КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра прикладної статистики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 124 Системний аналіз
на тему:

МОДЕЛЮВАННЯ БЛОКІВ МЕДИЧНОЇ УСТАНОВИ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Виконала студентка 4 курсу
Перерва Антоніна Григорівна
_______________ (підпис)

Науковий керівник:
доцент, кандидат фізико-математичних наук
Лівінська Г. В.
_______________ (підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _______________ (підпис)

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри прикладної статистики

протокол № 11
від « 05 » червня 2023 р.

Завідувач кафедри
Розора І. В. _______________ (підпис)

Київ 2023

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи 50 сторінок, 11 ілюстрацій, 6 таблиць, 20 джерел посилань.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ЧЕРГА, ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ, ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ, РЕАНІМАЦІЙНІ ПАЛАТИ.

Об'єктом роботи є модель масового обслуговування в контексті її застосування в медичних установах.

Предметом роботи є стохастичні моделі систем масового обслуговування.

Метою роботи є ознайомлення з теорією масового обслуговування, змінами і доповненнями до неї, методикою побудови моделей та обчислення характеристик їх функціонування, зокрема ймовірності відмови (пацієнту) на статистичних даних Олександрівської лікарні міста Києва.

В рамках виконання роботи застосовувалися наступні методи: аналізу (в процесі дослідження історичних аспектів формування паралельних черг), порівняння (для співставлення різних аспектів теоретичних засад теорії масового обслуговування), синтезу (при опрацюванні отриманих даних), формалізації (в ході підготовки пропозицій щодо оптимізації процесів масового обслуговування). Також застосовувалися графічний та табличний прийоми для наочного представлення результатів роботи.

Результати роботи: виконано загальне дослідження моделей масового обслуговування, розкрито особливості та зміст математичних методів, які формують основу обчислення базових моделей масового обслуговування, досліджено окремий випадок оптимізації процесів масового обслуговування.

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Balk – модель «клієнти уходять, коли бачать, що черга занадто довга»;

FIFO – First-in-first-out (заявки обслуговуються в порядку надходження);

Jockey – модель «клієнти переходять від одної черги до коротшої»;

LIFO – Last-in-first-out (першою обслуговується заявка, що поступила останньою);

PR – Service according to prority (пріоритетні системи);

Renege – модель «клієнти покидають чергу, коли вона рухається занадто повільно»;

SIRO – Service in random order (обслуговування у випадковому порядку);

SPT – Shortest processing time first (спочатку найкоротший час обслуговування).

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія масового обслуговування (теорія черг) – розділ теорії випадкових процесів, метою досліджень якого є раціональний вибір структури системи обслуговування та процесу обслуговування на основі вивчення потоків вимог на обслуговування, що надходять до системи та виходять із неї, тривалості очікування та довжини черг.

Теорія дозволяє провести математичний аналіз кількох пов’язаних процесів, зокрема прибуття до черги, очікування в черзі та обслуговування сервером(ами) чергових вимог.

Із системами масового обслуговування суспільство зустрічається повсякденно. У багатьох галузях виробництва, побутового обслуговування, економіки та фінансів важливу роль відіграють системи спеціального виду, що реалізують багаторазове виконання однотипних завдань. Подібні системи і називають системами масового обслуговування. Прикладами таких систем є: банки, страхові організації, податкові інспекції, різні системи зв'язку (у тому числі телефонні станції), вантажно-розвантажувальні комплекси (порти, товарні станції), автозаправні станції, магазини, перукарні, квиткові каси, ремонтні майстерні, лікарні, системи протиповітряної чи протиракетної оборони тощо.

Родоначальником теорії масового обслуговування вважається співробітник Копенгагенської телефонної компанії відомий датський вчений А. К. Ерланг, який першим запропонував для опису процесів, що відбуваються в системах масового обслуговування, використовувати марковські процеси з дискретною (скінченною або зліченою) множиною станів. Це є цілком закономірним, зважаючи на те, що основним практичним споживачем результатів теорії масового обслуговування були телефонні мережі, а вже потім додалися мережі передачі даних, інформаційно-обчислювальні мережі тощо.

Вагомий внесок у створення та розробку загальної теорії масового обслуговування вніс радянський математик О. Я. Хінчін, який запропонував власне сам термін «теорія масового обслуговування». В іноземних джерелах використовується словосполучення «теорія черг» (queueing theory).

Пік свого розвитку теорія масового обслуговування досягла у 50-70-ті роки.

Надалі інтерес до теорії масового обслуговування дещо послабшав. Перш за все, це було обумовлено математичними причинами. З одного боку, характерною особливістю завдань теорії масового обслуговування є необхідність майже кожної системи масового обслуговування шукати власні методи дослідження, а з іншого – великий інтерес дослідників до теорії масового обслуговування призвів до того, що завдання, що допускають прості рішення, особливо в обчислювальному плані, вже було вирішено. Більш того, у аналітичних методів з'явився серйозний конкурент – імітаційне моделювання.

Проте останнім часом інтерес до завдань теорії масового обслуговування знову відродився. Це обумовлено не тільки новими задачами, що виникли в практичному житті і особливо в галузях, пов'язаних із розробкою та застосуванням сучасної обчислювальної техніки, а й новими математичними підходами до їх вирішення. Одним з таких підходів є алгоритмічний підхід, що виник у зв'язку з широким застосуванням сучасної обчислювальної техніки у наукових дослідженнях, і який пропонує отримання рішень задач теорії масового обслуговування у вигляді тих чи інших обчислювальних алгоритмів.

Умови сьогодення відзначаються великою кількістю підприємств та організацій, які зосереджуються на наданні різноманітних послуг населенню. Однак, виникає необхідність детального вивчення та дослідження систем масового обслуговування черг вимог. Системи обслуговування відіграють значну роль у повсякденному житті, а черги виникають через випадковий та некерований потік вимог клієнтів. Теорія масового обслуговування допомагає визначити оптимальну кількість обслуговуючих пристроїв, яка дозволяє мінімізувати загальні очікувані втрати від несвоєчасного обслуговування, відмови в обслуговуванні та простоїв обладнання.

У сучасній економіці, де боротьба за клієнтів є надзвичайно важливою, підприємства вкладають значні зусилля у привертання нових клієнтів та задоволення існуючих. За даними західних економістів, завоювання нового клієнта коштує близько шести разів дорожче, ніж утримання існуючих, і для повернення незадоволеного клієнта доводиться витратити у 25 разів більше коштів. Багато випадків незадоволення клієнтів пов'язані з недостатньою організацією процесу обслуговування, наприклад, довгим часом очікування у черзі або відмовою у наданні послуги. Використання теорії масового обслуговування дозволяє підприємствам уникнути таких проблем.

Досвід моделювання різних типів систем дискретних подій показує, що близько 80% таких моделей базуються на системах масового обслуговування. Це свідчить про важливість та широкий спектр застосування цієї теорії.

Моделюючи реанімаційне відділення як систему масового обслуговування, дослідники детально вивчають та оцінюють показники ефективності такої системи. Серед цих показників важливі ймовірність відмови пацієнта, оптимальна кількість ліжок у відділенні, швидкість прибуття пацієнтів на день та середній час обслуговування пацієнтів. Аналізуючи параметри системи на основі даних з відділення реанімаційної допомоги Олександрівської лікарні у м. Києві, дослідники можуть встановити ймовірність відмови. Задачі оптимізації вартості системи обслуговування можуть бути сформульовані та вирішені для знаходження оптимального балансу між середнім робочим навантаженням та ймовірністю відмови.

Системи масового обслуговування є важливими для ефективного функціонування підприємств, організацій та установ, які забезпечують послуги населенню. Вивчення та дослідження таких систем допомагає вдосконалювати їх ефективність та забезпечити задоволення потреб клієнтів.

Аналіз черги та відмов може значно підвищити медичну продуктивність, задоволеність пацієнтів і економічну ефективність медичної допомоги. Це зумовлює актуальність дослідження ефективності роботи Олександрівської лікарні та її порівняння із середньо київськими показниками. Однією з цілей роботи є виявлення впливу на ефективність роботи відділень інтенсивної терапії м. Києва зміни основних параметрів моделі, таких як кількість ліжок, час обслуговування та кількість прибулих пацієнтів.

1 ІСТОРИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ ЧЕРГ ТА ПЕРЕДУМОВИ ЇХ ВИНИКНЕННЯ

Історичним родоначальником теорії масового обслуговування (теорії черг) є теорія ймовірностей. Історія черг сягає первісної людини. Найпершою задокументованою чергою є черга до Ноєвого ковчега, що описана в Біблії [1].

Теорія масового обслуговування є складовою теорії випадкових процесів і протягом багатьох десятиліть вивчається як окрема галузь зі своїми специфічними дослідницькими напрямами. Розвиток теорії ймовірностей відбувався з XVII ст., коли виникла потреба в дослідженні закономірностей випадкових явищ. Історично так склалося, що схеми азартних ігор стали простими та зрозумілими моделями випадкових явищ, які можна було повторювати в умовах масовості.

Саме слово «азарт» походить від французького «le hazard», що означає «випадок». Використання прикладів з галузі азартних ігор досі є поширеним при вивченні теорії ймовірностей як простих моделей випадкових явищ, що ілюструють основні закони теорії зрозуміло і наочно. У XVII столітті такі вчені, як П. Ферма (1601–1665 рр.) та Б. Паскаль (1623–1662 рр.) проводили математичні дослідження в галузі азартних ігор. Проте до наступного століття наука не досягла класичних визначень теорії. Великий внесок у розвиток теорії ймовірностей зробив Я. Бернуллі (1654–1705 рр.), який сформулював і довів закон великих чисел. Цей закон встановлює зв'язок між ймовірністю події та частотою її появи, і при великій кількості експериментів частота появи певного результату стабілізується і наближається до ймовірності цього результату. С. Д. Пуассон (1781–1840 рр.) пізніше удосконалив та загальнішим чином сформулював закон великих чисел, а також вперше застосував теорію ймовірностей у військових завданнях стрільби. Він також вивів один з законів розподілу, який відіграє важливу роль у всіх застосуваннях теорії ймовірностей, включаючи теорію масового обслуговування [2].

Теорія випадкових процесів, розвинута А. А. Марковим у XIX столітті, відіграла ключову роль у розвитку теорії масового обслуговування. Він розширив галузі застосування центральної граничної теореми та закону великих чисел, розглядаючи як залежні, так і незалежні досліди.

А. К. Ерланг, датський учений, вважається засновником теорії масового обслуговування, що виникла внаслідок розвитку теорії випадкових процесів. Одним з найвідоміших його досліджень було вивчення телефонних черг.

Вперше про час очікування в телефонному комутаторі в 1903 році замислився Ф. Йогансен – керуючий директор Копенгагенської телефонної компанії [3]. Він , використовуючи математичну теорію ймовірності, провів дослідження щодо неправильності розмірів ручних перемикачів в телефонних системах. Він розумів, що перевантаження абонентів призводило до додаткових витрат, оскільки операторам доводилося багаторазово спробувати встановити з'єднання.

З метою зменшення витрат операторів та оптимізації вартості, Ф. Йогансен порівняв зростання вартості встановлення додаткових ліній з економічними витратами операторів. Це порівняння надало надійну основу для визначення оптимальної кількості ліній для кожного абонента в компанії. Для досягнення більш точних результатів Ф. Йогансен створив наукову лабораторію, до якої запрошений математик А. К. Ерланг.

