих множин, провівши бієкцію між ними і певними сім'ями $\mathfrak{L}$.

Лема 2.5. *Нехай сім'я строго опуклих множин* $\mathfrak{L}$ *знаходиться в загальній позиції. Тоді для будь-якої грані* $F \in \mathfrak{F}'(conv(\mathfrak{L}))$ *та множини* $L \in M(\mathfrak{L}, F)$ *повинна існувати грань* $G \in \mathfrak{F}'(conv(\mathfrak{L}))$ *така, що* $L \cap G = G$.

Доведення. Якщо $dim(F) = 0$, тобто $F = x$, достатньо просто взяти $G = F$.

Якщо $dim(F) = 1$, то $card(M(\mathfrak{L}, F)) = 2$. Нехай $M(\mathfrak{L}, F) = \{L_1, L_2\}$. Тоді $F = conv(\bigcup_{L \in M(\mathfrak{L},F)} L \cap F) = conv(x_1, x_2)$, де $x_i = F \cap L_i, i = 1, 2$. Очевидно, що точки x_1, x_2 є правильними гранями грані F у відповідному їй підпросторі, тобто $x_1, x_2 \in \mathfrak{F}'(F)$. Тоді за [8, Теорема 2.1.1], $x_1, x_2 \in \mathfrak{F}'(conv(\mathfrak{L}))$. Відповідно, для $i = 0, 1$, $L = L_i$ ми завжди можемо взяти $G = \{x_i\}$, для якого $L \cap G = G$. □

Наслідок 2.6. *Для сім'ї* $\mathfrak{L}$ *в загальній позиції* $f_1(\mathfrak{L}) \leq \frac{f_0(\mathfrak{L}) * (f_0(\mathfrak{L}) - 1)}{2}$.

Доведення. Візьмемо будь-яку грань $F \in \mathfrak{F}'(conv(\mathfrak{L}))$ таку, що $dim(F) = 1$, $M(\mathfrak{L}, F) = \{L_1, L_2\} \in M_1(\mathfrak{L})$. Тоді мають існувати $G_1, G_2 \in \mathfrak{F}'(conv(\mathfrak{L})) : L \cap G_1 = G_1, L \cap G_2 = G_2$.

Припустимо, що існує $L \in M(\mathfrak{L}, G_1) : L \neq L_1$. Тоді $(1 + dim(L \cap G_1)) + (1 + dim(L_1 \cap G_1)) = (1 + dim(L \cap G_1)) + (1 + dim(G_1)) \geq 1 + dim(G_1)$, що суперечить умові 2.1. Відповідно $card(M(\mathfrak{L}, G_1)) = 1$. Аналогічно можна показати, що $card(M(\mathfrak{L}, G_2)) = 1$. Тоді $M(\mathfrak{L}, G_1), M(\mathfrak{L}, G_2) \in M_0(\mathfrak{L})$, а тому $f_1(\mathfrak{L})$ не може перевищувати $\frac{f_0(\mathfrak{L}) * (f_0(\mathfrak{L}) - 1)}{2}$. □

3 f-вектор кругоопуклих множин

Тепер, трохи вивчивши структуру сімей множин у загальній позиції, спробуємо пов'язати її з нашими круговими оболонками. Але для цього нам потрібно ще декілька понять.

Визначення 3.1. *Нормальним конусом для опуклої множини $L \in \mathcal{C}^2$ та $x \in L$ будемо називати*

$$N(L,x) := \{u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : x \in H(L,u)\} \cup \{0\},$$

де

$$H(L,u) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x,u \rangle = \sup_{y \in L} \langle y,u \rangle\},$$

тобто опорна пряма множини L з нормаллю u. Очевидно, що $N(L,x) \neq \varnothing$ лише коли $x \in \partial L$. Якщо $F \in \mathfrak{F}(L)$, то $N(L,F) := N(L,x)$ для довільного x з відповідної внутрішності F.

Визначення 3.2. *Опорною множиною опуклої множини $L \in \mathcal{C}^2$ з нормаллю $u \in \mathbb{R}^2$ називають*

$$F(L,u) := L \cap H(L,u).$$

Множина L - строго опукла тоді і тільки тоді, коли $F(L,u)$ є сінглтоном для будь-якого $u \in \mathbb{R}^2$.

Визначення 3.3. *Якщо виконується $dim(N(L,x)) = 1$ для опуклої множини $L \in \mathcal{C}^2$ для будь-якого $x \in \partial L$, то L називають регулярною.*

Визначення 3.4. *Нехай $F \in \mathfrak{F}(L)$. Спряженою гранню до F будемо називати*

$$\hat{F} := \{x \in L^0 : \forall y \in F \ \langle x,y \rangle = 1\}.$$

Якщо F - це ребро L, то $\hat{F}$ є множиною розв'язків 2 незалежних лінійних рівнянь, а тому є точкою. Крім того, за [8, Лема 2.2.3]

$$N(L,F) = pos\hat{F}, \tag{3.1}$$

де $pos\hat{F}$ - це конічна (або додатна) оболонка $\hat{F}$, тобто множина всіх лінійних комбінацій точок з $\hat{F}$ з невід'ємними коефіцієнтами.

Тепер нехай в нас є певна скінченна множина A у внутрішності U, де, нагадаємо, $U \in \mathcal{C}^2$ - одиничний круг. Покладемо

$$\mathfrak{L}_A := \{(U - y)^0 : y \in A\}. \tag{3.2}$$

Оскільки U, як і всі $(U - y)$, є очевидно строго опуклою і регулярною, то з 3.1 та [8, Зауваження 1.7.14] випливає, що U^0 і $(U - y)^0$ теж є строго опуклими та регулярними. Тоді за 1.5 маємо

$$(U \ominus A)^0 = cl\ conv(\mathfrak{L}_A) = conv(\mathfrak{L}_A),$$

а отже за 1.2

$$bh(A) = U \ominus (U \ominus A) = U \ominus (conv(\mathfrak{L}_A))^0.$$

Лема 3.5. *Сім'я $\mathfrak{L}_A$ знаходиться в загальній позиції тоді і тільки тоді, коли для будь-якої точки $x \in \mathbb{R}^2 : A \subseteq U+x$ і $F_A(x) := A \cap \partial(U+x) \neq \varnothing$, $card(F_A(x)) > 0$ - скінченне і $card(F_A(x)) = dim(conv(\bigcup_{y \in F_A(x)} N(U + x, y))$.*

Доведення. Спершу зазначимо, що $A \subseteq U+x$ і $F_A(x) \neq \varnothing$ за 1.1 еквівалентно тому, що $-x \in \partial(U \ominus A)$. Тоді за [8, Теорма 2.2.1] для кожного $x \in \mathbb{R}^2 : -x \in \partial(U \ominus A)$

$$N(U \ominus A, -x) = N(\bigcap_{y \in A}(U - y), -x) = conv(\bigcup_{y \in A} N(U - y, -x)) =$$
$$= conv(\bigcup_{y \in A} N(U + x, y)) = conv(\bigcup_{y \in F_A(x)} N(U + x, y)).$$

За твердженням 2.2 сім'я $\mathfrak{L}_A$ буде знаходитись в загальній позиції тоді і тільки тоді, коли для кожної відкритої грані $\hat{F}$ у $conv(\mathfrak{L}_A)$, сім'я $M(\mathfrak{L}_A, \hat{F})$ складається рівно з $dim(\hat{F}) + 1$ множин. За [8, Теорма 2.1.4] $F = \hat{\hat{F}}$ і грані F та $\hat{F}$. З іншого боку, згідно до 3.1 $N(U \ominus A, F) = pos\hat{F}$, а тому $dim(N(U \ominus A, F)) = dim(\hat{F}) + 1$. За лемою 1.6, оскільки $U \ominus A$ є кругоопуклою, то вона є і строго опуклою, а тому всі її грані F - це сінглтони.

Підсумувавши вищесказане, сім'я $\mathfrak{L}_A$ буде знаходитись в загальній позиції тоді і тільки тоді, коли для кожної точки $-x \in \partial(U \ominus A)$ такого, що $dim(N(U \ominus A, -x)) = m + 1$, де $m = 0, 1$, існує рівно $m + 1$ точка $y \in A : -x \in \partial(U - y)$, або іншими словами $card(F_A(x) = m + 1$.

