

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня магістра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Моделювання процесів загального розвитку суспільства

Виконав студент 2 курсу, групи ОМ-2
спеціальності

113 Прикладна математика

Пицко Андрій Ярославович 

Керівник Хусаїнов Денис Ях'євич 

Роботу розглянуто й допущено до захисту
на засіданні кафедри обчислювальної
математики «5» травня 2023 р., протокол
№7

Завідувач кафедри

проф. Сергій Ляшко 

Київ – 2023

Зміст

Вступ.....	3
Розділ 1. Теорія стійкості.....	4
1.1. Фазовий портрет на площині.....	5
1.1.1. Загальні означення.....	5
1.1.2. Побудова фазового портрету нелінійної системи на площині	8
1.2. Стійкість лінійних систем.....	9
1.2.1. Стійкість лінійних неоднорідних систем.....	9
1.2.2. Стійкість лінійних однорідних систем.....	10
1.2.3. Стійкість нульового розв'язку нелінійних систем.....	11
1.3. Основні поняття другого методу Ляпунова.....	12
1.3.1. Основні визначення та твердження методу функцій Ляпунова.....	12
1.3.2. Методи побудови функції Ляпунова.....	16
1.3.3. Оцінка характеристик динаміки систем.....	18
Розділ . Дослідження моделі динаміки світового розвитку.....	20
2.1. Побудова математичної моделі динаміки світового розвитку	23
2.2. Лінійна система без запізнення.....	23
2.3. Нелінійна система без запізнення.....	25
2.4. Нелінійна система з запізненням.....	27
Розділ 3. Чисельне дослідження моделі динаміки світового розвитку.....	30
3.1. Лінійна система без запізнення.....	30
3.2. Нелінійна система без запізнення.....	33
3.3. Нелінійна система з запізненням.....	35
Висновки.....	39
Список використаних джерел.....	41

Вступ

Глобальне моделювання є новим науковим напрямом, який використовує методи системної динаміки, теорії багаторівневих ієрархічних систем, міжрайонного міжгалузевого підходу та математичного прогнозування для аналізу та прогнозування глобальних соціально-екологічних процесів. Глобальні моделі враховують економічні, демографічні, екологічні, соціальні та політичні чинники у світовому масштабі.

У глобальному моделюванні виділяються три основні напрямки:

1. Виснаження невідновлюваних ресурсів: Глобальні моделі дозволяють прогнозувати терміни виснаження запасів різних видів не відновлюваної сировини. Це важливо для розуміння обмеженості ресурсів та розробки стратегій їх раціонального використання.
2. Харчова безпека: Глобальні моделі дозволяють оцінювати чисельність населення, яку може підтримати планета у відповідних умовах. Вони враховують взаємозв'язок між земельними ресурсами, виробництвом їжі, демографічними процесами та іншими факторами, що впливають на харчову безпеку.
3. Динаміка населення: Глобальні моделі дозволяють прогнозувати зміни в чисельності населення у світі, окремих країнах та регіонах. Вони допомагають розуміти демографічні тенденції, зміни в структурі населення та їх вплив на соціально-економічний розвиток.

Аналіз взаємозв'язків між екологічними проблемами, ростом населення та соціо-економічним розвитком є важливою складовою глобальних моделей. Вони дозволяють прогнозувати розвиток біосфери та цивілізації на Землі або в окремих регіонах та оцінювати можливі наслідки деградації довкілля.

Перші глобальні моделі, такі як модель "Світ-2", були розроблені в 1970-х роках. Вони поєднували досягнення математики, економіки, демографії та екології для аналізу різних компонентів, таких як населення, капітал, природні ресурси та забруднення. Ці моделі показали, що якщо теперішні тенденції триватимуть, то у XXI столітті можуть виникнути кризи, пов'язані з виснаженням ресурсів та негативним впливом на довкілля внаслідок зростання населення.

Глобальне моделювання є потужним інструментом для розуміння складних соціально-екологічних систем та виявлення шляхів подолання кризових ситуацій. Воно надає можливість аналізувати взаємодію різних факторів і спрогнозувати можливі наслідки рішень у глобальному масштабі.

Так, при побудові математичної моделі реального явища зазвичай необхідно робити деякі спрощення або ідеалізації. Це може включати припущення про певні умови, виключення незначних факторів або упрощення складних взаємозв'язків. Такі спрощення можуть бути необхідними з метою математичної обробки моделі і отримання результатів.

Проте, питання адекватності математичної моделі до реального явища завжди важливе. Для визначення адекватності моделі необхідно порівняти її

прогнозні результати з експериментальними даними або спостереженнями. Якщо модель добре узгоджується з емпіричними даними і може передбачати поведінку системи з задовільною точністю, то її можна вважати адекватною описувати реальне явище.

Процес перевірки адекватності моделі може включати ретельний аналіз її припущень, порівняння з експериментальними даними, валідацію та верифікацію. У разі виявлення незадовільної адекватності моделі може бути необхідно модифікувати припущення або структуру моделі, щоб поліпшити її відповідність до реального явища.

Важливо пам'ятати, що математичні моделі є лише спрощеними абстракціями реальних явищ і не можуть враховувати всі нюанси та деталі. Вони є інструментами для розуміння та прогнозування складних систем, і їхнє використання повинно враховувати обмеження та умовності моделювання.

Розділ 1. Теорія стійкості

Теорія стійкості - це наука, яка досліджує, як зміни початкових умов впливають на стійкість рішень диференціальних рівнянь та траєкторій динамічних систем. Наприклад, рівняння теплопровідності є стійким рівнянням, оскільки невеликі збурення початкових умов призводять до невеликих змін температури відповідно до принципу максимуму. Для рівнянь з частинними похідними можна вимірювати відстань між функціями за допомогою рівномірної норми або L_p -норми, а в диференційній геометрії можна виміряти відстань між просторами за допомогою відстані Громова-Хаусдорфа.

В динамічних системах, орбіту називають стійкою, якщо наступні орбіти кожної точки знаходяться в достатньо малому околі. Існують різні критерії для доведення стійкості або нестійкості орбіт. За сприятливих обставин можна спростити задачу до добре вивчених задач, що розв'язуються з використанням власних чисел матриць. Більш загальні методи використовують функції Ляпунова. На практиці можна використовувати будь-який з різних критеріїв стійкості.

1.1. Фазовий портрет на площині.

Пошук аналітичного розв'язку системи нелінійних диференціальних рівнянь є важким завданням і часто можливий лише у виняткових випадках. Тому для аналізу поведінки динаміки системи зазвичай використовують якісні методи дослідження.

Один з таких методів - це теорія стійкості руху, яка дозволяє визначити, як система реагує на невеликі збурення в околі точок рівноваги. Вона вивчає, чи система збігається до стійкої точки рівноваги з часом, або ж віддаляється від неї. Для цього використовуються методи, такі як лінеаризація навколо точки рівноваги та вивчення власних значень лінійної системи.

Класифікація точок спокою є ще одним методом дослідження динаміки системи. Вона допомагає класифікувати різні типи точок рівноваги залежно від їхньої стійкості та характеру оточуючого руху. Для цього аналізуються власні значення та власні вектори матриці Якобі системи в точках рівноваги.

Ці якісні методи досліджень дозволяють отримати важливу інформацію про поведінку системи без необхідності знаходити аналітичний розв'язок. Вони дозволяють зрозуміти, як змінюються стан системи з часом, які режими руху можливі, та виявляти наявність стійких або нестійких точок рівноваги.

1.1.1. Загальні означення

Коли ми будемо математичну модель реального явища, то зазвичай, властивості явища ідеалізуються, чи опускаються. Отже з'являється питання, чи справді добре наша математична модель описує дане явище. Нехай модель

представлена у вигляді системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = F_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 = F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \dot{y}_n = F_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.1.1.1)$$

з початковими умовами

$$y_1(t_0) = y_1^0, y_2(t_0) = y_2^0, \dots, y_n(t_0) = y_n^0.$$

Ці умови є результатами вимірів і, отже, отримані з деякими помилками. Тому необхідно визначити вплив цих помилок (збурень) на розв'язок системи. Якщо малі зміни початкових даних здатні сильно змінити розв'язок, то отримана математична модель, що представляє собою систему звичайних диференціальних рівнянь, навіть приблизно не може описувати досліджуване явище.

Перепишемо систему диференціальних рівнянь (1.1.1.1) в більш компактному вигляді

$$\dot{y} = F(y, t) \quad (1.1.1.2)$$

Розв'язок системи рівнянь має вигляд

$$y = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ – векторна функція, що складається з n -неперервно диференційованих функцій $\varphi^T(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$.

Будемо використовувати одну з норм Евклідового простору R^n

$$\|\varphi(t) - y(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i(t) - \varphi_i(t))^2}.$$

Означення 1.1.1.1. Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (1.1.1.2) називається *стійким по Ляпунову* (рівномірно за часом), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $y = y(t)$ системи (1.1.1.1) при $t > t_0$ буде виконуватись $\|\varphi(t) - y(t)\| < \varepsilon$, лише $\|\varphi(t_0) - y(t_0)\| < \delta$ (Рис. 1.1.1.1.)

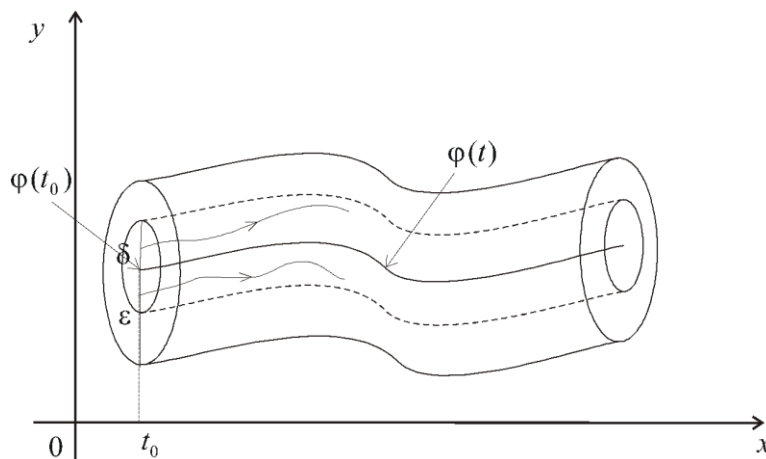


Рис.1.2.1.

Означення 1.1.1.2. Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (1.1.1.2) називається *асимптотично стійким*, якщо він стійкий по Ляпунову і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - y(t)\| = 0$$

$\Delta(t_0) = \left\{ y(t_0) : \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - y(t)\| = 0 \right\}$ є *областю асимптотичної стійкості* (Рис.1.1.1.2).

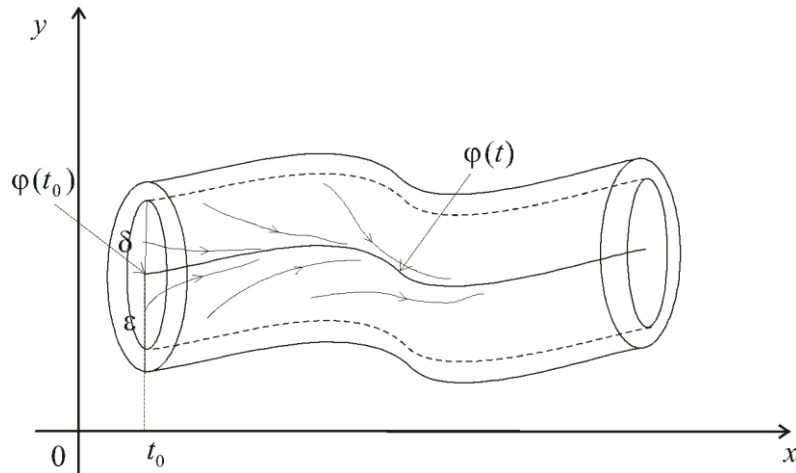


Рис.1.1.1.2.

Означення 1.1.1.3. Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (1.1.1.2) буде *нестійким*, коли для як завгодно маленького $\varepsilon > 0$ є хоча б якийсь один розв'язок $\bar{y}(t)$, що при $T > t_0$ буде справджуватися

$$\|\varphi(T) - y(T)\| > \varepsilon, \text{ хоча } \|\varphi(t_0) - y(t_0)\| < \delta, \text{ де } \delta > 0 \text{ як завгодно мала величина}$$

(Рис.1.1.1.3).