А. К. Ерланг почав працювати над часом очікування в телефонному комутаторі і виявив, що кількість телефонних розмов, які задовольняли розподіл Пуассона, а також час утримання телефону розподілялися експоненціально. Він опублікував свою першу роботу з теорії масового обслуговування в 1909 році. У 1946 році було вирішено, що «Ерланг» буде використовуватися як одиниця інтенсивності навантаження для вшанування його роботи [4]. Моделі А. К. Ерланга зазвичай викладаються на початкових/вступних академічних курсах, оскільки вони все ще є наріжними каменями сучасних телекомунікаційних моделей. Більше того, його моделі не втратили актуальності і використовується в центрах телефонних викликів [5].

Т. О. Енгсет, норвезький математик, зробив важливий внесок у теорію масового обслуговування, працюючи над проблемами черг у телефонних системах. Він розробив моделі черг та моделі втрат телетрафіку, що дозволяли визначати оптимальні розміри телефонних станцій. Незважаючи на обмежені ресурси та відсутність доступу до сучасних математичних теорій ймовірностей та чисельних методів, Т. О. Енгсет використовував комбінаторне моделювання для своїх досліджень.

У своїх роботах А. К. Ерланг і Т. О. Енгсет були критиковані за обмеження їхніх моделей, оскільки вони не передбачали експоненційний розподіл часу обслуговування. Однак пізніше виявилося, що їхні моделі залишаються дійсними для різних розподілів часу обслуговування, за умови наявності чіткого середнього значення.

Таким чином, роботи А. К. Ерланга та Т. О. Енгсета принесли значний внесок у розвиток теорії масового обслуговування та дали основу для розуміння та оптимізації телефонних систем.

Перше використання терміну «система масового обслуговування» (queueing system) відбулося в 1951 році в Журналі Королівського статистичного товариства. Д. Г. Кендалл опублікував статтю «Деякі проблеми в теорії черг» [6]. У цьому журналі (1951, том 13, с. 151-185) він посилається на «просту систему черги». До цього в усіх статтях вживалося слово «черга», а не словосполучення «стояти в черзі».

Особливої уваги заслуговує вивчення психологічних аспектів теорії масового обслуговування [7]. Р. Ларсон відомий інженер, вивчав психологічний аспект очікування в чергах. Він провів дослідження, що показали, що за певних умов люди схильні бути більш терплячими щодо тривалості очікування. Наприклад, у 1950-х роках, коли багато людей проживало у великих містах у багатоповерхівках, довгі черги до ліфтів у години пік викликали багато скарг. Проте, застосування дзеркал у зонах очікування ліфтів давало позитивний ефект, знижуючи кількість скарг майже до нуля. Люди займали себе спостереженням за собою та іншими у дзеркалі, що заповнювало їхній час.

Р. Ларсон також зазначав важливість зворотного зв'язку для клієнтів, які чекають у черзі. Він вказував на приклад роботи Діснейленду, де системи повідомляли людям, скільки ще часу їм доведеться чекати. Такий підхід викликав позитивну реакцію, особливо коли фактичний час очікування виявлявся меншим, ніж очікувано. Для розваги, пропонувалися активності для людей, які стоять у черзі. Крім того, важливим фактором було те, що черга поступово рухалась, що надавало відчуття прогресу тим, хто чекав.

Також було встановлено, що надання пасажирам авіакомпаній інформації про очікуваний час в черзі перед вильотом впливає на їхнє емоційне становище. Підрахунки часу очікування, які повідомляють пасажирам, допомагають зменшити негативні емоції, пов'язані з очікуванням.

Таким чином, Р. Ларсон досліджував психологічні аспекти очікування у чергах і виявив, що зворотний зв'язок та рух черги можуть позитивно впливати на сприйняття часу очікування [8].

Операційні дослідження (ОД) - це відносно нова галузь математики, яка виникла під час Другої світової війни завдяки зусиллям військових планувальників. Їх головною метою було оптимізувати використання обмежених військових ресурсів за допомогою кількісних методів. У післявоєнні роки застосування ОД розширилося, щоб охопити різні внутрішні проблеми. До початку 1950-х років у Великій Британії було створено понад сорок відділів операційних досліджень різного розміру та спеціальностей. Ці секції були присутні як у приватному секторі, так і в державних департаментах, а також дослідницьких асоціаціях [9].

Оперативне дослідження застосовувалося в широкому діапазоні галузей промисловості, включаючи сільське господарство, цивільну авіацію, текстильну промисловість, розвиток власності та охорону здоров'я. Застосування ОР в охороні здоров’я було досліджено в статті під назвою

«Операційні дослідження в медицині» Бейлі в 1952 році, яка вважається однією з найперших публікацій, що обговорюють використання ОР в охороні здоров'я. Відтоді дослідження в цій галузі постійно зростали.

Операційні дослідження пропонують безліч методологій і методів вирішення проблем охорони здоров'я. Це допомагає визначити оптимальний рівень штату медсестер у лікарнях і визначити відповідну кількість ліжок для забезпечення належного догляду за всіма пацієнтами та забезпечує системний підхід до вирішення проблем і дозволяє охарактеризувати дію існуючої системи за допомогою математичного моделювання.

Теорія масового обслуговування виявляється дуже цінною в таких сценаріях, оскільки вона дозволяє галузям оптимізувати розподіл постійних ресурсів за змінних умов попиту. Вона зазвичай використовується для аналізу та моделювання процесів, пов'язаних із очікуванням у чергах. Однак сектор охорони здоров'я вирізняється з-поміж інших галузей специфічними проблемами та складністю.

Складність ефективності систем охорони здоров'я можна зрозуміти за допомогою різних аналітичних підходів. Зокрема, теорія масового обслуговування пропонує метод аналізу систем, які включають клієнтів, сервери та черги.

У контексті лікарень існує багато проблем, які необхідно вирішити, і ця теорія дає розуміння та потенційні рішення для цих проблем [10].

Окрім своєї актуальності під час пандемії COVID-19 та воєнного стану, теорія масового обслуговування виявляється корисною для вирішення інших надзвичайних ситуацій, які потребують швидкого та ефективного вирішення проблем. Ця теорія допомогла удосконалити виробничі процеси та оптимізувати розподіл товарів під час таких криз.

Загалом теорія масового обслуговування відіграє важливу роль у діяльності охорони здоров'я, допомагаючи підвищити ефективність, керувати потоком пацієнтів і вирішувати критичні ситуації, надаючи аналітичні інструменти та інформацію для прийняття рішень.

Ліжка для відділень інтенсивної терапії є цінним, але обмеженим ресурсом через їхню високу вартість і спеціальні функції. Їм потрібне передове обладнання для моніторингу, високий рівень медичної експертизи та цілодобова доступність висококваліфікованих медсестер.

Вартість ліжок для реабілітації є суттєвим фактором для медичних організацій. Згідно з оцінками, наданими Департаментом охорони здоров'я Великої Британії, у 2005-2006 рр., кожне ліжко в реанімаційному відділенні потребувало середньодобових витрат приблизно 1800 фунтів стерлінгів, включаючи витрати на догляд. Проте важливо зазначити, що Міністерство охорони здоров'я переглянуло свою політику калькуляції в 2006–2007 роках. Замість того, щоб розраховувати середню вартість ліжка, вони почали визначати вартість одного пацієнта реанімації на основі кількості відмов пацієнтів.

Ця зміна в політиці калькуляції витрат дозволяє точніше оцінити витрати, пов'язані з пацієнтами у відділенні реанімації, враховуючи їхні специфічні медичні потреби та рівень необхідного догляду. Зміщуючи увагу з вартості окремих ліжок на складність стану пацієнтів, організації охорони здоров'я можуть краще розподіляти ресурси та керувати економічними аспектами надання послуг інтенсивної терапії. Підсумовуючи, ліжка відділення інтенсивної терапії є дорогими та мають обмежені ресурси через спеціалізоване обладнання та досвід, які вони потребують [11].

Системи масового обслуговування (СМО) є важливою складовою планування медичного обслуговування, яка спрямована на ефективне та організоване надання медичної допомоги пацієнтам. Історія розвитку СМО в медицині пов'язана з постійним покращенням процесу обслуговування пацієнтів, управлінням ресурсами та забезпеченням якісної медичної допомоги.

Перші кроки у використанні СМО у медицині можна віднести до середини XX століття, коли почали розвиватися теорія черг та методи математичного моделювання. У цей період були створені перші математичні моделі для аналізу та оптимізації чергових систем у лікарнях та медичних установах. Одним з перших відомих прикладів застосування СМО в медицині є дослідження Вільяма Шульца у 1950-х роках, де він моделював чергову систему у реанімаційному відділенні.

У подальшому розвитку медичної науки та технологій, СМО стали важливим інструментом для вирішення проблем, пов'язаних з наданням медичної допомоги, плануванням ресурсів та організацією роботи медичних установ. СМО дозволяють визначити оптимальну кількість ліжок, розподілити ресурси та персонал ефективним чином, а також оцінити якість обслуговування пацієнтів.

В сучасному медичному середовищі СМО використовуються для аналізу та планування роботи лікарень, клінік та інших медичних установ. Вони допомагають встановити оптимальні режими роботи, розподілити навантаження, забезпечити мінімальний час очікування для пацієнтів та максимальну ефективність використання ресурсів.

СМО також використовуються для моделювання та дослідження різних сценаріїв, таких як масові епідемії, надзвичайні ситуації та кризові ситуації в медицині. Це допомагає зрозуміти можливі наслідки та розробити ефективні стратегії управління у випадках надзвичайних ситуацій.

У підсумку, системи масового обслуговування є важливим інструментом для покращення організації медичного обслуговування та ефективного використання ресурсів. Вони допомагають забезпечити оптимальну роботу медичних установ, задоволення потреб пацієнтів та забезпечення якісної медичної допомоги.

Отже, вже понад сто років питання скорочення часу та витрат на масове обслуговування залишається актуальним. На сьогодні воно затребуване як в соціальній, так і в комерційних сферах.

2 МОДЕЛІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Для опису характеристик системи масового обслуговування, необхідно визначити ймовірнісні властивості вхідного потоку вимог, дисципліну обслуговування, зокрема наявність місць для очікування та механізм обслуговування.

Для опису вхідного потоку зазвичай задається ймовірнісний закон, керуючий послідовністю моментів надходження клієнтів на обслуговування та кількістю клієнтів у кожному надходженні. Клієнт, що надійшов на обслуговування, може обслуговуватися одразу, якщо є вільні обслуговуючі прилади, або чекати в черзі, або відмовитися від очікування. Поведінка клієнта може бути: balk, renege, jockey [12].

Структура обслуговування та дисципліна обслуговування говорять про кількість серверів, потужність системи (тобто максимальну кількість клієнтів, які перебувають у системі, включаючи тих, що обслуговуються). Дисципліна обслуговування - логічне впорядкування клієнтів у черзі, яка визначає, який клієнт буде обраний для обслуговування, коли сервер стає вільним, наприклад: FIFO, LIFO, SIRO, SPT, PR [13].

