

УДК 534

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.12>

Віктор ГРІНЧЕНКО¹, д-р фіз.-мат. наук, акад.
ORCID ID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: grinchenko@nas.gov.ua

Ірина ЛЕБЕДЄВА², канд. фіз.-мат. наук, доц.
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua

Володимир МАЦИПУРА², д-р фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com

Тихомир ТРИФОНОВ³, канд. фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0002-9649-4396
e-mail: TihomirTrifonov@ieee.org

¹Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

³Великотирновський університет імені святих Кирила і Мефодія, Велико Тирново, Болгарія

ВПЛИВ ЗГЛАДЖУВАННЯ ПОВЕРХНІ СКІНЧЕННОГО КЛИНОПОДІБНОГО ОБ'ЄКТА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗСІЮВАННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ. ЧАСТИНА II. АНАЛІЗ ЧИСЕЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Пропонована стаття є другою частиною роботи (Грінченко, Лебедева, Маципура, 2024), що присвячена задачі розсіювання плоскої гармонічної хвилі на скінченному клиноподібному об'єкті зі згладженою поверхнею (іншими словами, із заокругленням). Такий об'єкт являє собою спрощену модель профілю крила літака. Для цієї моделі, базуючись на розв'язку, отриманому в межах методу часткових областей, визначено вираз для зворотного перерізу розсіювання. Наведено приклад виконання граничних умов на межі часткових областей. Побудовано графіки зворотного перерізу розсіювання для різного радіуса заокруглення передньої кромки профілю моделі і різної провідності поверхні заокруглення. Показано, що зворотний переріз розсіювання істотно залежить від радіуса заокруглення профілю і нормальної провідності поверхні заокруглення. При цьому покриття поверхні згладжування поглинаючим матеріалом істотно зменшує, у певному діапазоні кутів падіння хвилі, розсіяне поле об'єкта.

Побудований чисельно-аналітичний розв'язок дає змогу здійснювати оціночні розрахунки зворотного перерізу розсіювання об'єкта у разі зміни в широкому діапазоні його геометричних і фізичних параметрів.

Ключові слова: зворотний переріз розсіювання, метод часткових областей, плоска хвиля, поточкове спряження полів.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 76Q05.

Вступ

Задача про дифракцію хвиль на нескінченному або скінченному клині є фундаментальною проблемою, на результатах розв'язку якої базуються багато фізичних уявлень про процеси взаємодії хвиль із тілами. Цій проблемі присвячено велику кількість джерел (Daniele, & Lombardi, 2020; Felsen, & Marcuvitz, 1973; Sommerfeld, 2004; Grinchenko, Vovk, & Matsypura, 2018), у яких досліджують як нескінчений клин з ідеальними (Monzon, Forester, & Loschialpo, 2005) та діелектричними поверхнями (Emig, 2024; Grzesik, 2019), так і скінчений клин із різною геометрією та властивостями поверхонь (Grinchenko, Vovk, & Matsypura, 2018). Варто відзначити великий інтерес до проблеми розсіювання електромагнітних хвиль на клиноподібних об'єктах у фахівців у галузі електродинаміки (Emig, 2024; Grzesik, 2019; Nacivelioglu, Sevgi, & Ufimtsev, 2011). Загалом підвищений інтерес до процесу дифракції хвилі на клині зумовлений його глибоким фізичним змістом і важливим практичним значенням.

Пропонована стаття є другою частиною роботи (Грінченко, Лебедева, & Маципура, 2024), що присвячена задачі розсіювання плоскої гармонічної хвилі на скінченному клиноподібному об'єкті зі згладженою поверхнею (іншими словами, із заокругленням) (рис. 1).

Такий об'єкт являє собою спрощену модель профілю крила літака. У задачах розсіювання хвиль найважливішими характеристиками є перерізи розсіювання об'єкта. Ці енергетичні характеристики визначаються в далекому полі розсіювання.

Спираючись на результати роботи (Грінченко, Лебедева, & Маципура, 2024), отримуємо вираз для зворотного перерізу розсіювання:

$$\sigma_L(\theta_0) = \frac{4}{k} L(\theta_0) L^*(\theta_0), \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos(n\theta) \exp\left(-in\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{H_n^{(1)'}(ka)} \sin(n\theta) \exp\left(-in\frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{H_n^{(1)'}(kR)} \cos(n\theta) \exp\left(ikd \cos \theta - in\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{H_n^{(1)'}(kR)} \sin(n\theta) \exp\left(ikd \cos \theta - in\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

© Грінченко Віктор, Лебедева Ірина, Маципура Володимир, Трифонов Тихомир, 2025

ISSN 2518-1378 (Print), ISSN 2708-6038 (Online)

Одиниця вимірювання зворотного перерізу розсіювання для плоскої задачі – метр.