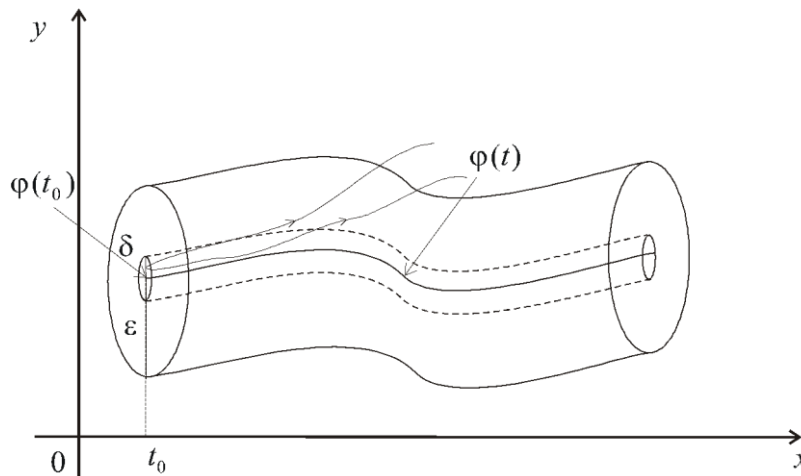


Рис.1.1.1.3.

Дослідження стійкості розв'язку $\varphi(t)$ системи (1.1.1.2) можна звести до

дослідження стійкості нульового розв'язку іншої системи.

Зробимо зміну:

$$y = \varphi(t) + x,$$

де x - невідома векторна функція.

Після зміни система диференціальних рівнянь (1.1.1.2) буде мати вигляд

$$\dot{\varphi}(t) + \dot{x} = F(\varphi(t) + x, t). \quad (1.1.1.3)$$

Отже $\varphi(t)$ є розв'язком системи (1.1.1.2),

$$\dot{\varphi}(t) \equiv F(\varphi(t), t). \quad (1.1.1.4)$$

Підставимо (1.1.1.4) в (1.1.1.3), і будемо мати систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = F(\varphi(t) + x, t) - F(\varphi(t), t).$$

Чи

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f(x, t) = F(\varphi(t) + x, t) - F(\varphi(t), t), \quad (1.1.1.5)$$

$f(0, t) = F(\varphi(t), t) - F(\varphi(t), t) \equiv 0$, тому $x(t) \equiv 0$ є розв'язком нашої системи

Тому дослідження стійкості розв'язку $\varphi(t)$ системи (1.1.1.2) приводяться до дослідження стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1.1.1.5).

Означення 1.1.1.4. Отримана система диференціальних рівнянь (1.1.1.5) називається *системою рівнянь збурювань*.

1.1.2. Побудова фазового портрету нелінійної системи на площині.

В теорії Пуанкаре – Ляпунова, кажуть, що якісний портрет динамічної системи на площині можна визначити точками і періодичними траєкторіями, і розташуванням їх між собою. Справді конструктивних чи хороших критеріїв знаходження періодичних траєкторій немає. Їх знаходження та побудова вимагають зовсім інших досліджень. В загальному методика побудови фазового портрету на площині виглядає наступним чином.

Нехай в нас є лінійна система диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

1. Розв'яжемо цю систему

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0.$$

Наші розв'язки (x_i, y_i) , $i \in I$ системи (1.1.1) є особливими точками.

2. Візьмемо точку (x_k, y_k) . Розгорнемо функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ в ряд Тейлора в околі точки (x_k, y_k) з точністю до лінійного наближення і запишемо систему у вигляді

$$\dot{x} = P(x_k, y_k) + \left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_k, y_k)} (x - x_k) + \left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_k, y_k)} (y - y_k) + R_1(x, y)$$

$$\dot{y} = Q(x_k, y_k) + \left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_k, y_k)} (x - x_k) + \left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_k, y_k)} (y - y_k) + R_2(x, y)$$

(x_k, y_k) - особлива точка, тому $P(x_k, y_k) = 0$, $Q(x_k, y_k) = 0$ і,

$$\left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_k, y_k)} = a_k, \quad \left. \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_k, y_k)} = b_k,$$

$$\left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_k, y_k)} = c_k, \quad \left. \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_k, y_k)} = d_k$$

Отримаємо таку систему

$$\dot{x} = a_k(x - x_k) + b_k(y - y_k) + R_1(x, y)$$

$$\dot{y} = c_k(x - x_k) + d_k(y - y_k) + R_2(x, y).$$

3. викинемо нелінійні члени $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$, та отримаємо систему наближення

$$\dot{x} = a_k(x - x_k) + b_k(y - y_k)$$

$$\dot{y} = c_k(x - x_k) + d_k(y - y_k).$$

Згідно теореми Ляпунова про лінійне наближення, коли корені характеристичного рівняння отриманої системи лінійного наближення не мають нульові дійсні частини, то в досить малому околі особливої точки (x_k, y_k) фазовий портрет лінеаризованої системи співпадає з фазовим портретом вихідної нелінійної системи.

4. Будемо будувати фазові портрети в околі кожної особливої точки

5. "Зшиваємо" наші окремі фазові портрети в портрет системи в загальному.

1.2. Стійкість лінійних систем

В цьому розділі ми будемо розглядати системи лінійних диференціальних рівнянь. Для цих систем умови стійкості можна сформулювати у більш

конструктивній формі. Крім того, для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами ці умови можна перевіряти для систем значно більшої розмірності.

1.2.1. Стійкість лінійних неоднорідних систем

Отже у нас є лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = A(t)y + f(t) \quad (1.2.1.1)$$

Нехай

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1.2.1.2)$$

відповідна їй однорідна система. Тут $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор розв'язків системи, $f(t)$ - неперервна векторна функція, $t_0 \leq t < \infty$.

Означення 1.2.1.1. Лінійна система (1.2.1.1) називається *стійкою по Ляпунову*, якщо всі її розв'язки $x(t)$ стійкі по Ляпунову.

Теорема 1.2.1.2. Лінійна система (1.2.1.1) є стійкою тоді і тільки тоді, коли нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ відповідної однорідної системи (1.2.1.2) є стійким.

1.2.2. Стійкість лінійних однорідних систем

Розглянемо однорідну систему зі змінною матрицею (1.2.1.2).

Теорема 1.2.2.1. Лінійна однорідна система (1.2.1.2) стійка по Ляпунову тоді і тільки тоді, коли всі її розв'язки $x = x(t)$ обмежені.

Доведення. Нехай розв'язок $x = x(t)$ системи (1.2.1.2) буде обмеженим. Подамо загальний розв'язок так

$$x_{\text{однор.}}(t) = X(t, t_0)x_0,$$

$X(t, t_0)$ - фундаментальна матриця, нормована при $t = t_0$. Оскільки всі розв'язки обмежені, то існує $M > 0$ таке, що

$$|X(t, t_0)| \leq M, \quad t_0 \leq t < +\infty.$$

Звідси

$$|x(t)| \leq |X(t, t_0)x_0| \leq M|x_0| < \varepsilon,$$

як тільки

$$|x_0| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta(\varepsilon).$$

Отже, розв'язок $x(t) \equiv 0$ є стійким по Ляпунову. Стійкі всі розв'язки системи (1.2.1.2). Звідси система (1.2.1.2) також є стійкою.

Необхідність. Припустимо існує необмежений розв'язок $z(t)$ та $z_0 = z(t_0) \neq 0$. Частинний розв'язок

$$x(t) = \frac{z(t)}{z_0} \frac{\delta}{2}.$$

$$|x(t_0)| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Через необмеженості розв'язку $z(t)$ якщо $T > t_0$, він буде як великий і

$$|x(T)| = \frac{|z(T)|}{|z_0|} \frac{\delta}{2} > \varepsilon, \quad T > t_0.$$

Таким чином, нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ є нестійким, що суперечить умові.

Теорема 1.2.2.2. Лінійна однорідна система диференціальних рівнянь (1.2.1.2) є асимптотично стійкою, якщо всі її розв'язки $x(t)$ прямують до нуля при $t \rightarrow +\infty$, тобто

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Доведення. Необхідність. Нехай однорідна система (1.2.1.2) асимптотично стійка. Тоді всі її розв'язки, включаючи нульовий розв'язок, також є асимптотично стійкими. Це означає, що для будь-якого розв'язку системи, коли час прогресує до нескінченності, значення цього розв'язку збігаються до нуля. Таким чином, нульовий розв'язок є стійким відносно асимптотичної стійкості, а всі інші розв'язки також проявляють асимптотичну стійкість. Тоді $x(t)$ буде виконуватись

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Достатність. Якщо розв'язки прямують до нуля, тоді лінійна система (1.2.1.2) асимптотично стійка. Розглянемо розв'язок $x(t)$, який задавільняє умові $x_0 = x(t_0) \neq 0$.

$$x(t) = \xi(t) \frac{|x(t_0)|}{\frac{1}{2} \Delta},$$

де $\xi(t) = \frac{x(t)}{|x(t_0)|} \frac{\Delta}{2}$. Оскільки для $\xi(t)$ виконується умова

$$|\xi(t_0)| = \frac{\Delta}{2} < \Delta,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = 0.$$

Звідси

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0,$$

оскільки від $\xi(t)$ воно відрізняється тільки сталим множником.

1.2.3. Стійкість нульового розв'язку нелінійних систем

Маємо нелінійну систему

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.2.3.1)$$

або

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = \overline{1, n},$$

де $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ та $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $i, k = \overline{1, n}$ неперервні функції при $t_0 \leq t < \infty$.
 $f(0, t) \equiv 0$, $x(t) \equiv 0$ є розв'язком системи.

1.3. Основні поняття другого методу Ляпунова

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.3.1)$$

де $f(x, t)$ та $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ неперервні функції при $t_0 \leq t < \infty$. Крім того $f(0, t) \equiv 0$, тобто система має нульовий розв'язок.

Основна ідея другого методу А.М.Ляпунова полягає в тому, що стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1.3.1) визначається з поведінки наперед визначеної функції Ляпунова.

1.3.1. Основні визначення та твердження методу функцій Ляпунова

Розглянемо $H \times R = \{t \geq t_0, \|x\| \leq h\}$ функцію $n+1$ змінних $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, $V(x, t)$.

Означення 1.3.1.1. Функція $V(x, t)$ є додатно визначеною, коли $V(x) > 0$ $x \neq 0$; $V(0) = 0$.

Означення 1.3.1.2. Функція $V(x, t)$ є додатно визначеною, коли є така додатно визначена функція $W(x)$, $V(x, t) \geq W(x)$; $V(0, t) \equiv 0$.

Означення 1.3.1.3. Функція $V(x, t)$ допускає нескінченно малу нижню

границю, за умови що є додатно визначена функція $W_1(x)$ яка $|V(x,t)| \leq W_1(x)$.

Означення 1.3.1.4. Повною похідною функції $V(x,t)$ у силу системи (1.3.1) називається функція

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + (\text{grad}V(x,t), f(x,t)) = \\ &= \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned}$$

Теорема 1.3.1.1. (Перша Ляпунова про стійкість) Нехай існує неперервно-диференційована функція $V(x,t)$, яка відповідає умовам:

1. $V(x,t)$ – додатно визначена в деякому околі $x=0$ (тобто $V(x,t) > 0$);
2. повна похідна функції $V(x,t)$ у силу системи не додатна (тобто $\frac{dv(x,t)}{dt} \leq 0$).

Тоді розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1.3.1) стійкий по Ляпунову.

Доведення. Нехай існує додатно визначена функція $V(x,t)$, існує $W(x)$, що $V(x,t) \geq W(x) > 0$ та $V(0,t) \equiv W(0) = 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ розглянемо $\|x\| = \varepsilon$. Оскільки сфера є компактною множиною, а функція $W(x)$ неперервна, тому на сфері вона досягає найменшого значення,

$$\inf_{\|x\|=\varepsilon} W(x) = W(x^*) = \alpha$$

Нехай задано $t_0 \geq 0$. Функція $V(x,t_0)$ неперервна по x , $V(0,t_0) = 0$. Отже, є окіл $\|x\| < \delta$, що

$$0 \leq V(x,t_0) < \alpha \quad \text{при} \quad \|x\| < \delta.$$

Розглянемо розв'язок $x(t)$ системи (1.3.1) $x(t_0) = x_0$, теми $\|x_0\| < \delta$.