Механізм обслуговування відображає характеристики та процедури, які використовуються для надання послуг. У випадку, коли система має декілька пристроїв, можливе паралельне обслуговування кількох клієнтів одночасно. Одним з ефективних методів є групове обслуговування, де кілька клієнтів одночасно обслуговуються декількома пристроями. Цей підхід дозволяє збільшити пропускну здатність системи та зменшити час очікування клієнтів, шляхом розподілу завдань між пристроями та паралельного виконання обслуговування. Такий механізм сприяє підвищенню ефективності та задоволеності клієнтів. Процес прибуття розглядає моделі для скінченної і нескінченної кількості клієнтів.

У моделях масового обслуговування популяція потенційних клієнтів, відома як calling population, часто припускається безкінечною, навіть якщо фактична кількість потенційних клієнтів є скінченною. Це спрощує модель, особливо коли популяція потенційних клієнтів є дуже великою. Припущення ґрунтується на тому, що на швидкість прибуття клієнтів не впливає кількість клієнтів, які вже перебувають у системі обслуговування. Крім того, це припущення підкреслює сталу швидкість надходження клієнтів протягом часу. Враховуючи це, моделі масового обслуговування можуть розглядатися з великою точністю, припускаючи наявність безкінечної calling population.

У моделях з нескінченною сукупністю, процес прибуття клієнтів зазвичай описується за допомогою інтервалів між прибуттям послідовних клієнтів. Ці інтервали можуть бути задані у випадковий чи запланований час. Час між прибуттям клієнтів характеризується розподілом ймовірностей. Крім того, клієнти можуть приходити поодиноко або групами. Група може мати фіксований або випадковий розмір. Враховуючи ці фактори, моделі дозволяють досліджувати різні сценарії прибуття клієнтів, що можуть мати важливий вплив на процес обслуговування.

У багатьох системах черги існує обмеження на кількість клієнтів, які можуть бути в черзі чи системі. Клієнт, який прибув до системи та виявив, що система заповнена, не входить, а негайно повертається до calling population [10]. У деяких системах може бути обмежена потужність, що означає, що система не може обслужити нескінченну кількість клієнтів одночасно. У таких випадках важливо розрізняти коефіцієнт прибуття, що відображає загальну кількість прибуття клієнтів протягом одиниці часу, та ефективний коефіцієнт прибуття, який враховує кількість клієнтів, що фактично входять у систему за одиницю часу. Це важливо для оцінки завантаженості системи та визначення її пропускної здатності. Враховуючи обмежену потужність системи, аналіз ефективного коефіцієнта прибуття допомагає зрозуміти, як багато клієнтів може бути обслужено за певний період часу.

Час обслуговування послідовних надходжень позначається S_1, S_2, S_3 і тд. Вони можуть бути постійними або з випадковою тривалістю. В останньому випадку $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ зазвичай характеризується як послідовність незалежних і однаково розподілених випадкових величин (експоненціальний, вейбула, гамма, логнормальний розподіли), які часто використовуються для моделювання часу обслуговування. У деяких системах масового обслуговування час обслуговування може бути однаково розподіленим для всіх клієнтів певного типу, класу або пріоритету, тоді як клієнти різних типів можуть мати абсолютно різні розподіли часу обслуговування. Крім того, в деяких системах час обслуговування може залежати від часу доби або довжини черги.

Система масового обслуговування складається з набору лічильників обслуговування та взаємозалежних черг. Кожен сервісний центр включає певну кількість серверів c, які працюють паралельно. Це означає, що коли клієнт доходить до голови черги, він займає перший вільний сервер. Механізми паралельного обслуговування можуть бути засновані на одному сервері $(c = 1)$, кількох серверах $(1 < c < \infty)$, або необмеженій кількості серверів $(c = \infty)$. Такий підхід дозволяє розподілити навантаження між різними серверами і покращити продуктивність системи масового обслуговування. Клієнти отримують обслуговування швидше, оскільки можуть бути обслуговувані одночасно на різних серверах. Це особливо корисно в системах з великим потоком клієнтів, де швидкість та ефективність обслуговування є ключовими факторами.

Визнаючи різноманітність систем масового обслуговування, у 50-х роках було введено систему позначення, яка отримала широке поширення. Конвенція заснована на форматі $\mathrm{A/B/c/N/K/D}$, де A - функція розподілу інтервалів між прибуттями у вхідному потоці, B - функція розподілу часів обслуговування, c - число обслуговуючих приладів, N – місткість системи (кількість серверів плюс кількість місць в черзі), K – кількість джерел заявок, D – дисципліна сервісу.

Таким чином, в моделях масового обслуговування використовуються різні позначення для систем з різними характеристиками. Наприклад, M/M/1 означає систему з Пуассонівським вхідним потоком вимог, експоненціально розподіленим часом обслуговування та одним сервером. Модель M/G/m позначає систему з m серверами, де вхідний потік є Пуассонівським, а час обслуговування має загальний розподіл.

Загальний формат позначення моделі використовує нотацію Кендалла. Наприклад, M/M/c вказує на систему з Пуассонівським вхідним потоком вимог, експоненціально розподіленим часом обслуговування та c серверами. Також є модель M/G/1, де вхідний потік є Пуассонівським, а час обслуговування має загальний розподіл, з одним сервером.

Модель M/M/r/K/n описує систему, де клієнти прибувають з кінцевого джерела з n елементами і перебувають в системі протягом експоненціально розподіленого часу. Обслуговування відбувається за запитом прибуття через r серверів, а ємність системи обмежена значенням K [14].

Коли N і K нескінченні, їх можна вилучити з позначення. Передбачається, що за замовчуванням всі системи мають дисципліну черги FIFO.

Існують різні показники роботи СМО, які можна використовувати для оцінки якості системи масового обслуговування, наприклад: $L,\ L_Q, w,\ w_Q, p$, де L, L_Q - середня кількість клієнтів в системі та черзі відповідно; w – середній час, проведений в системі; w_Q - середній час, проведений в черзі; p - частка часу, протягом якого сервер зайнятий. Термін «система» відноситься до черги очікування і механізму обслуговування, тоді як термін «черга» відноситься лише до вимог, які очікують обслуговування.

Розглянемо систему масового обслуговування за певний період часу T і нехай $L(t)$ позначає кількість клієнтів у системі в момент часу t [15]. Позначимо T_i як загальний час у $[0, T]$ протягом якого у системі міститься рівно i клієнтів. Загалом $\sum_{i=0}^{\infty} T_i = T$. Середня кількість клієнтів у системі оцінюється як:

$$\hat{L} = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{T_i}{T} \tag{1}$$

З рисунку 1 видно, що загальну площу під функцією L(t) можна розкласти на прямокутники довжини T_i і висоти i, таким чином мати площу iT_i.

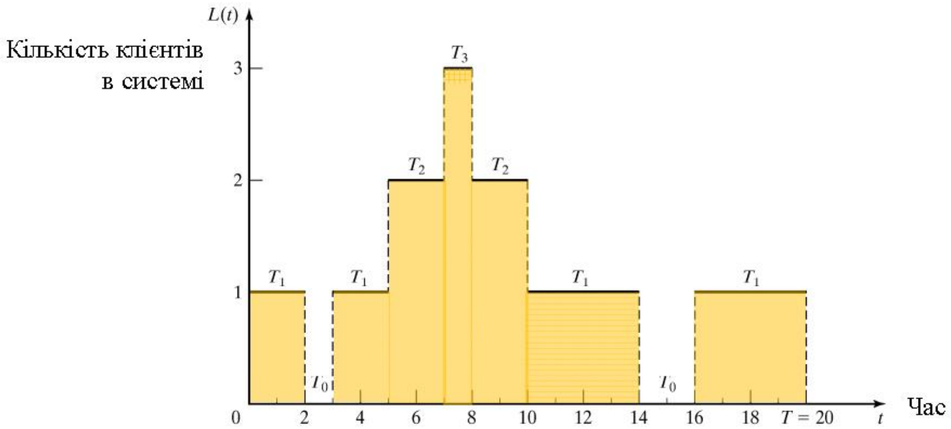

Рисунок 1-Число в системі, L(t), в момент часу t

Легко бачити, що загальна площа дорівнює:

$$\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \int_0^T L(t)dt \tag{2}$$

І звідси маємо:

$$\hat{L} = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt \tag{3}$$

Багато систем масового обслуговування проявляють стійкість (стаціонарність) у довгостроковій перспективі, що стосується їх середньої продуктивності. При тривалому спостереженні T, середня кількість клієнтів у системі $\hat{\mathrm{L}}$, наближається до граничного значення, позначеного як, L, з ймовірністю 1:

$$\hat{L} = \frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt \to L \text{ при } T \to \infty \tag{4}$$

При моделюванні системи масового обслуговування протягом певного періоду часу, наприклад, T, ми можемо відстежувати час, який кожен клієнт проводить у системі в межах інтервалу $[0, \mathrm{T}]$. Позначимо ці часи як $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2, \dots, \mathrm{W}_\mathrm{N}$, де N – кількість клієнтів, які прибули в систему протягом інтервалу $[0, \mathrm{T}]$.

Середній час, який один клієнт проводить в системі, називається середнім системним часом і визначається:

$$\widehat{w} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i \tag{5}$$

Для стабільних (стаціонарних) систем, при $\mathrm{N} \to \infty$ маємо $\widehat{\mathrm{w}} \to \mathrm{w}$ з ймовірністю 1, де w називається довгостроковим середнім системним часом [16].

Закон Літтла стверджує, що в стабільній системі масового обслуговування довгострокова середня кількість клієнтів L є добутком довгострокової середньої ефективної інтенсивності прибуття λ та середнього часу, який клієнт проводить у системі $\widehat{\mathrm{w}}$:

$$\hat{L} = \hat{\lambda}\widehat{w} \tag{6}$$

Цей зв'язок між довгостроковою середньою кількістю клієнтів, довгостроковою середньою ефективною інтенсивністю прибуття та середнім часом, який клієнт проводить у системі, має загальне застосування у багатьох системах масового обслуговування, незалежно від їх конкретних характеристик, таких як кількість серверів, дисципліна черги та інші фактори. Якщо ми розглядаємо нескінченний часовий і просторовий проміжки, вираз вище може бути перетворений на:

$$L = \lambda w \tag{7}$$

Закон Літтла також можна вивести з рисунку 1 наступним чином [17]. Можемо бачити, що площа під функцією $\mathrm{L(t)}$ може бути декомпозована у прямокутники висотою 1 і довжиною $\mathrm{W_i}$, для всіх $\mathrm{i} = 1,2, \ldots \mathrm{N}$. Тоді:

$$\sum_{i=1}^{N} W_i = \int_0^T L(t)dt \tag{8}$$

Використовуючи $\hat{\lambda} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{T}}$ отримуємо:

$$\hat{L} = \frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N} W_i = \frac{N}{T}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i = \hat{\lambda}\hat{w} \tag{9}$$

Що і є законом Літтла.

Завантаженість (час використання) сервера в системі масового обслуговування визначається як відносна частка часу, протягом якого сервер перебуває у зайнятому стані. Ця частка часу, позначена як $\hat{\mathrm{p}}$, обчислюється протягом певного інтервалу $[0, \mathrm{T}]$. Довгострокове використання сервера, позначене як p, визначається при $\mathrm{T} \to \infty$ для систем, які демонструють стійкість. За таких умов, ми спостерігаємо, що $\hat{\mathrm{p}} \to \mathrm{p}$ при нескінченному Т.

