

На правах рукопису

Перестюк Юрій Миколайович

УДК 517.9

**ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ РОЗРИВНИХ
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ**

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:

Капустян Олексій Володимирович

доктор фізико-математичних наук,
професор

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ I. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	
СИСТЕМ	12
1.1. Огляд основних наукових робіт за темою дисертації	12
1.2. Загальна характеристика диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням [52]	19
1.3. Багаточастотні коливання в динамічних системах.....	24
Висновки до розділу 1	29
РОЗДІЛ II. ЛІНІЙНІ РОЗРИВНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ НА ПЛОЩИНІ	30
2.1. Означення розривної динамічної системи.....	30
2.2. Лінійні розривні динамічні системи на площині	36
2.3. Випадок комплексних власних чисел матриці диференціальної системи рівнянь	47
Висновки до розділу 2	57
РОЗДІЛ III. КОЛИВАННЯ В СЛАБОНЕЛІНІЙНИХ РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ НА ПЛОЩИНІ	58
3.1. Випадок сідлової особливої точки	58
3.2. Випадок особливої точки типу вироджений вузол.....	65
3.3. Про коливання маятника в середовищі з опором	70
Висновки до розділу 3	87
РОЗДІЛ IV. ІНВАРІАНТНІ ТОРОЇДАЛЬНІ МНОЖИНИ ТА ЇХ СТІЙКІСТЬ	89
4.1. Основні поняття теорії динамічних систем.....	89
4.2. Про стійкість тороїдального многовиду одного класу динамічних систем ..	96

4.3. Випадок Лаппо-Данилевського	108
4.4. Стійкість інваріантної тороїдальної множини імпульсної системи	116
4.5. Багаточастотні системи з імпульсним збуренням	123
Висновки до розділу 4	136
ВИСНОВКИ	137
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	138

Вступ

Актуальність теми. Вивчаючи ті чи інші природні явища, теоретично досліджуючи фізичні чи іншого роду системи, ми завжди вимушені в тій чи іншій мірі ідеалізувати властивості процесів, що вивчаємо.

Поряд з актуальністю дослідження математичних моделей з якісного і кількісного боку, не менш важливими стають питання, що відносяться до проблеми математичного опису реальних процесів, тобто питання математичного моделювання.

Під математичною моделлю розуміють наближений опис певного класу еволюційних процесів, виражений математичними символами. Аналіз математичних моделей дає можливість проникнути в суть процесу (явища, функціонування системи), який нами вивчається, і є потужним засобом пізнання навколишнього світу. Процес математичного моделювання умовно можна поділити на декілька етапів.

На першому з них формулюються закони, що зв'язують основні елементи моделі, вказують динаміку зміни їх в часі. Цей етап вимагає глибокого проникнення в природу явища, знання законів природи (фізичних, механічних, хімічних, біологічних, економічних та інших) і закінчується записом в математичних термінах сформульованих якісних уявлень про зв'язки між елементами моделі.

На другому етапі проводиться дослідження математичних задач, до яких привело математичне моделювання на першому етапі. Тут розробляється математичний апарат, необхідний для аналізу математичної моделі. Дуже часто різні за своєю природою задачі приводять до однієї математичної моделі. Класичним прикладом такої ситуації є математична модель процесу розмноження певної популяції і модель процесу розпаду радіоактивної речовини. Ці обставини надають можливість досліджувати такі типові математичні задачі як самостійний об'єкт, абстрагуючись від конкретного

вивчаючого явища, чи системи.

На наступних етапах процесу математичного моделювання з'ясовується питання про узгодження результатів спостереження реального процесу з теоретичними наслідками моделі в границях точності спостережень, а також проводиться уточнення моделі з врахуванням вже накопленої інформації.

Досліджуючи різноманітні задачі природознавства, часто доводиться мати справу з еволюційними процесами, що описуються звичайними диференціальними рівняннями і піддаються короткочасним збуренням. При математичному моделюванні такого роду процесів часто тривалістю таких збурень зручно знехтувати, вважаючи, що вони мають характер імпульсу (поштовху, удару).

Така ідеалізація приводить до необхідності вивчення систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких скачкоподібно змінюються. Але не тільки ідеалізація заміни короткочасних збурень на "миттєві" приводить до диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями. Часто розриви певних залежностей в системі, яку ми вивчаємо, є суттєвою її характеристикою.

Так, наприклад, вивчаючи рух сталевої кульки, що вільно падає з певної висоти на горизонтальну сталю пластину, бачимо, що в математичній моделі цього процесу в момент удару кульки об сталю пластину швидкість кульки "миттєво" змінює свій знак.

Багато конкретних задач, математичними моделями яких є диференціальні рівняння з розривними траєкторіями, можна знайти в різних областях математичного природознавства: механіці [1, 8], електротехніці [13], керуванні процесами [18], динаміці літальних апаратів [23], економіці [14] та в інших галузях науки і техніки.

Перші математичні моделі в вигляді диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями з'явилися в 30-х роках минулого століття для розрахунку і аналізу точності годинника [1], де методами якісної теорії диферен-

ціальних рівнянь вивчали властивості системи диференціальних рівнянь з кусково-лінійними правими частинами. В тіж само часи для моделювання процесів в розривних динамічних системах використовувались диференціальні рівняння з узагальненими функціями. Так, Крилов М.М. і Боголюбов М.М. в класичній монографії "Введение в нелинейную механику" , описуючи математичну модель ударного механізму годинника, застосували формалізм δ - функції Дірака і вперше показали, що метод усереднення можна успішно застосувати не тільки до класичних диференціальних рівнянь, а й до диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями.

Пізніше Самойленко А.М. [55] асимптотичними методами нелінійної механіки дослідив широкий клас нелінійних диференціальних рівнянь з нерегулярними правими частинами.

Інтерес до вивчення і дослідження динамічних систем з розривними траєкторіями на сьогодні пов'язаний, насамперед, з запитамі нової техніки, де імпульсні системи автоматичного регулювання, імпульсні обчислювальні системи посіли вагоме місце і інтенсивно розвиваються. Природно, що останнім часом істотно збільшилась кількість математичних робіт з диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями в математичних школах як в Україні, так і далеко за її межами.

В передмові до монографії Самойленка А.М. і Перестюка М.О. "Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием" академік Митропольский Ю.О. написав: "... наиболее систематические и глубокие исследования были выполнены в киевской школе нелинейной механики. Именно математикам этой школы удалось подойти к проблеме достаточно широко, рассмотреть ее в общем виде, поставить и решить ряд задач, актуальных для приложений, но не исследовавшихся ранее. С полным основанием можно сказать, что в результате усилий указанной группы киевских математиков сложилась математическая теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием - со своими методами, общими и глубокими ре-

зультатами, специфічними задачами."

Справді, в працях Митропольського Ю.О., Самойленка А.М., Перестюка М.О., Бойчука О.А., Ахметова М.І., Мартинюка Д.І., Самойленка В.Г., Капустяна О.В., Короля І.І., Петришина Р.І., Слюсарчука В.Ю., Теплінського Ю.В., Ткаченка В.І., Трофімчука С.І., Черевка І.М., Чуйка С.М., Хусаїнова Д.Я. та їх учнів глибоко розроблено теорію диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями.

Разом з тим, ця теорія інтенсивно зараз розвивається і ще далеко до її завершення. Зокрема, широке поле в цій теорії ще треба "виорати" навіть для систем диференціальних рівнянь на площині, особливо для нелінійних систем, де ще не завершено вивчення в достатній мірі питання про існування періодичних розв'язків (розривних циклів) таких систем, вплив характеру імпульсних сил на наявність, чи відсутність в динамічній системі таких циклів. Важливою ділянкою дослідження розривних динамічних систем є встановлення достатніх умов існування інваріантних множин розривних динамічних систем, визначених в прямому добутку m - вимірного тора і n - вимірного евклідового простору, дослідження їх стійкості і, по можливості, асимптотичного інтегрування. Такі системи є центральним об'єктом теорії розривних багаточастотних коливань, що зумовлює особливу прикладну цінність досліджень.

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню як лінійних, так і нелінійних систем диференціальних рівнянь на площині, що піддаються імпульсному збуренню в момент проходження фазовою точкою певних заданих ліній, встановленню достатніх умов існування розривних одно- і двоімпульсних як неізолюваних, так і ізолюваних циклів, побудові асимптотичних наближень до цих циклів. В роботі також проведено широке і повне дослідження існування інваріантних множин розривних динамічних систем, визначених в прямому добутку m - вимірного тора і n - вимірного евклідового простору, вказані достатні умови стійкості (нестійкості) цих множин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана в рамках досліджень кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, тема №01БФ038-03 "Розробка якісних та аналітичних методів дослідження та асимптотичного інтегрування нелінійних систем" (номер держреєстрації 0104U003264) та тема №11БФ038-01 "Розробка нових математичних методів моделювання, аналізу та побудови керувань для нелінійних еволюційних систем з складною динамікою" (номер держреєстрації 0111U006677).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження дисертаційної роботи є встановлення достатніх умов існування розривних циклів в лінійних і нелінійних розривних динамічних системах на площині, існування інваріантних множин імпульсних систем, визначених в прямому добутку m -вимірного тора і n -вимірного евклідового простору.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є розривні динамічні системи на площині і в фазовому просторі, що є прямим добутком тора T_m і евклідового простору R^n .

Предмет дослідження. Предметом дослідження є одно- і двоімпульсні розривні цикли, розривні інваріантні тороїдальні многовиди, умови їх існування та стійкості.

Методи дослідження. Для дослідження структури фазових портретів динамічних систем на площині застосовуються методи якісної теорії диференціальних рівнянь, метод усереднення. При дослідженні інваріантних множин використовуються методи інтегральних многовидів нелінійної механіки, метод функції Гріна-Самойленка та прямий метод Ляпунова дослідження стійкості.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

- встановлено необхідні і достатні умови існування розривних періоди-

чних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь на площині, що піддаються імпульсному збуренню при проходженні фазовою точкою фіксованих ліній;

- досліджено питання існування одно- і дво-імпульсних циклів слабо нелінійних розривних динамічних систем на площині;
- встановлено достатні умови асимптотичної стійкості і нестійкості широкого класу лінійних розширень динамічних систем на торі;
- досліджено питання існування інваріантних тороїдальних множин достатньо широкого класу розривних динамічних систем, визначених на прямому добутку m - вимірного тора T_m і n - вимірного евклідового простору R^n , встановлені достатні умови асимптотичної стійкості таких множин.

Практичне значення одержаних результатів. Результати роботи успішно можна застосувати при дослідженні коливних процесів в різноманітних механічних та електромеханічних системах з розривними характеристиками, при дослідженні багаточастотних коливних процесів розривних динамічних систем.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно.

Вони опубліковані в 6 публікаціях, з яких у співавторстві, а саме:

- в статті [85] Королю І.І. належать постановка задачі і обговорення результатів роботи.
- в статті [89] Мамсі К.Ю. належать постановка задачі і обговорення результатів статті.
- в статтях [71, 72] Фекеті П.В. належать теорема про існування інваріантних торів та теорема про збурення багаточастотної системи з імпульсами.

- в статтях [40, 41] Перестюку М.М. належить встановлення достатніх умов існування тороїдальних многовидів.

Наведені в дисертації результати наукових статей одержані дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації Результати дисертаційної роботи доповідалися:

- на семінарі з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники - академіки НАН України Самойленко А.М. та Перестюк М.О.),
- на семінарі з диференціальних рівнянь Ужгородського національного університету (керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Маринець В.В.),
- на семінарі з диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І.І. Мечнікова (керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Євтухов В.М.).

та на конференціях:

- Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 8-10 червня 2011, Київ, Україна;
- Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 27-29 вересня 2012, Ужгород, Україна;
- International Workshop "on the Qualitative Theory of Differential Equations" December 20-22, 2013, Tbilisi, Georgia;
- Third International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics" November 24-29, 2013, Kiev, Ukraine;
- Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" 23-30 червня 2013, Севастополь, Україна;

- Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова, 15-22 червня 2013, Одеса, Україна;
- International Workshop "on the Qualitative Theory of Differential Equations" December 18-20, 2014, Tbilisi, Georgia;
- XVI міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. 14-15 травня 2015, Київ, Україна;
- Друга Всеукраїнська наукова конференція "Прикладні задачі математики" 13-15 жовтня 2016, Івано-Франківськ, Україна;
- Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 19-21 травня 2016, Ужгород, Україна;

Автор висловлює щирю вдячність науковому керівнику доктору фізико-математичних наук професору Капустяну Олексію Володимировичу за постановку задачі, постійну увагу до роботи, всебічну підтримку та допомогу.

