

УДК 532.595

Лимарченко О. С.¹, д. т. н., проф.
Слюсарчук Ю. А.¹, аспірант.

Аналіз впливу маси резервуару на поведінку системи сферичний резервуар – рідина з вільною поверхнею

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: julija0711@gmail.com

O. S. Limarchenko¹, Full Doctor, Professor
Y. A. Sliusarchuk¹, PhD Student.

Analysis of reservoir's mass influence on the system free – surfaced liquid and spherical reservoir

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: julija0711@gmail.com

У рамках моделі сумісного руху досліджено вплив співвідношення маси резервуару і рідини на поведінку сферичного резервуару з вільною поверхнею при гармонічному збудженні. Досліджено поведінку системи для двох випадків: маса резервуару в 5 разів менша за масу рідини та маса резервуару в 5 разів більша за масу рідини. Показано, що збільшення відносної маси рідини не сприяє виходу системи на впорядкований режим коливань.

Ключові слова: резервуар, вільна поверхня рідини, дрейф середнього коливань, модуляція.

Within the framework of combined motion the effect of ratio of masses of reservoir and liquid on the behavior of a free surface of liquid in the reservoir of spherical shape is studied. We suppose that liquid is ideal and it fills partially the reservoir. Mathematical modelling is done on the basis of the model, which takes into account combined character of nonlinear dynamics of liquid and the reservoir. Examples were done based on mathematical model of combined motion of liquid in spherical reservoir and free-surfaced liquid under harmonic force disturbance in horizontal direction. Two cases of the ratio of masses in the system are considered. First, the mass of the reservoir is 5 times less than the mass of the liquid; the mass of the reservoir is 5 times greater than the mass of the liquid. In order to identify specific features of the system behavior, the results were compared with the results for liquid behavior in cylindrical and conical reservoirs. It was ascertained that mass increasing has no tendency of converging to a steady mode of motion, which was confirmed experimentally. Distinctions of manifestation of nonlinear processes for the below-resonance, near-resonance and above-resonance modes are shown. We note manifestation of nonlinear effects such as modulation, the presence of high-frequency normal modes of oscillations, antiresonance and drift of the mean of oscillations.

Key Words: reservoir, free-surfaced liquid, drift of oscillation, modulation.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

Практичні потреби техніки зумовлюють інтерес до задач динаміки рідини, яка знаходиться в резервуарі. У більшості випадків рідина не цілком заповнює резервуар і при транспортуванні таких систем виникають коливання вільної поверхні. При великій відносній масі рідини її хвильові рухи істотніше впливають на поведінку системи, тому з практичного погляду важливо розглянути цей випадок. Для дослідження задачі було використано модель [1], яка була протестована для задач динаміки резервуарів з рідиною з вільною поверхнею в дорезонансному,

резонансному та зарезонансному діапазонах зміни частот. Метою цієї роботи є вивчення особливостей динамічної взаємодії рідини з сферичним резервуаром для випадків різного співвідношення маси резервуару та рідини.

Математичне формулювання задачі про рух системи резервуар – рідина з вільною поверхнею, складається з кінематичних умов, динамічних рівнянь та початкових умов [1]. Кінематичні умови розглядаються як механічні в'язі. Динамічні граничні умови та рівняння руху отримані на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського.

Для досліджуваної системи до кінематичних умов слід віднести вимогу нерозривності потоку в області τ

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau;$$

умову неперетікання на границі контакту тіло – рідина Σ з ортом зовнішньої нормалі \vec{n}

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma;$$

і умову неперетікання на вільній поверхні рідини

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial\xi}{\partial\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

при $\beta = \frac{1}{H} \xi(\alpha, \theta, t)$

Динамічна гранична умова має наступний вигляд

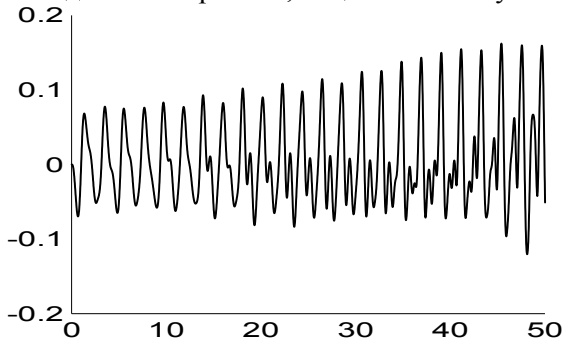
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S.$$

Динамічні граничні умови та рівняння руху отримуються з принципу Гамільтона – Остроградського з функцією Лагранжа у вигляді:

$$L = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2} M_p (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_p + M_f) \varepsilon_z g.$$

Кінематичні умови розглядаються як кінематичні в'язі відносно варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Для ефективного застосування варіаційних методів всім кінематичним обмеженням необхідно задовольнити до розв'язання варіаційної задачі. Отримується варіаційна задача для вільної системи, для якої записуються рівняння Лагранжа другого роду.