Насамкінець, сім'я $\mathfrak{L}_A$ буде знаходитись в загальній позиції тоді і тільки тоді, коли для кожної точки $-x \in \partial(U \ominus A)$ виконується

$$card(F_A(x)) = dim(conv(\bigcup_{y \in F_A(x)} N(U + x, y)).$$

$\square$

Наслідок 3.6. *Щоб $\mathfrak{L}_A$ було в загальній позиції, необхідно, щоб $card(F_A(x)) \leq 2$ для всіх $x \in \mathbb{R}^2$.*

Визначення 3.7. *Нехай у нас є деяка скінченна множина A у внутрішності U така, що $\mathfrak{L}_A$ знаходиться в загальній позиції. Тоді f-вектор $Q = bh(A)$ будемо визначати $f(Q) := f(\mathfrak{L}_A)$.*

Визначення 3.8. *Опорним кругом до кругоопуклої множини $Q = bh(A)$ будемо називати будь-яку множину $\partial(U + x)$ для $x \in \mathbb{R}^2$ таку, що $Q \subseteq U + X$ і $Q \cap \partial(U + x) \neq \varnothing$, а сам перетин $Q \cap \partial(U + x)$ - відкритою круговою гранню.*

Так визначались відкриті кругові грані в [11]. Якщо відкрита кругова грань - це одна точка, то її називають круговою вершиною, в іншому випадку - круговим ребром.

Еквівалентно, кругові ребра визначають в [12], як відкриті кругові грані, для яких одновимірна міра Хаусдорфа є строго додатною. Кожне кругове ребро має містити хоча б 2 різні точки.

Для опуклих множин $L \in \mathcal{C}^2$ позначимо $S(L, \cdot)$ поверхневу міру L, див. [8, ст. 214]. Поверхнева міра визначена на одиничному колі $\mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ і $S(L, A)$ рівна довжині частині границі L, для якої нормовані нормалі належать до Борелевої підмножини A одиничного кола $\mathbb{S}^1$.

В наступних двох лемах ми покажемо зв'язок між круговими відкритими гранями $bh(A)$, гранями $\mathfrak{L}_A$ та гранями $conv(\mathfrak{L}_A)$.

Лема 3.9. *Нехай є скінченна множина A у внутрішності U, для якої $\mathfrak{L}_A$ знаходиться в загальній позиції. Тоді кількість кругових ребер $Q = bh(A)$ рівна $f_1(conv(\mathfrak{L}_A))$.*

Доведення. За твердженням 1.3 $U \ominus A = U \ominus Q$. Позначимо $R := -(U \ominus Q)$. Оскільки $A \subseteq int(Q)$, то початок координат має належати внутрішності R. За лемою 1.6, оскільки $U \ominus A$ є кругопуклою, то R є строго опуклою. Візьмемо деяке ребро $\hat{F} \in \mathfrak{F}_1(-conv(\mathfrak{L}_A)) = \mathfrak{F}_1(R^0)$. Згідно то 3.1, $\hat{F}$ є спряженою гранню до якогось сінглтону $\{x\} \subseteq \partial R$, чий нормальний конус має розмірність 2. За [8, Теорма 2.1.4] спряжена грань до спряженої грані до $\hat{F}$ - це найменша відкрита грань $-conv(\mathfrak{L}_A)$, що містить $\hat{F}$, а тому співпадає з $\hat{F}$. Відповідно, ми маємо взаємооднозначну відповідність між ребрами $-conv(\mathfrak{L}_A) = R^0$ та точками ∂R з нормальними конусами розмірності 2. Тепер покажемо, що кожній такій точці відповідає рівно одне кругове ребро Q.

Візьмемо деяке $x \in R$. Тоді $u \in N(R, x) \Leftrightarrow x \in F(R, u) \Leftrightarrow \forall y \in R^2\ \langle y, u, \rangle > 0 : x + y \notin R$. В силу того, що $R = -(U \ominus A)$, останнє еквівалентне тому, що $A \subseteq U + x$, але для всіх $y \in R^2 \langle y, u, \rangle > 0 : A \not\subseteq U + x + y$.

Тепер нехай у нас $x \in F(R, u)$. Будемо розглядати множину $F(U + x, -u)$. В силу строгої опуклості R, для будь-якого $u \in \mathbb{R}^2$, $F(R, u)$ - це сінглтон. Аналогічно з $F(U + x, -u)$, і нехай це буде $\{x'\}$. В силу того, що $x \in R, Q = bh(A) \subseteq U + X$. Тоді, оскільки $x' \in \partial(U + x)$, $x' \notin int(Q)$.

Припустимо, що $x' \notin Q$. Тоді за визначенням Q має існувати такий $y \in R$ відмінний від x, що $x' \notin U + y$. Позначимо $L := (U + x) \cap (U + y)$. Очевидно, що $A \subseteq L$. Оскільки $x' \notin U + y$, то $\sup_{a \in L}\langle a, -u\rangle < \sup_{a \in U+x}\langle a, -u\rangle = \langle x', -u\rangle$. Як вже було сказано в 1 розділі, U - генеруюча множина, а оскільки $L \subseteq U + x$ - доданок, то існує інший доданок W, що $U + x = L + w$, і що L та W - кругоопуклі. Тоді, якщо $F(L, -u) = \{y'\}$ і $F(W, -u) = \{w'\}$, то $x' = y' + w'$ і

$$\langle x', -u\rangle = \sup_{a \in U+x}\langle a, -u\rangle = \sup_{a \in L}\langle a, -u\rangle + \sup_{a \in W}\langle a, -u\rangle = \langle y', -u\rangle + \langle w', -u\rangle,$$

а оскільки $\langle y', -u\rangle < \langle x', -u\rangle$, то $\langle w', -u\rangle > 0$.

З іншого боку, $L + w \subseteq U + x$, а отже $A \subseteq L \subseteq U + x + (-w)$, де $\langle w', -u\rangle > 0$, що протиречить тому, що $x \in F(R, u)$. Суперечність. Отже $x' \in Q$, а тому $\{x'\} = F(U + x, -u) \subseteq \partial Q$.

Нехай тепер $\{x'\} = F(U + x, -u) \subseteq \partial Q$ і покажемо, що тоді $x \in F(R, u)$. Припустимо, що існує такий y, що $x + y \in R$ і $\langle y, u\rangle > 0$. В силу визначення R виходить, що $x' \in Q \subseteq U + x + y$. З іншого боку,

$$\langle x', -u\rangle \leq \sup_{a \in U+x+y}\langle a, -u\rangle = \sup_{a \in U+x}\langle a, -u\rangle + \langle y, -u\rangle = \langle x', -u\rangle - \langle y, u\rangle < \langle x', -u\rangle.$$

Суперечність. Отже не існує такого y, що $x + y \in R$ і $\langle y, u\rangle > 0$, а тому $x \in F(R, u)$.

Підсумовуючи, ми отримали, що для деякого $x \in R$ маємо $u \in N(R,x) \Leftrightarrow x \in F(R,u) \Leftrightarrow F(U+x,-u) \subseteq \partial Q$.

Нехай $L \subseteq U$ і $x \in \partial R$. Тоді позначимо через $\tau(L,K) := \bigcup_{y\in K} F(L,y)$ - обернене сферичне відображення для $K \subseteq \mathbb{S}^1$. Тоді, взявши $K = -N(R,x) \cap \mathbb{S}^1$, знайдемо одновимірну Хаусдорфову міру за допомогою [8, Рівність (4.36)]

$$\mathcal{H}\Big(\bigcup_{F(U+x,-u)\subseteq\partial Q} F(U+x,-u)\Big) = \mathcal{H}\Big(\bigcup_{u\in N(R,x)} F(U+x,-u)\Big) =$$
$$= \mathcal{H}(\tau(U+x,-N(R,x)\cap\mathbb{S}^1)) = S(U+x,-N(R,x)\cap\mathbb{S}^1).$$

Права частина рівна одновимірній Хаусдорфовій мірі множини $-N(R,x)\cap\mathbb{S}^1$, яка є додатною тоді і тільки тоді, коли $N(R,x)$ має непорожню внутрішність.

Насамкінець, ми однозначно пов'язали всі ребра $conv(\mathfrak{L}_A)$ з усіма точками $x \in \partial R$, для яких $N(R,x)$ має непорожню внутрішність, а всі останні - з усіма круговими ребрами $Q = bh(A)$. □

Тепер пов'яжемо грані $conv(\mathfrak{L}_A)$ та $\mathfrak{L}_A$.

Лема 3.10. *Нехай є скінченна множина A у внутрішності U, для якої $\mathfrak{L}_A$ знаходиться в загальній позиції. Також нехай для будь-якої підмножини $\{x_1,x_2\} \subseteq A$, що належить деякому круговому ребру $Q = bh(A)$, не належить жодному іншому круговому ребру Q. Тоді кількість ребер $\mathfrak{L}_A$ рівна $f_1(conv(\mathfrak{L}_A))$.*

Доведення. Це частковий випадок минулої леми. Згідно до визначення ребер $\mathfrak{L}_A$, для ребра $M = \{(U-x_1)^0,(U-x_2)^0\}$ має існувати ребро $\hat{F}$ множини $conv(\mathfrak{L}_A)$, що $M(L_A,\hat{F}) = M$. При цьому множина точок $\{x_1,x_2\}$ належить деякому круговому ребру Q.