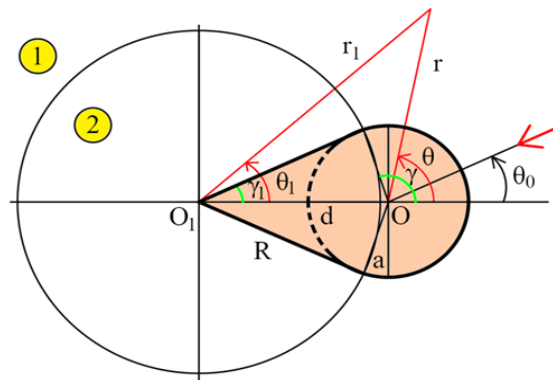


Рис. 1. Геометрія моделі

Щоб зробити вираз (1) безрозмірним, його ділять на мідель об'єкта. Міделевий переріз (мідель) – це площа поперечного перерізу зони геометричної тіні об'єкта. Мідель залежить від кута падіння хвилі θ_0 на об'єкт дослідження, тому будемо ділити вираз (1) на максимальне значення міделя M_{max} . Для нашої плоскої задачі (рис. 1) величина $M_{max} = d + a$.

1. Побудова чисельного алгоритму і перевірка виконання граничних умов

Необхідно зауважити, що побудовані в межах методу часткових областей аналітичні уявлення звукового поля завжди точно задовольняють рівняння Гельмгольца за будь-якої кількості складових, що утримуються в рядах. З огляду на це в основу оцінки точності розв'язку задачі варто покласти оцінку точності виконання умов спряження полів на межах часткових областей. Очевидно, що для підвищення точності оцінки звукових полів необхідно збільшувати кількість утримуваних невідомих комплексних коефіцієнтів під час розв'язку алгебраїчної системи рівнянь методом редуцції. Особливо це важливо за високих частот. Чисельний експеримент дає змогу оцінити ступінь виконання умов спряження звукових полів для вибраних параметрів моделі. Така процедура є стандартною у разі використання методу часткових областей і не раз апробована нами (Grinchenko, Vovk, & Matsypura, 2018). Згідно з міркуваннями, зазначеними у першій частині роботи (Грінченко, Лебедева, & Маципура, 2024), будемо використовувати поточкове спряження полів на межі часткових областей.

Отже, обмежимо нескінченні ряди у формулі (2), задаючи кількість коефіцієнтів A_n , B_n рівним N_1 , коефіцієнтів C_n , D_n – N_2 , коефіцієнтів E_n , F_n – N_3 (Грінченко, Лебедева, & Маципура, 2024). Відправною точкою в розрахунках за поточкового спряження полів є нормована до довжини хвилі λ відстань Δ між вузловими точками, тобто величина Δ/λ . Згідно з величиною Δ/λ , встановлюємо кількість вузлових точок: $N_1 = [2\pi a/\Delta]$, $N_2 = [2\pi R/\Delta]$, $N_3 = [2(\pi - \gamma_1)R/\Delta]$. Наведемо приклад виконання граничних умов. Згідно з рис. 1 задаємо геометричні параметри об'єкта a і R , коефіцієнт відбиття згладженої поверхні V і кут падіння плоскої хвилі θ_0 . Визначаємо також такі геометричні параметри:

$$d = OO_1 = \sqrt{R^2 + a^2}, \quad \gamma = \pi - \arccos(a/d), \quad \gamma_1 = \pi/2 - \arccos(a/d). \quad (3)$$

Оскільки для нас цікавою є модель профілю крила у вигляді гострого клиноподібного об'єкта з наявністю плоских поверхонь скінченного клину великого хвильового розміру, то оберемо такі геометричні параметри моделі: $\frac{R}{\lambda} = 10,2$, $a/\lambda = 0,8$. Нехай $V = 1$, тоді відносна нормальна провідність згладженої поверхні $\tilde{Y} = 0$. Згідно з формулами (3), кути $\gamma \approx 94,5^\circ$ і $\gamma_1 \approx 4,5^\circ$, величина $d/\lambda \approx 10,23$. Нехай кут падіння плоскої хвилі $\theta_0 = 90^\circ$. Функції $v_1(a, \theta)$ і $v_2(R, \theta_1)$ у граничних умовах (див. формули (8) і (10) в першій частині роботи (Грінченко, Лебедева, & Маципура, 2024)) покладемо рівними нулю.