Побудова нелінійної дискретної моделі динаміки сумісного руху тіла з рідиною з вільною поверхнею здійснюється на основі метода Канторовича, що застосовується до



варіаційного формулювання задачі динаміки системи, отриманої на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Були введені наступні узагальнені координати: a_i – амплітуди збудження форм коливань рідини; α_i – кути відхилення резервуару; ε_i – параметри поступального руху резервуару.

Рівняння сумісного руху системи резервуар – рідина можна представити в наступному вигляді:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t) \ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_1, t)$$

$$r = \overline{1, N+3}$$

де p_{rn} – квадратна матриця, а q_r – вектор розмірності $N+3$.

Досліджувався сумісний рух сферичного резервуару і рідини з вільною поверхнею при русі під дією періодичної сили $Y = A \sin(\omega t)$ в горизонтальній площині. Поведінка системи розглядалась для двох випадків:

– маса резервуару в 5 разів менша за масу рідини $M_r = 0.2 M_g$;

– маса резервуару в 5 разів більша за масу рідини $M_r = 5 M_g$

Для цієї задачі поведінку системи було розглянуто для частоти $0.5\omega_N$ в дорезонансному діапазоні (рис. 1), для частот $0.9\omega_N$ (рис. 2), $0.98\omega_N$ (рис. 3), $1.02\omega_N$ (рис. 4) в малому околі резонансної частоти, а також для частот $1.1\omega_N$ (рис. 5) та $1.5\omega_N$ (рис. 6) більших за резонансні. ω_N – власна частота сумісного руху рідини та резервуару, яка залежить від співвідношення їх мас.

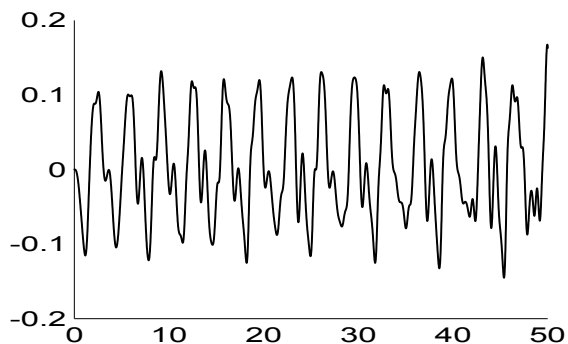


Рис. 1. Збурення вільної поверхні рідини для дорезонансної частоти ($0.5\omega_N$)

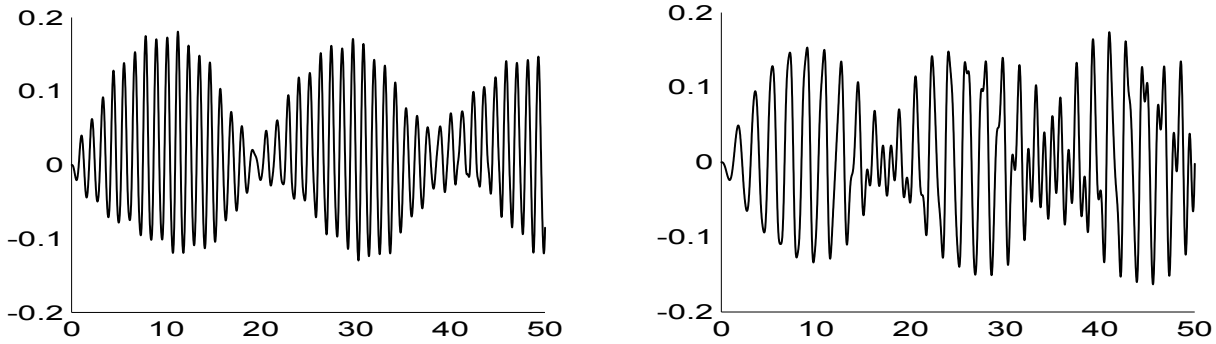


Рис. 2. Збурення вільної поверхні рідини для резонансної частоти ($0.9\omega_N$)

На рисунках показано залежність амплітуди коливань від часу в секундах для випадків $M_r = 0.2M_g$ (ліворуч) та $M_r = 5M_g$ (праворуч). По вісі x відкладений час, по вісі y – збурення.

З рисунків можна помітити, що зі збільшенням маси розглянутого резервуару і значення частоти вплив модуляції коливань посилюється.