Припустимо, що існує інше ребро $\hat{F}'$ множини $conv(\mathfrak{L}_A)$, що $M(L_A,\hat{F}') = M$. Як вже зазначалось в попередньому доведенні, ребрам F та F' відповідають сінглтони $\{x\}$ та $\{x'\}$, що належать множині $\partial(U \ominus A)$, а також належать множинам $\partial(U-x_1)$ та $\partial(U-x_2)$. Тоді множина $\{x_1,x_2\}$ належить одразу двом множинам $\partial(U-x)$ та $\partial(U-x')$, а отже одразу двом різним круговим ребрам Q. Суперечність. Отже кожному ребру $\mathfrak{L}_A$ відповідає лише одне ребро $conv(\mathfrak{L}_A)$. □

Отже ми показали взаємооднозначний зв'язок між круговими відкритими гранями $bh(A)$ та гранями $\mathfrak{L}_A$, а також їх зв'язок з ребрами $conv(L_A)$ за певних умов.

4 Кругоопуклі множини породжені випадковими вибірками

Будемо розглядати множину $\Xi_n := \{\xi_1, ..., \xi_n\}$, що складається з n незалежних копій випадкової величини ξ з рівномірним розподілом на U, а точніше її кругову оболонку $Q_n := bh(\Xi_n)$:

$$Q_n := \bigcap_{x \in \mathbb{R}^2 : \Xi_n \subseteq U + x} (U + x),$$

тобто перетин всіх зміщень одиничного кола, що містять множину Ξ_n. Варто зазначити, що $Q_n = bh(conv(\Xi_n))$.

Також будемо позначати $X_n := U \ominus Q_n = U \ominus \Xi_n = \bigcap_{i=1}^n (U - \xi_i)$ за 1.1 та твердженням 1.3. Оскільки $\Xi_n \subseteq int(U)$ майже напевно, то початок координат майже напевно належить $int(X_n)$, а тому за 1.5

$$X_n^0 = conv(\bigcup_{i=1}^n (U - \xi_i)^0). \tag{4.1}$$

З огляду на вигляд X_n та X_n^0 можна зробити висновок, що ці випадкові множини є майже напевно компактними, опуклими та з непорожньою внутрішностю (такі множини також називають випадковими опуклими тілами, див. [13, Розділ 1.7]). Також вочевидь X_n та X_n^0 містять початок координат у своїх внутрішностях майже напевно. Наочно поведінку Q_n та X_n можна бачити на рисунку 4.1.

4.1 Збіжність масштабованої різниці за Мінковським $U \ominus \Xi_n$

Тепер спробуємо показати слабку збіжність $n^{-1} X_n^0$ та nX_n. Для цього нам потрібно ввести декілька додаткових позначень.

Будемо називати $V(L)$ двовимірну міру Лебега в $\mathbb{R}^2$ множини L, тобто її площу. Афінним Грассманніаном $A(2,1)$ будемо називати набір одновимірних афінних підпросторів двовимірного простору $\mathbb{R}^2$, а через $A^-(2,1)$ - набір всіх замкнених підпросторів $\mathbb{R}^2$, що містять початок координат. Кожен такий півпростір будемо позначати $H_u^-(t)$ і задавати парою $(t, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{S}^1$, де u позначає одиничну зовнішню нормаль півпростору, а t - відстань від початку координат до границі півпростору.

Також нехай $\mathcal{P} := \{(t_i, u_i), i \geq 1\}$ - буде пуассонівським процесом на $(0, \infty) \times \mathbb{S}^1$

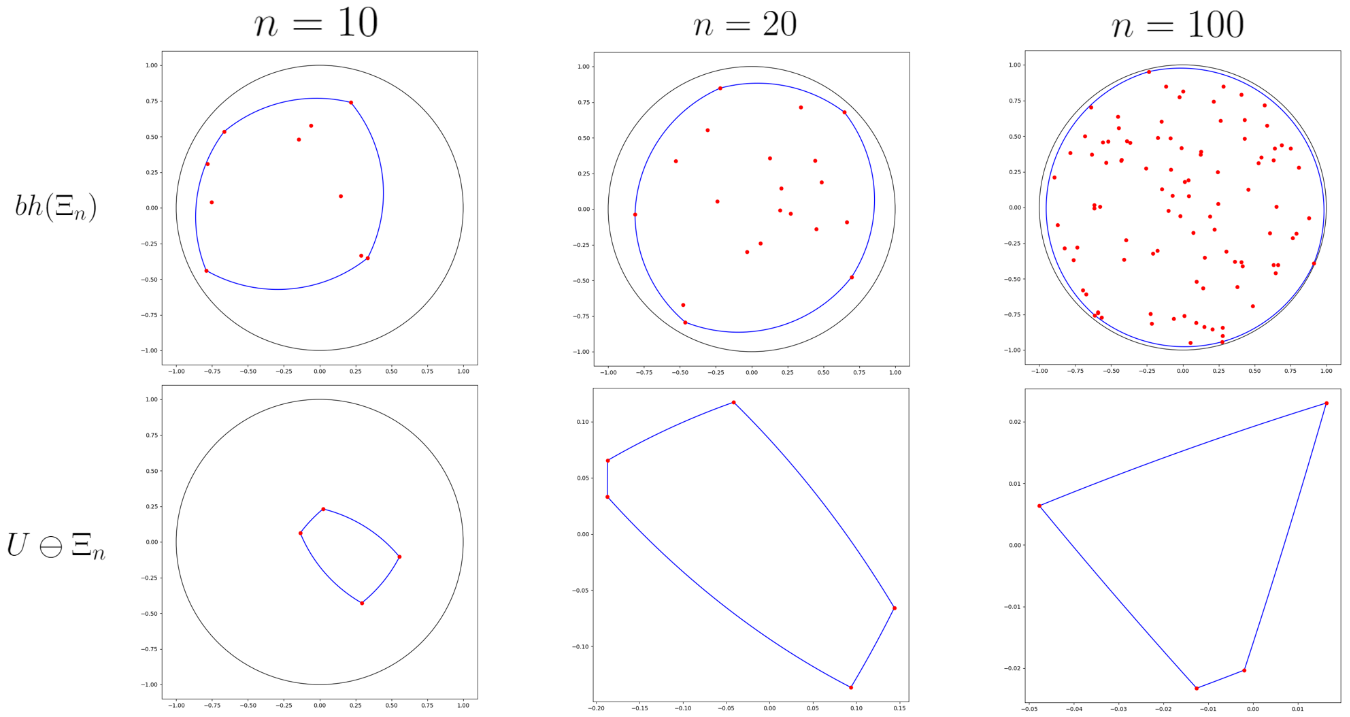


Рис. 4.1: Кругова оболонка $bh(\Xi_n)$ та різниця за Мінковським $U \ominus \Xi_n$ для 10, 20 та 100 точок.

з мірою інтенсивності μ, що визначається, як добуток міри Лебега на $(0, \infty)$ та міри $S(U, \cdot)$ на одиничному колі $\mathbb{S}^1$, поділений на π. Тоді набір півплощин $\{H^-_{u_i}(t_i), i \geq 1\}$ називають процесом прямих, що породжує мозаїку в $\mathbb{R}^2$, див. [1]. Лебегова міра дає нам стаціонарність розбиття (тобто розподіл буде інваріантним відносно зміщення), в той час як міра $S(U, \cdot)$ відповідає за напрямок. Оскільки кожен з цих півпросторів містить початок координат, то і перетин теж буде містити його, при цьому він буде належати внутрішності майже напевно. Тому цей перетин точно не є порожнім, і ми будемо позначати його $Z := \bigcap_{i \geq 1} H^-_{u_i}(t_i)$. Оскільки з ймовірністю 1 всі u_i не будуть знаходитись в одній півколі, то Z майже напевно є обмеженою, а тому є випадковою компактною множиною в $\mathbb{R}^2$. Оскільки μ є локально скінченною, то Z майже напевно є політопом, який називають нульовою кліткою пуассонівського розбиття.

Множина Z^0, згідно до визначення та 1.5 буде замиканням опуклої оболонки об'єднання полярних множин до $H^-_{u_i}(t_i)$. Не важко зрозуміти, що полярною до $H^-_{u_i}(t_i)$ буде відрізок з кінцями в початку координат та в $u_i t_i^{-1}$. За теоремою про відображення пуассонівського процесу, набір точок $\{u_i t_i^{-1}, i \geq 1\}$ складає пуассонівський процес на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, який будемо позначати Π. Тому множина Z^0 - замикання опуклої оболонки точок Π, яка з ймовірністю 1 є політопом та містить початок координат у своїй внутрішності.