Виберемо відстань між вузловими точками на колі радіуса a , що дорівнює $\Delta/\lambda = 0,05$, а на колі радіуса R – яка дорівнює $\Delta/\lambda = 0,15$. Тоді кількість вузлових точок і, відповідно, кількість мод, що враховуються в часткових областях, визначиться величинами $N_1 = 102$, $N_2 = 214$, $N_3 = 209$.

Графіки на рис. 2 ілюструють виконання умов спряження полів на межі часткових областей 1 і 2, тобто на колі радіусом R за зміни кута θ_1 в межах $\theta_1 = (\gamma_1, \pi; -\pi, -\gamma_1)$ для амплітуд тиску $|p|$ і швидкості $|v|$. Графіки на рис. 3 показують хорошу якість виконання умов спряження полів.

Можна відзначити такі особливості в поведінці кривих на рис. 2 ($\theta_0 = 90^\circ$). Для амплітуди тиску $|p|$ чітко виділяється інтервал кутів $\theta_1 = (\gamma_1, 90^\circ)$, у якому спостерігається яскрава інтерференція між хвилею, що падає, і хвилею, що відбивається, від плоскої поверхні клина великого хвильового розміру.

В інтервалі зміни кутів $\theta_1 = (120^\circ, 180^\circ)$, $(-180^\circ, -120^\circ)$ інтерференція між зазначеними хвилями практично відсутня і тут домінує плоска хвиля одиної амплітуди, що падає. Інтервал кутів $\theta_1 = (-90^\circ, -\gamma_1)$ визначає зону геометричної тіні.

Подібний характер має і крива для амплітуди швидкості $|v|$ з корекцією на плавний спад до нуля за кутів $\theta_1 = \pm 180^\circ$ (для цих кутів нормальна складова швидкості до поверхні поділу часткових областей дорівнює нулю).

2. Розрахунок зворотного перерізу розсіювання

На рис. 3 показано графіки залежностей зворотного перерізу розсіювання $\sigma_L(\theta_0)$ для трьох варіантів моделі.

У всіх трьох варіантах розмір плоскої поверхні моделі залишається незмінним, а саме $R/\lambda = 10,2$. Для кривої 1 заокруглення профілю є акустично жорстким із радіусом кола $a/\lambda = 0,8$. Для кривої 2 заокруглення також є акустично жорстким, але з радіусом округлення вдвічі меншим, тобто $a/\lambda = 0,4$. Крива 3 відповідає заокругленню з поглинаючою поверхнею з коефіцієнтом поглинання $V = 0,1$ і величиною $a/\lambda = 0,8$.

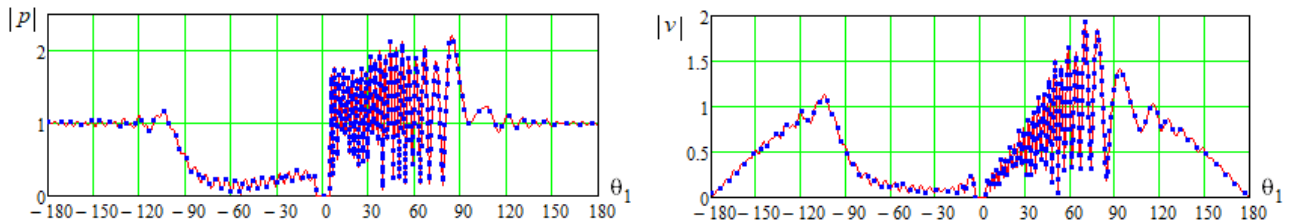


Рис. 2. Приклад виконання граничних умов на межі часткових областей 1 і 2 для амплітуд тиску $|p|$ і швидкості $|v|$; $\theta_0 = 90^\circ$: лінія – поле з боку області 1, точки – поле з боку області 2; інтервал кутів $\theta_1 = (-\gamma_1, \gamma_1)$, $\gamma_1 \approx 4,5^\circ$ є нефізичним, тому всередині цього інтервалу значення поля не обчислюємо