Покажемо, що розв'язки системи (1.3.1), що починаються з цього околу не покидають ε -оکیل,

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq t_0.$$

Нехай існує $\bar{t} > t_0$, таке що $\|x(\bar{t})\| = \varepsilon$. Тоді є момент t_1 : $t_0 \leq t_1 \leq \bar{t}$, при якому $V(t_1, x(t_1)) = a$. Розглянемо поведінку $V(x,t)$ впродовж цього розв'язку.

$\frac{dV(x,t)}{dt} \leq 0$, тоді функція $V(x,t)$ впродовж траєкторії не зростає. Тому $\alpha > V(t_0, x(t_0)) \geq V(t_1, x(t_1)) \geq W(x(t_1)) \geq \alpha$.

Виходить $\alpha > \alpha$, а таке неможливо. Тому ми отримали протиріччя звідси $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всіх $t \geq t_0$.

Теорема 1.3.1.2. (Друга Ляпунова про асимптотичну стійкість). Нехай існує неперервно диференційована функція $V(x,t)$, яка відповідає умовам:

1. $V(x,t)$ – додатно визначена ($V(x,t) > 0$);
2. $V(x,t)$ – допускає нескінченно малу вищу границю ($|V(x,t)| \leq W_1(x)$);
3. Повна похідна функції $V(x,t)$ у силу системи від'ємно визначена ($\frac{dV(x,t)}{dt} < 0$).

Нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ нашої системи (1.3.1) є асимптотично стійкий.

Доведення. Оскільки умови другої теореми Ляпунова є потужнішими, аніж першої, тому нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1.3.1) є стійким по Ляпунову.

Покажемо, що існує $\Delta(t_0)$ -окіл нульового стану рівноваги, такий що для розв'язків $x(t)$, початкові умови яких задовольняють нерівності $\|x(t_0)\| < \Delta(t_0)$, буде виконуватись

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

Якщо розглянути поведінку функції Ляпунова на цих розв'язках, а саме функцію одного змінного $v(t) = V(x(t), t)$, то згідно з третьою умовою теореми, якщо похідна є від'ємно визначеною функцією, то функція буде згасати. Крім того, оскільки функція обмежена знизу, то існує скінчена границя, яка може бути досягнута..

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \inf_{t \geq t_0} \{v(t)\} = \alpha \geq 0$$

Покажемо, що α не може бути додатним. Справді, якщо $\alpha > 0$, то, оскільки $V(x,t) = 0$ лише при $x = 0$, то отримуємо $\|x(t)\| \geq \beta$ при всіх $t \geq t_0$. Це має означати, що розв'язки лишаються зовні сфери радіуса β . Дійсно, якщо це не так, то існує хоча б одна послідовність $t_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$ така, що

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x(t_n)\| = 0$$

Звідси, через існування нескінченно малої вищої границі функції (згідно другої умови теореми виконуються),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(x(t_n), t_n) = 0$$

А це є протиріччям, що $\alpha > 0$, α є границею функції $v(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ для довільної послідовності. Якщо $\alpha > 0$ виходить, що $\|x(t)\| \geq \beta \quad t \geq t_0$, а в силу стійкості нульового розв'язку виходить що $\|x(t)\| \leq h$. Звідси через третю умову теореми (від'ємна визначеність повної похідної) існує додатно визначена функція $W_1(x)$, що

$$\frac{dV(x, t)}{dt} \leq -W_1(x)$$

$$\gamma = \inf_{\beta \leq \|x\| \leq h} \{W_1(x)\}$$

Тоді, інтегруючи нерівність для повної похідної, маємо

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{V}(x(s), s) ds \leq v(t_0) - \int_{t_0}^t W_1(x(s)) ds \leq v(t_0) - \gamma(t - t_0)$$

Отже при великих значеннях $t > t_0$ функція $V(x(t), t) = v(t)$ робиться від'ємною, а це вже суперечить додатній визначеності $V(x, t)$. Маємо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t), t) = 0$$

А в силу додатної визначеності та існування нескінченно малої вищої границі функції $V(x, t)$ це можливо тоді, коли

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

Метод функцій Ляпунова допускає просту геометричну інтерпретацію:

1. Існування додатно визначеної функції Ляпунова означає, що існує набір поверхонь рівня $V(x, t) = a$ таких, що ці поверхні не розширюються та охоплюють початок координат, і цей набір є всюди щільною системою.

2. Нескінченно мала вища границя функції $V(x, t)$ означає, що поверхні рівня $V(x, t) = a$ – не стягуються при $t \rightarrow +\infty$ до початку координат.

3. Умова $\frac{dV(x, t)}{dt} < 0$, $\left(\frac{dV(x, t)}{dt} \leq 0\right)$ Це означає, що векторне поле системи диференціальних рівнянь спрямоване усередину областей, що обмежені поверхнями рівня, або дотикається до цих поверхонь.

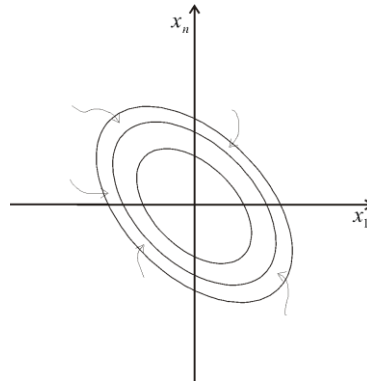


Рис.1.3.1.1. Геометрична зображення 1-ої теореми Ляпунова.

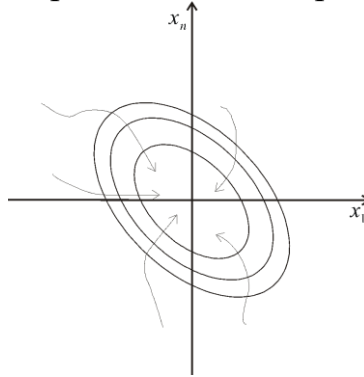


Рис.1.3.1.2. Геометрична зображення 2-ої теореми Ляпунова.

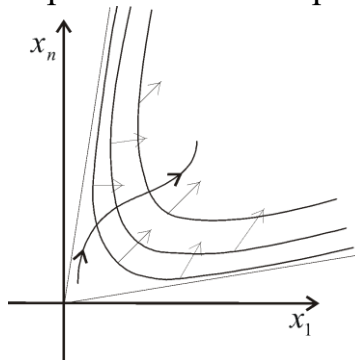


Рис.1.3.1.3. Геометрична зображення теореми Четаєва.

1.3.2. Методи побудови функції Ляпунова

У розглянутих раніше теоремах використовується поняття додатної визначеності функції Ляпунова, яка часто будується у вигляді квадратичної форми з використанням додатно визначеної матриці H . Для перевірки додатної визначеності матриці H використовується критерій Сильвестра.

Теорема 1.3.2.1. (критерій Сильвестра) Для того щоб квадратична форма $V(x) = x^T H x$ була додатно визначеною необхідно і достатньо, щоб головні діагональні мінори матриці H були додатними.

Розглянемо деякі методи побудови функції Ляпунова.

1. Нехай розглядається лінійна стаціонарна система на площині

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Функцію Ляпунова шукаємо у вигляді квадратичної форми

$$V(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

Де A, B, C – невідомі сталі.

Виберемо сталі таким чином, щоб для похідної виконувалися умови

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = -2(x^2 + y^2)$$

Отримаємо:

$$(2Ax + 2By)(ax + by) + (2Cx + 2Dy)(cx + dy) = -2(x^2 + y^2)$$

Запишемо

$$Aax^2 + Baxy + Abxy + Bby^2 + Bcx^2 + Ccxy + Bdxy + Cdy^2 = -x^2 - y^2$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} x^2 & aA + cB = 1 \\ xy & bA + (a + d)B + cC = 0 \\ y^2 & bB + dC = -1 \end{cases}$$

Розв'язавши за правилом Крамера маємо

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -1 & c & 0 \\ 0 & a+d & c \\ -1 & b & d \end{vmatrix}, \quad B = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}, \quad C = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & c & -1 \\ b & a+d & 0 \\ 0 & b & -1 \end{vmatrix}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a+b & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix}$$

За допомогою критерію Сильвестра можна записати умови, що гарантують додатну визначеність функції. Ці умови мають такий вигляд:

$$A > 0 \quad \text{та} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$$

2. Рівняння коливання маятника

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0,$$

$g(x)$ – відновлюча сила, $f(x)$ – сила тертя.

$$x = x, \quad \dot{x} = y$$

Перепишемо рівняння у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) - g(x)y \end{cases}$$

Функцію Ляпунова беремо у вигляді повної енергії

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(\tau) d\tau$$

Тоді буде виконуватись

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = f(x)y + y[-f(x) - g(x)y] = -y^2 g(x)$$

Звідси умовами стійкості стану рівноваги виглядатиме як

$$g(x) > 0, \quad xf(x) > 0$$

3. Розглянемо лінійну стаціонарну систему

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n$$

Функцію Ляпунова будемо у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T Hx$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \dot{x}^T Hx + x^T H\dot{x} = (Ax)^T Hx + x^T H(Ax) = x^T (A^T H + HA)x$$

Похідна маж дорівнювати від'ємно визначеній квадратичній формі

$$W(x) = -x^T Cx,$$

$$A^T H + HA = -C$$

Було доведено, що для існування квадратичної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних систем є необхідною і достатньою умовою матриці А бути асимптотично стійкою, тобто матриця А повинна мати власні числа з від'ємною дійсною частиною. При цьому, матриця Н знаходиться шляхом розв'язання матричного рівняння Ляпунова, при якому С може бути довільною додатно визначеною матрицею.

1.3.3. Оцінка характеристик динаміки систем

За допомогою вдало побудованої функції Ляпунова, ми можемо отримати не тільки висновки про стійкість (асимптотичну стійкість або нестійкість) розв'язків системи, але й обчислити різні характеристики її динаміки. Зокрема, ми можемо визначити величину перерегулювання, час перехідного процесу та інтегральний критерій якості.

Припустимо, що маємо лінійну стаціонарну систему, яка може бути представлена наступним чином:

$$\dot{x} = Ax, \quad t \geq t_0.$$

Дослідження будемо робити з допомогою квадратичної функції Ляпунова $V(x) = x^T Hx$, симетрична, додатно визначена матриця якої знаходиться з матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C.$$

Як було вказано раніше, у випадку асимптотично стійкої матриці A , рівняння має єдиний розв'язок, яким є додатно визначена матриця H , незалежно від вибору додатно визначеної матриці C . Крім того, для квадратичної форми виконуються двосторонні нерівності.

$$\lambda_{\min}(H) \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq \lambda_{\max}(H) \|x(t)\|^2,$$

для повної похідної вздовж розв'язків системи

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq -\lambda_{\min}(C) \|x(t)\|^2.$$

З правої частини двосторонньої нерівності отримуємо

$$-\|x(t)\|^2 \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(H)} V(x(t)).$$

Підставивши в нерівність для похідної функції Ляпунова

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} V(x(t)).$$

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)}.$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H) \|x(t)\|^2 &\leq V(x(t)) \leq \\ &\leq V(x(t_0)) e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)} \leq \lambda_{\max}(H) \|x(t_0)\|^2 e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sqrt{\varphi(H)} \|x(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)(t-t_0)}, \quad \varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \\ \gamma(H) &= \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}. \end{aligned}$$

Виходячи з цієї оцінки отримаємо наступні характеристики динаміки систем.

1. Величина перерегулювання лінійної системи обчислюється як співвідношення максимального відхилення системи під час перехідного процесу до мінімального відхилення в стійкому стані. Отримана нерівність надає спосіб обчислити цю величину.

$$\max_{t \geq t_0} \left\{ \frac{\|x(t)\|}{\|x(t_0)\|} \right\} = \sqrt{\varphi(H)}$$

2. Час перехідного процесу визначається як інтервал часу, протягом якого значення змінної системи, яка рухається з початкового стану, досягає околу, з якого воно не виходить, після виходу з заданого початкового околу.