Теорема 4.1. *Послідовність випадкових опуклих множин nX_n при $n \to \infty$ збігається за розподілом на просторі опуклих множин з $\mathcal{C}^2$ з Хаусдорфовою метрикою до нульової клітки Z пуассонівського розбиття, а $n^{-1}X_n^0$ - до Z^0 відповідно.*

Доведення. Спершу доведемо збіжність $n^{-1}X_n^0$. Як вже зазначалось, оскільки ξ_i майже напевно належить внутрішності U, початок координат майже напевно належить внутрішності nX_n, а тому $n^{-1}X_n^0$ майже напевно випадкове замкнуте опукле тіло. За [13, Теорема 1.8.14] треба продемострувати, що для всіх опуклих множин $L \in \mathcal{C}^2$

$$\mathbb{P}\{n^{-1}X_n^0 \subseteq L\} \to \mathbb{P}\{Z^0 \subseteq L\},\ n \to \infty,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\{n^{-1}X_n^0 \subseteq L\} \to 1,\ L \uparrow \mathbb{R}^2.$$

Оскільки початок координат належить внутрішностям $n^{-1}X_n^0$ та Z^0 майже напевно, то будемо припускати, що L теж містить початок координат у своїй внутрішності. Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{n^{-1}X_n^0 \subseteq L\} &= \mathbb{P}\{n^{-1}(U-\xi_i)^0 \subseteq L,\ \forall i = 1,2,...,n\} = \\ &= (\mathbb{P}\{n^{-1}(U-\xi_1)^0 \subseteq L\})^n = (1-\mathbb{P}\{n^{-1}(U-\xi_1)^0 \not\subseteq L\})^n = \\ &= (1-\mathbb{P}\{n^{-1}L^0 \not\subseteq (U-\xi_1)\})^n = (1-\mathbb{P}\{\xi_1 \notin U \ominus n^{-1}L^0\})^n.\end{aligned}$$

Застосувавши [14, Теорема 1] з $C = U, A = U, P = B = W = \{0\}, Q = -(L^0)$ і $\epsilon = n^{-1}$ будемо мати

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}\{\xi_1 \notin U \ominus n^{-1}L^0\} &= \lim_{n\to\infty} n\frac{V(U \setminus (U \ominus n^{-1}L^0))}{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\sup_{y\in L^0}\langle y,u\rangle S(U,du) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\sup_{y\in L^0}\langle y,u\rangle du\end{aligned}$$

Тоді з використанням другої чудової границі, позначивши $P_n(L) := \mathbb{P}\{\xi_1 \notin U \ominus n^{-1}L^0\}$, маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{n^{-1}X_n^0 \subseteq L\} &= (1-P_n(L))^n = \\ &= \left(1+\frac{1}{-1/P_n(L)}\right)^{-1/P_n(L)\ *\ nP_n(L)} \xrightarrow[n\to\infty]{} exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\sup_{y\in L^0}\langle y,u\rangle du\right).\end{aligned}$$

З іншого боку, розглянемо $\mathbb{P}\{Z^0 \subseteq L\}$:

$$\mathbb{P}\{Z^0 \subseteq L\} = \mathbb{P}\{L^0 \subseteq Z\} =$$
$$= \mathbb{P}\{h(L^0, u) \leq t \forall (t, u) \in \mathcal{P}\} = \mathbb{P}\{\nexists (t, u) \in \mathcal{P} : h(L^0, u) > t\} =$$
$$= exp\left(-\mu(\{(t, u) : h(L^0, u) > t\})\right) = exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{S}^1} \sup_{y \in L^0} \langle y, u\rangle du\right).$$

Оскільки Z^0 майже компактна, то при $L \uparrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}\{Z^0 \subseteq L\} \to 1$.

Слабка збіжність $nX_n \to Z$ випливає з теореми про неперевне відображення, оскільки відображення $L \mapsto L^0$ є відображенням Ліпшиця за [15, Теорема 4.2] на просторі опуклих множин з $\mathcal{C}^2$ з початком координат у своїй внутрішності, а отже є неперервним. $\square$

4.2 Збіжність точкового процесу

Позначимо $\mathcal{K}^2 \subseteq \mathcal{C}^2$ сім'ю компактних опуклих множин, а $\mathcal{K}_0^2 \subseteq \mathcal{K}^2$ - тих, що містять початок координат.

Множини, що були використані в опуклій оболонці правої частини 4.1 є незалежними копіями випадкової опуклої множини $(U - \xi)^0$, де ξ є рівномірно розподіленою в U. Ці n незалежних копій створюють точковий процес

$$\Psi_n := \{(U - \xi_1)^0, ..., (U - \xi_n)^0\}$$

в просторі $\mathcal{K}_0^2$. Через $n^{-1}\Psi_n$ ми позначимо масштабування Ψ_n, що є точковим процесом, що складається з множин $n^{-1}(U - \xi_i)^0, i = 1, ..., n$.

Борелівська σ-алгебра на $\mathcal{K}_0^2$ індукується Хаусдорфовою Метрикою. Нехай $\mathcal{B}_0$ буде сім'єю борелівських підсімей $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}_0^2 \setminus \{\{0\}\}$ таких, що замикання $\mathcal{A}$ в $\mathcal{K}_0^2$ не містить $\{0\}$. Борелівська міра μ на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$ є локально скінченною, якщо $\mu(\mathcal{A}) < \infty$ для всіх $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_0$. Послідовність $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ локально скінченних мір на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$ кажуть, що збігається грубо до локально скінченної міри μ, якщо $\mu_n(\mathcal{A}) \to \mu(\mathcal{A})$ при $n \to \infty$ для всіх $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_0$, що є нерозривними множинами граничної міри. Еквівалентно, $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ для всіх обмежених неперервних функцій $f : \mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, які зникають в околицях $\{0\}$ (в метриці Хаусдорфа).

Слабка збіжність випадкових мір на $\mathcal{K}^2$ визначається відповідно до грубої топології. Цей спосіб збіжності використовується для випадкових мір.

Теорема 4.2. *Нехай X буде випадковим опуклим тілом на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$, а його n незалежних копій складають точковий процес позначений Ψ_n. Також нехай Ψ буде локально скінченним процесом Пуассона на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$. Тоді послідовність $n^{-1}\Psi_n$ збігається до Ψ тоді і тільки тоді, коли $n^{-1}Z_n$ слабко збігається до випадкової компактної опуклої множини Z, при $n \to \infty$, де Z_n і Z є опуклою множиною об'єднання множин з Ψ_n та Ψ відповідно.*

Доведення. Позначимо міру інтенсивності граничного процесу Ψ через μ, і нехай $\Psi_n := \{X_1, ..., X_n\}$ складається з n незалежних копій випадкового тіла X з розподілом ν. Зауважимо, що і μ, і ν є мірами на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$.

Добре відомо (як спрощена версія теореми Григеліоніса для загальних біноміальних процесів, див. [13, Теорема 4.2.5]), що $n^{-1}\Psi_n$ слабко збігається до Ψ тоді і тільки тоді, коли $\mu_n(\cdot) := n\nu(n\cdot)$ грубо збігається до μ на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$, при $n \to \infty$. Іншими словами,

$$n\mathbb{P}\{n^{-1}X \in \mathcal{A}\} \to \mu(\mathcal{A}), n \to \infty \tag{4.2}$$

для всіх $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_0$ таких, що $\mathcal{A}$ нерозривна множина для μ.

Введемо наступні підсім'ї сім'ї $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$, як

$$\mathcal{A}_L := \{A \in \mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\} : A \subseteq L\},$$

де $L \in \mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$ довільне компактне опукле тіло, що містить початок координат і відрізняється від $\{0\}$. Спершу покажемо, що груба збіжність $\mu_n \to \mu$ випливає з 4.2 для μ-неперервних множин з $\mathcal{A}_L^c$, взятого замість $\mathcal{A}$.

Зафіксуємо деяке $\epsilon > 0$ і нехай $L_0 := \epsilon U$ буде замкненим центрованим колом радіуса ϵ. Завжди можна вважати, що $\mathcal{A}_{L_0}^c$ є нерозривною множиною для μ. Для кожної $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_0$, нехай

$$\bar{\mu}_n(\mathcal{A}) := \frac{\mu_n(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{L_0}^c)}{\mu_n(\mathcal{A}_{L_0}^c)}, n \geq 1,$$

і позначимо $\bar{\mu}$ аналогічно використавши μ. Тоді $\bar{\mu}_n$ є ймовірнісною мірою на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$ і на $\mathcal{K}^2$.

Як відомо, $\bar{\mu}_n$ слабо збігається до $\bar{\mu}$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{\mu}_n(\mathcal{A}_L) \to \bar{\mu}(\mathcal{A}_L)$ для всіх $L \in \mathcal{K}^2$ таких, що $\mathcal{A}_L$ нерозривне для $\bar{\mu}$ та $\bar{\mu}(\mathcal{A}_L) \to 1$, якщо L збільшити до всього простору, див. [13, Теорема 1.8.14]. Останнє явно має місце, оскільки Φ має локально скінченну міру інтенсивності, а отже не більш ніж скінченна кількість її точок перетинає доповнення до множини rU для будь-якого $r > 0$.