Розділ 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В першому розділі проведено огляд літератури за темою дисертації, наведені основні поняття та означення необхідні для подальшого використання в наступних розділах. Описується загальна характеристика систем диференціальних рівнянь, що піддаються імпульсному впливу, їх класифікація та основні властивості. Викладено основні відомості з теорії багаточастотних коливань.

1.1. Огляд основних наукових робіт за темою дисертації

Вивчаючи різні явища природи, розв'язуючи різноманітні задачі механіки, фізики і техніки, економіки, біології та медицини, інших наук, часто доводиться мати справу з еволюційними процесами, що піддаються впливу короткочасних збурень. Моделюючи еволюцію таких процесів, часто зручно знехтувати тривалістю збурень і вважати, що вони носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація приводить до необхідності досліджувати динамічні системи з розривними траєкторіями. Разом з тим треба зауважити, що розрив фазової траєкторії не обов'язково є наслідком ідеалізації короткочасного збурення. В багатьох випадках такі розриви є суттєвими характеристиками досліджуваного процесу (наприклад, аеродинамічний стрибок при перевищенні швидкості звуку, конверсія виробництва та ін.)

Проблема всебічного вивчення динамічних систем з розривними траєкторіями не є новою. Задачі такого роду з'явилися ще на початку минулого століття в роботах з нелінійної механіки і привабили фізиків можливістю адекватно описувати процеси в нелінійних коливних системах. Добре відомим прикладом такої задачі є математична модель годинникового механізму [1].

Якщо позначити через $x(t)$ відхилення маятника від нижнього положення рівноваги в момент часу t , то рух фазової точки (x, \dot{x}) описується за допомогою лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \frac{\delta^2}{4} < \omega^2$$

і піддається дії імпульсної сили, коли ця точка проходить фіксоване положення $x = x_0$. При цьому щодо дії імпульсної сили робиться одне з двох припущень:

1) імпульсна сила збільшує в момент дії кількість руху на деяку сталу величину

$$m\dot{x}(t+0) - m\dot{x}(t) = mI_0;$$

2) імпульсна сила збільшує кінетичну енергію маятника на сталу величину

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}(t+0))^2 - \frac{m}{2}(\dot{x}(t))^2 = mI_0.$$

Використавши першу з двох гіпотез, маємо розривну динамічну систему

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x \neq x_0,$$

$$\Delta\dot{x} \big|_{x=x_0} = I_0.$$

Взявши другу з наведених гіпотез, матимемо таку розривну динамічну систему

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x \neq x_0,$$

$$\Delta(\dot{x})^2 \big|_{x=x_0} = I_0.$$

Таким чином, за математичну модель даного коливного процесу можна обрати розривну динамічну систему, в якій розрив фазової траєкторії відбувається коли фазова точка попадає на пряму $x = x_0$, тобто, в деяку множину фазового простору. В цьому прикладі розривний характер має лише $\dot{x}(t)$, а $x(t)$ залишається неперервною. В механічних системах розривними можуть бути лише компоненти фазового вектора, зв'язані з швидкостями зміни. Компоненти, що відповідають координатам системи, не можуть піддаватись стрибку.

Наведемо ще один приклад розривної динамічної системи, в якій розриви фазової траєкторії є істотною характеристикою процесу, що описується цією системою. Мова йде про оптимальну конверсію виробництва, тобто про оптимізацію виробничого процесу, який враховує можливість переводу основних фондів із однієї галузі в іншу. Якщо фазовими змінними в моделі з неперервним часом є галузеві показники виробничих потужностей, то перебудова виробництва приводить до розриву фазової траєкторії системи. При цьому деякі координати зазнають розривів, запізнюючи від розривів інших координат на час перебудови. Припустимо, що виробничі галузі X і Y випускають відповідно засоби виробництва (наприклад, верстати) і виробниче оснащення. Узагальнені галузеві показники виробничих потужностей позначимо через x і y , кількісний показник оснащення через z . Продуктивність галузей позначимо через α і β , коефіцієнт амортизації засобів виробництва – через μ , а коефіцієнт зношення оснащення – через ν . Всі параметри вважаємо невід'ємними, причому $\alpha > \mu$, $\beta > \nu$. Верстати розділяються за галузями у співвідношенні u ($0 \leq u \leq 1$). Динаміка показників описується такими диференціальними рівняннями [14]:

$$\dot{x} = (\alpha u - \mu)x, \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = \alpha(1 - u)x - \mu y, \quad y(0) = y_0,$$

$$\dot{z} = \beta y - \nu z, \quad z(0) = z_0.$$

Припустимо, що здійснюється перебудова виробництва: частина v ($0 \leq v \leq b \leq 1$) переводиться з галузі Y в галузь X . Час, необхідний на технологічну переналадку виробництва (лаг конверсії), позначимо через ϑ , а початок конверсії – через τ . Тоді

$$y(\tau + 0) = (1 - \tau)y(\tau - \vartheta)$$

$$x(\tau + 0) = x(\tau) + v y(\tau - \vartheta).$$

В нашому розпорядженні є можливість вибору параметрів u , v і τ . Цими параметрами варто розпорядитися найкращим чином в розумінні вибраного критерія якості.

Велике число задач, при моделюванні яких використовуються розривні динамічні системи, складають задачі ракетодинаміки. Розглянемо задачу визначення оптимальної траєкторії руху ракети в гравітаційному полі. Рівняння руху ракети можна записати в вигляді [23]:

$$\dot{x}_i = v_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\dot{v}_i = \frac{cm}{M} l_i + g_i,$$

$$\dot{M} = -m,$$

де x_i - координати ракети в інерційній системі відліку в момент часу t ; v_i - компоненти вектора швидкості ракети в той же момент часу; l_i - на-

правляючі косинуси вектора тяги двигуна, g_i - компоненти гравітаційного прискорення; $m(t)$ - секундна витрата палива; $M(t)$ - маса речовини, що знаходиться в момент часу t всередині поверхні, що утворена зовнішньою оболонкою корпусу ракети і уявними площинами, проведеними через вихідні розрізи двигунів; c - коефіцієнт пропорційності. Параметрами керування в даній задачі є l_i і m . Якщо максимальне значення секундної витрати палива досить велике, то проміжок максимальної тяги ракетного двигуна можна замінити відрізком імпульсної тяги нескінченно малої довжини, на якому змінюється лише швидкість апарату (стрибком), а не його положення. В задачах про міжпланетні перельоти на звичайних ракетах, які можуть розвивати тягу, зрівнянну за величиною з земною вагою апарату, проміжок максимальної тяги завжди малий в порівнянні з загальним часом перельоту [23]. Тому при розрахунку оптимальної траєкторії можна нехтувати рухом ракети на цих ділянках, змінюючи їх імпульсами тяги. Таким чином, розриви деяких компонент фазового вектора в цій задачі викликані ідеалізацією роботи двигунів в режимі максимальної тяги. При математичному моделюванні польоту багатоступеневої ракети так само приходиться мати справу з розривами окремих компонент фазового вектора, але ці розриви – істотна характеристика задачі, а не наслідок ідеалізації дії сил. Якщо j -та ступінь ракети відкидається в момент часу τ_j , то в крайньому разі одна із компонент фазового вектора (компонента, що описує вклад j -ї ступені і її палива в загальну масу корабля, або компонента, що описує загальну миттєву масу корабля) є розривною при $t = \tau_j$, і величини $M(\tau_j + 0)$, $M(\tau_j - 0)$ взаємозв'язані (маса корабля до моменту відділення (відокремлення) j -ї ступені більша від маси корабля після її відділення на величину її маси).

Теорія розривних динамічних систем зародилась і розвивалась із-за потреб розв'язання практичних задач, в яких часто характеристики є розривними (близькими до розривних). Перші приклади таких задач з'явилися в теорії коливань, в формуванні якої фундаментальну роль зіграли роботи

Ван дер Поля по дослідженню коливань в деяких нелінійних системах та загальні дослідження коливних процесів в нелінійних системах, проведені О.О. Андрономим, який започаткував дослідження самопідтримуючих коливних процесів - так званих автоколивань. Класичним прикладом розривної динамічної системи є модель годинникового механізму [1].

Загальні питання теорії імпульсних диференціальних рівнянь закладено в роботі Мишкіса А.Д., Самойленка А.М. [37], де відзначено основні специфічні властивості таких рівнянь відмінні від класичних диференціальних рівнянь. З цього часу розпочинається новий етап в розвитку математичних досліджень з цього напрямку в математичних школах, перш за все в київській школі з нелінійної механіки.

Значна увага дослідників імпульсних систем приділена встановленню достатніх умов стійкості за Ляпуновим розв'язків як лінійних так і нелінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією [15, 16, 28, 51, 56, 75, 83], дослідженню періодичних, майже періодичних та квазіперіодичних імпульсних систем [21, 45, 52, 57, 62, 63, 64], з'ясуванню питання існування інваріантних тороїдальних множин [42, 43, 70, 71], побудові асимптотичних наближень до розв'язків слабо збурених нелінійних диференціальних рівнянь з малим параметром [32, 33, 54, 55, 99].

Варто відмітити роботи [11, 12], де вивчалось питання існування періодичних розв'язків автономних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією в критичних випадках, а також питання розв'язності крайових задач для таких рівнянь.

Експоненціально-дихотомічні та лінійні майже періодичні імпульсні системи досліджувались в роботах Ткаченка В.І. [69, 70].

Вагомий внесок в теорію диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням вклали болгарські математики з школи Д. Байнова [79, 81, 86, 91].

Наявність імпульсної дії часто суттєво ускладнює поведінку траєкторій системи диференціальних рівнянь, які без імпульсного впливу досліджу-

ються порівняно просто, навіть у випадку систем другого порядку, тобто, розривних систем на площині, які знаходять широке застосування в дослідженні конкретних прикладних задачах. Не дивно, що вивченню саме диференціальних рівнянь другого порядку з імпульсною дією присвячено цілу низку математичних робіт.

Так в роботі [29] досліджено вплив зовнішніх періодичних сил на рух гармонійного осцилятора, а в [55] знайдено асимптотичні розвинення для розв'язків слабо нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією. В роботах [62, 64] досліджені періодичні та майже періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з імпульсною дією як у фіксовані, так і в нефіксовані моменти імпульсного впливу. В праці [63], застосовуючи відображення Пуанкаре, доведено теореми про необхідні і достатні умови існування періодичних розв'язків широкого класу імпульсних рівнянь другого порядку.

Питання стійкості розв'язків є одним з найбільш актуальних, як з теоретичної так і практичної точок зору, питань при дослідженні систем з імпульсними збуреннями. Однією з перших робіт, присвячених питанню стійкості розв'язків систем з імпульсними збуреннями була робота В.Д. Мільмана та А.Д. Мишкіса [28], в якій при дослідженнях застосовувався другий метод Ляпунова. Подальші дослідження цього питання відтворені в роботах Є.А. Барбашина [6], А.М. Самойленка, М.О. Перестюка та С.І. Гургули [15, 16, 52, 56], А.О. Ігнат'єва та Р.І. Гладіліної [83, 84].

У роботах [19, 20] отримано умови стійкості розривного періодичного розв'язку системи маятникового типу з імпульсним збуренням.

Питання асимптотичної поведінки розв'язків, зокрема стійкості та обмеженості розглянуто в роботах [51, 66, 86, 87].

Умови існування та стійкість інтегральних множин імпульсних систем розглянуто в [94, 95, 96, 97].

Варто також відзначити роботи О.В. Капустяна і М.О. Перестюка [20,

108, 109], які виявилися піонерськими в дослідженні імпульсних нескінченновимірних динамічних систем, в яких траєкторії можуть піддаватися імпульсному збуренню нескінченне число разів. Зокрема, виділено широкий клас імпульсних систем, в яких доведено існування глобального атрактора.

1.2. Загальна характеристика диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням [52]

Дамо коротку характеристику систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням. Нехай M – фазовий простір деякого еволюційного процесу, стан якого описується n параметрами, тобто можна вважати, що $M \subset R^n$. Топологічний добуток $M \times R$ фазового простору M та дійсної осі R називають розширеним фазовим простором даного еволюційного процесу, а через P_t позначимо точку цього простору, яка зображує стан процесу в момент часу t . Будемо вважати, що закон еволюції даного процесу задається:

1) системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in M, \quad t \in R, \quad t \geq t_0, \quad (1.1)$$

де $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ – вектор-функція, яка задовольняє умовам, що забезпечують існування розв'язків системи (1.1);

2) деякою множиною G_t , заданою в розширеному фазовому просторі;

3) оператором A_t , заданим на множині G_t , що відображає цю множину на множину $G'_t = A_t G_t$ розширеного фазового простору.