За допомогою оцінки збіжності розв'язків системи, ми можемо встановити наступну нерівність, яка відображає час перехідного процесу.

$$\sqrt{\varphi(H)} \delta e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)(t-t_0)} \leq \varepsilon$$

Звідси

$$T(\varepsilon, \delta, H) \leq \frac{2}{\gamma(H)} \ln \left[\frac{\delta \sqrt{\varphi(H)}}{\varepsilon} \right] = 2 \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \ln \left[\frac{\delta}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \right]$$

3. Інтегральним критерієм якості є величина

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{+\infty} \|x(t)\| dt$$

За допомогою мажорантної оцінки ця характеристика

$$\begin{aligned} I[x(t)] &= \int_{t_0}^{+\infty} \|x(t)\| dt \leq \int_{t_0}^{+\infty} \sqrt{\varphi(H)} \|x(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)(t-t_0)} dt = \\ &= 2 \frac{\sqrt{\varphi(H)}}{\gamma(H)} \|x(t_0)\| \end{aligned}$$

Таким чином

$$I[x(t)] \leq 2 \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \|x(t_0)\|$$

Розділ 2. Побудова та дослідження моделі динаміки світового розвитку

Що означає "вийти за межі"? Це означає, що в якийсь момент ви зайшли надто далеко - ненавмисно вийшли за допустимі рамки. У повсякденному житті ми щодня виходимо за якісь межі. Якщо різко підвестися зі стільця, можна втратити рівновагу. Якщо занадто різко відвернути гарячий кран у душі, можна обпектися. На обледенілому шосе автомобіль може загальмувати із запізненням та проскочити лінію зупинки перед світлофором. Якщо перебрати з алкоголем на вечерці і випити більше, ніж організм може спокійно перенести, то вранці ви будете мучитися від похмілля. Будівельні компанії часом будують більше будинків, ніж люди в змозі купити, і тоді доводиться продавати житло за заниженими цінами, ризикуючи збанкрутувати. Буває, що на воду спускають надто багато рибальських суден, і тоді флот стає таким великим, що улов перевищує допустимі межі. Населення риби не може відновитися, рибні ресурси виснажуються, і тоді судам не залишиться нічого іншого, крім як стояти у гавані. Хімічні компанії на випускали стільки хлоровмісної продукції, що верхні шари атмосфери не може з цим впоратися. І тепер багато десятиліть озоновий шар залишатиметься виснаженим, доки кількість стратосферного хлору не зменшиться. Існують три основні причини виходу за межі. Вони завжди ті самі, незалежно від масштабу явища — від особистого «Вихід за межі» рівня до світового. По-перше, це зростання (причому, що часом прискорюється) і занадто швидкі зміни. По-друге, завжди існує межа чи обмеження, за якими діяльність системи перестає бути безпечною. По-третє, часто між подією і відгуком на нього буває запізнення, до того ж не завжди цей відгук інтерпретується правильно - так, щоб повернути систему у допустимі межі. Ці три причини – необхідні та достатні умови для виходу за межі.

Вихід за межі зустрічається буквально скрізь і приймає різні форми. Це може бути фізичним: наприклад, зростання споживання нафти. Воно може бути організаційним: наприклад, збільшення кількості підлеглих. Воно може бути психологічним: пристрасть до постійного збільшення особистого споживання. Воно може відбуватися у фінансовій сфері, на політичній арені, у біологічних системах — у будь-якій галузі нашого життя.

Такими ж різноманітними бувають межі. Вони можуть полягати в обмеженості простору чи часу. Стійкість фізичних, біологічних, політичних, фізіологічних та інших систем до навантажень теж не безмежна.

Зрештою, і запізнення теж можуть бути різними. Вони можуть стати наслідком неухважності, недостовірності даних, затримки інформації, повільної реакції, неповороткості або корумпованості бюрократичного апарату, хибних уявлень про відгуки системи або просто інерції. Наприклад, водій, що мчить стрімголов по обмерзлій дорозі, явно не враховує, що гальмівний шлях буде довшим, ніж зазвичай. Будівельники ґрунтують свої проекти на поточних цінах, хоча на ринку готове житло з'явиться двома чи трьома роками пізніше. Рибальський флот нарощує свої потужності на основі минулого вилову, а не даних про майбутнє відтворення рибних ресурсів. Хімічні з'єднання можуть

роками переміщатися у навколишньому середовищі від місця використання до точки, де їхня присутність викликає важкі наслідки.

Багато випадків виходу за межі не завдають великої шкоди.

Досвід виходів за межі, накопичений кожним з нас, дозволяє уникати важких наслідків. Багато меж зустрічаються вжиття досить часто, і до того моменту, коли ситуація стає дійсно небезпечною, ми вже знаємо, як уникнути проблема бо хоча б мінімізувати збитки. Наприклад, перед тим, як стати під сильний струмінь душу, ми пробуємо температуру води рукою. Буває й так, що шкода завдана, але швидко компенсується: перебравши напередодні в барі, вранці ми поспимо довше і знову будемо повним порядку.

Однак іноді існує ризик виходу за межі катастрофічних наслідків. Зростання чисельності населення земної кулі і фізичного капіталу штовхає людство до краю прірви. У ній ми постараємося подолати складності у розумінні та описі причин та наслідків зростання чисельності населення та капіталу, їх виходу межі само підтримання Землі. Ці процеси складні та багатогранні. Надійних даних часто не вистачає, вони можуть бути неточними чи неповними. Рівень розвитку науки поки що дозволив досягти згоди навіть серед учених, що вже говорити про політиків. Тим не менш, потрібен якийсь показник, який може відобразити залежність між запитами людства в глобальному масштабі і тим, що фізично може надати нам планета. Цей показник ми називатимемо навантаженням на навколишнє середовище, або екологічний слід людства.

Його запропонували у своєму дослідженні Матіс Вакернагель із колегами — їхня доповідь була представлена на Всесвітній раді екологічних ініціатив у 1997 р. Вакернагель розрахував розміри території, яка потрібна для того, щоб забезпечити людство всіма необхідними ресурсами і при цьому впоратися з усіма викидами та відходами*. Запропонований Вакернагелем показник та математичні методи потім взяв на озброєння Світовий фонд дикої природи, який тепер кожні півроку публікує дані щодо величини екологічного сліду для понад 150 країн у своєму «Звіті про живу планету». За даними звітів виходить, що з кінця 1980-х років населення планети що року використовує більше ресурсів, ніж може бути відновлено за той самий період. Інакше кажучи, екологічний слід людства перевищує здатність середовища відновлюватися.

Потенційні наслідки такого виходу за межі є надзвичайно небезпечними. Ця ситуація є унікальною; перед людством постають проблеми, які раніше у таких масштабах ніколи не зустрічалися. Щоб впоратися з ними, нам не вистачає ані вміння розраховувати на роки вперед, ані культурні традиції, ані потрібні звички, ані відповідні громадські інститути. На усунення наслідків такого виходу за межі знадобляться сотні, а то й тисячі років.

Однак наслідки не обов'язково мають бути катастрофічними. Вихід за межі може вести людство двома можливими шляхами. Перший з них — крах у тій чи іншій формі та ступені. Другий - усвідомлений поворот, корекція, виправлення курсу, обережне пом'якшення напруженості. У книзі ми розглядаємо обидва варіанти, їх вплив на людське суспільство та стан планети. Ми віримо в те, що другий варіант — корекція — можливий, і що він може

привести до бажаного майбутнього для всіх людей світу, стійкому, справедливому та забезпеченому. Але ми впевнені і в тому, що якщо не вжити серйозних заходів найближчим часом, то крах буде неминучим. І настане він ще за життя сучасного покоління.

Ця заява жахлива. Як ми прийшли до нього? За минулі 30 років ми та багато наших колег працювали над аналізом довгострокових причин та наслідків зростання чисельності населення та викликаного цим екологічного навантаження. Ми використовували чотири різних підходи — можна сказати, чотири збільшуючі прилади різної кратності, що дозволяють поглянути на світ з кількох точок зору, подібно до того, як лінзи мікроскопа і телескопа дозволяють побачити різні картини. Три з них широко відомі, їх легко описати: 1) стандартні наукові та економічні теорії глобальної системи; 2) статистичні дані щодо навколишнього середовища та світових ресурсів; 3) комп'ютерна модель, що дозволяє узагальнити всю інформацію та зробити висновки. Четвертий підхід - це наші світогляд, особисті позиції, цінності - основа нашого погляду на навколишню дійсність. Кожен по-своєму сприймає світ; від внутрішніх переконань людини залежить, що вона бачить, а що ні — це своєрідний фільтр. Ту інформацію про світ, яка співвідноситься з внутрішніми (часто підсвідомими) переконаннями чи очікуваннями, людина сприймає легко. Якщо ж інформація не відповідає очікуванням, людина схильна нехтувати нею; він їй не довіряє чи навіть заперечує її. Коли людина дивиться через фільтр, немов через кольорове скло він бачить крізь, але при цьому не помічає самого скла. Те саме відбувається зі світоглядом. Якщо людина поділяє ваш світогляд, немає жодної потреби давати пояснення - він і так на вашому боці. Якщо ж ні, то пояснити йому вашу позицію дуже складно. Завжди треба пам'ятати, що будь-яка книга, комп'ютерна модель чи офіційна заява побудовані на світогляді їхніх авторів не меншою мірою, ніж на «об'єктивних» даних чи аналізі. Ніхто не може повністю абстрагуватись від свого світогляду, і ми самі не виняток. Але ми можемо донести до читачів його ключові положення. Наш світогляд сформувався під впливом західного індустріального суспільства (ми в ньому виростили), науково-економічних досліджень, поїздок по всьому світу та уроків, які з цього вдалося винести. Найважливіша складова нашого сприйняття (що, напевно, найменше поділяють інші люди) — це погляд світ як систему.

Як будь-яка точка спостереження - наприклад, вершина пагорба - системний підхід дозволяє людині побачити те, що з інших точок зору не можна помітити, але при цьому від погляду можуть вислизнути інші речі. Системний підхід приділяє пильну увагу динамічним системам - наборам взаємопов'язаних матеріальних та нематеріальних елементів, що змінюються з часом. Він дозволяє побачити світ як сукупність моделей поведінки, таких як зростання, спад, коливання, вихід межі. Він дозволяє зосередитися не так на окремих елементах, але в зв'язках з-поміж них. Ми розглядаємо навколишнє середовище, економіку та демографію (скільки б внутрішніх елементів та факторів вони не налічували) як єдину глобальну систему із великою кількістю взаємозв'язків. Ми спостерігаємо за рівнями, потоками, зворотними зв'язками,

граничними значеннями, і всі вони впливають на поведінку системи в майбутньому і на ті заходи, які ми можемо вжити, щоб змінити її.

2.1. Побудова математичної моделі динаміки світового розвитку

Напевно, одними з перших робіт, присвяченими загальним принципам динаміки світового розвитку, були [1-3]. У зазначених роботах не було математичних моделей. Вони описували загальні принципи та залежності світового розвитку. Наводились графіки. Зазначалося, що, незважаючи на експоненційну тенденцію зростання, яка визначалася чисельними розрахунками, залежність має обмеження. Зокрема, обмеженнями були кількості орних земель, невідновлюваних ресурсів, забруднення довкілля, споживання енергії на душу населення. Тому наведені графіки мали локальний характер.

Досить аргументовані математичні моделі, що розглядають процеси світового розвитку та використовують апарат диференціальних рівнянь, були запропоновані у [4,5]. У цих моделях було прийнято такі припущення. Відбувається:

- 1) швидкий ріст населення планети;
- 2) індустріалізація та пов'язаний з нею зростання промислового виробництва;
- 3) обмеженість харчових ресурсів;
- 4) збільшення відходів виробництва;
- 5) нестача природних ресурсів;

Вводилися такі змінні математичної моделі динаміки:

- 1) населення $P(t)$;
- 2) основні фонди $K(t)$;
- 3) доля фондів в сільському господарстві $X(t)$;
- 4) рівень забруднення навколишнього середовища $Z(t)$;
- 5) кількість невідновлюваних природних ресурсів $R(t)$.

При складанні системи рівнянь динаміки з використанням змінних $P(t)$, $K(t)$, $X(t)$, $Z(t)$, $R(t)$, був використаний «принцип різниці впливів».

$$\dot{y}(t) = y^+(t) - y^-(t) \quad (2.2.1)$$

Тут $y^+(t)$ - позитивний темп швидкості зростання змінної $y(t)$, а $y^-(t)$ - негативний темп швидкості зменшення змінної $y(t)$.

2.2. Лінійна модель без запізнення.