Очевидно можна припускати, що в 4.2 сім'я $\mathcal{A}$ є закритою за метрикою Хаусдорфа. Тоді існує $\epsilon > 0$ таке, що кожне $A \in \mathcal{A}$ не є підмножиною $L_0 = \epsilon U$. Тоді $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c_{L_0} = \mathcal{A}$, а тому $\bar{\mu}_n(\mathcal{A}) = \mu_n(\mathcal{A})/\mu_n(\mathcal{A}^c_{L_0})$ і $\bar{\mu}(\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A})/\mu(\mathcal{A}^c_{L_0})$. В кінці кінців, відмітимо, що збіжність випливає з 4.2 для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^c_{L_0}$ і того, що L_0 обирається з огляду на те, що $\mathcal{A}_{L_0}$ - μ-неперервна множина.

Тому, 4.2 достатньо перевіряти тільки для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^c_{L_0}$. Іншими словами $n^{-1}\Psi_n$ слабко збігається до Ψ тоді і тільки тоді, коли

$$n\mathbb{P}\{n^{-1}X \not\subseteq L\} \to \mu(\mathcal{A}^c_L), n \to \infty \tag{4.3}$$

для всіх $L \in \mathcal{K}^2_0 \setminus \{0\}$ таких, що $\mathcal{A}_L$ нерозривне для $\bar{\mu}$.

За [13, Теорема 1.8.14], $n^{-1}Z_n$ слабко збігається до випадкової компактної опуклої множини Z тоді і тільки тоді, коли

$$\mathbb{P}\{n^{-1}Z_n \subseteq L\} \to \mathbb{P}\{Z \subseteq L\}, n \to \infty \tag{4.4}$$

для всіх $L \in \mathcal{K}^2_0$, що L є нерозривною для Z, тобто, що $\mathbb{P}\{Z \subseteq L\} = \mathbb{P}\{Z \subseteq intL\}$ і $\mathbb{P}\{Z \subseteq L\} \to 1$ якщо L збільшити до всього простору. Остання умова має місце за рахунок припущення про компактність Z. Оскільки

$$\mathbb{P}\{Z \subseteq L\} = \exp -\mu(\mathcal{A}^c_L),$$

L є нерозривною для Z тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}_L$ нерозривне для $\bar{\mu}$.

Остаточно, відмітимо, що

$$\mathbb{P}\{n^{-1}Z_n \subseteq L\} = \left(1 - \mathbb{P}\{n^{-1}X \in \mathcal{A}^c_L\}\right)^n,$$

а тому 4.3 та 4.4 є еквівалентними. □

Застосувавши цю теорему в нашому випадку, маємо наступну теорему.

Теорема 4.3. *Послідовність точкових процесів* $(n^{-1}\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *слабко збігається до точкового процесу* $\{[0,x] : x \in \Pi\}$ *на* $\mathcal{K}^2_0$.

5 Збіжність f-вектору кругоопулої оболонки випадкових вибірок

Тепер покажемо граничну теорему для для f-вектору. Будемо розглядати сім'ю строгоопуклих регулярних множин

$$\mathfrak{L}_{\Xi_n} = \{(U - \xi_i)^0 : i = 1, ..., n\}.$$

Для будь-якого $x \in \mathbb{R}^2$ такого, що $\Xi_n \subseteq U + x$, $\partial(U + x)$ з ймовірністю 1 буде перетинати не більше 2 точок з Ξ_n, кожна з яких має одновимірний нормальний конус. Тому, згідно до леми 3.5, $\mathfrak{L}_{\Xi_n}$ майже напевно знаходиться в загальній позиції.

Отже, з ймовірністю 1, f-вектор множини $Q_n = bh(\Xi_n)$ визначений, як $f(\mathfrak{L}_{\Xi_n})$, і має скінченні компоненти. З огляду на теорему 4.1 та тісний зв'язок Q_n, $\mathfrak{L}_{\Xi_n}$ та $n^{-1}X_n^0$, логічно припускати, що $f(Q_n) = f(\mathfrak{L}_{\Xi_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} f(Z^0)$. Нагадаємо, що $Z^0 = conv(\Pi)$ майже напевно є політопом. Але перш ніж довести цей факт, нам потрібна наступна лема.

Лема 5.1. *Нехай $\mathfrak{L}^{(n)} := \{L_i^{(n)}, i \geq 1\}, n \in \mathbb{N}_0$ буде послідовністю локально скінченних точкових процесів на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$. Припустимо, що для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ множини з $\mathfrak{L}^{(n)}$ є строго опуклими, а $\mathfrak{L}^{(n)} \to \mathfrak{L}^{(0)}$ в грубій топології на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$, при $n \to \infty$. Також нехай:*

(a) сім'я $\mathfrak{L}^{(0)}$ знаходиться в загальній позиції;

(b) існує множина точок $\{x_1, ..., x_M\}$, що $conv(\mathfrak{L}^{(0)}) = conv(\{x_1, ..., x_M\})$ і $\{x_i\} = L_{r_i}^{(0)} \cap \partial conv(\mathfrak{L}^{(0)}), i = 1, ..., M$ для множини попарно різних індексів $\{r_1, ..., r_M\}$;

(c) опукла оболонка $conv(\mathfrak{L}^{(0)})$ містить початок координат у свої внутрішності.

Тоді для достатньо великих $n \in \mathbb{N}$ виконується наступне:

1. *сім'я $\mathfrak{L}^{(n)}$ знаходиться в загальній позиції;*
2. *$f(\mathfrak{L}^{(n)}) = f(\mathfrak{L}^{(0)}) = f(conv(\mathfrak{L}^{(0)})$;*
3. *$f_1(\mathfrak{L}^{(n)}) = f_1(conv(\mathfrak{L}^{(n)}))$.*

Доведення. Спершу покажемо, що наші припущення означають, що ми можемо обмежитись скінченними підсім'ями сімей $\mathfrak{L}^{(n)}, n \in \mathbb{N}_0$.

З (c), існує таке $r > 0$, що $2r * U \subseteq int(conv(\mathfrak{L}^{(0)}))$. Оскільки $\mathfrak{L}^{(0)}$ локально скінченна на $\mathcal{K}_0^2 \setminus \{0\}$ і виконується (b), сім'я $\mathfrak{L}_{(0)}$ містить лише скінченну кількість множин l, що перетинають $\partial(r * U)$. Без обмеження загальності, нехай це будуть множини $L_1^{(0)}, L_2^{(0)}, ..., L_l^{(0)}$, а для всіх інших $i > l : L_i^{(0)} \subseteq r * U$. За грубою збіжністю, при достатньо великих $n \in \mathbb{N}$, сім'я $\mathfrak{L}^{(n)}$ містить рівно l множин, що перетинають $\partial(r * U)$, нехай $L_1^{(n)}, L_2^{(n)}, ..., L_l^{(n)}$, і для кожного $i = 1, ..., l$:

$$\mathfrak{L}_i^{(n)} \to \mathfrak{L}_i^{(0)}, n \to \infty \tag{5.1}$$

збігається за Хаусдорфовою метрикою. Крім того, за [1, Теорема 12.3.5]

$$conv\left(\bigcup_{i=1}^{l} \mathfrak{L}_i^{(n)}\right) \to conv\left(\bigcup_{i=1}^{l} \mathfrak{L}_i^{(0)}\right) = conv(\mathfrak{L}^{(0)}), n \to \infty \tag{5.2}$$

Тоді для достатньо великих n, $r*U \subseteq conv\left(\bigcup_{i=1}^{l} \mathfrak{L}_i^{(n)}\right)$, а отже $conv\left(\bigcup_{i=1}^{l} \mathfrak{L}_i^{(n)}\right) = conv(\mathfrak{L}^{(n)}) \to conv(\mathfrak{L}^{(0)}), n \to \infty$. Тому зафіксуємо l і будемо припускати, що останнє виконується.

Нагадаємо, що верхнею границею послідовності множин називають множину, що складається з усіх границь підпослідовностей точок обраних з цих множин. Також, перетин множин є напівнеперервною зверху функцією, тобто верхня границя перетину послідовностей множин є підмножиною перетину їх верхніх границь, див. [1, Теорема 12.2.6].

Почнемо з доведення першої частини. Припустимо, що сім'я $\mathfrak{L}^{(n)}$ знаходиться в загальній позиції для нескінченної кількості $n \in \mathbb{N}$. Тоді в силу строгої опуклості $conv(\mathfrak{L}^{(n)})$ та твердження 2.2, для всіх цих n повинна існувати грань $F^{(n)} \in \mathfrak{F}(conv(\mathfrak{L}^{(n)}))$, яку перетинає більше ніж $dim(F^{(n)}) + 1$ множин з $\{L_1^{(n)}, ..., L_l^{(n)}\}$. Оскільки таких різних наборів всього скінченна кількість, то ми можемо взяти фіксовані $m \in \{0, 1\}$, $m + 2 \leq k \leq l$ та $1 \leq i_1, ..., i_l \leq l$ такі, що існує грань $F_m^{(n)} \in \mathfrak{F}_m(conv(\mathfrak{L}^{(n)}))$ яку перетинають множини $\{L_{i_1}^{(n)}, ..., L_{i_k}^{(n)}\}$ для нескінченної кількості $n \in \mathbb{N}$.