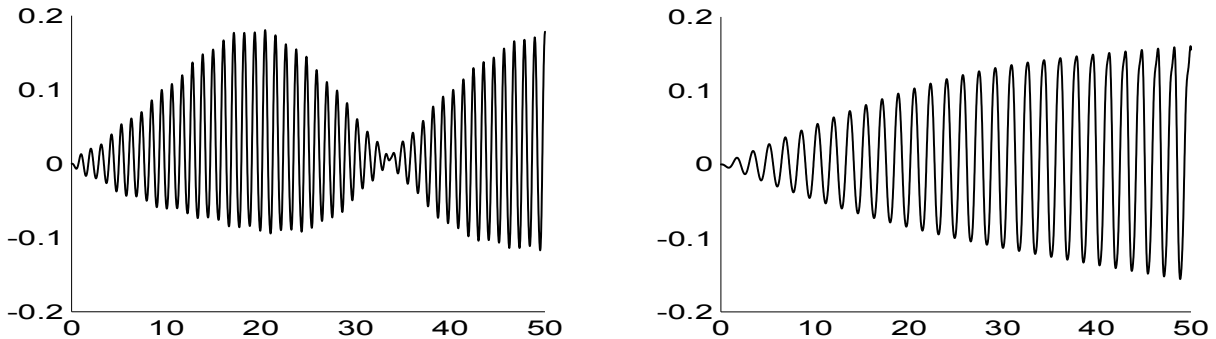


Рис. 3. Збурення вільної поверхні рідини для резонансної частоти ($0.98\omega_N$)

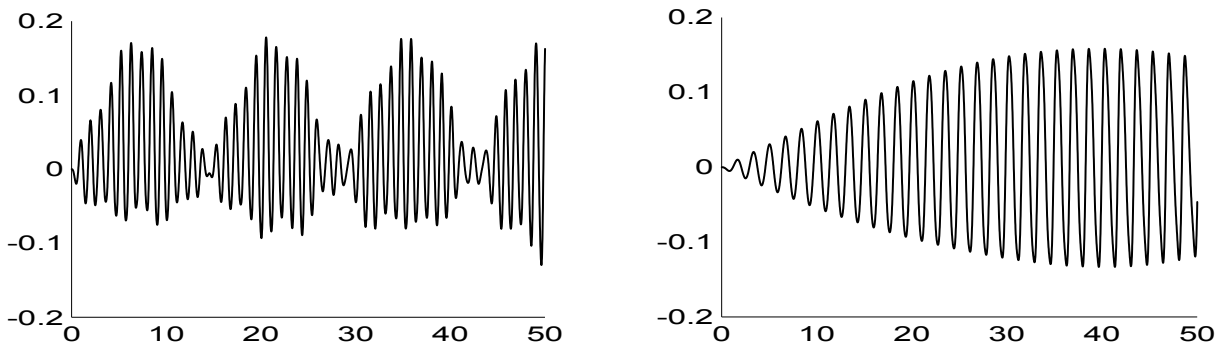


Рис.4. Збурення вільної поверхні рідини для резонансної частоти ($1.02\omega_N$)

Ефект модуляції коливань проявляється для випадку $M_r = 5M_g$ в білярезонансному та зарезонансному діапазонах зміни частот. З рисунків видно, що ефект антирезонансу більше проявляється для випадку $M_r = 0.2M_g$. Для резонансного діапазону характерними є несиметрія та дрейф середнього. Для коливань системи в нелінійному діапазоні збурень характерним також є вплив вищих гармонік,

який більш суттєво проявляється для частоти $0.5\omega_N$ та $1.5\omega_N$ у випадку, коли маса резервуару в 5 разів менша за масу рідини.

Аналіз коливань для більшого часового проміжку свідчить про те, що для коливань системи в резонансному діапазоні збурень період модуляції для сферичного резервуару, який в 5 разів важчий за рідину, більший.

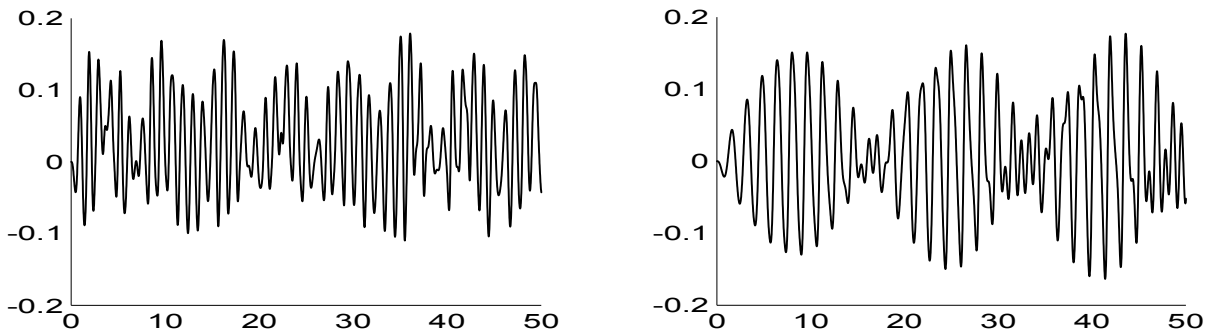


Рис. 5. Збурення вільної поверхні рідини для зарезонансної частоти ($1.1\omega_N$)