Перебіг даного процесу можна описати наступним чином: зображуюча точка $P_t = (t, x(t))$, вийшовши з точки t_0, x_0 , рухається по кривій $\{t, x(t)\}$, яка визначається розв'язком $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системи рівнянь (1.1). Рух по цій кривій здійснюється до моменту часу $t = t_1 > t_0$, в який точка $P_t = (t, x(t))$ зустрічається з множиною G_t . В момент часу $t = t_1$ точка $P_t =$

$(t, x(t))$ миттєво перекидається оператором A_t із положення $P_{t_1} = (t, x(t_1))$ в положення $P_{t_1}^+ = A_{t_1}P_{t_1} = (t_1, x^+(t_1)) \in G'_{t_1}$ і рухається далі по кривій $\{t, x(t)\}$, яка описується розв'язком $x(t) = x(t, t_1, x^+(t_1))$ системи рівнянь (1.1), до нової зустрічі з множиною G_t і т.д.

Сукупність умов 1)-3), що характеризують еволюцію процесу, назовемо системою диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

Криву $\{t, x(t)\}$, що описується точкою P_t в розширеному фазовому просторі, називають інтегральною кривою, а функцію $x = x(t)$, яка задає цю криву, – розв'язком даної системи. Таким чином, розв'язок системи диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями $x = x(t)$ – це функція, яка вважається неперервною зліва, що задовольняє рівнянню (1.1) поза множиною G_t та має розриви першого роду у точках G_t зі стрибками

$$\Delta x = x(t + 0) - x(t) = A_t x(t) - x(t).$$

Розв'язки системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням можуть бути:

- такі, що не піддаються миттєвим змінам – інтегральна крива системи рівнянь (1.1) в цьому випадку не перетинає множини G_t або перетинає її в нерухомих точках оператора A_t ;
- такі, що піддаються миттєвим змінам скінченне число разів – інтегральна крива перетинає множини G_t у скінченному числі точок, що не є нерухомими точками оператора A_t ;
- такі, що піддаються миттєвим змінам зліченне число разів – інтегральна крива перетинає множини G_t у зліченному числі точок, що не є нерухомими точками оператора A_t .

Найцікавішими є системи, які мають розв'язки третього типу. Однак в цьому випадку серед траєкторій системи можуть бути такі, які поглинаються множиною G_t , або ж мають точку згущення. Рух по траєкторії, яка

поглинається множиною G_t , починаючи з деякого моменту часу $t_1 > t_0$, представляє собою послідовні миттєві перекидання точки (t_1, x_1) в положення $(t_1, A_{t_1} x_1)$, з нього в $(t_1, A_{t_1}^2 x_1)$, а потім в $(t_1, A_{t_1}^3 x_1)$ і т.д. Якщо ж траєкторія має в G_t точку згущення, то рух по ній при наближенні до деякого моменту часу $t_1 > t_0$ зліченне число разів зустрічає та покидає множину G_t , а значить не може бути продовженим до моменту часу $t = t_1$.

В задачах про стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням природно розглядати лише такі системи, всі траєкторії яких, маючи з G_t зліченне число спільних точок, в той же час не мають точок згущення та не поглинаються множиною G_t .

Очевидно, що властивості розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями в значній мірі залежать від властивостей оператора A_t та множини G_t , що приводить до цілого ряду специфічних задач. У випадку, коли множина G_t – це послідовність гіперплощин $t = \tau_i$ розширеного фазового простору, де $\{\tau_i\}$ – задана послідовність моментів часу така, що

$$\tau_{i-1} < \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \tau_0 = t_0 = \text{const}, \quad \tau_i \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty,$$

систему диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями можна задати сукупністю рівнянь

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \neq \tau_i, \tag{1.2}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x),$$

і її називають системою диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями у фіксовані моменти часу. Будемо вважати, що розв'язки системи (1.2) система диференціальних рівнянь без імпульсних збурень.

Означення 1.2.1. Розв'язком системи (1.2) називається кусково-неперервна функція $\varphi(t)$ з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$ така, що

- $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$, при всіх $t \neq \tau_i$;
- при $t = \tau_i$ виконується умова стрибка

$$\Delta\varphi|_{t=\tau_i} = \varphi(\tau_i + 0) - \varphi(\tau_i - 0) = I_i(\varphi(\tau_i - 0)).$$

Розглянемо деякі властивості розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x, \quad (1.3)$$

де $A(t)$ – неперервна на проміжку I матриця розмірності $n \times n$, B_i – сталі матриці, $\tau_i \in I$ – фіксовані моменти часу, занумеровані у порядку зростання ($\tau_i < \tau_{i+1}$) множиною цілих чисел. Одним з результатів теорії лінійних систем вигляду (1.3) є наступний:

Теорема 1.2.1. [52] *Нехай проміжок $[t_0, t_0 + h] \subset I$ містить скінченну кількість точок τ_i . Тоді для будь-якого $x_0 \in R^n$ розв'язок $x(t, x_0)$, $x(t_0, x_0) = x_0$ системи рівнянь (1.3) існує при всіх $t \in [t_0, t_0 + h]$. Крім того, якщо для всіх i таких, що $\tau_i \in [t_0, t_0 + h]$, матриці $E + B_i$ невиврожені, то $x(t, x_0) \neq x(t, y_0)$ при всіх $t \in [t_0, t_0 + h]$, якщо тільки $x_0 \neq y_0$.*

Тому надалі обмежимося вивченням систем (1.3), для яких виконуються умови:

- 1) будь-який компактний проміжок $[a, b] \subset I$ містить скінченну кількість точок τ_i ;
- 2) для всіх i таких, що $\tau_i \in I$, матриці $E + B_i$ невиврожені.

При цих припущеннях справедливе наступне твердження

Теорема 1.2.2. [52] Множина всіх розв'язків Υ лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням (1.3) на проміжку $[a, b]$ утворює n -вимірний векторний простір.

Означення 1.2.2. Базис лінійного простору розв'язків Υ назовемо фундаментальною системою розв'язків системи (1.3).

З теореми 1.2.2 випливає ряд важливих наслідків:

- 1) система рівнянь (1.3) має фундаментальну систему з n розв'язків $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$;
- 2) будь-який розв'язок системи (1.3) є лінійною комбінацією розв'язків фундаментальної системи;
- 3) будь-які $n + 1$ розв'язки системи рівнянь (1.3) лінійно залежні.

Систему рівнянь

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad (1.4)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + a_i,$$

де матриці $A(t)$, B_i і моменти τ_i такі самі, як і в системі (1.3), а $f(t)$ – неперервна (кусково-неперервна) на проміжку I функція, a_i – сталі вектори, назовемо лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням. Зв'язок між розв'язками неоднорідної системи (1.4) і відповідної їй однорідної системи (1.3) встановлює наступна теорема.

Теорема 1.2.3. [52] Якщо $x = \varphi(t)$ – розв'язок системи (1.3), а $x = \psi(t)$ – розв'язок системи (1.4), то функція $x = \varphi(t) + \psi(t)$ є розв'язком системи (1.4). Навпаки, якщо $x = \varphi_1(t)$ і $x = \varphi_2(t)$ – розв'язки неоднорідної системи (1.4), то функція $x = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ є розв'язком однорідної системи рівнянь (1.3).

1.3. Багаточастотні коливання в динамічних системах

Математична теорія коливань в своєму зародженні формувалась в рамках небесної механіки. Фізичні процеси, які ця теорія описувала, зводилися в основному до лінійного диференціального рівняння, а саме коливання до періодичного розв'язку цього рівняння.

Пуанкаре А. і Ляпунов О. М. побудували математичний апарат дослідження еволюційних коливних процесів "нелінійної" природи, які погано трактуються в межах лінійної теорії. З часом цей напрям досліджень вилився в гілку математичної фізики – теорію нелінійних коливань. Фундаментальний вклад в розв'язання проблем цієї теорії внесли М. М. Крилов і М. М. Боголюбов [22]. Важливе місце в цій теорії займають дослідження квазіперіодичних розв'язків "слабонелінійних" систем та з ними і дослідження інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем в R^n . Перші глибокі дослідження про інваріантні тороїдальні многовиди систем диференціальних рівнянь нелінійної механіки були проведені М. М. Боголюбовим і М. М. Криловим в процесі обґрунтування асимптотичних методів нелінійної механіки [8, 10]. Пізніше їх ідеї всебічно були розвинуті в дослідженнях Ю. А. Митропольського [8, 30] і вилились в метод інтегральних многовидів нелінійної механіки – потужний і практично зручний математичний апарат дослідження інтегральних многовидів широкого класу нелінійних систем диференціальних рівнянь. Початком нового циклу досліджень з проблем теорії збурень і стійкості інваріантних тороїдальних многовидів динамічних систем стала фундаментальна доповідь А. М. Самойленка на V-ій міжнародній конференції з нелінійних коливань (Київ, 1969 р.). Введене ним поняття функції Гріна задачі про інваріантні тори [60] лінійного розширення динамічної системи на торі виявилась досить плідним і дало новий імпульс розвитку різних аспектів цієї теорії, зокрема, і в теорії розривних динамічних систем [44, 70, 94, 97].

Відомо [9, 60], що коли динамічна система

$$\frac{dy}{dt} = Y(y), \quad y \in R^{n+m} \quad (1.5)$$

має квазіперіодичний розв'язок

$$y = f_0(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t) = f_0(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$$

з частотним базисом $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$, то замикання траєкторії цього розв'язку породжує в R^{n+m} тороїдальний многовид. Як показано в [60], для дослідження поведінки траєкторій вихідної системи в деякому околі цього многовиду в багатьох випадках зручно перейти від координат y_1, y_1, \dots, y_{m+n} до локальних координат $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ і $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, так щоб рівняння многовиду набуло вигляду:

$$x = 0, \quad \varphi \in T_m, \quad (1.6)$$

де T_m — m -вимірний тор.

Відповідна цьому тору система рівнянь в варіаціях має вигляд [60]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad (1.7)$$

де $a(\varphi)$ і $P(\varphi)$ відповідно m -вимірна векторна і n -вимірна матрична функції, 2π -періодичні по кожній з змінних φ_ν , ($\nu = \overline{1, m}$)

Перше із рівнянь (1.7) характеризує "дотичну" а друге — "нормальну" складові потоку вихідної системи в околі тора (1.6).

Теорема 1.3.1. [60]. *Якщо для системи рівнянь (1.7) знайдеться додатно визначена квадратична форма*

$$v(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x \rangle$$

з симетричною матрицею $S(\varphi) \in C^1(T_m)$, така, що її повна похідна, складена в силу рівнянь (1.7)

$$\frac{dv(\varphi, x)}{dt} = \langle \hat{S}(\varphi)x, x \rangle,$$

$$\hat{S}(\varphi) = S(\varphi)P(\varphi) + P^*(\varphi)S(\varphi) + \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot a(\varphi),$$

є від'ємно визначеною:

$$\langle \hat{S}(\varphi)x, x \rangle \leq -\beta \langle x, x \rangle, \quad \beta > 0,$$

то тривіальний тор (1.6) є асимптотично стійким.

Інваріантний тор (1.6) системи рівнянь (1.7) називатимемо експоненціально стійким якщо для будь-якого розв'язку $\varphi = \varphi_t(\varphi_0)$, $x = x_t(\varphi_0, x_0)$ системи рівнянь (1.7), $\varphi_0(\varphi_0) = \varphi_0$, $x_0(\varphi_0, x_0) = x_0$ справедлива нерівність

$$\|x_t(\varphi_0, x_0)\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)} \|x_\tau(\varphi_0, x_0)\|$$

для всіх $t \geq \tau$, довільних $\varphi_0 \in T_m$, $x_0 \in R^n$, $\tau \in R$ і деяких додатніх сталих K і γ , які не залежать від τ, φ_0, x_0 .

Систему рівнянь (1.7), для якої інваріантний тор (1.6) експоненціально стійкий, називатимемо експоненціально стійкою.

Тривіальний тор системи рівнянь (1.7) називатимемо експоненціально дихотомічним [60], а саму систему рівнянь (1.7) - експоненціально дихотомічною кожного разу, коли для довільного $\varphi_0 \in T_m$ евклідов простір R^n допускає представлення в вигляді прямого добутку двох підпросторів R^+ і R^- відповідно розмірностей r і $n - r$, так, що будь-який розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$, $x_t(\varphi_0, x_0)$ системи рівнянь (1.7) у якого $x_0 \in R^-$, задовольняє нерівність $\|x_t(\varphi_0, x_0)\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)} \|x_\tau(\varphi_0, x_0)\|$, а будь-який розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$, $x_t(\varphi_0, x_0)$ системи рівнянь (1.7), в якого $x_0 \in R^+$, задовольняє нерівність

$$\|x(t)(\varphi_0, x_0)\| \geq K_1 e^{\gamma_1(t-\tau)} \|x_\tau(\varphi_0, x_0)\|, \quad t \geq \tau,$$

для довільних $\tau \in R$, $\varphi_0 \in T_m$ і деяких додатних сталих K, γ, K_1, γ_1 , що не залежать від φ_0, x_0, τ .