Кожна грань $conv(\mathfrak{L}^{(n)})$ є підмножиною деякої відкритої грані $conv(\mathfrak{L}^{(n)})$. З визначення відкритої грані випливає, що для кожної грані $F_m^{(n)}$ повинна існувати опорна множина H_n така, що $F_m^{(n)} \subseteq conv(\mathfrak{L}^{(n)}) \cap H_n$. Нехай у неї буде одинична нормаль $u^{(n)}$. Також введемо наступне позначення: $h(L,u) := \sup_{y\in L}\langle y,u\rangle$ - опорна функція. Тоді

$$H_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, u^{(n)}\rangle = h(conv(\mathfrak{L}^{(n)}), u^{(n)})\}.$$

Якщо перейти до підпослідовності, ми можемо вважати, що $u^{(n)} \to u^{(0)}$, при $n \to \infty$. Позначивши $\|L\| := \sup_{x\in L}\|x\|$ та використовуючи властивість Ліпшиця, див [13, Теорема H.1], маємо

$$\begin{gathered}
|h(conv(\mathfrak{L}^{(n)}), u^{(n)}) - h(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), u^{(0)})| \leq \\
\leq |h(conv(\mathfrak{L}^{(n)}), u^{(n)}) - h(conv(\mathfrak{L}^{(n)}), u^{(0)})| + \\
+ |h(conv(\mathfrak{L}^{(n)}), u^{(0)}) - h(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), u^{(0)})| \leq \\
\leq \|conv(\mathfrak{L}^{(n)})\| \cdot \|u^{(n)} - u^{(0)}\| + |h(conv(\mathfrak{L}^{(n)}), u^{(0)}) - h(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), u^{(0)})|, n \to \infty.
\end{gathered}$$

Останній перехід справедливий, оскільки за рахунок збіжності опуклих оболонок $conv(\mathfrak{L}^{(n)})$ до $conv(\mathfrak{L}^{(0)})$, поточково збігаються відповідні їм опорні функції для кожної нормалі u. Тоді справедливо, що $\limsup_{n\to\infty} H_n = \lim_{n\to\infty} H_n = H_0$.

За теоремою вибору Бляшке, послідовність опуклих множин $(F_m^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ має збіжну підпослідовність. Переходячи до підпослідовності, будемо вважати, що $F_m^{(n)} \to F$, при $n \to \infty$. Покажемо, що ця границя F є підмножиною деякої відкритої грані $conv(\mathfrak{L}^{(0)})$. Спрямовуючи $n \to \infty$ в $F_m^{(n)} \subseteq conv(\mathfrak{L}^{(n)}) \cap H_n$ і враховуючи напівнеперервність зверху перетину, маємо

$$\begin{aligned}
F = \limsup_{n\to\infty} F_m^{(n)} \subseteq \limsup_{n\to\infty}(conv(\mathfrak{L}^{(n)}) \cap H_n) \subseteq \\
\subseteq \limsup_{n\to\infty} conv(\mathfrak{L}^{(n)}) \cap \limsup_{n\to\infty} H_n = conv(\mathfrak{L}^{(0)}) \cap H_0.
\end{aligned}$$

Залишилось сказати, що розмірність $m' = dim(F)$ не більше m і показати, що F перетинають множини $\{L_{i_1}^{(0)}, ..., L_{i_k}^{(0)}\}$. Це можна зробити схожим чином. Для кожного $j = 1, ..., k$ маємо

$$\varnothing \neq \limsup_{n\to\infty}(F_m^{(n)} \cap L_{i_j}^{(n)}) \subseteq \limsup_{n\to\infty} F_m^{(n)} \cap \limsup_{n\to\infty} L_{i_j}^{(n)} = F \cap L_{i_j}^{(0)},$$

що протиречить тому, що сім'я $\mathfrak{L}^{(0)}$ знаходиться в загальній позиції. Це закінчує доведення першої частини.

Тепер доведемо другу частину. В силу (a) та (b), $conv(\mathfrak{L}^{(0)})$ є звичайним політопом, що повністю задається сім'єю $\{L_{r_1}^{(0)}, ..., L_{r_M}^{(0)}\}$, яку можна замінити множиною $\{x_1, ..., x_M\}$. Фактично умова загальної позиції рівносильна тому, що жодні 3 точки з множини $\{x_1, ..., x_M\}$ не лежать на одній прямій. Більше того, стає очевидним, що $f(\mathfrak{L}^{(0)}) = f(conv(\mathfrak{L}^{(0)})$. Також, в силу нашої конструкції, множина $\{r_1, ..., r_M\}$ є підмножиною $\{1, ..., l\}$, і не обмежуючи загальності, будемо тепер вважати, що $l = M$ і $r_i = i, i = 1, ..., M$. Залишилось показати першу рівність.

Тоді, в силу 5.1 та 5.2, непорожній перетин $\partial conv(\mathfrak{L}^{(n)}) \cap L_i^{(n)}$ буде збігатись до підмножини перетину $\partial conv(\mathfrak{L}^{(0)}) \cap L_i^{(0)}$, яка за умовою (b) є $\{x_i\}$ для $i = 1, ..., M$. З огляду на це можна дійти висновку, що $conv(\mathfrak{L}^{(n)})$ буде поступово вироджатись в політоп, а $\partial conv(\mathfrak{L}^{(n)}) \cap L_i^{(n)}$ - в його вершини. Відповідно для достатньо виликих n кількість вершин та ребер сім'ї $\mathfrak{L}^{(n)}$ має співпадати.

Покладемо $s := \limsup_{n\to\infty} f_1(\mathfrak{L}^{(n)})$. Перейшовши до підпослідовності можна вважати, що для кожного $n \in \mathbb{N}$, існує рівно s наборів ребер $\mathfrak{L}^{(n)}$, і вони задаються множинами з $\{L_1^{(n)}, ..., L_l^{(n)}\}$. Треба показати, що $s \leq f_1(\mathfrak{L}^{(0)})$, тобто, що для кожного ребра $\{L_{i_1}^{(n)}, L_{i_2}^{(n)}\}$ сім'ї $\mathfrak{L}^{(n)}$, у сім'ї $\mathfrak{L}^{(0)}$ існує ребро $\{L_{i_1}^{(0)}, L_{i_2}^{(0)}\}$. Зробимо це аналогічно тому, як робили в першій частині доведення. Візьмемо деяке ребро $\{L_{i_{1,n}}, L_{i_{2,n}}\}$ та ребро $F_1^{(n)} \in \mathfrak{F}_1(conv(\mathfrak{L}^{(n)}))$ таке, що $L_{i_{j,n}} \cap F_1^{(n)} \neq \varnothing, j = 1, 2$. Перейшовши до підпослідовності можна вважати $i_{j,n} = i_j, j = 1, 2$. Візьмемо $x_{i_j}^{(n)} = L_{i_j}^{(n)} \cap F_j^{(n)}, j = 1, 2$. Перейшовши до підпослідовності, будемо вважати, що $F_j^{(n)} \to F$, а $x_{i_j}^{(n)} \to x_{i_j}^{(0)}$ для $j = 1, 2$ при $n \to \infty$. Оскільки кожна грань є підгранню деякої відкритої грані, $F_j^{(n)}$ є підмножиною деякої опорної множини $F(conv(\mathfrak{L}^{(n)}), u^{(n)})$. Перейшовши до підпослідовності, можемо вважати, що $u^{(n)} \to u^{(0)}$, при $n \to \infty$. Тоді $F(conv(\mathfrak{L}^{(n)}), u^{(n)})$ збігається до підмножини відкритої грані $F(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), u^{(0)})$, а $F \subseteq F(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), u^{(0)})$. Тоді для $j = 1, 2$

$$\{x_{i_j}^{(0)}\} = \limsup_{n\to\infty} \{x_{i_j}^{(n)}\} = \limsup_{n\to\infty} L_{i_j}^{(n)} \cap F_j^{(n)} \subseteq L_{i_j}^{(0)} \cap F \subseteq$$
$$\subseteq L_{i_j}^{(0)} \cap F(conv(\mathfrak{L}^{(n)}), u^{(n)}) = \{x_{i_j}^{(0)}\},$$

де останній перехід справедливий за рахунок (b). Тому множина $F(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), u^{(0)})$, що є гранню політопу $conv(\mathfrak{L}^{(0)})$, перетинається $L_{i_0}^{(0)}, L_{i_1}^{(0)}$. Тоді в силу загальної позиції, $dim(F(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), u^{(0)})) = 1$. Отже $\limsup_{n\to\infty} f_1(\mathfrak{L}^{(n)}) \leq f_1(\mathfrak{L}^{(0)})$.