Використовуючи наведений принцип, була записана наступна математична модель, що є системою лінійних неоднорідних, стаціонарних диференціальних рівнянь

$$\dot{P}(t) = P(t)(B - D),$$

$$\begin{aligned}
\dot{K}(t) &= K_+ - \frac{1}{T_k} K(t), \\
\dot{X}(t) &= X_+ - \frac{1}{T_x} X(t), \\
\dot{Z}(t) &= Z_+ - \frac{1}{T_z} Z(t), \\
\dot{R}(t) &= -R(t).
\end{aligned}
\tag{2.3.1.}$$

Параметрами моделі були: B - темп народжуваності, D - темп смертності, K_+ - швидкість виробництва основних фондів, X_+ - приріст частки сільськогосподарських фондів, Z_+ - швидкість генерації забруднення, T_k - характерний час природного розкладання забруднення. Коефіцієнти T_k і T_x мали сенс характерного часу вибуття фондів. Очевидно, що для невеликого проміжку часу введені параметри можна вважати постійними. І модель (2.3.2) являла собою систему лінійних, неоднорідних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами та з постійною правою частиною. Її можна було записати у наступному векторно-матричному вигляді

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b, \tag{2.3.3}$$

$$A = \begin{bmatrix} B-D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T_K^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T_Z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ K(t) \\ X(t) \\ Z(t) \\ R(t) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ K_+ \\ X_+ \\ Z_+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

з матрицею діагонального вигляду. Рішення задачі Коші системи (2.3.3), що задовольняє початковим умовам $P(0) = P_0$, $K(0) = K_0$, $X(0) = X_0$, $Z(0) = Z_0$, $R(0) = R_0$, має вигляд

$$\begin{aligned}
P(t) &= P_0 e^{(B-D)t}, \\
K(t) &= [K_0 - T_k K_+] e^{-\frac{t}{T_k}} + T_k K_+, \\
X(t) &= [X_0 - T_x X_+] e^{-\frac{t}{T_x}} + T_x X_+, \\
Z(t) &= [Z_0 - T_z Z_+] e^{-\frac{t}{T_z}} + T_z Z_+, \\
R(t) &= R_0 e^{-t}.
\end{aligned}$$

Система (2.3.3) мала стаціонарне положення рівноваги $O(0, K_+, T_k, X_+, T_x, Z_+, T_z, 0)$. У випадку виконання умови $B - D < 0$, положення рівноваги являло собою асимптотично стійкий вузол. Якщо виконувалася нерівність $B - D > 0$, то положенням рівноваги був сідло-вузол. Отже, якщо смертність перевищувала народжуваність, чисельність населення зменшувалася. Очевидно, що при таких припущеннях на співвідношення народжуваності та смертності модель мала локальний характер.

2.3. Нелінійна модель без запізнення.

Надалі лінійна неоднорідна система (2.3.3) ускладнювалася до системи нелінійних диференціальних рівнянь шляхом запровадження зворотний зв'язок. Наводилося таке припущення. Нехай сукупність міжнародних організацій формує думку про глобальні процеси. У цьому випадку при складанні моделі пропонувалося враховувати зміну міри громадської думки, яка описувалася рівнянням коливання.

$$\ddot{\chi}(t) + m^2 \chi(t) = 0, \quad \chi(0) = \chi_0, \quad \dot{\chi}(0) = \chi'_0. \quad (2.4.1)$$

Тоді рівняння (2.4.1) записувалося у вигляді неоднорідного диференціального рівняння,

$$\ddot{\chi}(t) = y^+(t) - y^-(t) + b(t), \quad (2.4.2)$$

з неоднорідністю виду

$$b(t) = g e^{\alpha \chi(t)}, \quad \alpha = Const > 0. \quad (2.4.3)$$

Тут g - амплітуда чинника задоволення чи невдоволення, що відбиває якість життя. І як узагальнення системи рівнянь (2.4.2) пропонувалася нелінійна система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= P(t)(B - D) + g_1 e^{\alpha_1 \chi(t)}, \\ \dot{K}(t) &= K_+ - T_K^{-1} K(t) + g_2 e^{\alpha_2 \chi(t)}, \\ \dot{X}(t) &= X_+ - T_X^{-1} X(t) + g_3 e^{\alpha_3 \chi(t)}, \\ \dot{Z}(t) &= Z_+ - T_Z^{-1} Z(t) + g_4 e^{\alpha_4 \chi(t)}, \\ \dot{R}(t) &= -R(t) + g_5 e^{\alpha_5 \chi(t)}, \\ \ddot{\chi}(t) + m^2 \chi(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Таким чином було отримано «розширену» і вже нелінійну систему виду

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b + c[\chi(t)], \\ \ddot{\chi}(t) + m^2 \chi(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$c[\chi(t)] = \begin{pmatrix} g_1 e^{\alpha_1 \chi(t)} \\ g_2 e^{\alpha_2 \chi(t)} \\ g_3 e^{\alpha_3 \chi(t)} \\ g_4 e^{\alpha_4 \chi(t)} \\ g_5 e^{\alpha_5 \chi(t)} \end{pmatrix}. \quad (2.4.5)$$

де постійні g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 являють собою «амплітуди факторів невдоволення» відповідних змінних, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ коефіцієнти експоненційного зростання. Записана система (2.4.5) була системою нелінійних диференціальних рівнянь. Однак, оскільки останнє рівняння системи вирішувалося самостійно, його рішення мало вигляд

$$\chi(t) = \Omega \cos(mt + \varphi), \quad (2.4.6)$$

де $\Omega = \sqrt{\chi^2(0) + (\chi'(0)/m)^2}$, $\omega = \arctg(-\chi'(0)/m\chi(0))$ постійні, що визначають амплітуду та зрушення фази коливань, то систему (2.4.5) можна було переписати як систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

$$\mathbb{X}(t) = Ax(t) + b + c(t), \quad c(t) = \begin{pmatrix} g_1 \exp\{\alpha_1 \Omega \cos(mt + \varphi)\} \\ g_2 \exp\{\alpha_2 \Omega \cos(mt + \varphi)\} \\ g_3 \exp\{\alpha_3 \Omega \cos(mt + \varphi)\} \\ g_4 \exp\{\alpha_4 \Omega \cos(mt + \varphi)\} \\ g_5 \exp\{\alpha_5 \Omega \cos(mt + \varphi)\} \end{pmatrix}. \quad (2.4.7)$$

Як випливає з формули Коші, система (2.4.7) має рішення, подане в інтегральному вигляді

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 e^{(B-D)t} + g_1 \int_0^t e^{(B-D)(t-s) + \alpha_1 \Omega \cos(ms + \varphi)} ds, \\ K(t) &= \left[K_0 - \frac{K_+}{T_k} \right] e^{-\frac{1}{T_k} t} + \frac{K_+}{T_k} + g_2 \int_0^t e^{-\frac{1}{T_k}(t-s) + \alpha_2 \Omega \cos(ms + \varphi)} ds, \\ X(t) &= \left[X_0 - \frac{X_+}{T_x} \right] e^{-\frac{1}{T_x} t} + \frac{X_+}{T_x} + g_3 \int_0^t e^{-\frac{1}{T_x}(t-s) + \alpha_3 \Omega \cos(ms + \varphi)} ds, \\ Z(t) &= \left[Z_0 - \frac{Z_+}{T_z} \right] e^{-\frac{1}{T_z} t} + \frac{Z_+}{T_z} + g_4 \int_0^t e^{-\frac{1}{T_z}(t-s) + \alpha_4 \Omega \cos(ms + \varphi)} ds, \\ R(t) &= R_0 e^{-t} + g_5 \int_0^t e^{-(t-s) + \alpha_5 \Omega \cos(ms + \varphi)} ds. \end{aligned}$$

Положення рівноваги системи (2.4.7) визначається рівняннями

$$\begin{aligned} P(t)(B-D) + g_1 e^{\alpha_1 \chi(t)} &= 0, \\ K_+ - T_K^{-1} K(t) + g_2 e^{\alpha_2 \chi(t)} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_+ - T_X^{-1} X(t) + g_3 e^{\alpha_3 \chi(t)} &= 0, \\
Z_+ - T_Z^{-1} Z(t) + g_4 e^{\alpha_4 \chi(t)} &= 0, \\
-R(t) + g_5 e^{\alpha_5 \chi(t)} &= 0, \\
\mathbb{X}(t) + m^2 \chi(t) &= 0
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Оскільки для останнього рівняння, що становить рівняння вільного коливання, положенням рівноваги є $\chi_0 = 0$, то рішенням системи (2.4.8) буде точка

$$P_0 = \frac{g_1}{D-B}, \quad K_0 = \frac{K_+ + g_2}{T_K^{-1}}, \quad X_0 = \frac{X_+ + g_3}{T_X^{-1}}, \quad Z_0 = \frac{Z_+ + g_4}{T_Z^{-1}}, \quad R_0 = g_5, \quad \chi_0 = 0. \tag{2.4.9}$$

Це положення рівноваги є «зрушене» положення рівноваги системи (2.2.2)

Розглянемо проблему стійкості положення рівноваги (2.2.12) системи (2.2.10). Зробивши лінеаризацію системи (2.2.7) в околиці вищезгаданої точки (2.2.12), отримаємо

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbb{P}(t) &= (B - D) \Delta P(t) + g_1 \alpha_1 \Delta \chi(t), \\
\Delta \mathbb{K}(t) &= -T_K^{-1} \Delta K(t) + g_2 \alpha_2 \Delta \chi(t), \\
\Delta \mathbb{X}(t) &= -T_X^{-1} \Delta X(t) + g_3 \alpha_3 \Delta \chi(t), \\
\Delta \mathbb{Z}(t) &= -T_Z^{-1} \Delta Z(t) + g_4 \alpha_4 \Delta \chi(t), \\
\Delta \mathbb{R}(t) &= -R(t) + g_5 \alpha_5 \Delta \chi(t), \\
\Delta \mathbb{X}(t) + m^2 \Delta \chi(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\Delta P(t) &= P(t) - P_0, \quad \Delta K(t) = K(t) - K_0, \quad \Delta X(t) = X(t) - X_0, \\
\Delta Z(t) &= Z(t) - Z_0, \quad \Delta R(t) = R(t) - R_0, \quad \Delta \chi(t) = \chi(t).
\end{aligned}$$

Введемо наступні змінні $\Delta \chi(t) = \chi_1(t)$, $\Delta \chi'(t) = \chi_2(t)$. Введемо розширену матрицю системи лінійних наближень

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & g\alpha & \theta \\ \theta^T & 0 & m \\ \theta^T & -m & 0 \end{bmatrix}, \quad g\alpha = \begin{pmatrix} g_1 \alpha_1 \\ g_2 \alpha_2 \\ g_3 \alpha_3 \\ g_4 \alpha_4 \\ g_5 \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{нульовий вектор стовпець.}$$

Тоді характеристичне рівняння системи «рівнянь збурень» (2.4.11) має вигляд

$$\det\{A_1 - \lambda I_{6,7}\} = \det \begin{bmatrix} A - \lambda I & g\alpha & \theta \\ \theta^T & -\lambda & m \\ \theta^T & -m & -\lambda \end{bmatrix},$$

де A - матриця, визначена в (2.3.3), I - одинична матриця, $\theta = (0,0,0,0,0)$ нульовий вектор. Матриця A_1 має ті самі власні числа, що й вихідна система (2.3.2) плюс коріння $\lambda_{6,7} = \pm im$ рівняння коливання. Таким чином стійкість «зсунутого» положення рівноваги зберігається при $B - D < 0$.

2.4. Нелінійна модель з запізненням.