Поведінка розв'язків системи рівнянь (1.7) відіграє фундаментальну роль в дослідженні системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi), \quad (1.8)$$

де $a(\varphi), P(\varphi), f(\varphi) \in C^r(T_m)$. Цю систему рівнянь називатимемо лінійною, виділяючи цим її лінійність за змінною x , неоднорідною системою рівнянь, фазовим простором якої є прямий добуток m -вимірного тора T_m і n -вимірного евклідового простору R^n .

Інваріантну поверхню системи рівнянь (1.8) вигляду

$$x = u(\varphi), \quad \varphi \in T_m, \quad (1.9)$$

де $u(\varphi) \in C^s(T_m)$, називатимемо m -вимірним s разів неперервно диференційовним інваріантним многовидом системи рівнянь (1.8)

Позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ — матрицант системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \quad (1.10)$$

де $\varphi_t(\varphi), \varphi_0(\varphi) = \varphi$ — розв'язок першого із рівнянь (1.7) і нехай $C(\varphi)$ — матрична функція з простору $C(T_m)$.

Покладемо

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0 C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leq 0, \\ -\Omega_\tau^0 [E - C(\varphi_\tau(\varphi))], & \tau > 0, \end{cases}$$

і назвемо цю функцію функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь (1.7), якщо тільки інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \varphi)\| d\tau$ рівномірно обмежений по $\varphi \in T_m$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \varphi)\| d\tau \leq K < \infty. \quad (1.11)$$

Виявляється [60], що існування функції Гріна-Самойленка системи рівнянь (1.7) гарантує існування інваріантної тороїдальної множини системи рівнянь (1.8) для будь-якої функції $f(\varphi) \in C(T_m)$.

Теорема 1.3.2. [60]. *Нехай праві частини рівняння (1.7) задовольняють умови $a(\varphi) \in C_{Lip}^r(T_m)$, $P(\varphi) \in C^r(T_m)$, $r \geq 0$, а сама система має функцію Гріна-Самойленка $G_0(\tau, \varphi)$. Тоді для будь-якої функції $f(\varphi) \in C^r(T_m)$ система рівнянь (1.8) має інваріантний тороїдальний многовид, що виражається рівністю*

$$x = U(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \leq K < \infty \quad (1.12)$$

і задовольняє оцінку

$$\|U(\varphi)\|_0 \leq K \|f(\varphi)\|_0, \quad (1.13)$$

де

$$K = \max_{\varphi \in T_m} \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \varphi)\| d\tau.$$

Зауважимо, що як показано в [60], інваріантний тороїдальний многовид $x = U(\varphi)$, про який йде мова в сформульованій теоремі, може бути лише неперервним навіть в тому випадку, коли функції $a(\varphi)$, $P(\varphi)$ і $f(\varphi)$ є аналітичними по $\varphi \in T_m$.

Наведені в цьому підрозділі поняття та твердження будуть використані нами в четвертому розділі роботи при дослідженні питання існування інваріантних тороїдальних множин розривних динамічних систем, визначених в прямому добутку m -вимірного тора T_m і n -вимірного евклідового простору \mathbb{R}^n .

Висновки до розділу 1

У першому розділі:

- зроблено огляд літератури за темою дисертації;
- наведена загальна характеристика систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та багаточастотних коливань;
- окреслено коло задач, які розглядаються в дисертаційній роботі.

Розділ 2. ЛІНІЙНІ РОЗРИВНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ НА ПЛОЩИНІ

В цьому розділі наведено означення розривної динамічної системи, приклади таких систем на площині. Наведені приклади ілюструють можливість істотну відмінність поведінки траєкторій розривної динамічної системи і класичної системи звичайних диференціальних рівнянь. Повністю вивчено поведінку траєкторій лінійної розривної динамічної системи у випадку особливих точок її диференціальної частини "вузла" , "сідла" і "фокуса" , встановлені необхідні та достатні умови існування сім'ї одно- та двоімпульсних розривних циклів в таких системах. Як приклад розглянуто можливість незатухаючих коливань лінійного осцилятора з великим тертям під дією імпульсного збурення.

Основні результати цього розділу висвітлені в публікаціях [49, 85, 89, 90, 92, 93].

2.1. Означення розривної динамічної системи

Розривні динамічні системи - це досить широкий підклас систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням [52]. Опишемо цей клас детальніше.

Нехай нам треба дослідити деякий еволюційний процес, який описується:

а) системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in M \subseteq R^n; \quad (2.1)$$

б) деякою заданою множиною $\Gamma \subseteq M$ із фазового простору;

в) відображенням A множини Γ на множину $\Gamma_0 = A\Gamma$, $A : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ цього фазового простору.

Еволюція процесу відбувається таким чином: фазова точка $x(t)$, виїшовши при $t = t_0$ з фіксованої точки $x_0 = x(t_0)$, рухається по траєкторії розв'язку $x(t, t_0, x_0)$ диференціальної системи (2.1) до тих пір, поки в момент $t = t_1 > t_0$ вона попадає в множину Γ , $x(t_1, t_0, x_0) \in \Gamma$.

В момент $t = t_1$ фазова точка $x(t_1, t_0, x_0)$ відображенням A "миттєво" перекидається в положення $Ax(t_1, t_0, x_0) = x^+(t_1) \in \Gamma_0$ і далі рухається траєкторією системи (2.1), що описується її розв'язком $x(t, t_1, x^+(t_1))$. Рух по вказаній траєкторії відбувається до моменту часу $t = t_2 > t_1$, в який фазова точка знову попадає в множину Γ . В цей момент відображенням A вона перекидається в точку $Ax(t_2, t_1, x^+(t_1)) = x^+(t_2) \in \Gamma_0$ і рух її далі відбувається по траєкторії розв'язку $x(t, t_2, x^+(t_2))$ системи рівнянь (2.1) до нової зустрічі з множиною Γ і т.д.

Сукупність співвідношень а) – в), що характеризують еволюцію досліджуваного процесу, і називають розривною динамічною системою. Логічно розривну динамічну систему ще можна називати автономною системою диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням. Таку систему зручно записувати ще й в такому вигляді:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \notin \Gamma, \quad \Delta x|_{x \in \Gamma} = Ax - x, \quad (2.2)$$

де $\Delta x = x(t + 0) - x(t)$ - величина стрибка розв'язку в момент попадання фазової точки в множину Γ .

Таким чином, розв'язок системи рівнянь (2.2) $x = \varphi(t)$ - це неперервна зліва функція, що задовольняє рівняння

$$\dot{x} = f(x)$$

поза множиною Γ і має розриви першого роду в точках $t = \tau$, $\varphi(\tau) \in \Gamma$ із стрибками

$$\Delta x = \varphi(\tau + 0) - \varphi(\tau - 0) = A\varphi(\tau - 0) - \varphi(\tau - 0) \quad (2.3)$$

Як відмічається в [52], розв'язки розривної динамічної системи можуть бути таких трьох типів:

- а) гладкі розв'язки – фазова крива таких розв'язків не перетинається з множиною Γ , або ж перетинається з нею в точках, що є нерухомими щодо відображення A ;
- б) розв'язки, що піддаються імпульсному збуренню скінченне число разів: фазова точка попадає в множину Γ скінченне число разів, причому в точки цієї множини, що не є нерухомими щодо відображення A ;
- в) розв'язки, що піддаються імпульсному збуренню зліченне число разів: фазова точка попадає в множину Γ зліченне число разів, причому в точки цієї множини, що не є нерухомими щодо відображення A .

Розглянемо декілька прикладів розривних динамічних систем.

Приклад 2.1.1. Нехай на площині xOy рух фазової точки між двома послідовними моментами імпульсного впливу описується системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0,$$

множина Γ задається таким чином

$$\Gamma = \{(x, y) \in R^2 : y = \arctg(tgx)\},$$

а відображення $A : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ діє так

$$A : (x, y) \rightarrow (x, y^2 \operatorname{sign} y).$$

Іншими словами, розглянемо на площині розривну динамічну систему:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0, \quad (x, y) \notin \Gamma,$$

$$\Delta x|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \quad \Delta y|_{(x,y) \in \Gamma} = y^2 \operatorname{sign} y - y.$$

Дослідимо траєкторії в цій системі та можливі рухи фазової точки по цим траєкторіям.

Траєкторія будь-якого руху фазової точки, що виходить при $t = 0$ з точки (x_0, y_0) , $|y_0| \geq \frac{\pi}{2}$ є пряма $y = y_0$, бо фазова точка в процесі еволюції не попадає в множину Γ , а отже не піддається імпульсному впливу. Неперервними прямими будуть також траєкторії рухів фазової точки, які розпочинаються на прямих $y = 0$, $y = \pm 1$. В цьому випадку хоч фазова точка і попадає безліч разів в множину Γ , але попадає в точки, які є нерухомими точками відображення A . Якщо фазова точка виходить при $t = 0$ із точки (x_0, y_0) , $1 < |y_0| < \frac{\pi}{2}$, то вона імпульсному впливу піддається скінченне число разів. Для кожного такого руху можна вказати момент часу $t_1 = t_1(x_0, y_0)$, починаючи з якого фазова точка попадає в область $|y| \geq \frac{\pi}{2}$, а отже при $t > t_1(x_0, y_0)$ не піддається імпульсному впливу. Якщо фазова точка $(x(t), y(t))$ починає рух з точки (x_0, y_0) , $0 < y_0 < 1$, то в процесі еволюції вона злічене число разів попадає в множину Γ , отже, злічене число разів піддається імпульсному впливу, причому $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Якщо ж рух фазової точки починається з положення (x_0, y_0) , $-1 < y_0 < 0$, то з часом фазова точка піддається імпульсному впливу злічене число раз, але це відбувається на скінченному числовому проміжку. На цьому простому прикладі можна перекоонатися, що в розривних динамічних системах можливе злиття декількох траєкторій в одну. Наприклад, траєкторії рухів, що починаються при $t = 0$ з точок $(x_0, \sqrt{3})$ і $(x_0, 3)$ з часом зливаються в одну $y = 3$.

Приклад 2.1.2.

Розглянемо розривну динамічну систему на площині, яка задається системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = -1, \quad \dot{y} = 0 :$$

множиною Γ - вісь ординат,

$$\Gamma_0 = \{(x - 2)^2 + y^2 = 1, \quad x < 2\}$$

і відображенням $A : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$, яке ставить у відповідність точці $(0; y)$ осі ординат точку із Γ_0 , яка лежить на прямій, що проходить через точки $(0; y)$ і $(2; 0)$.

Якщо фазова точка починає свій рух з точки $(x_0; y_0)$, $x_0 < 0$, то з часом вона не піддається імпульсному впливу. Якщо ж $x_0 > 0$ і $y_0 = 0$ то такий рух є періодичним, або ж стає періодичним через певний час. Траєкторією періодичного руху є відрізок на осі абсцис, що сполучає точки $(0; 0)$ і $(1; 0)$.

Приклад 2.1.3. Дослідимо фазові криві розривної динамічної системи на площині

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -\alpha y, \quad \alpha > 0.$$

в якій

$$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r\}, \quad \Gamma_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$$

і відображення $A : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ кожній точці кола Γ ставить у відповідність точку кола Γ_0 , що лежить на одному з нею промені що виходить з початку координат.

Оскільки початок координат є стійким вузлом для системи рівнянь

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -\alpha y, \quad \alpha > 0,$$

то виходячи з будь-якої точки кола $x^2 + y^2 < r^2$, фазова точка по відповідній траєкторії наближається до початку координат, коли $t \rightarrow +\infty$, не піддаючись імпульсному впливу. Якщо рух фазової точки розпочинається в області $x^2 + y^2 > R^2$, то з часом, рухаючись по одній із кривих $y = c|x|^\alpha$, фазова точка потрапляє на коло $x^2 + y^2 = R^2$ і про поведінку фазових кривих можна судити з тих, які починаються на цьому колі.

Зауважимо, що якщо рух фазової точки починається в крузі $x^2 + y^2 < r^2$, то фазова точка прямує до початку координат, коли $t \rightarrow +\infty$, не піддаючись в процесі руху імпульсній дії. Якщо рух фазової точки починається на колі $x^2 + y^2 = R^2$, то вийшовши з точки (x_0, y_0) цього кола через деякий час по параболі $y = y_0 \left| \frac{x}{x_0} \right|^\alpha$ вона потрапляє на коло $x^2 + y^2 = r^2$, миттєво відображення A її перекидає в точку (x_1, y_1) кола $x^2 + y^2 = R^2$ і далі рух її відбувається по новій параболі до моменту попадання на коло Γ .