Розглянемо систему масового обслуговування з одним сервером, в якій клієнти прибувають з середньою швидкістю λ за одиницю часу, обслуговуються в середньому за час $\mathrm{E(S)} = 1/\mu$ одиниць часу, і черга має нескінченну кількість місць для очікування. Звернімо увагу, що $\mathrm{E(S)} = 1/\mu$

означає, що коли сервер зайнятий, то в середньому він обслуговує клієнтів зі швидкістю μ за одиницю часу. Швидкість (інтенсивність) обслуговування μ визначається як середня інтенсивність надходження λ_s [18].

Сам сервер можна розглядати як окрему систему масового обслуговування. Тому до нього можна застосувати закон Літтла $L = \lambda w$, де L - середня кількість клієнтів у системі, w - середній час перебування клієнта в системі. У випадку серверної підсистеми, середня інтенсивність прибуття λ_s повинна бути рівною середній інтенсивності прибуття в систему λ (за умови, що $\lambda_s \leq \lambda$). Це означає, що клієнти не можуть обслуговуватися швидше, ніж вони прибувають. Проте, якщо $\lambda_s < \lambda$, черга очікування буде зростати в розмірі, що призводить до нестабільності та перезавантаженості системи (режим heavy trafffic). Для серверної підсистеми, середній системний час $w = E(S) = 1/\mu$.

Варто зазначити, що фактична кількість клієнтів у підсистемі сервера може бути нульовою або одиничною, як показано на рисунку 2 [19].

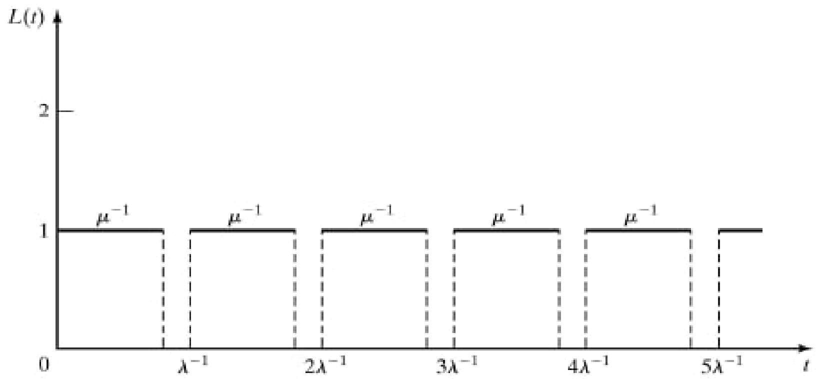

Рисунок 2-Кількість клієнтів, які обслуговуються в момент часу t

Отже, середнє число в серверній підсистемі $\hat{L}_s$ визначається як:

$$\hat{L}_s = \frac{T - T_0}{T} \tag{10}$$

Загалом, для черги з одним сервером середня кількість клієнтів, які обслуговуються у довільний момент часу, дорівнює тривалості завантаження сервера. Оскільки період часу T прямує до нескінченності ($T \to \infty$), середня кількість клієнтів у системі $\hat{L}_s$ або її використання сервером $\hat{p}$ збігається з довгостроковими значеннями $\hat{L}_s$ або p відповідно. Об’єднання цих результатів у виразі $L = \lambda w$ для серверної підсистеми дає результат:

$$p = \lambda E(S) = \frac{\lambda}{\mu} \quad (11)$$

Отже, у системі черги з одним сервером, середній час використання сервера дорівнює відношенню середньої швидкості прибуття клієнтів до середньої швидкості обслуговування. Щоб забезпечити стабільність черги з одним сервером, швидкість прибуття клієнтів λ повинна бути меншою за швидкість обслуговування μ: $\lambda < \mu$ або $p = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ [20].

Якщо швидкість прибуття клієнтів перевищує швидкість обслуговування в системі з одним сервером $(\lambda > \mu)$, сервер поступово відставатиме і черга очікування буде зростати з часом. У стабільних односерверних системах показники продуктивності, такі як середня довжина черги L_Q, є добре дослідженими та мають обчислені значення. Проте, у нестабільних системах тривале використання сервера буде рівним 1, а середня довжина черги буде нескінченною.

Розглянемо систему масового обслуговування з паралельними серверами, яких є c штук. Коли клієнт прибуває, і бачить кілька вільних серверів, він обирає будь-який з них без переваги одного перед іншим. Швидкість прибуття клієнтів λ є постійною з нескінченної множини викликів, а кожен сервер працює зі швидкістю μ, обслуговуючи клієнтів за одиницю часу.

Використовуючи аргумент, подібний до вищенаведеного, можна вивести, що довготривале середня завантаженість системи визначається за допомогою:

$$p = \frac{\lambda}{c\mu} \quad (12)$$

і система стабільна, якщо $p < 1$ або еквівалентна, якщо $\lambda < c\mu$.

Середня кількість зайнятих серверів становить:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} \tag{13}$$

Припустимо, що calling population є нескінченною, і ми припускаємо, що надходження відбуваються згідно процесу Пуассона з інтенсивністю λ прибуття за одиницю часу. Це означає, що час між надходженнями має експоненціальний розподіл з середнім значенням $1/\lambda$. Також припускається, що час обслуговування має експоненціальний розподіл з середнім значенням $1/\mu$. Дисципліною черги буде FIFO. Через використання експоненціального розподілу в процесі надходження, ці моделі називаються марковськими [21].

Вважається, що система масового обслуговування перебуває в статистичній рівновазі або в стаціонарному стані, якщо ймовірність того, що система перебуває в даному стані, не залежить від часу, тобто:

$$P(L(t) = n) = P_n(t) = P_n \tag{14}$$

Такі системи мають дві властивості:

- вони наближаються до статистичної рівноваги з будь-якого початкового стану,
- вони залишаються в статистичній рівновазі, коли вона досягнута.

Для подальших моделей, параметр L, середня кількість клієнтів у системі, може бути обчислений як:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \tag{15}$$

де $\{P_0, P_1 \ldots\}$ – стаціонарні ймовірності знаходження відповідної кількості клієнтів у системі.

Якщо відоме L, інші параметри стаціонарного стану можна легко обчислити за законом Літтла:

$$w = \frac{L}{\lambda} \quad (16)$$

$$w_Q = w - \frac{1}{\mu} \quad (17)$$

$$L_Q = \lambda w_Q \quad (18)$$

Для моделі M/M/1 стаціонарні параметри рівні:

$$p = \frac{\lambda}{\mu} \quad (19)$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (20)$$

$$w = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (21)$$

$$w_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (22)$$

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (23)$$

$$P_n = (1 - \frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^n \quad (24)$$

Черга M/M/c (або модель Erlang-C) — це модель черги з багатьма серверами, де c серверів, що працюють паралельно, з пуасонівським процесом надходження вимог з інтенсивністю λ та кожен сервер має незалежний і ідентичний експоненційний розподіл часу обслуговування із середнім значенням $1/\mu$ [17].

Оскільки процеси народження та загибелі відіграють дуже важливу роль у моделюванні елементарних систем масового обслуговування, розглянемо деякі корисні для них співвідношення [17]. Очевидно, прибуття клієнта до системи означає «народження», а завершення обслуговування та вихід клієнта з системи означає «загибель». Стаціонарний розподіл для процесів народження та загибелі можна отримати у явній формі:

$$P_i = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} P_0, \qquad i = 1,2 \dots , \qquad P_0^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} \tag{25}$$

Розглянемо розподіли процесів народження та загибелі відповідно на моменти прибуття, виходу, тому що будемо використовувати їх пізніше. Нехай $\mathrm{N_a}$, $\mathrm{N_d}$ позначають стан процесу в момент народження та загибелі відповідно, а $\Pi_\mathrm{k} = \mathrm{P}(\mathrm{N_a} = \mathrm{k})$, $\mathrm{D_k} = \mathrm{P}(\mathrm{N_d} = \mathrm{k})$, $\mathrm{k} = 0,1,2 \dots$ виступають за їх розподіли.

Застосовуючи теорему Баєса, легко переконатися, що:

$$\Pi_k = \lim_{h \to 0} \frac{(\lambda_k h + o(h))P_k}{\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_j h + o(h))P_j} = \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j} \tag{26}$$

Аналогічно:

$$D_k = \lim_{h \to 0} \frac{(\mu_{k+1} h + o(h))P_{k+1}}{\sum_{j=0}^{\infty}(\mu_j h + o(h))P_j} = \frac{\mu_{k+1} P_{k+1}}{\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j P_j} \tag{27}$$

Оскільки $\mathrm{P_{k+1}} = \frac{\lambda_\mathrm{k}}{\mu_\mathrm{k+1}} \mathrm{P_k}$, $\mathrm{k} = 0,1,2 \dots$, маємо:

$$D_k = \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i} = \Pi_k, \qquad k = 0,1 \dots \tag{28}$$

Вищезгадане співвідношення свідчить про те, що стаціонарні розподіли в моменти народжень та загибелі однакові. Слід підкреслити, що це не означає, що воно дорівнює стаціонарному розподілу у випадковій точці.

Подальше суттєве спостереження полягає в тому, що в стаціонарному стані середній рівень народжуваності дорівнює середньому коефіцієнту смертності. Це можна побачити наступним чином:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_{i+1} P_{i+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k P_k = \bar{\mu} \tag{29}$$

3 ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ОХОРОНИ ЗДОРОВ’Я З ВИКОРИСТАННЯМ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ: КЕЙС ІЗ ВІДДІЛЕНЬ ІНТЕНСИВНОЇ ТЕРАПІЇ В М. КИЄВІ

З метою оптимізації та поліпшення процесів у відділеннях інтенсивної терапії використання моделювання масового обслуговування стає перспективним підходом. Моделювання за допомогою теорії масового обслуговування є математичним інструментом, що дозволяє аналізувати та оптимізувати системи обслуговування з великим потоком клієнтів, зокрема таких як відділення інтенсивної терапії в медичних установах.

Метою нашої роботи є оцінка ефективності охорони здоров’я в контексті використання моделі масового обслуговування на прикладі відділень інтенсивної терапії в Києві, змодельованих за допомогою використання середовища R-Studio та мови програмування R, а саме - пакету simmer.

Пакет simmer є одним з популярних інструментів моделювання масового обслуговування в середовищі мови програмування R. Він надає потужні функції для створення, налаштування та симуляції процесів обслуговування з використанням різних алгоритмів. Основною ідеєю пакету simmer є визначення процесу обслуговування за допомогою компонентів, які моделюють різні елементи системи. Наприклад, можна визначити потік надходження клієнтів, чергу, обслуговування та обробку їх запитів. Кожен компонент має свої властивості та параметри, які дозволяють налаштувати поведінку системи.

Однією з основних можливостей simmer є можливість встановлювати різні алгоритми обслуговування, такі як FIFO або LIFO. Крім того, пакет підтримує випадковість та розподіли часу обслуговування, що дозволяє моделювати реалістичні умови.

Серед іншого, пакет Simmer надає можливість статистичного аналізу результатів симуляцій, таких як середній час очікування, завантаженість системи та інші показники ефективності. Це дозволяє оцінити різні стратегії управління та прийняти обґрунтовані рішення для оптимізації процесів обслуговування.