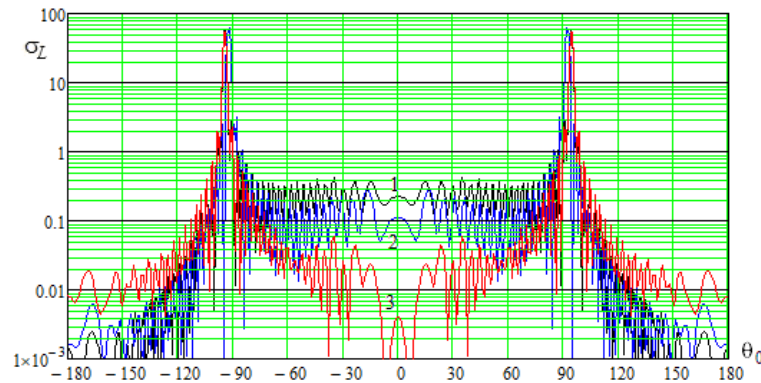


Рис. 3. Залежність зворотного перерізу розсіювання σ_L від кута падіння плоскої хвилі θ_0 за різних параметрів моделі, $R/\lambda = 10,2$: 1 – $a/\lambda = 0,8$, $V = 1$, $\bar{Y} = 0$; 2 – $a/\lambda = 0,4$, $V = 1$, $\bar{Y} = 0$; 3 – $a/\lambda = 0,8$, $V = 0,1$, $\bar{Y} = 0,818$

Як бачимо, для зворотного перерізу розсіювання σ_L усі три характеристики мають два відблиски, обумовлені нормальним падінням плоскої хвилі на плоску поверхню значного хвильового розміру $R/\lambda = 10,2$. Порівнюючи криві 1 і 2, можна відзначити, що зменшення радіуса заокруглення знижує величину зворотного перерізу розсіювання в діапазоні кутів $-70^\circ \leq \theta_0 \leq 70^\circ$, що є цілком очікуваним результатом. Покриття поверхні заокруглення поглинаючим матеріалом із коефіцієнтом поглинання $V = 0,1$ істотно знижує величину перерізу зворотного розсіювання в діапазоні кутів $-70^\circ \leq \theta_0 \leq 70^\circ$ (крива 3) порівняно з кривою 1. Ми знайшли значення $N = 14 \cdot 10^9$, що відповідає інтервалу $[-A, A] = [-1000, 1000]$.

Дискусія і висновки

На основі методу часткових областей побудовано точний (строгий) розв'язок задачі розсіювання плоскої хвилі на скінченному клиноподібному об'єкті. Достовірність розв'язку обумовлена контролем якості виконання умов спряження полів на межах часткових областей і граничної умови на згладженій поверхні об'єкта.

Проведено розрахунки зворотного перерізу розсіювання об'єкта. Показано, що зворотний переріз розсіювання істотно залежить від радіуса заокруглення профілю і нормальної провідності поверхні заокруглення. При цьому покриття поверхні згладжування поглинаючим матеріалом істотно зменшує, в певному діапазоні кутів падіння хвилі, розсіяне поле об'єкта.

Побудований чисельно-аналітичний розв'язок дає змогу проводити оціночні розрахунки зворотного перерізу розсіювання об'єкта у разі зміни в широкому діапазоні його геометричних і фізичних параметрів.

Внесок авторів: Віктор Грінченко – постановка задачі й обговорення висновків; Ірина Лебедева – робота з літературними джерелами, побудова аналітичного розв'язку й обговорення висновків; Володимир Маципура – побудова аналітичного розв'язку й обговорення висновків; Тихомир Трифонов – побудова аналітичного розв'язку й обговорення висновків.

Джерела фінансування. Фінансування здійснюється власним коштом авторів і частково забезпечено Київським національним університетом імені Тараса Шевченка.

Список використаних джерел

- Грінченко, В. Т., Лебедева, І. В., & Маципура, В. Т. (2024). Вплив згладжування поверхні скінченного клиноподібного об'єкта на характеристики розсіювання плоскої хвилі. Частина I. Побудова розв'язку. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*, 79(2), 29–32. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/2.5>
- Daniele, V., & Lombardi, G. (2020). *Scattering and Diffraction by Wedges 1: the Wiener-Hopf Solution-Theory*. John Wiley & Sons.
- Emig, T. (2024). Surface scattering expansion for the Casimir-Polder interaction of a dielectric wedge. *Physical Review A*, 110(6), 062809. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.110.062809>
- Felsen, L., & Marcuvitz, N. (1973). *Radiation and Scattering of Waves*. Prentice-Hall, Inc.
- Grinchenko, V. T., Vovk, I. V., & Matsypura, V. T. (2018). *Acoustic wave problems*. Begell House, Inc.
- Grzesik, J. A. (2019). Dielectric Wedge Scattering: An Analytic Inroad. *Progress In Electromagnetics Research B*, 84, 43–60. <https://doi.org/10.2528/PIERB19013001>
- Hacivelioglu, F., Sevgi, L., & Ufimtsev, P. Y. (2011). Electromagnetic wave scattering from a wedge with perfectly reflecting boundaries: Analysis of asymptotic techniques. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, 53(3), 232–253. <https://doi.org/10.1109/MAP.2011.6028472>