Зразу ж зауважимо, що у випадку $\alpha = 1$ всі рухи фазової точки, які вона розпочинає з кола Γ_0 є періодичними і траєкторією кожного з них є частина променя $y = cx$, обмеженого колами Γ і Γ_0 .

Якщо $0 < \alpha < 1$ або ж $\alpha > 1$, то періодичних рухів є лише чотири, це ті, траєкторії яких є відрізки координатних осей, що знаходяться в кільці $r^2 < x^2 + y^2 < R^2$, причому дві траєкторії, що належать осі ординат є асимптотично стійкими і притягують до себе всі траєкторії з області $y > x^2 + y^2$.

Розглянемо цей приклад, коли $\alpha = 1$, але відносно відображення $A : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ вважатимемо, що воно кожній точці $(x, y) \in \Gamma$ ставить у відповідність точку (x^+, y^+) , яка лежить на колі Γ_0 і

$$\operatorname{arctg} \frac{y^+}{x^+} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \Delta.$$

При дослідженні поведінки траєкторій розривної динамічної системи досить дослідити відображення $h : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$, яке кожній точці $\varphi \in \Gamma_0$

ставить у відповідність точку $\varphi + \Delta$,

$$h : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0, \quad h\varphi = \varphi + \Delta.$$

Як відомо, (див. наприклад [2]), що коли Δ раціонально сумірне з 2π , тобто $\Delta = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$, де p і q - взаємно прості цілі числа, то послідовність точок $\{h^k\varphi\}$, тобто $\{\varphi + k\Delta\}$ є циклічною і серед них скінченне число на колі, порівняних за модулем 2π .

Якщо ж Δ не є раціонально сумірним з 2π , то послідовність точок $\{h^k\varphi\}$ всюди щільна на колі, а тому в першому випадку кожна точка кільця $r^2 < x^2 + y^2 < R^2$ породжує періодичний рух, траєкторією якого служить певне число відрізків променів $y = cx$, що обмежені вказаним кільцем, а в другому випадку кожна точка вказаного кільця породжує траєкторію руху, яка всюди щільно заповнює це кільце. Цей простий приклад показує, що в розривних динамічних системах на площині можливі рухи стійкі за Пуассоном, відмінні від точок спокою і періодичних рухів, чого нема в неперервних динамічних системах на площині.

2.2. Лінійні розривні динамічні системи на площині

В цьому параграфі дослідимо лінійні системи диференціальних рівнянь на площині, що піддаються імпульсному впливу на фіксованих прямих. Нас цікавитиме питання існування періодичних розв'язків (розривних циклів) таких систем, їх стійкість, відсутність таких розв'язків. Не обмежуючи загальності, ми вважатимемо, що матриця лінійної диференціальної системи рівнянь на площині має дійсну жорданову форму. Зрозуміло, що до такої форми завжди можна звести довільну лінійну диференціальну систему за допомогою лінійної заміни з невідродженою сталою матрицею цієї заміни.

Нагадаємо, що дійсна жорданова форма J сталої двовимірної матриці

A в залежності від власних чисел цієї матриці має вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

якщо власні числа матриці A дійсні;

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

якщо власні числа матриці A - комплексні: $\lambda_{1, 2} = \alpha \pm i\beta$, зокрема, чисто уявні, коли $\alpha = 0$.

Таким чином, об'єктом нашого дослідження є лінійна розривна динамічна система на площині

$$\dot{x} = Jx, \quad \langle a, x \rangle \neq 0, \quad \Delta x|_{\langle a, x \rangle = 0} = Bx. \quad (2.4)$$

Тут $x = coll(x_1, x_2)$, J - дійсна жорданова клітка, пряма $\langle a, x \rangle = 0$, $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ не є віссю координат і далі ми цю пряму запишемо так:

$$x_2 = kx_1, \quad k = -\frac{a_1}{a_2},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- задана стала матриця.

Рух фазової точки $(x_1(t), x_2(t))$ описується диференціальною системою $\dot{x} = Jx$, коли ця точка знаходиться поза прямою $x_2 = kx_1$ і "миттєво" перекидається в точку

$$\begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1 + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

в момент t^* , коли $x_2(t^*) = kx_1(t^*)$, тобто в момент попадання фазової точки на пряму $x_2 = kx_1$.

Зауважимо, що лінійне однорідне відображення

$$(E + B) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow (E + B) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

площини $(x_1 0 x_2)$ в площину переводить пряму $x_2 = kx_1$ в пряму $x_2 = \mu x_1$, де коефіцієнти k і μ пов'язані рівністю

$$\mu = \frac{k(1 + b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}}. \quad (2.6)$$

Дослідимо поведінку розв'язків системи в залежності від вигляду матриці J . Нехай матриця J має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{причому } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

В цьому випадку лінійна системи рівнянь

$$\dot{x} = Jx$$

має особливу точку $x = 0$ (початок координат) "вузлом", якщо $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, і "сідлом", якщо $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.

Рух фазової точки $(x_1(t), x_2(t))$ відбувається по лініях $x_2 = c |x_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ і $x_1 = 0$.

Якщо фазова точка при $t = 0$ починає рух з точки (x_1^0, x_2^0) , то при всіх $t \in R$ вона залишиться на лінії

$$\frac{x_2}{x_2^0} = \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \left(x_2 = x_2^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right).$$

Зрозуміло, що і фазова точка вихідної імпульсної системи рухається по тим же лініям, "перескакуючи" на прямій $x_2 = kx_1$ з однієї на іншу (або ж на ту саму) із цих ліній. Нас цікавитиме випадок, коли фазова точка в

процесі своєї еволюції піддається імпульсному впливу багато разів, тобто попадає на пряму $x_2 = kx_1$ більше одного разу. Якщо фазова точка не попадає на вказану пряму, або попадає лише один раз, то її рух з часом описується системою без імпульсного збурення, а тому з часом ця точка наближається до положення рівноваги $(0; 0)$ або ж віддаляється в нескінченність. Щоб фазова точка піддавалась імпульсному збуренню багато разів (зліченне число) необхідно, щоб вона, вийшовши з точки прямої $x_2 = \mu x_1$ при $t > 0$ попала на пряму $x_2 = kx_1$.

Траєкторією руху точки

$$(x_1(t), x_2(t)), \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_2^0 = \mu x_1^0$$

є лінія

$$x_2 = x_1^0 \mu \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Ця лінія перетинає пряму $x_2 = kx_1$ в точці (x_1^*, kx_1^*) , де

$$x_1^* = x_1^0 \cdot \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}.$$

Щоб фазова точка, вийшовши при $t = 0$ з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ попала в точку (x_1^*, kx_1^*) при $t = t^* > 0$ необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k} > 0. \quad (2.6')$$

Проведемо невеликий аналіз цієї нерівності. Вона показує, що якщо початок координат є "сідлом", то параметри системи повинні бути такими, щоб $k > \mu > 0$, якщо $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ і $0 < k < \mu$, якщо $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

Якщо початок координат є "вузлом", то повинні виконуватися умови: $k > \mu > 0$, якщо $\lambda_1 < \lambda_2$ і "вузол" є нестійким; якщо $\lambda_1 > \lambda_2$ і "вузол" є асимптотично стійким;

$0 < k < \mu$, якщо $\lambda_1 > \lambda_2$ і "вузол" є нестійким, або ж, якщо $\lambda_1 < \lambda_2$ і "вузол" є асимптотично стійким;

Припускаючи, що параметри вихідної системи забезпечують виконання цієї нерівності, можемо стверджувати, що в момент $t = t^* > 0$ фазова точка "перескакує" з положення (x_1^*, kx_1^*) в точку

$$((1 + b_{11} + kb_{12})x_1^*, (b_{21} + (1 + b_{22})k)x_1^*)$$

прямої $x_2 = \mu x_1$.

Тому поведінка розв'язків вихідної імпульсної системи визначається відображенням прямої в пряму: $h : R \rightarrow R$,

де

$$h : x_1 \rightarrow [(1 + b_{11}) + b_{12}k]x_1^*,$$

точніше

$$h : x_1 \rightarrow [(1 + b_{11}) + b_{12}k] \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \cdot x_1$$

Це лінійне однорідне відображення, яке ми запишемо так

$$h : x_1 \rightarrow \gamma x_1,$$

позначивши через γ число:

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \quad (2.7)$$

Теорема 2.2.1. *Якщо $|\gamma| < 1$, то всі розв'язки вихідної системи, які починаються з точок прямої $x_2 = \mu x_1$, з часом прямують до нуля, коли $t \rightarrow \infty$. Якщо $|\gamma| > 1$, то всі розв'язки вихідної системи, які при $t = 0$ починаються з точок прямої $x_2 = \mu x_1$, прямують у нескінченність, коли $t \rightarrow \infty$. Якщо $\gamma = 1$, то кожна точка $x_1 \in R$ є нерухомою точкою*

відображення h і така точка породжує одноімпульсний періодичний рух (одноімпульсний цикл).

Ці цикли заповнюють частину координатної площини, що лежить між прямими $x_2 = kx_1$ та $x_2 = \mu x_1$. Якщо рух фазової точки починається з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, то цикл, що породжується цією точкою, задається куском кривої

$$x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

$$\left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1, \quad \text{якщо } \lambda_1 < 0;$$

$$1 \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad \text{якщо } \lambda_1 > 0.$$

Безпосередньо переконуємося, що рух зображуючої точки по кожному з таких циклів є періодичним з одним і тим же періодом

$$T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}.$$

Ці цикли називатимемо одноімпульсними. Рухаючись по такому циклу, фазова точка один раз за період піддається імпульсному впливу. Крім одноімпульсних циклів в вихідній системі можуть бути так звані двоімпульсні розривні цикли, відмінні від одноімпульсних: рухаючись по такому циклу фазова точка двічі за період піддається дії імпульсної сили.

Двоімпульсні цикли виникають в вихідній системі, коли її параметри задовольняють рівність

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = -1.$$

Вони породжуються точками $(x_1^0, \mu x_1^0)$, де x_1^0 - нерухома точка відображення $h^2 = h(h(x))$.

Ці цикли, як і одно імпульсні, заповнюють частину координатної площини, що лежить між прямими $x_2 = kx_1$ і $x_2 = \mu x_1$.

Рух фазової точки по кожному з таких циклів є періодичним з одним і тим же періодом

$$T = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}.$$

На відміну від одноімпульсних циклів, кожен з яких лежить в одному з координатних кутів, кожен двоімпульсний цикл належить двом координатним кутам: першому і третьому (або ж другому і четвертому).

Двоімпульсний цикл, що породжується точкою $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, задається кусками ліній

$$x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1, \quad \text{якщо } \lambda_1 < 0;$$

$$1 \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad \text{якщо } \lambda_1 > 0,$$

і

$$x_2 = -\mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{-x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{-x_1^0} \leq 1, \quad \text{якщо } \lambda_1 < 0;$$

$$1 \leq \frac{x_1}{-x_1^0} \leq \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad \text{якщо } \lambda_1 > 0.$$

Дослідимо тепер поведінку траєкторій вихідної системи у випадку, коли матриця J має рівні дійсні власні числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Якщо вона діагональна, то її траєкторії – промені з пучка прямих $x_2 = cx_1$ і в цьому випадку в імпульсній вихідній системі нічого цікавого немає. Так що вважатимемо, що матриця J має вигляд $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

В цьому випадку фазова точка $(x_1(t), x_2(t))$, рух якої починається з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, рухаючись по кривій

$$x_2 = \left(\mu - \frac{1}{\lambda} \ln |x_1^0| \right) x_1 + \frac{x_1}{\lambda} \ln |x_1|,$$

попаде на пряму $x_2 = kx_1$ в точку (x^*, kx^*) за умови $k > \mu$:

Зауважимо, що на відміну попередніх випадків (особливої точки типу "сідло" або "вузол"), де k і μ можуть бути одночасно або додатними, або ж від'ємними, в цьому випадку якщо $k > 0$, то $\mu < k$ може бути як додатним так і від'ємним числом. Якщо ж $k < 0$, то фазова точка $(x_1(t), x_2(t))$, вишовши з точки прямої $x_2 = \mu x_1$ зможе потрапити на пряму $x_2 = kx_1$ лише за умови $\mu < k$, тобто в цьому випадку μ не може набувати додатних значень.

$$\begin{aligned} k - \mu &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{|x_1^*|}{|x_1^0|}; & x_1^* &= \pm e^{(k - \mu)\lambda} |x_1^0| \\ k - \mu &= \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda t^*, & t^* &= T > 0. \end{aligned}$$

Одноімпульсний цикл – кусок кривої

$$x_2 = x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^0} \right); \quad 1 \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq e^{(k - \mu)\lambda}, \quad \text{якщо } \lambda > 0;$$

$$e^{(k - \mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1, \quad \text{якщо } \lambda < 0;$$

за умови, що

$$(1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k - \mu)\lambda} = 1.$$

Рух по такому циклу є періодичним з періодом $T = k - \mu$.