В цій роботі ми розглядаємо роботу реанімаційної палати як системи масового обслуговування, де пацієнти зазвичай потребують інтенсивного спостереження і більшість з них має певні механічні або фармакологічні потреби. Кількість ліжок для обслуговування в Київських лікарнях складає 5721, тоді як в Олександрівській – 650 ліжок. Оскільки в реанімаційній палаті не можна допустити перебування пацієнтів «в черзі», то палата розглядається як система без черги. Потік пацієнтів моделюється як пуассонівський потік, оскільки для нього виконуються основні властивості: стаціонарність, відсутність післядії і ординарність, тобто пацієнти надходять незалежно один від одного. Розглядається потік екстрених пацієнтів, тому інтенсивність надходжень вважається постійною. Час перебування пацієнтів у реанімаційній палаті моделюється за допомогою експоненційного розподілу. Враховуючі такі критерії, розглядається система M/M/n/n. За потреби, параметри та дисципліни потоку вимог та обслуговування можуть бути змінені.

Детальне дослідження та порівняння ефективності роботи реанімаційних палат виконується на основі даних, які були взяті зі звіту державного закладу «Центр медичної статистики Міністерства охорони здоров'я» та Київської міської державної адміністрації. Зазначені дані надають характеристики роботи лікарень міста Києва, а саме: для середньо київських лікарень маємо наступні значення параметрів: середня кількість пацієнтів, що надходять в реанімаційне відділення, в день $\lambda = 548$, а середня кількість днів перебування пацієнта в реанімаційній палаті $\mu = 11$ днів.

Для Олександрівської лікарні міста Києва характеристики виглядають наступним чином: середня кількість пацієнтів в день $\lambda = 90$, а середня кількість днів перебування пацієнта в реанімаційній палаті $\mu = 7$ днів.

Для моделювання роботи реанімаційної палати використовується пакет R simmer, який дозволяє створювати траєкторії та симулювати роботу системи протягом певного періоду. Функція trajectory() використовується для створення траєкторії пацієнта, де вказуються дії, які він здійснює під час перебування в реанімації, такі як зайняття ліжка, таймаут (час перебування в реанімації) та звільнення ліжка.

Після створення траєкторії пацієнта, за допомогою функції simmer() створюється генератор пацієнтів, який визначає інтенсивність надходження пацієнтів (λ) та тривалість моделювання (наприклад, 365 днів). Також визначається ресурс «ліжко» з відповідною ємністю (кількість ліжок) для реанімаційної палати.

Після виконання моделювання протягом 365 днів отримані результати представлені у таблиці 1. Дані з таблиці можуть бути використані для подальшого аналізу та порівняння ефективності роботи Олександрівської лікарні з середньо київськими показниками.

Це дозволяє провести детальний аналіз та порівняти ефективність роботи реанімаційних палат у різних медичних установах, що має значення для вдосконалення медичної допомоги, забезпечення задоволеності пацієнтів та оптимізації використання ресурсів.

Таблиця 1-Порівняльна таблиця моделі СМО київських лікарень та Олександрівської лікарні

Назва показника	Середній результат київських лікарень	Олександрівська лікарня
Загальна кількість пацієнтів	184147	31847
Кількість обслугованих пацієнтів	174071	31429
Вірогідність відмови	0.0518	0.0131
Середня кількість зайнятих ліжок	5563	606
Середній час перебування у палаті	10.9	6.7
Завантаженість системи	0.9492	0.9351

В таблиці 1 одними з найважливіших характеристик є вірогідність відмови пацієнту та завантаженість системи. Вірогідність відмови для київських лікарень в чотири рази більша за значення Олександрівської лікарні. Враховуючи те, що пацієнти, що потрапляють до реанімації, потребують негайної та життєво важливої допомоги, цей показник є досить великим. У подальшому дослідженні цей показник будемо наближати до відповідного значення в Олександрівській лікарні.

За допомогою функції plot, вбудованій у бібліотеці simmer.plot, будуємо еволюцію середньої кількості пацієнтів в палаті протягом одного року. На рисунках 3-4 показано завантаженість системи протягом заданого періоду часу.

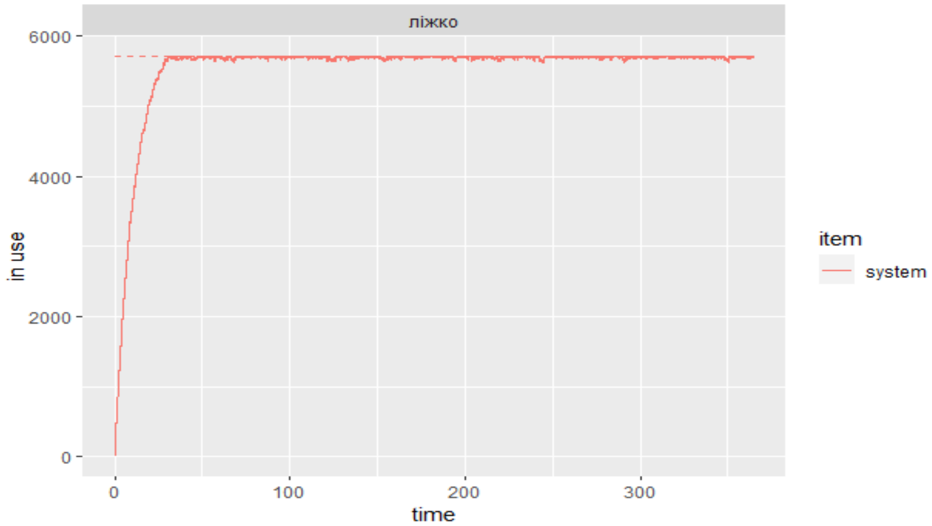

Рисунок 3-Завантаженість системи київських лікарень

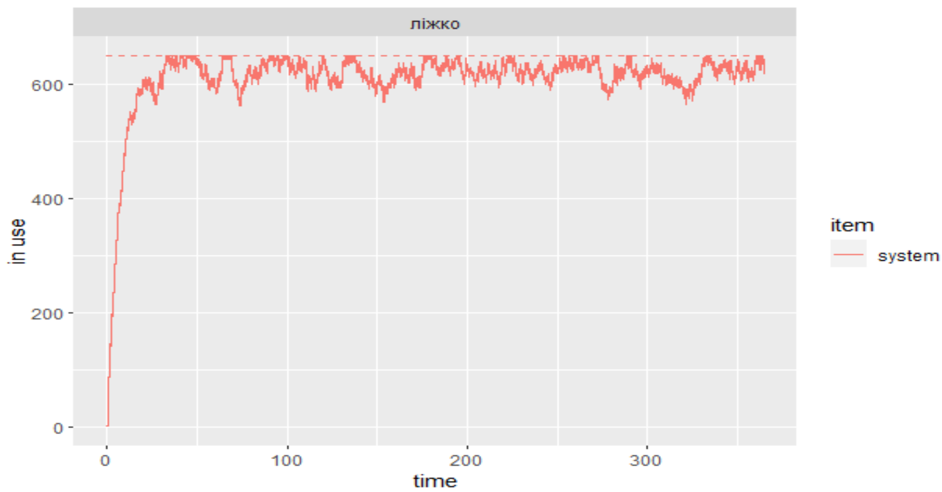

Рисунок 4-Завантаженість системи Олександрівської лікарні

Початково в моделі реанімаційної палати не було жодних зайнятих ліжок. Якщо враховувати перші 20-40 днів роботи, то цей період не дає достовірного уявлення про функціонування системи в цілому. Проте після цього періоду робота стабілізується, і можна спостерігати, що кількість пацієнтів у палаті наближається до середнього значення. Це означає, що система починає працювати в стабільному (стаціонарному) режимі.

Тривалість лікування у критичних пацієнтів є непередбачуваною, у порівнянні з плановими пацієнтами. Змоделюємо час проведений у системі пацієнтами. Він варіюється від 17 хвилин до 138 днів для київських лікарень та від 5 хвилин до 74 днів для Олександрівської лікарні. Відповідні результати можна бачити на рисунках 5-6.

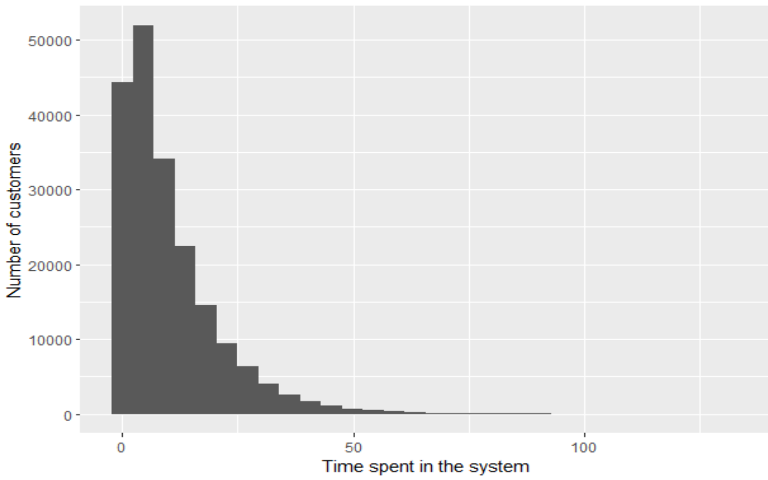

Рисунок 5-Тривалість перебування у київських лікарнях (в днях)

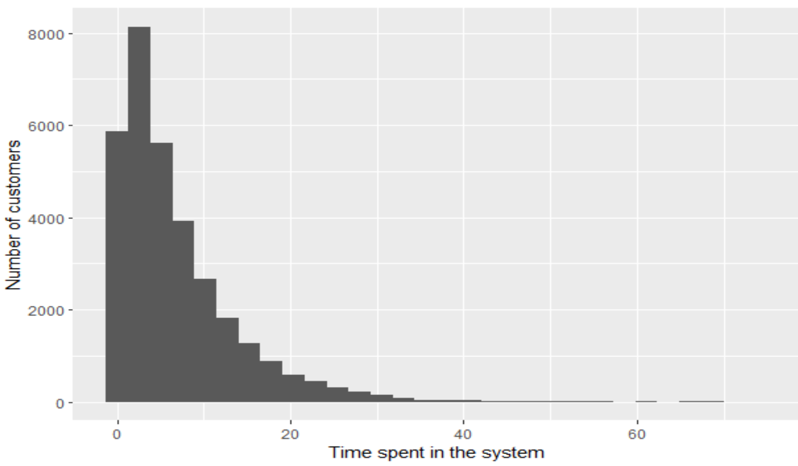

Рисунок 6-Тривалість перебування в Олександрівській лікарні (в днях)

Розглянемо, як буде впливати зміна базових параметрів на завантаженість системи та вірогідність відмови, наближаючи значення вірогідності відмови у київських лікарнях до відповідного значення в Олександрівській лікарні.

Зміна кількості ліжок. Ефективне функціонування палати залежить від належної кількості доступних ліжок, яка повинна відповідати потребі в наданні адекватної догляду та обслуговування пацієнтів. Одним із факторів, що впливають на зміну кількості ліжок, можуть бути технологічні або медичні зміни. Впровадження нових методів діагностики або лікування може вимагати спеціалізованих ліжок або обладнання, що може змінити загальну кількість ліжок у палаті. Крім того, зміна медичних стандартів або протоколів також може призвести до перегляду кількості ліжок з урахуванням нових вимог та рекомендацій.