- Monzon, C., Forester, D., & Loschialpo, P. (2005). Exact solution to line source scattering by an ideal left-handed wedge. *Physical Review E*, 72(5), 056606. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.056606>
- Sommerfeld, A. (2004). *Mathematical Theory of Diffraction*. Springer Science+Business. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8196-8>

References

- Daniele, V., & Lombardi, G. (2020). *Scattering and Diffraction by Wedges 1: the Wiener-Hopf Solution-Theory*. John Wiley & Sons.
- Emig, T. (2024). Surface scattering expansion for the Casimir-Polder interaction of a dielectric wedge. *Physical Review A*, 110(6), 062809. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.110.062809>
- Felsen, L., & Marcuvitz, N. (1973). *Radiation and Scattering of Waves*. Prentice-Hall, Inc.
- Grinchenko, V. T., Lebedyeva, I. V., & Matsypura, V. T. (2024). Effect of smoothing of a finite wedge-shaped object on the scattering characteristics of a plane wave. Part I. Solution construction. *Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*, 79(2), 29–32. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/2.5>
- Grinchenko, V. T., Vovk, I. V., & Matsypura, V. T. (2018). *Acoustic wave problems*. Begell House, Inc.
- Grzesik, J. A. (2019). Dielectric Wedge Scattering: An Analytic Inroad. *Progress In Electromagnetics Research B*, 84, 43–60. <https://doi.org/10.2528/PIERB19013001>
- Hacivelioglu, F., Sevgi, L., & Ufimtsev, P. Y. (2011). Electromagnetic wave scattering from a wedge with perfectly reflecting boundaries: Analysis of asymptotic techniques. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, 53(3), 232–253. <https://doi.org/10.1109/MAP.2011.6028472>
- Monzon, C., Forester, D., & Loschialpo, P. (2005). Exact solution to line source scattering by an ideal left-handed wedge. *Physical Review E*, 72(5), 056606. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.056606>
- Sommerfeld, A. (2004). *Mathematical Theory of Diffraction*. Springer Science+Business. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8196-8>

Отримано редакцією журналу / Received: 25.07.25

Прорецензовано / Revised: 29.09.25

Схвалено до друку / Accepted: 10.10.25

Viktor GRINCHENKO¹, DSc (Phys. & Math.), Active Member of the NAS of Ukraine
ORCID ID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: grinchenko@nas.gov.ua

Iryna LEBEDYEVA², PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua

Volodymyr MATSYUPURA², DSc (Phys. & Math.), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com

Tihomir TRIFONOV³, PhD (Phys. & Math.), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-9649-4396
e-mail: TihomirTrifonov@ieee.org

¹Institute of Hydromechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

³University of Veliko Turnovo St Cyril and St Methodius, Veliko Turnovo, Bulgaria

EFFECT OF SMOOTHING OF A FINITE WEDGE-SHAPED OBJECT ON THE SCATTERING CHARACTERISTICS OF A PLANE WAVE. PART II. ANALYSIS OF NUMERICAL RESULTS

This article is the second part of the work (Grinchenko, Lebedyeva, & Matsypura, 2024), which is devoted to the problem of scattering of a plane harmonic wave on a finite wedge-shaped object with a smoothed surface (in other words, with rounding). Such an object represents a simplified model of an aircraft wing profile. For this model, based on the solution obtained within the limits of the partial domains method, an expression for the inverse scattering cross section is determined. An example of the fulfillment of boundary conditions at the boundary of partial domains is given. Plots of the backscattering cross-section were constructed for different rounding radii of the front edge of the model profile and different conductivities of the rounding surface. It is shown that the backscattering cross-section significantly depends on the radius of the profile rounding and the normal conductivity of the rounding surface. In this case, covering the smoothing surface with an absorbing material significantly reduces, in a certain range of wave incidence angles, the scattered field of the object. The developed numerical-analytical solution makes it possible to perform approximate calculations of the backscattering cross section of the object under variation of its geometric and physical parameters over a wide range.

Key words: inverse scattering cross section; partial domains method; plane wave; point conjugation of fields.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses, or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.