Покажемо тепер, що $f_1(\mathfrak{L}^{(0)}) \leq \liminf_{n\to\infty} f_1(\mathfrak{L}^{(n)})$, тобто що для достатньо великих $n \in \mathbb{N}$ для кожного ребра $\mathfrak{L}^{(0)}$ існує ребро $\mathfrak{L}^{(n)}$.

Зафіксуємо деяке ребро $F_1 \in \mathfrak{F}_1(conv(\mathfrak{L}^{(0)}))$. Оскільки F_1 - це ребро, то нормальний конус $N(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), F_1)$ є одновимірним. Візьмемо одиничний вектор $u \in N(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), F_1)$. Тоді F_1 це підмножина прямої H ортогональної до u. З умов (a) і (b) слідує, що сім'я $M(\mathfrak{L}^{(0)}, F_1)$ складається з 2 множин з $\mathfrak{L}^{(0)}$. Нехай $M(\mathfrak{L}^{(0)}, F_1) = \{L_1^{(0)}, L_2^{(0)}\}$, а $\{x_j\} = L_j^{(0)} \cap F_1, j = 1, 2$. Зауважимо, що $F_1 = conv(x_1, x_2) \subseteq H$, а $u \in N(conv(\mathfrak{L}^{(0)}), x_j) \subseteq N(L_j^{(0)}, x_j), j = 1, 2$.

Введемо позначення $B_r(x) := rU + x$. Візьмемо тепер деяку точку z із відповідної внутрішності F_1 і зафіксуємо достатньо мале $\epsilon > 0$ таке, що відстань від точки z до відповідної ∂F_1 більша за ϵ, тобто $z \notin B_\epsilon(x_j), j = 1, 2$. Покладемо $D_\epsilon = D_\epsilon(u) := H + B_\epsilon(0)$. Очевидно, що $B_\epsilon(x_j) \subseteq D_\epsilon, j = 1, 2$.

Тепер позначимо через A_ϵ множину всіх одиничних нормалей до прямих, що проходять через точки y_1, y_2, де $y_j \in B_\epsilon(x_j), j = 1, 2$. Якщо $\epsilon \to 0$, A_ϵ буде збігатись до $\{u\}$. З припущення (b) робимо висновок, що нормальний конус $N(L_j^{(0)}, x_j)$ має непорожню внутрішність для $j = 1, 2$, оскільки $N(conv(L^{(0)}), x_j) \subseteq N(L_j^{(0)}, x_j)$, а x_j є вершиною політопу $conv(L^{(0)})$. Обернене сферичне відображення $\tau(L, \cdot)$, що використовувалось в доведенні леми 3.9 є неперервним для кожної компактної опуклої множини L, див. [8, Лема 2.2.12]. Тоді, зменшивши $\epsilon > 0$ можемо вважати, що для $j = 1, 2$ та $\forall \epsilon_1 \in (0, \epsilon)$

$$\tau(L_j^{(0)}, A_{\epsilon_1}) = \{x_j\}. \tag{5.3}$$

Як вже зазначалось на початку доведення леми, для $j = 1, 2$ множина $L_j^{(n)}$ збігається до $L_j^{(0)}$ за Хаусдорфовою метрикою, а перетин множин є напівнеперервною зверху функцією. Тоді для $n > n_0$ для достатньо великого n_0, $L_j^{(n)}$ перетинає $B_{\epsilon/2}(x_j)$, а $L_j^{(n)} \cap D_{\epsilon/2} \subseteq (L_j^{(0)} \cap D_{\epsilon/2}) + B_{\epsilon/2}(x_j) \subseteq B_\epsilon(x_j)$, для $j = 1, 2$.

Нехай $L^{(n)} := conv(\{L_1^{(n)} \cap D_{\epsilon/2}, L_2^{(n)} \cap D_{\epsilon/2}\})$ і розглянемо замкнений відрізок $[z - \epsilon u, z + \epsilon u]$. Оскільки проекція $L_j^{(n)} \cap D_{\epsilon/2}$ на H є підмножиною $B_\epsilon(x_j) \cap H$, то проекція $L^{(n)}$ на H містить z. Тому відрізок $[z - \epsilon u, z + \epsilon u]$ перетинає $\partial L^{(n)}$ і жодна точка з відрізку не належить множинам $L_1^{(n)} \cap D_{\epsilon/2}, L_2^{(n)} \cap D_{\epsilon/2}$, інакше б тоді z також належало б. Позначимо $y := z + t_0 u$, де $t_0 = sup\{a \in \mathbb{R} : z + au \in L^{(n)}$. Ця точка, очевидно, належить $\partial L^{(n)}$.

Візьмемо одиничний вектор ν з $N(L^{(n)}, y)$ і зауважимо, що $\nu \in A_\epsilon$, зокрема $\tau(L_j^{(0)}, \nu) = \{x_j\}, j = 1, 2$, за рахунок 5.3. Зрозуміло, що $y \in F(L^{(n)}, \nu)$. Покажемо, що $y \in F(\bar{L}^{(n)}, \nu)$, де $\bar{L}^{(n)} := conv(L_1^{(n)} \cup L_2^{(n)})$. Припустимо, що $y \notin F(\bar{L}^{(n)}, \nu)$. Тоді $F(\bar{L}^{(n)}, \nu) \not\subseteq D_{\epsilon/2}$. Оскільки $F(L_j^{(n)}, \nu) = L_j^{(n)} \cap H_n$, де $H_n := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, \nu \rangle =$

$h(L_j^{(n)},\nu)\}$, а перетин є напівнеперервною зверху функцією, то

$$F(L_j^{(n)},\nu) \subseteq F(L_j^{(0)},\nu) + B_{\epsilon/2}(0) = \tau(L_j^{(0)},\nu) + B_{\epsilon/2}(0) = B_{\epsilon/2}(x_j) \subseteq D_{\epsilon/2}.$$

Оскільки

$$F(\bar{L}^{(n)},\nu) \subseteq conv(F(L_1^{(n)},\nu) \cup F(L_2^{(n)},\nu))$$

маємо суперечність, а отже $y \in F(\bar{L}^{(n)},\nu)$. Останнє включення також вказує, що $y \in F(\bar{L}^{(n)},\nu)$ є опуклою комбінацією $c_1y_1 + c_2y_2$, де $y_j \in F(L_j^{(n)},\nu), j = 1,2$. Оскільки $F(L_j^{(n)},\nu) \subseteq D_{\epsilon/2}$, то $y_j \in L_j^{(n)} \cap D_{\epsilon/2}$. Отже коофіцієнти c_1, c_2 строго додатні, бо тоді точка $y \in [z - \epsilon u, z + \epsilon u]$ належала б одній з множин $L_1^{(n)} \cap D_{\epsilon/2}, L_2^{(n)} \cap D_{\epsilon/2}$. Оскільки $y \in F(\bar{L}^{(n)},\nu)$, то $h(\bar{L}^{(n)},\nu) = \langle y,\nu\rangle$, а тому, беручи до уваги, що опорна функція опуклої оболонки еквівалентна максимуму опорної функції кожної з компонент,

$$\max_{j=1,2} h(L_j^{(n)},\nu) = h(\bar{L}^{(n)},\nu) = \langle y,\nu\rangle = \sum_{j=1}^{2} c_j\langle y_j,\nu\rangle \le \sum_{j=1}^{2} c_j h(L_j^{(n)},\nu).$$

Це можливо лише тоді, коли

$$h(\bar{L}^{(n)},\nu) = h(L_1^{(n)},\nu) = h(L_2^{(n)},\nu),$$

а отже $\bar{H}_n := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x,\nu\rangle = h(\bar{L}^{(n)},\nu)\}$ перетинає всі опорні множини до $L_1^{(n)}, L_2^{(n)}$ у напрямку ν. Покладемо

$$F_1^{(n)} = conv\{L_1^{(n)} \cap \bar{H}_n, L_2^{(n)} \cap \bar{H}_n\},$$

і відмітимо, що множини з правого боку є сінглтонами, а $F_1^{(n)}$ є ребром $conv(\mathfrak{L}^{(n)})$, і відповідно $\{L_1^{(n)}, L_2^{(n)}\}$ є ребром $\mathfrak{L}^{(n)}$.

Відповідно, ми показали існування ребра $F_1^{(n)}$ множини $conv(\mathfrak{L}^{(n)})$, що перетинає $B_\epsilon(x_j), j = 1,2$, а тому це ребро є різним для кожного ребра F_1 множини $conv(\mathfrak{L}^{(0)})$. Тобто $f_1(\mathfrak{L}^{(0)}) \le \liminf_{n\to\infty} f_1(\mathfrak{L}^{(n)}) \le \limsup_{n\to\infty} f_1(\mathfrak{L}^{(n)}) \le f_1(\mathfrak{L}^{(0)})$.