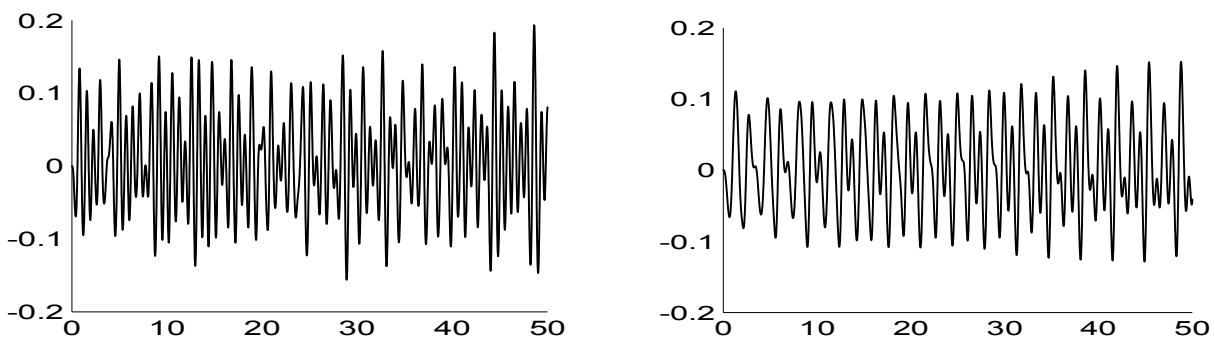


Рис. 6. Збурення вільної поверхні рідини для зарезонансної частоти ($1.5\omega_N$)

Отже, аналіз залежності розвитку динамічних процесів від співвідношення маси резервуару і маси рідини свідчить про те, що збільшення відносної маси рідини не сприяє виходу системи на впорядкований режим коливань. Помічено різницю прояву нелінійних процесів для

дорезонансного, біларезонансного та зарезонансного діапазонів зміни частот. Для сферичного резервуару було виявлено прояв таких нелінійних ефектів як модуляція, вплив вищих гармонік, антирезонанс та дрейф середнього значення, які засвідчені в експериментах.

Список використаних джерел

1. Лимарченко О.С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью / О. С.Лимарченко, В. В. Ясинский. – Киев: Национальный технический университет Украины "КПИ" – 1997. – 348 с.
2. Лимарченко О.С. Динамічна поведінка резервуара в формі тіла обертання під дією гармонічної сили в дорезонансному діапазоні частот / О. С. Лимарченко, О. Ю. Паранькіна, Ю. А. Слюсарчук // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2017. – 4, № 2. – С. 156-161.
3. Лимарченко О.С. Резонансна поведінка вільної поверхні рідини в резервуарі в формі тіла обертання / О. С. Лимарченко, О. Ю. Паранькіна, Ю. А. Слюсарчук // *Збірник праць Інституту математики НАН України*. – 2016. – 13. – 2, Р. 1–9.
4. Лимарченко О.С. Поведінка системи нециліндричного резервуар – рідина у зарезонансному діапазоні зміни частот / О. С. Лимарченко, О. Ю. Паранькіна, Ю. А. Слюсарчук // *Механіка гіроскопічних систем*. – 2018. – С. 5 – 10.

References

1. LIMARCHENKO, O.&YASINSKIY, V. (1997) *Nely`nejnaya dy`namy`ka konstrukcy`j s zhy`dkost`yu*. NTUU "KPI".
2. LIMARCHENKO, O.&PARANKINA, O.&SLYSARCHUK, Yu. (2017) *Dy`namichna povedinka rezervuara v formi tila obertannya pid diyeyu garmonichnoyi syly v dorezonansnomu diapazoni chastot*. *Mathematical Modeling and Computing*. 4(2). P. 156-161.
3. LIMARCHENKO, O. &SLYSARCHUK, Yu &PARANKINA O. (2016) *Rezonansna povedinka vil`noyi poverhni ridyny v rezervuari v formi tila obertannya*. *Zbirnyk prac' Instytutu matematyky NAN Ukrainy*. 13(2). P. 1–9.
4. LIMARCHENKO, O.&SLYSARCHUK, Yu, &PARANKINA O. (2018) *Povedinka systemy necylindrychnyj rezervuar – ridyna u zarezonansnomu diapazoni zminy chastot*. *Mehanika giroskopichnyh system*. P.5–10.

Надійшла до редколегії 08.07.2019