Слід зазначити, що, на відміну механічних систем, динаміка суспільних явищ неспроможна змінюватися «миттєво». Закони, ухвалені нині, «починають працювати» через деякий проміжок часу. У математичних моделях, що описуються системами диференціальних рівнянь, це відбивається запровадженням чинника запізнення. І найбільш адекватною математичною моделлю динаміки процесів є системи диференціально-різностних рівнянь із запізненням.

$$\begin{aligned} \overset{\boxplus}{P}(t) &= P(t)(B - D) + g_1 e^{\alpha\chi(t-\tau_1)}, \\ \overset{\boxplus}{K}(t) &= K_+ - T_K^{-1} K(t) + g_2 e^{\alpha\chi(t-\tau_2)}, \\ \overset{\boxplus}{X}(t) &= X_+ - T_X^{-1} X(t) + g_3 e^{\alpha\chi(t-\tau_3)}, \\ \overset{\boxplus}{Z}(t) &= Z_+ - T_Z^{-1} Z(t) + g_4 e^{\alpha\chi(t-\tau_4)}, \\ \overset{\boxplus}{R}(t) &= -R(t) + g_5 e^{\alpha\chi(t-\tau_5)}, \\ \overset{\boxplus}{\chi}(t) + m^2 \chi(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Система із запізненням (2.5.1) має самі положення рівноваги, як і система без запізнення (2.5.1) і вони визначаються рівняннями (2.4.4). Положенням рівноваги рівняння коливання (2.4.1) є нульове. Підставивши це значення в систему (2.4.9) отримаємо

$$P_0 = \frac{g_1}{B - D}, \quad K_0 = \frac{K_+ + g_2}{T_K^{-1}}, \quad X_0 = \frac{X_+ + g_3}{T_X^{-1}}, \quad Z_0 = \frac{Z_+ + g_4}{T_Z^{-1}}, \quad R_0 = g_5. \quad (2.5.2)$$

Якщо зробити заміну

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 + \Delta P(t), \quad K(t) = K_0 + \Delta K(t), \quad X(t) = X_0 + \Delta X(t), \\ Z(t) &= Z_0 + \Delta Z(t), \quad R(t) = R_0 + \Delta R(t), \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

то система із запізненням, лінеаризована на околиці цієї особливої точки, має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta \overset{\boxplus}{P}(t) &= (B - D)\Delta P(t) + g_1 \alpha \chi(t - \tau_1), \\ \Delta \overset{\boxplus}{K}(t) &= -T_K^{-1} \Delta K(t) + g_2 \alpha \chi(t - \tau_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{X}(t) &= -T_X^{-1} \Delta X(t) + g_3 \alpha \chi(t - \tau_3), \\
\Delta \bar{Z}(t) &= -T_Z^{-1} \Delta Z(t) + g_4 \alpha \chi(t - \tau_4), \\
\Delta \bar{R}(t) &= -R(t) + g_5 \alpha \chi(t - \tau_5), \\
\bar{X}(t) + m^2 \chi(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Оскільки рішення останнього з рівнянь (2.5.4) має вигляд (2.2.9), систему (2.5.4) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{P}(t) &= (B - D) \Delta P(t) + g_1 \alpha \Omega \cos(m(t - \tau_1) + \varphi), \\
\Delta \bar{K}(t) &= -T_K^{-1} \Delta K(t) + g_2 \alpha \Omega \cos(m(t - \tau_2) + \varphi), \\
\Delta \bar{X}(t) &= -T_X^{-1} \Delta X(t) + g_3 \alpha \Omega \cos(m(t - \tau_3) + \varphi), \\
\Delta \bar{Z}(t) &= -T_Z^{-1} \Delta Z(t) + g_4 \alpha \Omega \cos(m(t - \tau_4) + \varphi), \\
\Delta \bar{R}(t) &= -\Delta R(t) + g_5 \alpha A \cos(m(t - \tau_5) + \varphi).
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Система (2.5.5) являє собою систему лінійних неоднорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами без запізнення. Загальне рішення її є сумою загального рішення однорідної системи та рішення неоднорідної системи. І на стійкість нульового рішення системи впливають лише лінійні частини перших рівнянь.

Розділ 3. Чисельне дослідження моделі динаміки світового розвитку.

Моделювання є важливим етапом проектування, а соціальне моделювання є одним з ключових його аспектів. Воно передбачає прогнозування можливих тенденцій та перспектив розвитку соціальних систем, об'єктів, явищ і процесів шляхом побудови моделей. Сфера застосування соціального моделювання охоплює всі соціальні системи і явища, що відбуваються в суспільстві.

Головною метою соціального моделювання є визначення варіантів розвитку та вибір оптимального шляху, враховуючи наявні ресурси, час і соціальні сили, які можуть забезпечити реалізацію цих варіантів. Це дозволяє прогнозувати можливі наслідки різних рішень і зробити обґрунтований вибір найбільш ефективного та прийняттого варіанту розвитку соціальної системи.

Узагальнюючи, соціальне моделювання використовується для аналізу і передбачення розвитку соціальних систем і явищ, а також для знаходження оптимальних рішень на основі наявних ресурсів та соціальних сил.

Розглянемо дану модель на прикладі столиці України, міста Київ. Розрахунки та побудови графіків виконаємо за тими ж алгоритмами у системі Python.

3.1. Лінійна система без запізнення.

Отже будемо починати з лінійної системи без запізнення

$$\begin{aligned}P(t) &= P_0 e^{(B-D)t}, \\K(t) &= [K_0 - T_k K_+] e^{-\frac{1}{T_k} t} + T_k K_+, \\X(t) &= [X_0 - T_x X_+] e^{-\frac{1}{T_x} t} + T_x X_+, \\Z(t) &= [Z_0 - T_z Z_+] e^{-\frac{1}{T_z} t} + T_z Z_+, \\R(t) &= R_0 e^{-t}.\end{aligned}$$

Надано математичну модель, що описує динаміку зміни рівня населення, вартості основних фондів, долі фондів у сільському господарстві та рівня забруднення оточуваного середовища з часом. Модель є системою лінійних неоднорідних стаціонарних диференціальних рівнянь. Будемо проводити моделювання за допомогою програми написаної на Python. Задаємо початкові значення для населення $P(t)$:

- Початкова кількість населення (P_0) – 2 952 000.
- Рівень народжуваності (B) – 12.1%.
- Рівень народжуваності (D) – 10.4%.

Задаємо початкові значення для невідновних ресурсів $R(t)$:

- Початкова кількість невідновних ресурсів (R_0) – 23.

Задаємо початкові значення для основних фондів $K(t)$:

- Початкова вартість основних фондів (K_0) – 238 000 000 000.
- Додаткова вартість основних фондів (K_+) – 1 213 000 000.
- Час повернення додаткової вартості основних фондів (T_k) – 10.

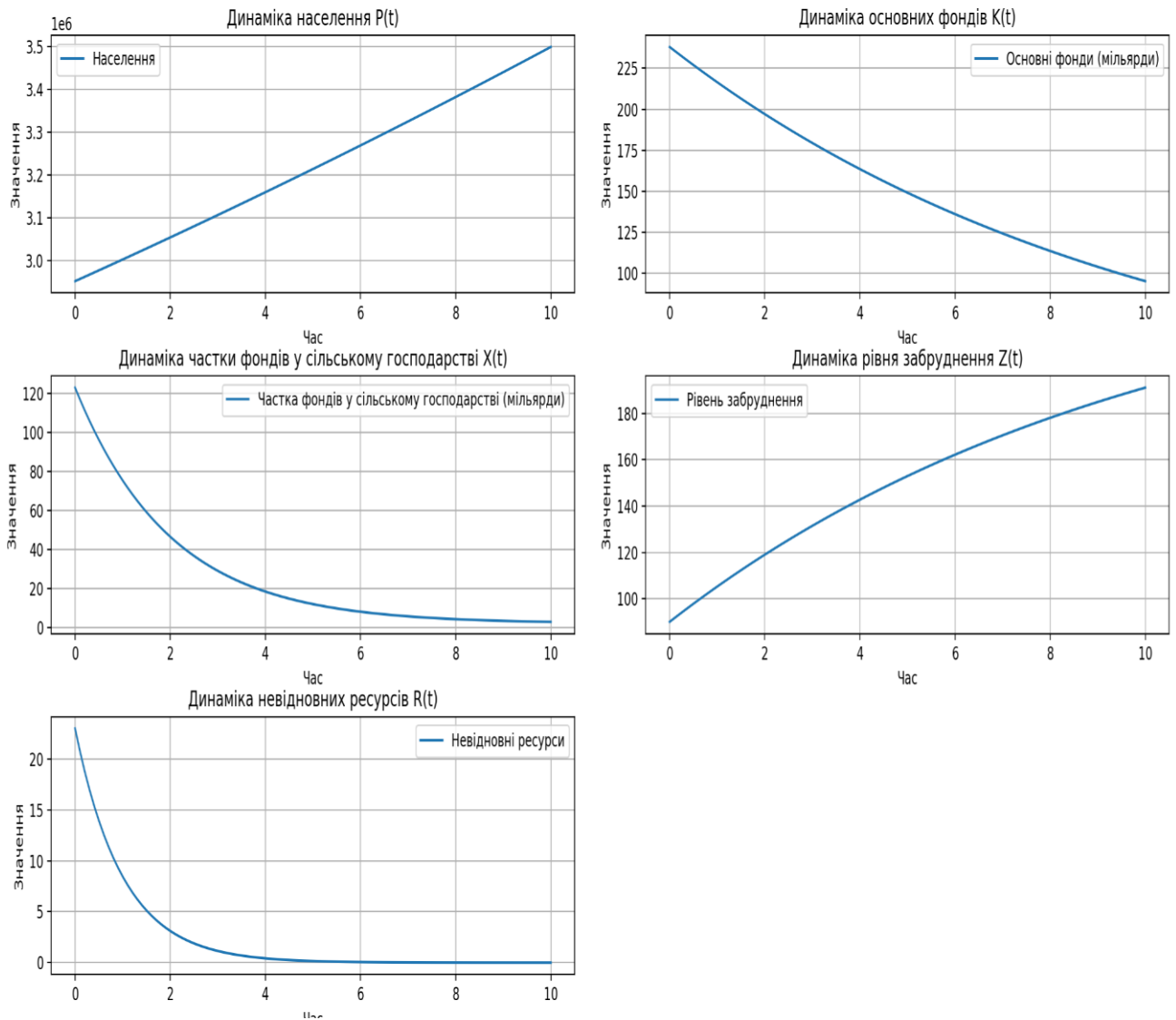
Задаємо початкові значення для фондів у сільському господарстві $X(t)$:

- Початкова частка фондів у сільському господарстві (X_0) – 123 000 000 000.
- Додаткова частка фондів у сільському господарстві (X_+) – 980 000 000.
- Час повернення додаткової частки фондів у сільському господарстві (T_x) – 2.

Задаємо початкові значення для рівня забруднення $Z(t)$:

- Початковий рівень забруднення (Z_0) – 90.
- Додатковий рівень забруднення (Z_+) – 25.
- Час повернення додаткової додаткового рівня забруднення (T_z) – 10.

Після запуску програми ми отримуємо такі результати:



На основі побудованих графіків ми можемо зробити наступні висновки:
Населення:

- Населення спочатку починається зі значення 2 952 000 та зростає з часом. Зростання населення має експоненціальний характер, як показано на графіку.
Рівень народжуваності вищий за рівень смертності, що призводить до зростання населення.
- Вартість основних фондів спочатку становить 238 мільярдів і поступово зменшується з часом. Зменшення вартості відбувається за експоненціальним законом згасання. Темп зменшення визначається часом повернення та додатковою вартістю основних фондів
- Частка фондів, спрямованих на сільське господарство, спочатку становить 123 мільярди і поступово зменшується з часом. Зменшення відбувається за експоненціальним законом згасання.

Темп зменшення визначається часом повернення та додатковою часткою фондів у сільському господарстві

- Рівень забруднення спочатку становить 90 і поступово збільшується з часом. Збільшення рівня забруднення має експоненційний характер.

Темп збільшення визначається часом повернення та додатковим рівнем забруднення.

- Значення невідновних ресурсів спочатку становить 23 і зменшується з часом. Зменшення відбувається за експоненційним законом згасання. Темп зменшення визначається часом повернення.

3.2. Нелінійна система без запізнення.

Тепер будемо розглядати нелінійну систему без запізнення

$$\begin{aligned}\Delta P(t) &= (B - D)\Delta P(t) + g_1\alpha_1\Delta\chi(t), \\ \Delta K(t) &= -T_K^{-1}\Delta K(t) + g_2\alpha_2\Delta\chi(t), \\ \Delta X(t) &= -T_X^{-1}\Delta X(t) + g_3\alpha_3\Delta\chi(t), \\ \Delta Z(t) &= -T_Z^{-1}\Delta Z(t) + g_4\alpha_4\Delta\chi(t), \\ \Delta R(t) &= -R(t) + g_5\alpha_5\Delta\chi(t), \\ \Delta\chi(t) + m^2\Delta\chi(t) &= 0.\end{aligned}$$

Система рівнянь, що описує динаміку населення, основних фондів, долі фондів у сільському господарстві та рівня забруднення навколишнього середовища з часом, а саме нелінійна система без запізнювання.