Залежність між кількістю ліжок у реанімаційній палаті та ймовірністю відмови пацієнтів можна проаналізувати за допомогою графіку, зображеного на рисунку 7. Діапазон кількості ліжок на графіку у всьому Києву становить від 5721 до 6000. Зі збільшенням кількості ліжок, природно, ймовірність відмови пацієнтам буде зменшується. Проте при цьому також зменшується завантаженість палати до дуже низького рівня, що призводить до простою ліжок, що збільшує витрати лікарні на їх утримання.

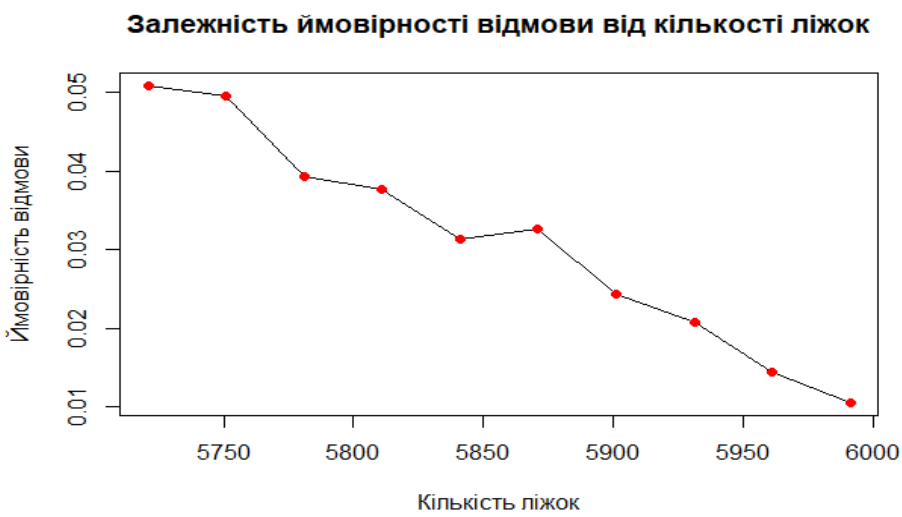

Рисунок 7-Залежність вірогідності відмови від кількості ліжок

Оптимальною кількістю ліжок в реанімаціях Києва є 5954, що є на 233 більше ніж початкове значення. Це вказує на необхідність збільшення кількості ліжок для забезпечення оптимального функціонування палати та задоволення потреб пацієнтів. При оптимальній кількості ліжок вірогідність відмови складає 0.013. Лише 1.3 % пацієнтів, які потрапляють до реанімаційної палати, отримують відмову у наданні необхідної медичної допомоги. Низький рівень вірогідності відмови свідчить про ефективне функціонування палати та здатність задовольняти потреби пацієнтів на бажаному рівні Олександрівської лікарні. Кількість пацієнтів збільшилася на 6294 пацієнта, а середня кількість зайнятих ліжок складає 96 % від усієї кількості. Відповідні результати та їх порівняння наведені у таблиці 2.

Таблиця 2-Вплив зміни кількості ліжок в реанімаційних блоках м. Києва

Загальна кількість ліжок	Загальна кількість пацієнтів	Кількість обслуго-ваних пацієнтів	Вірогі-дність відмови	Середня кількість зайнятих ліжок	Середній час перебу-вання у палаті	Заванта-женість системи
5721	184147	174071	0.0518	5563	10.9	0.9492
5954	190942	190609	0.0135	5747	10.5	0.9086

Відповідні графіки завантаженості системи і тривалості перебування пацієнтів у палаті зображені на рисунку 8:

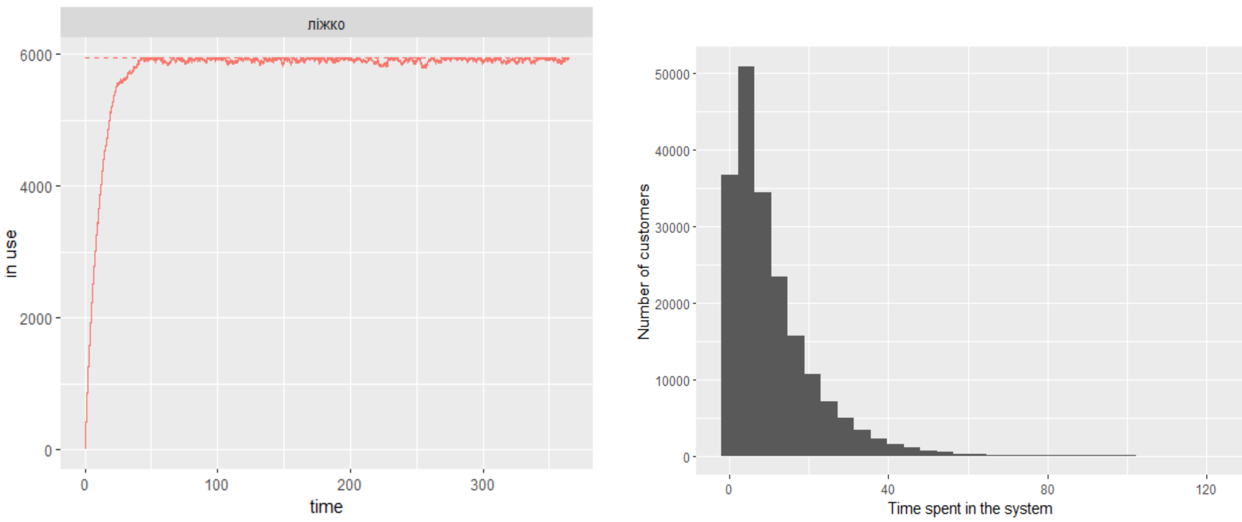

Рисунок 8-Завантаженість системи і тривалість перебування у палаті (днів) при 5954 ліжках

Завантаженість системи зменшилась до 90 % з 94 %. Вирішенням оптимальної ситуації є пошук компромісу між завантаженістю та ймовірністю відмови пацієнтам. Занадто низька завантаженість палати може призвести до значного простою ліжок, що призводить до неоптимального використання ресурсів та надмірних витрат. З іншого боку, занадто висока завантаженість призводить до збільшення ймовірності відмови пацієнтам, що має негативні наслідки. Тривалість перебування у палаті після зміни кількості ліжок не змінилась, оскільки тривалість обслуговування від кількості приладів не залежить, і складає від 17 хвилин до 138 днів.

Зміна інтенсивності надходження пацієнтів. Інтенсивність надходження пацієнтів в палату може змінюватись внаслідок різних факторів, які впливають на потребу в невідкладній медичній допомозі. Один з факторів, що може впливати на інтенсивність надходження пацієнтів,- це епідеміологічна ситуація. В разі спалаху епідемії інфекційного захворювання, наприклад, може спостерігатись значний приріст пацієнтів, які потребують невідкладної медичної допомоги. Це може створити тимчасовий пік у надходженні пацієнтів до реанімаційної палати, що вимагатиме адекватного реагування та ресурсів для задоволення збільшеного попиту.

При аналізі впливу зміни інтенсивності надходження, розглядається два ключових фактори: кількість пацієнтів, які потрапляють до реанімаційної палати в певний період, та час, необхідний для обслуговування кожного пацієнта.

Змінивши час обслуговування одного пацієнта з 11 днів до 10 вірогідність відмови склала 0.0023, що менше за відповідний показник 0.013 для Олександрівської лікарні. Хоча в умовах війни та епідемій більш можливим є збільшення часу перебування в реанімаційному відділенні.

Таблиця 3-Вплив зміни часу обслуговування

Час обслуго-вування пацієнта	Загальна кількість пацієнтів	Кількість обслуго-ваних пацієнтів	Вірогі-дність відмови	Середня кількість зайнятих ліжок	Середній час перебування у палаті	Заванта-женість системи
11	184147	174071	0.0518	5563	10.9	0.9492
10	194179	193734	0.0023	5299	9.7	0.8477

Кількість обслуговуваних пацієнтів збільшилася на 19663 пацієнта, а середня кількість зайнятих ліжок складає 93% від усієї кількості. Було відмовлено усього 445 пацієнтам, що на 9631 менше за початкове значення.

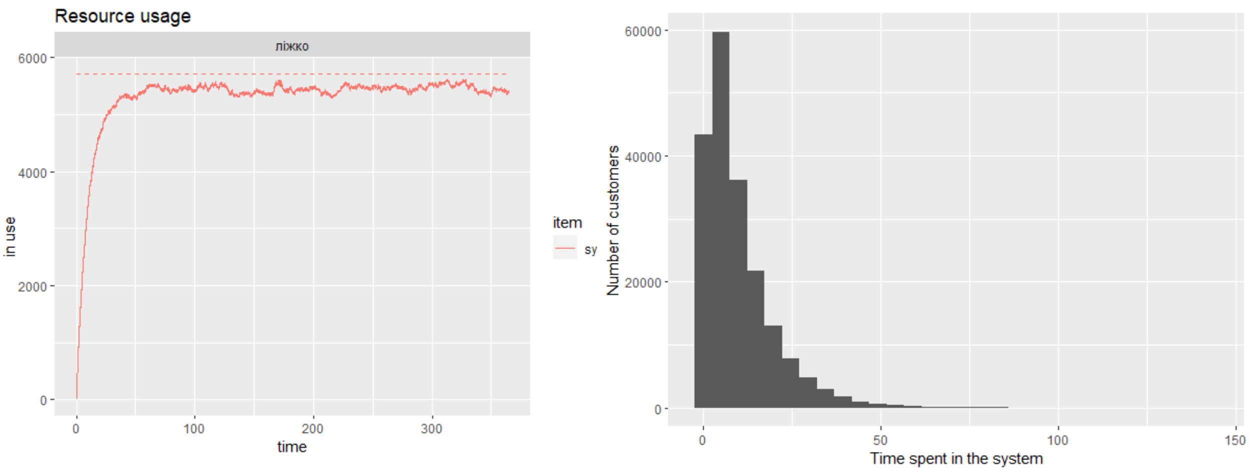

Рисунок 9-Завантаженість системи і тривалість перебування у палаті при зміні часу обслуговування

Для зменшення вірогідності відмови пацієнтам, важливо знизити кількість пацієнтів, які потрапляють до реанімаційної палати впродовж дня. Проте, в деяких ситуаціях це може бути нереалістичним варіантом через наявність епідеміологічних вибухів, воєнних конфліктів, або інших кризових ситуацій, коли кількість хворих різко зростає. Залежність вірогідності відмови від кількості пацієнтів в день зображена на рисунку 10, де кількість пацієнтів варіюється від 498 до 548 з кроком 10.