Якщо

$$(1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k - \mu)\lambda} = -1,$$

то в системі виникають двоїмпульсні цикли відмінні від одноімпульсних.

Двоїмпульсний цикл задається двома кусками фазових кривих:

$$x_2 = x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^0} \right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1, \quad \text{якщо } \lambda < 0;$$

$$1 \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq e^{(k-\mu)\lambda}, \quad \text{якщо } \lambda > 0 \text{ і}$$

$$x_2 = -x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{-x_1}{x_1^0} \right), \quad -1 \leq \frac{x_1}{x_0} \leq -e^{(k-\mu)\lambda}, \quad \text{якщо } \lambda < 0;$$

$$-e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_0} \leq -1, \quad \text{якщо } \lambda > 0.$$

Рух по кожному двоїмпульсному циклу є періодичним з періодом

$$T = 2(k - \mu).$$

Проведені вище дослідження поведінки розв'язків системи рівнянь (2.4) дають можливість сформулювати необхідні і достатні умови стійкості її нульового розв'язку (а в силу лінійності системи) будь-якого її розв'язку.

Теорема 2.2.2. *Якщо в системі рівнянь (2.4) власні числа матриці J від'ємні, то її розв'язки: стійкі тоді і тільки тоді, коли число $|\gamma| \leq 1$; асимптотично стійкі тоді і тільки тоді, коли $\gamma < 1$; нестійкі, якщо $|\gamma| > 1$.*

Приклад 2.2.1. Розглянемо модель математичного маятника з тертям

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \delta x_2.$$

Якщо коефіцієнт тертя δ невеликий, $0 < \delta < 2$, то маятник здійснює згасаючі коливання. Якщо ж $\delta \geq 2$, то маятник не здійснює коливань, а зразу ж прямує до положення рівноваги: його швидкість $x_2(t)$ з часом змінює знак не більше одного разу.

Розглянемо випадок, коли $\delta = 2$. Нехай маятник піддається впливу імпульсної сили в момент проходження ним положення $x_2 = 0$. Відносно імпульсної дії будемо вважати, що її дія збільшує (зменшує) швидкість руху на величину, пропорційну відхиленню маятника від положення рівноваги. Таким чином, рух маятника описується розривною динамічною системою:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \neq 0;$$

$$\Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big|_{x_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big|_{x_2=0}.$$

Перейдемо шляхом заміни змінних

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

до власного базису, і дістанемо систему (2.4) з матрицею

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad v \neq 0;$$

$$\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Big|_{v=0} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Big|_{v=0}.$$

Безпосередні розрахунки показують, що

$$\mu = \frac{k(1 + b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}} = \frac{b_{21}}{1 + b_{11}} = \frac{-\alpha}{1 + \alpha},$$

а тому пряма $v = \mu u$ є

$$v = -\frac{\alpha}{1 + \alpha} u;$$

а

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k - \mu)\lambda} = (1 + a)e^{-\frac{\alpha}{1 + \alpha}}.$$

Зауважимо, що μ повинно бути від'ємним числом, а тому α може бути $\alpha < -1$ або $\alpha > 0$.

Рівняння

$$\gamma = \gamma(\alpha) = 1$$

має корінь $\alpha = 0$, що відповідає системі без імпульсного збурення, а отже, в ній немає одноімпульсних циклів.

Рівняння

$$\gamma = (1 + \alpha)e^{-\frac{\alpha}{1 + \alpha}} = -1$$

має єдиний корінь $\alpha = \alpha^* < -1$. Отже, якщо в вихідній системі $\alpha = \alpha^*$, то в ній є сім'я двоімпульсних циклів, тобто підданий імпульсному збуренню маятник здійснює коливання з періодом

$$T = -2\mu = \frac{\alpha^*}{1 + \alpha^*}.$$

Так як нерівність $|\gamma| < 1$:

$$|1 + \alpha| < e^{\frac{\alpha}{1 + \alpha}}$$

виконується при $\alpha^* < \alpha < -1$, то при таких значеннях α маятник виконує затухаючі коливання, прямуючи до положення рівноваги при $t \rightarrow \infty$.

При $\alpha < \alpha^*$ маятник виконує розгойдує коливання.

Таким чином, бачимо, що за рахунок імпульсної дії маятник з великим тертям, "неколивний" маятник, можна зробити коливним і навіть розгойдувальним.

2.3. Випадок комплексних власних чисел матриці диференціальної системи рівнянь

В цьому параграфі встановимо необхідні і достатні умови існування одно- (двоімпульсних) циклів, а також поведінку розв'язків лінійної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням у випадку, коли матриця диференціальної системи має комплексні власні числа.

Розглядатимемо систему рівнянь

$$\dot{x} = Jx, \quad \langle a, x \rangle \neq 0; \quad \Delta x_{\langle a, x \rangle = 0} = Bx \quad (2.8)$$

де $x = coll(x_1, x_2)$, $\langle a, x \rangle = 0$, $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ – задана пряма,

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

– сталі матриці.

Закон руху фазової точки $(x_1(t), x_2(t))$ задається системою диференціальних рівнянь $\dot{x} = Jx$, коли ця точка знаходиться поза прямою $x_2 = kx_1$, $k = -a_1/a_2$. В момент $t = t^*$, коли $x_2(t^*) = kx_1(t^*)$ фазова точка "миттєво" перескакує в точку

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1 + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix}.$$

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що імпульсному збуренню система піддається на прямій $x_2 = kx_1$, розташованій в першому і третьому квадрантах фазової площини, тобто $k > 0$.

Зауважимо, що лінійне однорідне перетворення

$$(E + B) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1 + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

площини $(x_1 0 x_2)$ в себе відображає пряму $x_2 = kx_1$ в пряму $x_2 = \mu x_1$, де кутові коефіцієнти k і μ пов'язані рівністю

$$\mu = \frac{k(1 + b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}}.$$

Звідки б не починала рух фазова точка, з часом вона обов'язково попаде на пряму $x_2 = \mu x_1$. Щоб мати повну уяву про поведінку розв'язків вихідної системи досить дослідити розв'язки, що починаються в точках прямої $x_2 = \mu x_1$.

Вийшовши з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ фазова точка попадає на пряму $x_2 = kx_1$ в точку (x_1^*, kx_1^*) :

$$x_1^* = e^{\alpha t^*} (\cos \beta t^* + \mu \sin \beta t^*) x_1^0,$$

$$kx_1^* = e^{\alpha t^*} (-\sin \beta t^* + \mu \cos \beta t^*) x_1^0,$$

де $\beta t^* = \pi + \arctg \mu - \arctg k$, якщо $k \geq \mu$, або ж $\beta t^* = \arctg \mu - \arctg k$, якщо $k < \mu$.

В момент $t = t^*$ фазова точка з положення (x_1^*, kx_1^*) "перескакує" на пряму $x_2 = \mu x_1$ в точку $(x_1^+, \mu x_1^+)$, де

$$x_1^+ = e^{\frac{\alpha}{\beta} (\arctg \mu - \arctg k)} \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + k^2}} (1 + b_{11} + kb_{12}) x_1^0$$

якщо $k < \mu$ і

$$x_1^+ = -e^{\frac{\alpha}{\beta} (\pi + \arctg \mu - \arctg k)} \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + k^2}} (1 + b_{11} + kb_{12}) x_1^0,$$

якщо $k \geq \mu$.

Це справді так, бо, враховуючи співвідношення

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + tg^2 \varphi} \quad \text{і} \quad \sin^2 \varphi = \frac{tg^2 \varphi}{1 + tg^2 \varphi}$$

маємо

$$\begin{aligned} \cos(\arctg\mu - \arctgk) &= \cos(\arctg\mu) \cdot \cos(\arctgk) + \sin(\arctg\mu) \cdot \sin(\arctgk) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{1+k^2}}(1+\mu k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\arctg\mu - \arctgk) &= \sin(\arctg\mu) \cos(\arctgk) - \cos(\arctg\mu) \cdot \sin(\arctgk) = \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{1+k^2}}(\mu - k). \end{aligned}$$

Звідки випливає, що

$$\cos(\arctg \mu - \arctg k) + \mu \sin(\arctg \mu - \arctg k) = \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+k^2}},$$

$$\cos(\pi + \arctg \mu - \arctg k) + \mu \sin(\pi + \arctg \mu - \arctg k) = -\sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+k^2}}.$$

Таким чином, поведінка розв'язків вихідної системи (2.8) повністю визначається відображенням $h : R \rightarrow R$ прямої в пряму

$$h : x_1 \rightarrow e^{\frac{\alpha}{\beta}(\arctg\mu - \arctgk)} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+k^2}}(1 + b_{11} + kb_{12})x_1,$$

якщо $k < \mu$ і

$$h : x_1 \rightarrow -e^{\frac{\alpha}{\beta}(\pi + \arctg\mu - \arctgk)} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+k^2}}(1 + b_{11} + kb_{12})x_1,$$

якщо $k \geq \mu$.

Отже, справедливі наступні твердження.

Теорема 2.3.1. *Нехай параметри системи (2.8) такі, що виконується нерівність*

$$k < \frac{k(1 + b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}}.$$

Якщо

$$\frac{\alpha}{e\beta}(\operatorname{arctg}\mu - \operatorname{arctg}k) \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + k^2}} |1 + b_{11} + kb_{12}| < 1,$$

то будь-який розв'язок вихідної системи (2.8) прямує до нуля, коли $t \rightarrow \infty$, тобто система (2.8) є стійкою в цілому.

Якщо

$$\frac{\alpha}{e\beta}(\operatorname{arctg}\mu - \operatorname{arctg}k) \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + k^2}} |1 + b_{11} + kb_{12}| > 1,$$

то будь-який розв'язок вихідної системи прямує в нескінченність, коли $t \rightarrow \infty$, тобто система не є стійкою.

Якщо ж

$$\frac{\alpha}{e\beta}(\operatorname{arctg} \mu - \operatorname{arctg} k) \cdot \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + k^2}} |1 + b_{11} + kb_{12}| = 1,$$

то кожна точка $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu_1$ породжує одноімпульсний або ж двоімпульсний цикли.

Одноімпульсні цикли з'являються за умови

$$1 + b_{11} + kb_{12} > 0, \tag{2.9}$$

а двоімпульсні, коли

$$1 + b_{11} + kb_{12} < 0. \tag{2.10}$$

Умова (2.9) гарантує однопараметричну сім'ю періодичних з періодом $\operatorname{arctg}\mu - \operatorname{arctg}k$ щодо βt розв'язків системи (2.8). Фактично будь-який

розв'язок з моменту t^* попадання фазової точки на пряму $x_2 = \mu x_1$, стає при $t \geq t^*$ періодичним з періодом $\arctg \mu - \arctg k$ щодо βt .

Траєкторією такого періодичного розв'язку є кусок логарифмічної спіралі (траєкторії системи $\dot{x} = Jx$), розташований в одному із секторів, утворених прямими $x_2 = kx_1$ та $x_2 = \mu x_1$.

При виконанні умови (2.10) система (2.8) має однопараметричну сім'ю двоїмпульсних циклів – траєкторій періодичних розв'язків, що піддаються імпульсному збуренню двічі на період. Період цих розв'язків щодо βt вдвічі більший від періоду розв'язків, що породжують одноімпульсні цикли і дорівнює $2(\arctg \mu - \arctg k)$.

Траєкторією такого розв'язку (двоїмпульсного циклу) є два куски логарифмічних спіралей (траєкторій системи $\dot{x} = Jx$) розташованих в секторах між прямими $x_2 = kx_1$ та $x_2 = \mu x_1$, один з яких належить першому квадранту, а другий – третьому квадранту фазової площини (x_1, x_2) .

Аналогічні твердження про поведінку розв'язків системи (2.8) справедливі у випадку $k \geq \mu$, тобто у випадку, коли параметр $k > 0$ належить множині розв'язків нерівності

$$k \geq \frac{k(1 + b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}} \Rightarrow \frac{b_{12}k^2 + (b_{11} - b_{22})k - b_{21}}{kb_{12} + b_{11} + 1} \geq 0. \quad (2.11)$$

Теорема 2.3.2. *Нехай параметри системи (2.8) такі, що виконується нерівність (2.11).*

Якщо

$$\frac{\alpha}{e\beta}(\pi + \arctg \mu - \arctg k) \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + k^2}} |1 + b_{11} + kb_{12}| < 1,$$

то вихідна система (2.8) є стійкою в цілому і нестійкою, якщо

$$\frac{\alpha}{e\beta}(\pi + \arctg \mu - \arctg k) \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + k^2}} |1 + b_{11} + kb_{12}| > 1.$$

Якщо ж

$$e^{\frac{\alpha}{\beta}(\pi + \operatorname{arctg} \mu - \operatorname{arctg} k)} \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1 + k^2}} |1 + b_{11} + kb_{12}| = 1,$$

то кожна точка $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$ породжує одноімпульсний або ж двоімпульсний цикли.