Задаємо початкові значення для населення $P(t)$:

- Початкова кількість населення (P_0) – 2 952 000.

Задаємо початкові значення для невідновних ресурсів $R(t)$:

- Початкова кількість невідновних ресурсів (R_0) – 23.

Задаємо початкові значення для основних фондів $K(t)$:

- Початкова вартість основних фондів (K_0) – 238 000 000 000.
- Час повернення додаткової вартості основних фондів (T_k) – 10.

Задаємо початкові значення для фондів у сільському господарстві $X(t)$:

- Початкова частка фондів у сільському господарстві (X_0) – 123 000 000 000.
- Час повернення додаткової частки фондів у сільському господарстві (T_x) – 2.

Задаємо початкові значення для рівня забруднення $Z(t)$:

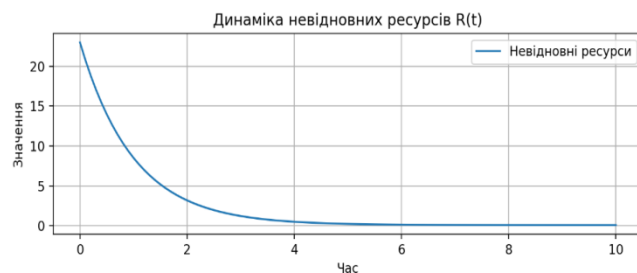
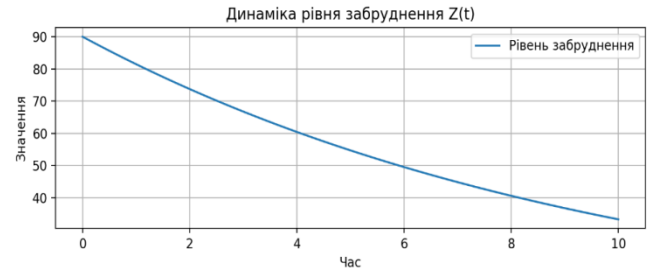
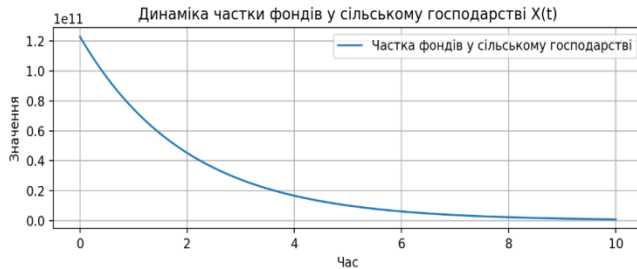
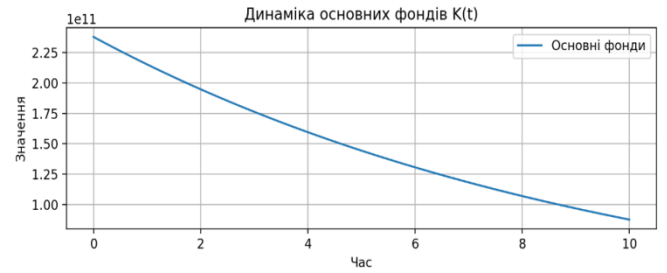
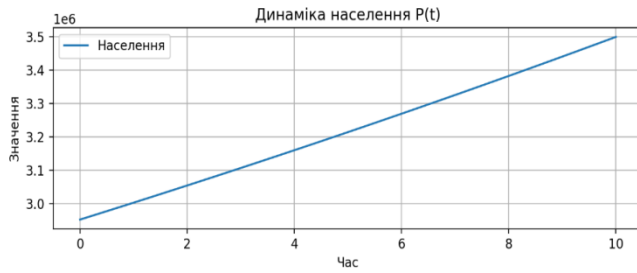
- Початковий рівень забруднення (Z_0) – 90.
- Час повернення додаткової додаткового рівня забруднення (T_Z) – 10.

Тепер задамо решту значень

- m - коефіцієнт витрат ресурсів на зменшення забруднення (наприклад, 0.1)
- g_1 - коефіцієнт впливу долі фондів на нарощування ресурсів (наприклад, 0.2)
- g_2 - коефіцієнт впливу долі фондів на відновлення основних фондів (наприклад, 0.3)
- g_3 - коефіцієнт впливу долі фондів на відновлення долі фондів (наприклад, 0.4)

- g_4 - коефіцієнт впливу долі фондів на рівень забруднення (наприклад, 0.2)
- g_5 - коефіцієнт впливу долі фондів на зменшення населення (наприклад, 0.6)
- α_1 - коефіцієнт експоненціального зростання долі фондів на нарощування населення (наприклад, 0.7)
- α_2 - коефіцієнт експоненціального зростання долі фондів на відновлення основних фондів(наприклад, 0.8)
- α_3 - коефіцієнт експоненціального зростання долі фондів на відновлення долі фондів(наприклад, 0.9)
- α_4 - коефіцієнт експоненціального зростання впливу долі фондів на рівень забруднення(наприклад, 1.0)
- α_5 - коефіцієнт експоненціального долі фондів на зменшення населення(наприклад, 1.1)

Після запуску програми ми отримуємо такі результати:



Населення спочатку зростає, але пізніше починає стабілізуватися на певному рівні. Це може вказувати на насичення ресурсів або вплив інших факторів, що обмежують зростання населення.

Основні фонди починають зменшуватися протягом часу. Це може бути результатом недостатнього інвестування у розвиток і підтримку інфраструктури.

Частка фондів у сільському господарстві спочатку зростає, але потім стабілізується на певному рівні. Це може вказувати на досягнення балансу між сільськогосподарською діяльністю і іншими секторами економіки.

З високим значенням константи g_4 , графік рівня забруднення росте дуже швидко з часом. Це вказує на значний вплив забруднення на довкілля і може свідчити про нестабільність екологічної ситуації.

Невідновні ресурси поступово зменшуються протягом часу. Це може свідчити про неефективне використання ресурсів або вичерпання обмежених запасів.

3.3. Нелінійна система з запізненням.

$$\begin{aligned} \Delta \overset{\square}{P}(t) &= (B - D)\Delta P(t) + g_1 \alpha \Omega \cos(m(t - \tau_1) + \varphi), \\ \Delta \overset{\square}{K}(t) &= -T_K^{-1} \Delta K(t) + g_2 \alpha \Omega \cos(m(t - \tau_2) + \varphi), \\ \Delta \overset{\square}{X}(t) &= -T_X^{-1} \Delta X(t) + g_3 \alpha \Omega \cos(m(t - \tau_3) + \varphi), \\ \Delta \overset{\square}{Z}(t) &= -T_Z^{-1} \Delta Z(t) + g_4 \alpha \Omega \cos(m(t - \tau_4) + \varphi), \\ \Delta \overset{\square}{R}(t) &= -\Delta R(t) + g_5 \alpha A \cos(m(t - \tau_5) + \varphi) \end{aligned}$$

Тепер розглядаємо нелінійну систему рівнянь з запізнюванням, що описує динаміку суспільних явищ.

Задаємо початкові значення для населення $P(t)$:

- Початкова кількість населення (P_0) – 2 952 000.

Задаємо початкові значення для невідновних ресурсів $R(t)$:

- Початкова кількість невідновних ресурсів (R_0) – 23.

Задаємо початкові значення для основних фондів $K(t)$:

- Початкова вартість основних фондів (K_0) – 238 000 000 000.
- Час повернення додаткової вартості основних фондів (T_k) – 10.

Задаємо початкові значення для фондів у сільському господарстві $X(t)$:

- Початкова частка фондів у сільському господарстві (X_0) – 123 000 000 000.
- Час повернення додаткової частки фондів у сільському господарстві (T_x) – 2.

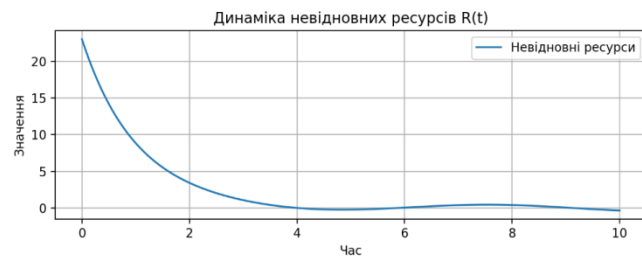
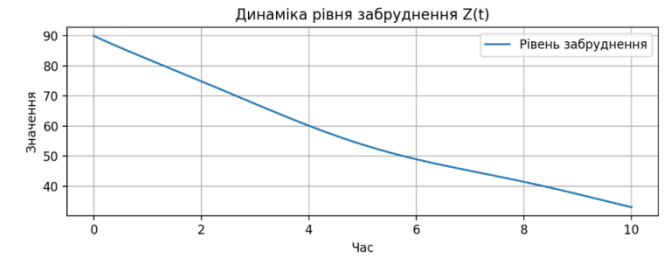
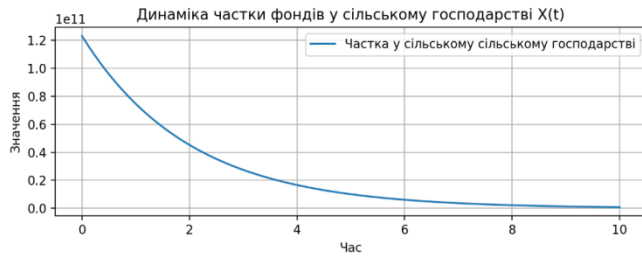
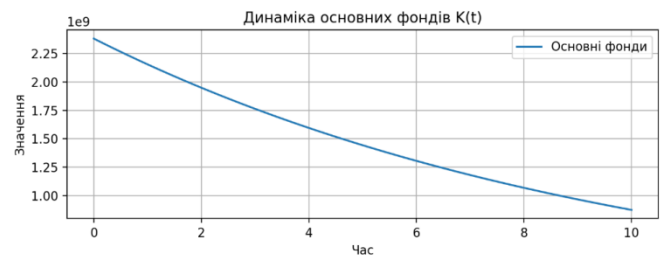
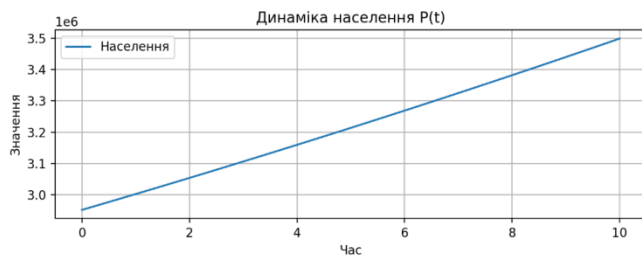
Задаємо початкові значення для рівня забруднення $Z(t)$:

- Початковий рівень забруднення (Z_0) – 90.
- Час повернення додаткової додаткового рівня забруднення (T_z) – 10.

Тепер задамо решту значень

- m - коефіцієнт витрат ресурсів на зменшення забруднення (наприклад, 1)
- g_1 - коефіцієнт впливу долі фондів на нарощування ресурсів (наприклад, 0.1)
- g_2 - коефіцієнт впливу долі фондів на відновлення основних фондів (наприклад, 0.2)
- g_3 - коефіцієнт впливу долі фондів на відновлення долі фондів (наприклад, 0.3)
- g_4 - коефіцієнт впливу долі фондів на рівень забруднення (наприклад, 0.3)
- g_5 - коефіцієнт впливу долі фондів на зменшення населення (наприклад, 0.2)
- α - коефіцієнт експоненціального зростання (наприклад, 1)
- $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ - коефіцієнти затримки (наприклад, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.5)
- φ - початковий кут фази коливань

Після запуску програми ми отримуємо такі результати:



У останній системі з запізненням, вплив запізнення може бути спостереженим у графіках динаміки змінних.

Запізнення вводиться в систему через параметри, які представляють затримку часу для кожної змінної у відповідних косинусних функціях. Запізнення може створювати зсув фази, а також зміну амплітуди коливань. Зміна значень цих параметрів може призвести до зміни форми та характеру коливань на графіках. Збільшення значення цих параметрів може призводити до більшого зсуву фази і зменшення частоти коливань. Зменшення значень цих параметрів може мати протилежний ефект, збільшуючи частоту коливань і зменшуючи зсув фази.