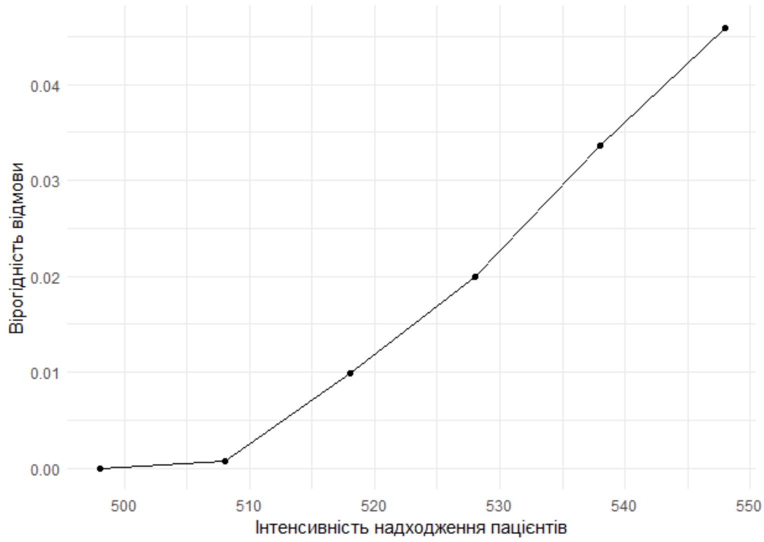

Рисунок 10-Залежність вірогідності відмови від кількості пацієнтів в день

Оптимальною кількістю пацієнтів є 518 людей в день, тоді вірогідність відмови складає 0.008.

Таблиця 4-Вплив зміни кількості пацієнтів у день

Кількість пацієнтів в день	Загальна кількість пацієнтів	Кількість обслуго-ваних пацієнтів	Вірогі-дність відмови	Середня кількість зайнятих ліжок	Середній час перебу-вання у палаті	Заванта-женість системи
548	184147	174071	0.0518	5563	10.9	0.9492
518	183277	181823	0.0080	5487	10.6	0.9077

За результатами зміни кількості пацієнтів у день у реанімаційних палат, виявлено, що кількість обслуговуваних пацієнтів у Києві збільшилася на 7752 пацієнта. Це свідчить про зростання потоку пацієнтів, які потребують реанімаційної допомоги, а також може свідчити про підвищення потреби в таких послугах.

Крім того, виявлено, що середня кількість зайнятих ліжок становить 95% від загальної кількості. Це означає, що практично всі ліжка в реанімаційній палаті є зайнятими протягом досліджуваного періоду. Така висока завантаженість ліжок може свідчити про потребу у додаткових ресурсах для задоволення зростаючих потреб пацієнтів.

Мінімальний час обслуговування пацієнта становить 7 хвилин, що свідчить про швидке обслуговування деяких пацієнтів, які можуть не потребувати тривалого перебування в реанімації. З іншого боку, максимальний час обслуговування сягає 126 днів, що свідчить про складні випадки, довготривалу або хронічну необхідність у реанімаційній допомозі певних пацієнтів.

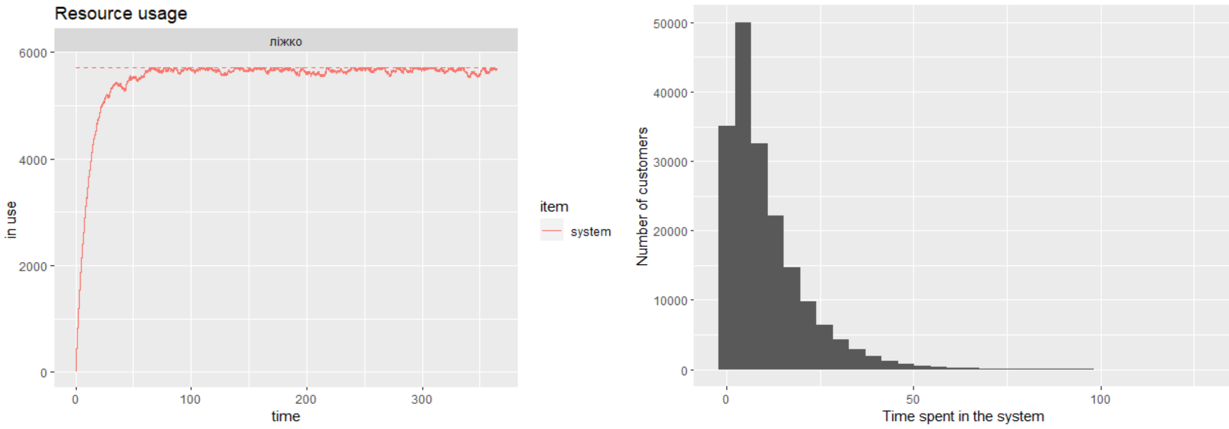

Рисунок 11-Завантаженість системи і тривалість перебування у палаті при зміні кількості пацієнтів в день

Деякі пацієнти можуть бути швидко обслужені та виписані з реанімації у найкоротший часовий проміжок. Можливо, це стосується невеликих процедур, консультацій або незначних медичних втручань. Різниця між мінімальним та максимальним часом обслуговування свідчить про різноманітність медичних процедур та потреб пацієнтів. Це важливий аспект в управлінні лікарняними ресурсами та плануванні лікування. Лікарні повинні мати достатні ресурси та гнучкість, щоб відповідати різним потребам пацієнтів і забезпечувати оптимальне обслуговування.

При розгляді впливу інтенсивності надходження та часу лікування на вірогідність відмови, виявляється, що ці два фактори мають різний вплив на результат. Зокрема, підвищення інтенсивності надходження пацієнтів призводить до більш значного зростання ймовірності відмови порівняно зі збільшенням часу перебування пацієнта в палаті.

Наприклад, при початковій вірогідності відмови 0.0518, якщо середній термін перебування пацієнта в палаті збільшиться до 15 днів, ймовірність відмови може суттєво збільшитися приблизно у 5.7 разів. Тоді як при зменшенні кількості пацієнтів в день на 40 вірогідність відмови зменшується у 86 разів. Це свідчить про те, що тривалість лікування має менший вплив на вірогідність відмови порівняно з інтенсивністю надходження пацієнтів. В такому випадку може бути необхідно розглянути заходи для зменшення кількості пацієнтів, наприклад, шляхом покращення процесів передачі або лікування пацієнтів. Аналіз таблиці 5 показує, що інтенсивність надходження пацієнтів та тривалість їх перебування в палаті мають суттєвий вплив на ймовірність відмови. Раціональне керування цими факторами може допомогти знизити рівень вірогідності відмови та покращити якість медичних послуг, наданих у відповідній палаті.

Таблиця 5-Ймовірність відмови в залежності від значень μ та λ

μ\λ	508	518	528	538	548
1/11	0.0006	0.0079	0.0197	0.0365	0.0518
1/12	0.0633	0.0771	0.0952	0.1087	0.1306
1/13	0.1279	0.1424	0.1622	0.1778	0.1889
1/14	0.1934	0.2065	0.2212	0.2384	0.2537
1/15	0.2470	0.2569	0.2688	0.2873	0.2973

При зміні показників μ та λ важливо враховувати не лише вірогідність відмови, але й завантаженість системи. Вона відображає, наскільки ефективно система може обробляти та забезпечувати лікування пацієнтів.

Завантаженість системи може бути оцінена за допомогою показників, таких як середня кількість зайнятих ліжок, середня кількість пацієнтів, які очікують обслуговування, або середня довжина черги. Якщо зміни в показниках μ та λ призводять до збільшення цієї характеристики до критичних значень, це може призвести до перевантаження ресурсів, погіршення якості надання медичних послуг та зростання вірогідності відмови.

Тому, при оцінці впливу зміни показників μ та λ, необхідно враховувати вплив цих показників на завантаженість системи. Наприклад, збільшення інтенсивності надходження пацієнтів може збільшити вірогідність відмови, але якщо система має достатньо резерву ресурсів (ліжок, медичного персоналу тощо), то завантаженість може залишатися на прийнятному рівні.

Таким чином, при управлінні показниками μ та λ необхідно балансувати між досягненням прийнятного рівня вірогідності відмови та підтриманням оптимальної завантаженості системи. Відповідну залежність показників можна бачити на таблиці 6.

Таблиця 6-Завантаженість палати в залежності від значень μ та λ

μ\λ	508	518	528	538	548
1/11	0.7786	0.8077	0.8957	0.9159	0.9477
1/12	0.7957	0.8577	0.9195	0.9569	0.9580
1/13	0.8110	0.8642	0.9246	0.9672	0.9659
1/14	0.8244	0.8696	0.9204	0.9694	0.9694
1/15	0.8410	0.8710	0.9322	0.9506	0.9727

Зі збільшенням інтенсивності надходження пацієнтів і тривалості їх перебування в палаті зростає завантаженість системи. Це означає, що більше пацієнтів надходить і перебуває в палаті одночасно. Особливо помітне зростання завантаженості спостерігається при збільшенні інтенсивності надходження пацієнтів.

Збільшення коефіцієнта завантаженості відбувається швидше при збільшенні інтенсивності надходження пацієнтів, ніж при зростанні тривалості їх перебування. Це може вказувати на те, що при великому потоку нових пацієнтів система швидко заповнюється, використовуючи доступні ліжка, але виписка пацієнтів затримується, що призводить до збільшення цієї характеристики. З іншого боку, збільшення тривалості перебування пацієнтів призводить до більш поступового зростання завантаженості, оскільки в цьому випадку нові пацієнти не надходять так швидко, як старі виписуються.

Ці спостереження показують, що інтенсивність надходження пацієнтів і тривалість їх перебування в палаті є важливими факторами, які впливають на завантаженість системи.

Використовуючи початкові значення, які дорівнюють 548 пацієнтам на добу та середньому терміну перебування 11 днів, бачимо, що зменшення інтенсивності на десять людей та збільшення тривалості перебування на один день призводить до збільшення завантаженості палати на приблизно 1%.

Середня завантаженість палати складає 93%. Це означає, що палата працює майже на своїх максимальних можливостях і має високу ймовірність відмови пацієнтам. З іншого боку, низький рівень завантаженості є катастрофічним, оскільки більшість ліжок не використовується, і кошти, витрачені на їх обслуговування, йдуть даремно.

З аналізу таблиці 6 можна зробити декілька важливих висновків. Перш за все, інтенсивність надходження пацієнтів і середня тривалість їх перебування в палаті мають значний вплив на завантаженість системи. Збільшення інтенсивності надходження або тривалості перебування призводить до зростання завантаженості палати. Збільшення інтенсивності надходження пацієнтів має більший вплив на завантаженість, ніж зростання тривалості перебування. Це означає, що збільшення кількості пацієнтів, що надійшли, призводить до швидшого насичення системи, ніж збільшення тривалості лікування.

При проєктуванні та управлінні реанімаційною палатою необхідно враховувати інтенсивність надходження пацієнтів та тривалість їх перебування, щоб забезпечити оптимальне використання ресурсів та надати належну медичну допомогу пацієнтам. Важливо знаходити баланс між цими двома факторами, щоб забезпечити ефективну роботу палати та мінімізувати ймовірність відмови пацієнтам.

ВИСНОВКИ

В роботі проведено дослідження історії виникнення та розвитку теорії масового обслуговування, розкрито теоретичні та практичні основи поняття систем масового обслуговування, що дозволяє сформувати ряд висновків.

Теорія масового обслуговування є одним з найважливіших розділів економіко-математичного моделювання і теоретичною основою ефективного конструювання та експлуатації систем масового обслуговування. Вона вивчає та порівнює різні ситуації, що характеризуються утворенням черг, і таким чином використовується для оптимізації прикладних завдань.