Зауважимо, що в цьому випадку наявність одноімпульсних циклів забезпечує умова

$$1 + b_{11} + kb_{12} < 0,$$

а наявність двоімпульсних циклів – умова

$$1 + b_{11} + kb_{12} > 0.$$

Окремо варто сказати декілька слів про випадок $k = \mu$. Так як фазова точка, рухаючись траєкторіями диференціальної системи, перетинає кожную пряму $x_2 = ax_1$ безліч разів, то, природно допускати, що можливий випадок $\mu = k$, тобто імпульсному збуренню вихідна система піддається на прямій $x_2 = kx_1$, причому відображення

$$(E + B) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow (E + B) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

переводить пряму $x_2 = kx_1$ в себе, іншими словами елементи матриці B такі, що виконується рівність

$$\frac{b_{21} + (1 + b_{22})k}{1 + b_{11} + b_{12}k} = k.$$

Відмітимо, що в такій постановці задачі є елемент керування системою в такому розумінні: якщо ми k задаємо (тобто задаємо пряму імпульсної дії), то елементи матриці B повинні задовольняти написану вище рівність. Якщо ж задана в нас матриця B , то пряма імпульсної дії (коефіцієнт k) вибирається з рівняння

$$b_{12}k^2 + (b_{11} - b_{22})k - b_{21} = 0.$$

Нехай фазова точка $(x_1(t), x_2(t))$ починає рух при $t = 0+$ з точки (x_1^0, kx_1^0) прямої $x_2 = kx_1$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ kx_1^0 \end{pmatrix}$$

Тоді вона через час $\beta t^* = \pi$ знову попадає на цю пряму в точку

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi} x_1^0 \\ -e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi} kx_1^0 \end{pmatrix}.$$

В цей момент часу під дією імпульсної сили вона "перескакує" в точку

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi} x_1^0 \\ -e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi} (b_{21} + (1 + b_{22})k)x_1^0 \end{pmatrix}$$

цієї ж прямої.

Щоб описати поведінку розв'язків вихідної системи, досить дослідити відображення прямої в пряму $h : R \rightarrow R$, де

$$h : x_1 \rightarrow -e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi} (1 + b_{11} + kb_{12})x_1.$$

Якщо число

$$e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi} |1 + b_{11} + kb_{12}| < 1,$$

то всі розв'язки вихідної системи прямують до нуля, коли $t \rightarrow +\infty$.

Якщо

$$e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi} |1 + b_{11} + kb_{12}| > 1,$$

то будь-який нетривіальний розв'язок вихідної системи з часом йде в нескінченність при $t \rightarrow +\infty$.

Якщо число

$$-e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi} (1 + b_{11} + kb_{12}) = 1,$$

то будь-який нетривіальний розв'язок вихідної системи є періодичним з періодом π щодо βt ;

якщо ж

$$e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi} (1 + b_{11} + kb_{12}) = 1,$$

то будь-який нетривіальний розв'язок вихідної системи є періодичним з періодом 2π щодо βt .

В першому випадку, кожна точка (x_1^0, kx_1^0) породжує одноімпульсний цикл, а в другому – двоімпульсний цикл вихідної системи.

Як приклад розглянемо можливість незатухаючих коливань лінійного осцилятора з великим тертям під дією імпульсного збурення:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2x &= 0, \\ \alpha > 0, \quad \omega^2 > \alpha^2. \end{aligned}$$

Вважатимемо, що дія імпульсної сили відбувається в момент, коли миттєва швидкість фазової точки дорівнює нулю, а її величина пропорційна з деяким коефіцієнтом γ положенню фазової точки в цей момент, тобто

$$\Delta\dot{x}_{\dot{x}=0} = \gamma x, \quad \Delta x_{\dot{x}=0} = 0.$$

Ввівши змінну

$$y = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} (\dot{x} + \alpha x),$$

маємо систему вигляду (2.8):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}y, \\ \dot{y} = -\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}x - \alpha y, \quad y \neq \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}x \end{cases},$$

$$\Delta y|_{y = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}x} = \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}x,$$

в якій

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha & \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \\ -\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$k = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}, \quad \mu = \frac{\alpha + \gamma}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}$$

Позначимо через β число

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}$$

тоді

$$k = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{а} \quad \mu = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}.$$

З'ясуємо умови існування періодичних розв'язків в розглядуваній системі.

Якщо $\gamma > 0$, то маємо випадок $0 < k < \mu$ і умова існування періодичних розв'язків набуває вигляду

$$e^{-\frac{\alpha}{\beta} \left(\arctg \frac{\alpha + \gamma}{\beta} - \arctg \frac{\alpha}{\beta} \right)} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2}{1 + \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta} \right)^2}}$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$\operatorname{arctg} \frac{\alpha + \gamma}{\beta} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha} \left[\ln \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right) \right] - \ln \left(1 + \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta} \right)^2 \right).$$

Кожна з функцій (ліва і права частини рівняння є монотонно зростаючою при $\gamma > 0$) дорівнює нулю при $\gamma = 0$.

Детальніший аналіз поведінки кожної з вказаних функцій підтверджує, що це рівняння додатніх коренів не має, а тому вихідна система при $\gamma > 0$ не має періодичних розв'язків (не має одноімпульсних циклів).

Якщо $\gamma < 0$, то маємо випадок $k > \mu$ і відображення Пуанкаре $h : x_1 \rightarrow hx_1$ набуває вигляду

$$h : x_1 \rightarrow -e^{-\frac{\alpha}{\beta} \left(\pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta} \right) - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} \right)} \cdot \sqrt{\frac{\beta^2 + (\alpha + \gamma)^2}{\beta^2 + \alpha^2}} x_1.$$

Зрозуміло, що одноімпульсних циклів і в цьому випадку немає. Наявність двоімпульсних циклів залежить від того чи має від'ємні корені щодо γ рівняння

$$e^{-\frac{\alpha}{\beta} \left(\pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta} \right) - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} \right)} = \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta^2 + (\alpha + \gamma)^2}}.$$

Записавши це рівняння у вигляді

$$\pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta} \right) - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha} \left[\ln (\beta^2 + \alpha^2) - \ln (\beta^2 + (\alpha + \gamma)^2) \right] \quad (2.12)$$

і привівши відповідний аналіз поведінки кожної з функцій, що стоять відповідно в лівій і правій частині рівняння, переконуємося, що це рівняння при $\gamma < 0$ має єдиний розв'язок, який ми і позначимо через γ^* .

Таким чином, від'ємний корінь рівняння (2.12) $\gamma = \gamma^* < 0$ породжує в вихідній системі наявність однопараметричної сім'ї періодичних розв'язків

з двома моментами імпульсної дії на періоді, тобто сім'ю двоімпульсних циклів.

Висновки до розділу 2

У другому розділі:

- вводиться поняття розривної динамічної системи та наводяться приклади таких систем;
- досліджено лінійні розривні динамічні системи на площині;
- розглянута можливість незатухаючих коливань лінійного осцилятора з великим тертям під дією імпульсного збурення.

Розділ 3. КОЛИВАННЯ В СЛАБОНЕЛІНІЙНИХ РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ НА ПЛОЩИНІ

В третьому розділі досліджуються слабконелінійні розривні динамічні системи другого порядку у випадку, коли відповідна лінійна породжуюча система має однопараметричну сім'ю розривних періодичних розв'язків. Встановлено достатні умови існування ізольованих розривних одно- та двоімпульсних циклів, досліджено їх стійкість і наведені їх асимптотичні наближення. Детально розглянуто коливання як лінійного, так і слабконелінійного маятника в середовищі з великим опором.

Основні результати цього розділу опубліковані в роботах [46, 47, 48, 49].

3.1. Випадок сідлової особливої точки

Дослідимо питання існування одно- і двоімпульсних циклів слабконелінійної двовимірної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + \varepsilon f(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + \varepsilon g(x_1, x_2), \quad x_2 \neq kx_1; \quad (3.1)$$

$$\Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big|_{x_2=kx_1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Рух фазової точки $(x_1(t), x_2(t))$ відбувається за законом системи двох диференціальних рівнянь, коли ця точка знаходиться поза прямою $x_2 = kx_1$, а в момент попадання її на цю пряму вона "миттєво" перестрибує з

положення $\begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix}$ в положення

$$\begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1 + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок, коли незбурена диференціальна система (при $\varepsilon = 0$) має початок координат сідловою точкою.

Вважатимемо, що $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 0$.

Дослідимо тепер можливі коливання в нелінійній системі (3.1).

За умови $\gamma = 1$ при $\varepsilon = 0$ ця система має сім'ю одноімпульсних циклів, що задаються кусками гіпербол

$$\left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\lambda_1} \cdot \left(\frac{x_2}{\mu x_1^0}\right)^{-\lambda_1} = 1, \quad \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1,$$

кожна з яких перетинає пряму $x_2 = kx_1$ в точці

$$x_1^* = x_0 \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}.$$

Саме ця точка відображенням Пуанкаре відображається в початкову точку x_0 (і рух є періодичним).

При $\varepsilon \neq 0$ траєкторія системи (3.1), що вийшла з точки $(x_0, \mu x_0)$ не обов'язково перетне пряму $x_2 = kx_1$ в точці (x_1^*, kx_1^*) .

Вона може перетнути цю пряму в точці, абсциса якої по модулю менша від $|x_1^*|$ (фазова точка наближається до початку координат), або ж в точці, абсциса якої по модулю більша від $|x_1^*|$ (фазова точка віддаляється від початку координат). Щоб з'ясувати, який з цих випадків має місце розглянемо приріст величини

$$E(x_1, x_2) = \ln \left(\left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{x_2}{\mu x_1^0}\right)^{-\lambda_1} \right)$$

за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$ досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії системи (1). Нас цікавить саме знак цього приросту. Якщо він додатний, то траєкторія наближається до початку координат, якщо ж він від'ємний, то траєкторія віддаляється від нуля, а якщо він нуль, то рух фазової точки періодичний.

Виведемо наближену формулу для приросту величини $E(x_1, x_2)$.

Повну похідну по t від $E(x_1, x_2)$, складену в силу системи (3.1), легко обчислити:

$$\frac{d}{dt}E(x_1, x_2) = \varepsilon \left[\frac{\lambda_2}{x_1} f(x_1, x_2) - \frac{\lambda_1}{x_2} g(x_1, x_2) \right].$$

Для обчислення приросту $E(x_1, x_2)$ треба проінтегрувати цю функцію вздовж куска траєкторії, що знаходиться між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$. На жаль, траєкторія нам не відома. Разом з тим за теоремою про диференційовність розв'язків диференціальних рівнянь за параметром (див., наприклад, [58], стор. 354) при достатньо малих значеннях параметра ε розв'язок диференціальної частини системи (3.1) на скінченному часовому відрізку відрізняється величиною порядку ε від розв'язків

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} x_1^0, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t} x_2^0.$$

Отже, траєкторія системи (3.1), що виходить з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$ на величину порядку ε відрізнятиметься від куска гіперболи

$$x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

а тому інтеграл від $\dot{E}(x_1, x_2)$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ можна обрахувати по куску цієї гіперболи, що знаходиться між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \varepsilon \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k} \int_0^{\infty} \left[\lambda_2 \frac{e^{-\lambda_1 s}}{x_1^0} f \left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_1}{\mu x_1^0} e^{-\lambda_2 s} g \left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) \right] ds = \\
&= \frac{\varepsilon}{\mu x_1^0} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k} \int_0^{\infty} \left[\mu \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f \left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g \left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) \right] ds.
\end{aligned}$$

Обчисливши інтеграл, маємо:

$$\Delta E = \varepsilon F(x_1^0) + O(\varepsilon^2),$$

де

$$\begin{aligned}
F(x_1^0) &= \frac{1}{\mu x_1^0} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k} \int_0^{\infty} \left[\mu \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f \left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g \left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) \right] ds.
\end{aligned}$$

За властивостями функції $F(x_1^0)$ можемо сказати про поведінку розв'язків вихідної системи (при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$). Якщо функція додатня, то в системі (в секторі між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = k x_1$) відбуваються загасаючі коливання. Якщо ж ця функція від'ємна, то коливання наростаючі. Можливий випадок, коли ця функція змінює знак. Нехай x_1^* - простий нуль функції $F(x_1)$: $F(x_1^*) = 0$ $\dot{F}(x_1^*) \neq 0$.