У вивченні соціально-економічних явищ і процесів використовується якісна теорія аналізу динамічних систем, що є важливим аспектом їх розуміння. Динамічна система є математичним об'єктом, що відповідає реальній економічній системі, і її еволюція в часі однозначно визначається початковим станом. Цю систему можна описати за допомогою системи диференціальних рівнянь. Однак, аналітичне розв'язання таких рівнянь рідко можливе, і замість цього використовуються комп'ютерні методи для отримання наближених розв'язків на обмеженому часовому відрізку.

У такому контексті важливу роль відіграють методи якісного дослідження диференціальних рівнянь. Вони дозволяють аналізувати фазовий портрет системи, який є сукупністю всіх траєкторій системи, зображених у фазовому просторі. Важливі елементи фазового портрету включають точки

рівноваги, які відповідають стаціонарним станам системи, а також замкнені траєкторії, що представляють періодичні коливання.

З допомогою якісного аналізу можна визначити, які режими поведінки можуть існувати в системі. Зрозуміти, чи будуть ці режими стійкими чи ні, дозволяє спостереження за поведінкою сусідніх траєкторій. Іншими словами, стійка рівновага або цикл притягує всі близькі траєкторії, тоді як нестійка рівновага відштовхує деякі з них. Фазовий портрет дає можливість уявити всю різноманітність рухів системи при різних початкових умовах.

Якісний аналіз диференціальних рівнянь не завжди потребує повного розв'язання системи рівнянь, особливо в контексті соціально-економічних систем. Часто достатньо визначити область стійкості, стани рівноваги та їх економічну інтерпретацію. Фазовий графік диференціального рівняння, аналізуючи його без прямого розв'язання, може дати глибше розуміння поведінки розв'язків. Наприклад, можна визначити, як розв'язок змінюється з плином часу (зростає або спадає) або до якого значення він збігається.

Якісний аналіз динамічних систем є складним завданням в соціально-економічному контексті і вимагає глибоких знань, досвіду та інтуїції від аналітика. Він спрямований на визначення основних факторів, параметрів, суб'єктів та об'єктів економічної системи і надає підтримку для управлінського прийняття рішень.

Розвиток населення має вплив на економіку та стан екології, що створює тиск на ресурси. Для досягнення екологічної рівноваги, розвиток економіки потребує узгодженості. Застосування стратегій сталого розвитку та зеленої економіки може сприяти досягненню цієї мети. Контроль рівня забруднення та ефективне використання ресурсів є важливими аспектами охорони довкілля. Рекомендується провести додаткові дослідження, щоб краще зрозуміти взаємозв'язок між населенням, економікою та екологією, а також виявити можливі ризики. Також потрібно розвивати стратегії сталого розвитку, які збалансовують потреби населення, економічний розвиток і збереження екологічної рівноваги. Важливими кроками будуть впровадження ефективних заходів для зменшення забруднення та покращення якості довкілля.

Отже, вже більше 40 років моделювання пов'язане з вирішенням низки глобальних проблем людства (у тому числі і власне екологічних). За допомогою розроблених моделей було отримано ряд важливих з точки зору теорії і практики результатів і висновків, що свідчать про ефективність таких досліджень, зокрема:

- 1) процес моделювання підкреслив необхідність комплексного підходу до вивчення глобальної проблематики з позицій різних процесів і явищ, а також різних рівнів дослідження (національного та транснаціонального);
- 2) глобальні підходи показують необхідність зміни пріоритетів в системі людських цінностей, відмова від сформованих стереотипів споживчого товариства;
- 3) об'єктивний аналіз процесів світового розвитку ставить питання про доповнення антропоцентричного підходу до глобальної проблематики підходом, при якому в центрі моделювання знаходяться чисто природні процеси (гео- і екоцентричний підходи); моделі глобального клімату (включаючи модель «ядерної зими» Н. М. Моїсеєва), система моделей «Гея» дають уявлення про досвід такого роду;
- 4) значну роль в глобальному моделюванні відіграють сценарії розвитку таких великих вогнищ антропогенного впливу, як Європа; без аналізу стану і прогнозу екологічної ситуації тут ні біосфера, ні світове господарство не можуть бути стабільні.

Незважаючи на велике значення прогнозних моделей, всі вони містять ряд недоліків. По-перше, в них в явному вигляді не сформульовані цілі суспільного розвитку, раціональні управляючі дії знаходяться в ході програвання різних варіантів сценарію. По-друге, жодна модель не дає чіткої оцінки вихідного стану природного середовища (на момент початку відліку). При цьому оцінки вихідного стану системи в різноцільових моделях можуть бути досить суперечливі. По-третє, всі моделі досить тенденційні, вони практично не враховують «поворотних точок» (точок біфуркації), які можуть виникати в стані природного середовища. По-четверте, в моделях відчувається дефіцит інформації про стан природних систем. По-п'яте, відкритим залишається питання про допустимі господарських навантаженнях на

екосистеми в межах навантаження на біосферу в цілому; немає чітких рекомендацій і розрахунків за їх визначенням.

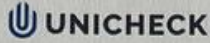
У результаті аналізу комп'ютерної моделі робиться висновок про адекватність побудованої моделі соціальному процесу, що моделюється. Далі приймається рішення: або про зміну структури побудованої моделі з метою її вдосконалення та покращення, або про додатковий аналіз соціологічного об'єкта моделювання.

У цілому, хоча вся сукупність сучасних глобальних моделей і не досягає вирішення основних екологічних проблем, вона дозволяє намітити етапи та напрями подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – №710
2. Бутник О. М. Економіко-математичне моделювання перехідних процесів у соціально-економічних системах: Монографія. Харків: Інжек; СПД Лібуркіна Л.М., 2004. 304 с.
3. Вітлінський В. В. Моделювання економіки. Київ, 2007. 406 с.
4. Загородній Ю.В., Кадієвський В.А. Моделювання економіки. К.:
5. Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник/ Заред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ, 2008. 704 с.
6. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений со сходящимся аргументом. – М., Наука, 1970. – 240 с.
7. Капустян О. В., Сукретна А. В. Методи нелінійного аналізу в математичній економіці К.: Київський університет, 2011.
8. Лаврінський Л. В., Шарапов О.С., Устинко С.В., Шарапов О.Д. Моделювання системних характеристик в економіці. К.: ЕКМО, 2004. 169 с.
9. Медоуз Д.Х., Медоуз Д.Л., Рэндерз Й., Беренс Ш. Пределы роста. – М.: Изд.-во Моск. гос. ун-та, 1991. – 206 с.
10. Медоуз Д., Рэндерз Й., Медоуз Д. Пределы роста. 30 лет спустя. – М.: Академкнига, 2008. – 342 с.
11. Мартынюк А.А. Об одной математической модели мировой динамики и устойчивости развития // Доп. НАН України. – 2010, №7, С.16-21.
12. Медоуз Д.Х., Медоуз Д.Л., Рэндерз Й., Беренс Ш. Пределы роста. – М.: Изд.-во Моск. гос. ун-та, 1991. – 206 с.
13. Медоуз Д., Рэндерз Й., Медоуз Д. Пределы роста. 30 лет спустя. – М.: Академкнига, 2008. – 342 с.
14. Райцин В.Я. Моделирование социальных процессов : учебник Плехановской академии/ В.Я. Райцин. – М. : Экзамен, Харвест, 2005 г. – 192 с
15. Руська Р. В., Іващук О. Т. Методи економіко-статистичних досліджень: Навч. посібник. Тернопіль: Тайп, 2014. 190 с. 27. Фортуна В. В., Саркіс'янц О. В. Питання застосування панельних даних в економетричних дослідженнях.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ
Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем магістр



Ім'я користувача:
Оноцький В'ячеслав ФКонтНаук

ID перевірки:
1015160093

Дата перевірки:
21.05.2023 17:00:10 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:
21.05.2023 18:48:25 EEST

ID користувача:
100002816

Назва документа: Пицко Андрій Ярославич

Кількість сторінок: 17 Кількість слів: 6813 Кількість символів: 52457 Розмір файлу: 8.42 MB ID файлу: 1014840346

5.64%
Схожість

Найбільша схожість: 1.56% з джерелом з Бібліотеки (ID файлу: 1014364393)

3.11% Джерела з Інтернету

55

Сторінка 19

2.86% Джерела з Бібліотеки

34

Сторінка 19

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнено

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнено

0%
Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

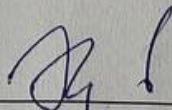
Замінені символи

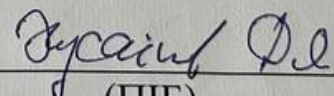
11

Експертна оцінка роботи науковим керівником:


*Робота заслуговує оцінки "задовільно"
(61 балів)*

Науковий керівник:


(підпис)


(ПІБ)

Оператор:


(підпис)

Оноцький В.В.
(ПІБ)

РЕЦЕНЗІЯ

на випускнуну магістерську роботу ПИЦКО Андрія Ярославовича
**“МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВИТКУ
СУСПІЛЬСТВА”**

Випускна магістерська робота Пицко А.Я. “Моделювання процесів загального розвитку суспільства” присвячена оригінальній математичній проблемі моделювання, що виникає при проектуванні динамічних систем, а саме задачі дослідження розвитку суспільства в цілому.

Ця проблема виникла після другої світової війни і пов'язана з спільнотою, що поєдналась під назвою «римський клуб».

Математична модель розвитку суспільства пропонується записувати у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь.

Робота складатиметься з трьох розділів.

Перший розділ є оглядовим і присвячений одному з загальних розділів теорії звичайних диференціальних рівнянь, а саме теорії стійкості і другому методу Ляпунова. Наведено основні поняття теорії стійкості, описано метод функцій Ляпунова, як один з апаратів дослідження якісної теорії.

У другому розділі розглянуто побудову математичної моделі динаміки світового розвитку. При побудові моделі Пицко А.Я. використовує результати академіка НАН України Мартинюка А.А. та його американських колег, що наведені в цитованій літературі. Крім того Пицко А.Я. розглядає “модернізовану математичну модель”, що враховує ефект запізнення, який суттєво впливає на поведінку системи.

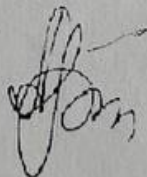
Третій розділ присвячений чисельному моделюванню системи диференціальних рівнянь описаного процесу.

Вважаю, що робота магістра Пицко А.Я. “Моделювання процесів загального розвитку суспільства” виконана на невисокому рівні і заслуговує оцінки «задовільно» (60 балів).

Завідувач

кафедри програмних систем та технологій
факультету інформаційних систем та
інформаційних технологій
Київського національного університета
імені Тараса Шевченка

доктор техн. наук



Олексій БИЧКОВ

ВІДЗИВ

наукового керівника
на випускню кваліфікаційну роботу магістра **Пицко Андрія Ярославовича**
Моделювання процесів загального розвитку суспільства

Випускна кваліфікаційна робота магістра Пицка А.Я. “Моделювання процесів загального розвитку суспільства” присвячена цікавій математичній проблемі, що обумовлена глобальними процесами – **куди прямує суспільство.**

Ця проблема завжди цікавила людство і отримала математичне спрямування з виникненням так званого «римського клубу». Динаміка суспільного розвитку почала формалізуватися за допомогою апарату звичайних диференціальних рівнянь. Останні роботи цього напрямку проводились академіком НАН України А.А.Мартинюком спільно з його американськими колегами.

Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У вступі розглянуто основні положення випускної кваліфікаційної роботи.

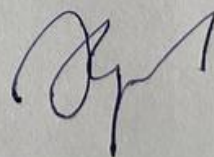
В першому розділі розглянуті основні поняття якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, зокрема наведені поняття стійкості по Ляпунову, асимптотичної стійкості. Описано другий метод Ляпунова та методи його використання.

Другий розділ присвячений власно побудові та дослідженню математичної моделі динаміки світового розвитку. Наведені основні поняття, якими оперує автор роботи, розглянута модель без запізнення і модель, що враховує ефект післядії.

В третьому розділі проведено чисельне моделювання математичної моделі, що являє собою систему звичайних диференціальних рівнянь.

Основна особиста робота магістра А.Я. Пицко міститься в третьому розділі. Вважаю, що робота магістра Пицко А.Я. “Моделювання процесів загального розвитку суспільства” виконана на невисокому рівні і заслуговує оцінки «задовільно» (61 балів).

Професор
кафедри моделювання складних систем
факультету комп’ютерних наук та кібернетики,
доктор фіз.-мат. наук



Денис ХУСАІНОВ