При грамотному підході і знанні теорії черг, можна задавати такі параметри функціонування системи, які зведуть витрати на утримання системи масового обслуговування до мінімуму.

Системи масового обслуговування зустрічаються в багатьох галузях економіки (виробництво, техніка-військова область, медицина та ін.) і призначені для багаторазового використання при виконанні однотипних завдань.

Моделювання дозволяє оцінити різні сценарії та їх вплив на систему, що є надзвичайно важливим для забезпечення оптимальної медичної допомоги, бо реальні експерименти з функціонуванням лікарень можуть бути ризикованими, оскільки ставлять під загрозу життя пацієнтів.

Розглянута багатоканальна система масового обслуговування з відмовами, де потік пацієнтів моделювався як пуассонівський процес, а час перебування на лікуванні - як випадкова величина, яка має експоненційний розподіл. Ймовірність відмови пацієнтам у київських лікарнях є одним з ключових показників і важливим завданням було знайти способи зменшення цієї ймовірності, наближаючи її до відповідного значення Олександрівської лікарні, яка зарекомендувала себе такою, що працює ефективно.

Виявлено, що ефективним шляхом зменшення ймовірності відмови є збільшення кількості ліжок в палаті. Зростання кількості ліжок призводило до експоненційного зменшення ймовірності відмови, тому відносно невелике збільшення кількості ліжок може дати значний позитивний ефект. Збільшення кількості ліжок може бути корисним, але необхідно знаходити баланс, оскільки висока завантаженість при недостатній кількості пацієнтів може призвести до неефективного використання ресурсів.

Інтенсивність надходження пацієнтів та середній термін їх перебування в палаті суттєво впливають на ймовірність відмови та завантаженість системи. Ймовірність відмови швидше зростає при збільшенні інтенсивності надходження, ніж при збільшенні середнього терміну перебування. Також встановлено, що середня завантаженість палати залежить від цих показників аналогічно до ймовірності відмови.

Отримані результати дозволяють формулювати і розв'язувати оптимізаційні задачі, спрямовані на мінімізацію витрат та ризиків, пов'язаних з відмовою пацієнтів у медичному обслуговуванні. Такі завдання можуть включати оптимізацію розподілу ресурсів, включаючи персонал, а також розгляд можливості переведення невідкладних пацієнтів до інших медичних підрозділів або закладів.

Важливим результатом даної дипломної роботи стало розкриття особливостей математичних методів, які формують основу базових моделей масового обслуговування. В третьому розділі розглянуто окремий випадок обчислення оптимальної стратегії планування медичних закладів міста Києва в порівнянні з Олександрівською лікарнею. Моделювання систем масового обслуговування в реанімаційній палаті надає цінні інструменти для оптимізації та покращення медичної допомоги. У цій роботі лише передбачено прибуття пацієнтів невідкладної допомоги. Однак, різні пацієнти мають різний ступінь тяжкості, що потребує окремого дослідження.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Hlynka M. Queueing theory page.
2. Stordahl K. 3The History Behind the Probability Theory and the Queuing Theory. Telektronikk Vol. 89, No. 2, 2007.
3. Iversen V. Teletraffic Engineering Handbook. ITC in Cooperation with ITU-DSG2, 2005.
4. Myskja A. A tribute to A. K. Erlang. Telektronikk Vol. 91, No. 2/3, 1995.
5. David G. Kendall. Some Problems in the Theory of Queues. Journal of the Royal Statistical Society Vol 13, 1951.
6. Richard H. Moyer and Susan A. Everett. Queuing theory—Is my line always the slowest? Science Scope Vol. 39, No. 4, Science and Engineering Practices, 2015.
7. Mandelbaum A. Service Engineering (Science, Management): A Subjective View, 2007.
8. Güneş M. Queueing Models. Modeling and Performance Analysis with Simulation, 2011.
9. Komenda I. Modelling critical care unit activities through queueing theory, 2013.
10. Zhang Y., Zhang J. Forecasting patient arrivals at emergency department using calendar and meteorological information, 2022.
11. Ponkshe S., Bhasin S., Hooghan S., Vazifdar S. Queuing theory in the healthcare sector, 2022.
12. Sztrik J. Basic Queueing Theory, 2021.
13. Takagi H. Queueing analysis : a foundation of performance evaluation, 1991.
14. Robert B. Cooper. Introduction to queuing theory second edition, 1981.
15. Banks J., Carson S. J, Nelson B., David M. Nicol.Discrete-Event System Simulation, Fourth Edition, 2005.

16. Jain R. The Art of Computer Systems Performance Analysis, 1991.
17. Gaujal B., Hyon E., Alain M. Optimal Routing in two parallel Queues with exponential service times.
18. Dinard van der Laan. The structure and performance of optimal routing sequences, 2003.
19. Lothaire M. Sturmian Words. Algebraic Combinatorics on Words. Cambridge University Press, 2002.
20. Altman E. Applications of Markov Decision Processes in Communication Networks : a Survey. Markov Decision Processes, Models, Methods, Directions, and Open Problems., 2001.

ДОДАТОК А

```
library(simmer)
library(simmer.plot)
# Задаємо параметри
mu <- 1/11 # середній час перебування в ліжку
numBeds <- 5721 # кількість ліжок
lambda <- 548 # інтенсивність надходження пацієнтів
# Створюємо траєкторію пацієнта
patient <-
  trajectory() %>%
  seize("ліжко", amount = 1) %>%
  timeout(function() rexp(1, mu)) %>%
  release("ліжко", amount = 1)
# Створюємо генератор пацієнтів
hospital <-
  simmer() %>%
  add_resource("ліжко", capacity = numBeds, queue_size = 0) %>%
  add_generator("Пацієнт", patient, function() rexp(1, lambda)) %>%
  run(365)
# Отримуємо результат
hospital_arrivals <- get_mon_arrivals(hospital)
number_balked <- sum(!get_mon_arrivals(hospital)$finished)
paste("Вірогідність відмови складає:", number_balked / nrow(hospital_arrivals))
#Кількість пацієнтів
sum(get_mon_arrivals(hospital)$finished)
delta_time <- diff(get_mon_resources(hospital)$time)
delta_time <- c(delta_time, 0)
```

```
res <- get_mon_resources(hospital)$system * delta_time
N <- sum(res, na.rm=TRUE) / max(get_mon_resources(hospital)$time)
N
mean(get_mon_arrivals(hospital)$activity_time)
number_patients <- sum(get_mon_arrivals(hospital)$finished)
paste("Кількість пацієнтів:", number_patients)
system_load <- number_patients / (numBeds * 365)
paste("Завантаженість системи:", system_load)
# Еволюція середньої кількості пацієнтів в палаті
plot(get_mon_resources(hospital),
     what = "resources",
     metric = "usage",
     names = "ліжко",
     items = "system",
     steps = TRUE)
#час проведений в системі графік
hospital %>%
  get_mon_arrivals %>%
  ggplot(aes(end_time - start_time)) +
  geom_histogram() +
  xlab("Time spent in the system") +
  ylab("Number of customers")
nonzero_durations <- hospital_arrivals$end_time - hospital_arrivals$start_time
nonzero_durations <- nonzero_durations[nonzero_durations > 0]
min_duration <- min(nonzero_durations)
max_duration <- max(hospital_arrivals$end_time - hospital_arrivals$start_time)
paste("Мінімальний час обслуговування (без нульових значень):", min_duration)
```

```
paste("Максимальний час обслуговування:", max_duration)
# Задаємо діапазон кількості ліжок
numBeds_range <- seq(5721, 6000, by = 30)
# Обчислюємо ймовірності відмови для кожної кількості ліжок
balking_probabilities <- sapply(numBeds_range, get_balking_probability)
# Побудова графіка
plot(numBeds_range, balking_probabilities, type = "l",
     xlab = "Кількість ліжок", ylab = "Ймовірність відмови",
     main = "Залежність ймовірності відмови від кількості ліжок",
     grid = TRUE)
# Додавання точок перетину
points(numBeds_range, balking_probabilities, col = "red", pch = 16)
library(ggplot2)
lambda <- seq(498, 548, by=10) # інтенсивність надходження пацієнтів
# Функція для розрахунку вірогідності відмови
calculate_balked_probability <- function(lambda) {
  hospital <-
    simmer() %>%
    add_resource("ліжко", capacity = numBeds, queue_size = 0) %>%
    add_generator("Пацієнт", patient, function() rexp(1, lambda)) %>%
    run(365)
  number_balked <- sum(!get_mon_arrivals(hospital)$finished)
  return(number_balked / nrow(get_mon_arrivals(hospital)))
}
# Розраховуємо вірогідність відмови для кожного значення інтенсивності надходження
balked_probabilities <- sapply(lambda, calculate_balked_probability)
# Створюємо датафрейм для побудови графіку
data <- data.frame(lambda, balked_probabilities)
# Побудова графіку
```

```
ggplot(data, aes(x = lambda, y = balked_probabilities)) +
  geom_line() +
  geom_point() +
  labs(x = "Інтенсивність надходження пацієнтів", y = "Вірогідність відмови") + theme_minimal()
target_probability <- 0.013
# Знаходження індексу найближчого значення до цільової ймовірності
index <- which.min(abs(balked_probabilities - target_probability))
# Значення lambda при найближчій вірогідності відмови до цільової
optimal_lambda <- lambda[index]
optimal_lambda
lambda <- c(508, 518, 528, 538, 548)  # значення для lambda
mu <- c(1/10, 1/11, 1/12, 1/13, 1/14)  # значення для mu
for (i in 1:length(lambda)) {
  for (j in 1:length(mu)) {
    patient <- trajectory() %>%
      seize("ліжко", amount = 1) %>%
      timeout(function() rexp(1, mu[j])) %>%
      release("ліжко", amount = 1)
    hospital <- simmer() %>%
      add_resource("ліжко", capacity = numBeds, queue_size = 0) %>%
      add_generator("Пацієнт", patient, function() rexp(1, lambda[i])) %>%
      run(100)  # Зменшення кількості днів моделювання
    number_balked <- sum(!get_mon_arrivals(hospital)$finished)
    probability_balked <- number_balked / nrow(get_mon_arrivals(hospital))

    cat("Значення для lambda =", lambda[i], "та mu =", mu[j], ":", probability_balked, "\n")
  }
}
```

```
# Розрахунок завантаженості системи
combinations <- expand.grid(lambda = lambda, mu = mu)  # всі можливі комбінації значень lambda та mu
combinations$system_load <- NA  # створення стовпця для збереження результатів
for (i in 1:nrow(combinations)) {
  patient <- trajectory() %>%
    seize("ліжко", amount = 1) %>%
    timeout(function() rexp(1, combinations$mu[i])) %>%
    release("ліжко", amount = 1)
  hospital <- simmer() %>%
    add_resource("ліжко", capacity = numBeds, queue_size = 0) %>%
    add_generator("Пацієнт", patient, function() rexp(1, combinations$lambda[i])) %>%
    run(365)
  avg_time <- mean(get_mon_resources(hospital)$server)  # середній час перебування пацієнта в системі
  avg_arrival <- 1 / combinations$lambda[i]  # середній інтервал надходження пацієнтів
  combinations$system_load[i] <- (avg_time / avg_arrival) * 100  # розрахунок завантаженості у відсотках
}
# Виведення результатів
result <- data.frame(combinations)
result
```