Отже для достатньо великих n матимемо $f_1(\mathfrak{L}^{(n)}) = f_1(\mathfrak{L}^{(0)})$. З іншого боку $f_0(\mathfrak{L}^{(n)}) = f_1(\mathfrak{L}^{(n)}), f_0(\mathfrak{L}^{(0)}) = f_1(\mathfrak{L}^{(0)})$. Отже $f(\mathfrak{L}^{(n)}) = f(\mathfrak{L}^{(0)})$.

Перейдемо до доведення третьої частини. Відмітимо $f_1(\mathfrak{L}^{(n)}) \le f_1(conv(\mathfrak{L}^{(n)}))$. Кожне ребро $\{L_{i_1}^{(n)}, L_{i_2}^{(n)}\}$ множини $\mathfrak{L}^{(n)}$ відповідає хоча б одному ребру $F_1^{(n)}$ множини $conv(\mathfrak{L}^{(n)})$. Припустимо, що воно відповідає ще одному ребру $F'^{(n)}_1$ для нескінченно багатьох n. Тоді аналогічно тому, як ми доводили $\limsup_{n\to\infty} f_1(\mathfrak{L}^{(n)}) \le f_1(\mathfrak{L}^{(0)})$, дійдемо до висновку, що існує пара $\{L^{(0)}_{i_1}, L^{(0)}_{i_2}\}$ з $\mathfrak{L}^{(0)}$, якій відповідають одразу дві грані $conv(\mathfrak{L}^{(0)})$. При цьому вони є ребрами. Це протиречить умові (b), якщо тільки ребра $F^{(n)}_1$ і $F'^{(n)}_1$ не співпадають в метриці Хаусдорфа і відповідають одному ребру $conv(\mathfrak{L}^{(0)})$. Кожне ребро є відкритим ребром, а тому $F^{(n)}_1$ і $F'^{(n)}_1$ задаються, як перетин прямих $H^{(n)}$ і $H'^{(n)}$ з $conv(\mathfrak{L}^{(n)})$ відповідно. Позначимо $u^{(n)}$ і $u'^{(n)}$, як одиничні нормалі до ребер $F^{(n)}_1$ і $F'^{(n)}_1$ відповідно. Тоді

$$F^{(n)}_1 \subseteq \{x \in H^{(n)} : \langle x, u'^{(n)} \rangle \le h(F'^{(n)}_1, u'^{(n)})\} =: G^{(n)},$$

$$F'^{(n)}_1 \subseteq \{x \in H'^{(n)} : \langle x, u^{(n)} \rangle \le h(F^{(n)}_1, u^{(n)})\} =: G'^{(n)}.$$

Зауважимо, що $G^{(n)} \subseteq H^{(n)}$ і $G'^{(n)} \subseteq H'^{(n)}$ та мають границю $H^{(n)} \cap H'^{(n)}$. Обидві прямі збігаються при $n \to \infty$ до прямої $H^{(0)}$, що є опорною прямою до $conv(\mathfrak{L}^{(0)})$. Перетин $H^{(n)} \cap H'^{(n)}$ є сінглтоном, що збігається до H', а тому $G^{(n)}$ та $G'^{(n)}$ до двух підмножин $H^{(0)}$, обмежених H'. Оскільки $F^{(n)}_1$ і $F'^{(n)}_1$ збігаються до однієї множини, але ці множини мають непересічні відповідні внутрішності, $F^{(0)}_1$ має бути підмножиною H'. Це суперечить тому, що $dim(F^{(0)}_1) > dim(H')$. □

Теорема 5.2. *Нехай* $\Xi_n = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$, *де* ξ_i *- незалежні рівномірно розподілені на* U *випадкові величини. Тоді*

$$f(Q_n) = f(\mathfrak{L}_{\Xi_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} f(Z^0).$$

Доведення. Використаємо теорему Скорохода про вираження, див. [16, Теорема 4.30] у сукупності з теоремою 4.3 та лемою 5.1. Спершу використаємо теорему Скорохода, щоб перейти до нового ймовірнісного простору, такого, що збіжність в теоремі 4.3 виконується майже напевно. Тоді, на цьому новому ймовірнісному просторі з ймовірністю 1 всі умови леми 5.1 виконуються для точкових процесів заданих $L^{(n)}_i := n^{-1}(U - \xi_i)^0, i = 1, ..., n, n \in \mathbb{N}$ з границею при $n \to \infty$ у вигляді точкового процесу заданого $L^{(0)}_i := [0, x_i], x_i \in \Pi$, де для простоти ми залишили початкові позначення об'єктів на новому просторі. Тоді, на цьому ймовірнісному просторі існує випадкове $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $f(\mathfrak{L}_{\Xi_n}) = f(Z^0)$ для всіх $n \ge n_0$ з ймовірністю 1. Повертаючись назад до початкового ймовірнісного простору, ми отримуємо бажану слабку збіжність. Відмітимо, що сім'я $\mathfrak{L}^{(0)}$ знаходиться в загальній позиції і задовільняє умови леми 5.1. □

Теорема 5.3. *Кількість кругових ребер* Q_n *збігається за розподілом до* $f_1(Z^0)$ *при* $n \to \infty$.

Доведення. Використаємо лему 3.9. Зауважимо, що загалом $f_1(Q_n)$ може бути меншою за кількість кругових ребер. Тим не менш, для граничного політопа Z^0 в теоремі 5.2 кількість ребер $f_1(Z^0)$ збігається з кількістю ребер сім'ї відрізків $\{[0,x] : x \in \Pi\}$. За лемою 3.9, кількість кругових ребер Q_n збігається з кількістю ребер $conv(\mathfrak{L}_{\Xi_n})$. Крім того, за лемою 5.1 пунктом (3), останнє рівне $f_1(\mathfrak{L}_{\Xi_n})$ для всіх $n \geq n_0$, де $n_0 \in \mathbb{N}$ - випадкова величина. Тому кількість кругових ребер Q_n збігається за розподілом до $f_1(Z^0)$ при $n \to \infty$. □

Висновки

В цій роботі були дослідженні властивості кругоопуклих випадкових множин, побудованих як кругові оболонки випадкових вибірок, а також були знайдені граничні значення пов'язаних з ними множин та відповідних f-векторів. Все це є важливими результатами в силу важливості вивчення опуклих оболонок випадкових процесів.

Література

[1] R. Schneider and W. Weil. Stochastic and Integral Geometry. Springer, Berlin, 2008.

[2] D. Hug. Random polytopes. In Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields, volume 2068 of Lecture Notes in Math., pages 205–238. Springer, Heidelberg, 2013.

[3] M. Reitzner. The combinatorial structure of random polytopes. Adv. Math., 191(1):178–208, 2005.

[4] M. Reitzner. Random polytopes. In W. S. Kendall and I. Molchanov, editors, New Perspectives in Stochastic Geometry, pages 45–76. Oxford Univ. Press, Oxford, 2010.

[5] Z. Kabluchko, A. Marynych, D. Temesvari, and C. Thale. Cones generated by random points on half-spheres and convex hulls of Poisson point processes. Probab. Theory Related Fields, 175(3-4):1021–1061, 2019.

[6] F. Fodor, P. Kevei, and V. V´ıgh. On random disc polygons in smooth convex discs. Adv. in Appl. Probab., 46(4):899–918, 2014.

[7] F. Fodor and V. V´ıgh. Variance estimates for random disc-polygons in smooth convex discs. J. Appl. Probab., 55(4):1143–1157, 2018.

[8] R. Schneider. Convex Bodies. The Brunn–Minkowski Theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 2014.

[9] M. V. Balashov and E. S. Polovinkin. M-strongly convex subsets and their generating sets. Mat. Sb., 191(1):27–64, 2000.

[10] E. S. Polovinkin. Strongly convex analysis. Mat. Sb., 187(2):103–130, 1996.

[11] T. Jahn, H. Martini, and C. Richter. Ball convex bodies in Minkowski spaces. Pacific J. Math., 289(2):287–316, 2017.

[12] F. Fodor. Random ball-polytopes in smooth convex bodies, 2019. Preprint available at https://arxiv.org/abs/1906.11480v1.

[13] I. Molchanov. Theory of Random Sets. Springer, London, 2 edition, 2017.

[14] M. Kiderlen and J. Rataj. On infinitesimal increase of volumes of morphological transforms. Mathematika, 53(1):103–127 (2007), 2006.

[15] I. Molchanov. Continued fractions built from convex sets and convex functions. Commun. Contemp. Math., 17(5):1550003, 18, 2015

[16] O. Kallenberg. Foundations of Modern Probability. Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.