Тоді при достатньо малих значеннях $\varepsilon > 0$ точка x_1^* породжує в вихідній системі одноімпульсний цикл, який близький до куска гіперболи

$$\left(\frac{x_1}{x_1^*}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{x_2}{\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} = 1,$$

обмеженої прямими $x_2 = \mu x_1$ та $x_2 = kx_1$.

Підводячи підсумок, можна сформулювати таке твердження.

Теорема 3.1.1. *Нехай в системі (3.1) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$; функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ є неперервно диференційовними в деякому крузі $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що виконується нерівність (4) і рівність*

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = 1.$$

Якщо рівняння $F_1(x_1) = 0$ має простий ізольований корінь x_1^* , такий, що $F_1'(x_1^*) \neq 0$, то при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ система (3.1) має розривний одноімпульсний цикл. Він є асимптотично стійким, якщо при переході через точку x_1^* функція $F_1(x_1)$ змінює знак з мінуса на плюс і нестійким якщо знак цієї функції змінюється з плюса на мінус. З точністю до величини порядку ε^2 цей цикл задається рівністю

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{x_1}{x_1^*}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{x_2}{\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} &= \frac{\varepsilon}{\mu x_1^*} \int_0^t \left[\mu \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f(e^{\lambda_1 s} x_1^*, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^*) \right] ds - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{\mu x_1^*} \int_0^t \left[\lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g(e^{\lambda_1 s} x_1^*, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^*) \right] ds, \end{aligned}$$

в якій x_1^* - корінь рівняння $F_1(x_1) = 0$, а t змінюється в межах від нуля до $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}$.

Аналогічно можна отримати умови існування двоімпульсних циклів, у системі (3.1). Як уже зазначалось вище, такі цикли в лінійній системі можливі, коли параметри системи задовольняють умову: $\gamma = -1$.

Як і в випадку дослідження одноімпульсних циклів, розглянемо приріст величини $E(x_1, x_2)$ за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$, досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії системи (3.1), а потім після результату імпульсної дії, рухаючись по траєкторії системи (3.1), знову попаде на пряму $x_2 = kx_1$.

Використовуючи вираз повної похідної від $E(x_1, x_2)$, складеної в силу системи (3.1), обчислюємо приріст $E(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \Delta E = & \frac{\varepsilon}{\mu x_1^0} \int_0^{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}} \left[\mu \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f \left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) - \right. \\ & \left. - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g \left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) \right] ds + \\ & + \frac{\varepsilon}{\mu(-x_1^0)} \int_0^{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}} \left[\mu \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f \left(-e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{-\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) - \right. \\ & \left. - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g \left(-e^{\lambda_1 s} x_1^0, -e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) \right] ds + \\ & + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned}$$

або ж

$$\Delta E = \varepsilon F_2(x_1^0) + \varepsilon^2 \dots,$$

де

$$F_2(x_1^0) = \frac{1}{\mu x_1^0} \int_0^{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}} \mu \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} \left[f \left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0 \right) - \right.$$

$$-f\left(-e^{\lambda_1 s} x_1^0, -e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0\right) -$$

$$-\frac{1}{\mu x_1^0} \int_0^{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}} \lambda_1 e^{\lambda_2 s} \left[g\left(e^{\lambda_1 s} x_1^0, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0\right) - g\left(-e^{\lambda_1 s} x_1^0, -e^{\lambda_2 s} \mu x_1^0\right) \right] ds.$$

Таким чином, справедливе таке твердження

Теорема 3.1.2. *Нехай в системі (3.1) λ_1, λ_2 , функції $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ такі як і в теоремі 2 і виконуються нерівність (4) та рівність*

$$(1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = -1.$$

Якщо рівняння $F_2(x_1) = 0$ має ізольований корінь x_1^* , такий, що $F'_2(x_1^*) \neq 0$, то при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ система (3.1) має розривний двохімпульсний цикл. Цей цикл асимптотично стійкий, якщо $F'_2(x_1^*) < 0$ і нестійкий, якщо $F'_2(x_1^*) > 0$. З точністю до величини порядку ε^2 цей цикл задається рівністю

$$\ln \left(\frac{x_1}{x_1^*}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{x_2}{\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} = \frac{\varepsilon}{\mu x_1^*} \int_0^t \left[\mu \lambda_2 e^{-\lambda_1 S} f(e^{\lambda_1 S} x_1^*, e^{\lambda_2 S} \mu x_1^*) - \right.$$

$$\left. - \lambda_1 e^{-\lambda_2 S} g\left(e^{\lambda_1 S} x_1^*, e^{\lambda_2 S} \mu x_1^*\right) \right] dS$$

і рівністю

$$\ln \left(\frac{x_1}{-x_1^*}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{x_2}{-\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} = \frac{\varepsilon}{-\mu x_1^*} \int_0^t \left[\mu \lambda_2 e^{-\lambda_2 S} f\left(-e^{\lambda_1 S} x_1^*, -e^{\lambda_2 S} \mu x_1^*\right) - \right.$$

$$\left. - \lambda_1 e^{-\lambda_1 S} g\left(-e^{\lambda_1 S} x_1^*, -e^{-\lambda_2 S} \mu x_1^*\right) \right] dS,$$

в яких x_1^* - корінь рівняння $F_2(x_1) = 0$, а t змінюється в межах від нуля до $(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \ln \frac{\mu}{k}$.

3.2. Випадок особливої точки типу вироджений вузол

Розглянемо двовимірну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\dot{x}_1 = Ax + \varepsilon f_0(x), \quad x_2 \neq kx_1; \quad \Delta x \Big|_{x_2=kx_1} = Bx \quad (3.2)$$

в якій $x = \text{col}(x_1, x_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad f_0(x) = \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

В попередньому параграфі досліджено достатні умови існування одно- і дво- імпульсних циклів у випадку, коли особлива точка відповідної лінійної диференціальної системи є сідлом. Виявляється, що аналогічні дослідження можна провести, коли ця точка є вузлом. Тут ми розглядаємо випадок виродженого вузла, причому вважатимемо цей вузол асимптотично стійким, тобто вважатимемо, що $\lambda < 0$.

Зауважимо, що лінійне однорідне відображення $(E + B) : x \rightarrow (E + B)x$ площини $(x_1 O x_2)$ в себе переводить пряму $x_2 = kx_1$ в пряму $x_2 = \mu x_1$, де коефіцієнти k і μ пов'язані між собою рівністю

$$\mu = \frac{k(1 + b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}}.$$

В лінійному випадку, тобто коли $\varepsilon = 0$, система (3.2) досліджена нами в попередньому розділі.

Зокрема, тут встановлено, що поведінка розв'язків визначається числом

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k - \mu)\lambda}.$$

Якщо це число за модулем менше від одиниці, то всі розв'язки, що виходять із точок прямої $x_2 = \mu x_1$ з часом прямують до нуля, коли $t \rightarrow \infty$.

Якщо ж $|\gamma| > 1$, то всі такі розв'язки прямують до нескінченності, коли $t \rightarrow \infty$.

Значенню $|\gamma| = 1$ відповідають періодичні розв'язки. Коли $\gamma = 1$, то в системі є однопараметрична сім'я одноімпульсних циклів, кожен з яких - кусок кривої

$$x_2 = x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^0} \right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1.$$

Рух фазової точки по такому циклу є періодичним з одним і тим же періодом $T = k - \mu$.

Якщо ж

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = -1,$$

то в системі є однопараметрична сім'я двоімпульсних циклів, відмінних від одноімпульсних.

Двоімпульсний цикл задається двома кусками фазових кривих:

$$x_2 = x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^0} \right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1$$

і

$$x_2 = -x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{-x_1}{x_1^0} \right), \quad -1 \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq -e^{(k-\mu)\lambda}.$$

Рух фазової точки по кожному двоімпульсному циклу є періодичним з одним і тим же періодом $T = 2(k - \mu)$.

При $\varepsilon \neq 0$ траєкторія вихідної системи, що вийшла з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$ не обов'язково перетне пряму $x_2 = kx_1$ в точці (x_1^*, kx_1^*)

$$x_1^* = x_1^0 e^{\lambda(k-\mu)}.$$

Вона може перетнути цю пряму в точці, абсциса якої по модулю менша від $|x_1^*|$ (фазова точка наближається до початку координат), або ж в точці,

абсциса якої по модулю більша від $|x_1^*|$ (фазова точка віддаляється від початку координат). Щоб з'ясувати, який з цих випадків має місце розглянемо приріст величини

$$E(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{\lambda} \ln |x_1|$$

за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$ досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії вихідної системи (3.2). Виведемо наближену формулу для приросту величини $E(x_1, x_2)$.

Обчислимо повну похідну функції $E(x_1, x_2)$ вздовж розв'язків вихідної системи

$$\frac{d}{dt}E(x_1, x_2) = \frac{\varepsilon}{x_1^2} \left[x_1 g(x_1, x_2) - \left(x_2 + \frac{x_1}{\lambda} \right) f(x_1, x_2) \right]$$

Траєкторія вихідної системи, що виходить з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, на величину порядку ε відрізняється від куска лінії

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^0} \left(\mu x_1^0 + \frac{x_1^0}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^0} \right),$$

а тому приріст функції $E(x_1, x_2)$ з точністю до величини $O(\varepsilon^2)$ дорівнює значенню інтеграла від $\dot{E}(x_1, x_2)$, обчисленого по куску цієї лінії, що знаходиться між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$, тобто

$$\begin{aligned} \Delta E &= \varepsilon \int_0^{k-\mu} \frac{e^{-2\lambda\tau}}{(x_1^0)^2} [x_1^0 e^{\lambda\tau} g(x_1^0 e^{\lambda\tau}, (x_2^0 + x_1^0 \tau) e^{\lambda\tau}) - \\ &-(x_2^0 + x_1^0 \tau + \frac{x_1^0}{\lambda}) e^{\lambda\tau} f(x_1^0 e^{\lambda\tau}, (x_2^0 + x_1^0 \tau) e^{\lambda\tau})] d\tau + \varepsilon^2 = \\ &= \varepsilon F(x_1^0) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

де

$$F(x_1^0) = \frac{1}{x_1^0} \int_0^{k-\mu} e^{-\lambda\tau} [g(x_1^0 e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu + \tau)e^{\lambda\tau}) - (\mu + \tau + \frac{1}{\lambda})f(x_1^0 e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu + \tau)e^{\lambda\tau})] d\tau.$$

За властивостями функції $F(x_1^0)$ можна робити висновок про поведінку розв'язків вихідної системи (при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$.) Якщо ця функція додатна при $x > 0$ і від'ємна при $x < 0$, то в секторі між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$ відбувається коливання з наростаючою амплітудою, а якщо ця функція від'ємна при $x > 0$ і додатна при $x < 0$, то ці коливання загасають. Точки x_1^* , в яких $F(x_1^*) = 0$ породжують при малих ε ізольовані одноімпульсні цикли в вихідній системі.

Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 3.2.1. *Нехай в системі (3.2) $\lambda < 0$, функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ є неперервно диференційовними в деякому крузі $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що $\mu < k$ і виконується рівність*

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k-\mu)\lambda} = 1.$$

Якщо рівняння $F(x_1) = 0$ має ізольований корінь x_1^ , такий, що $F'(x_1^*) \neq 0$ то при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ вихідна система має розривний одноімпульсний цикл і цей цикл є асимптотично стійким, якщо $F'(x_1^*) < 0$ і $x_1^* > 0$, або ж $F'(x_1^*) > 0$, а $x_1^* < 0$, і нестійким, якщо $F'(x_1^*) > 0$ і $x_1^* > 0$ або ж $F'(x_1^*) < 0$ і $x_1^* < 0$. Цей цикл міститься в деякому $U(\varepsilon)$ -околі ($U(\varepsilon) \rightarrow 0$, коли $\varepsilon \rightarrow 0$) лінії*

$$x_2 = x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^*} \right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq 1.$$

З'ясуємо питання існування двоімпульсних циклів в вихідній системі рівнянь. В лінійній системі (при $\varepsilon = 0$) такі цикли є, коли параметри системи задовольняють рівність $\gamma = -1$.

Як і при дослідженні одноімпульсних циклів розглянемо приріст величини $E(x_1, x_2)$ за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$ досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії вихідної системи, а після результату імпульсної дії, рухаючись по траєкторії системи (3.2), знову попаде на пряму $x_2 = kx_1$. Використовуючи вираз повної похідної від $E(x_1, x_2)$, складеної в силу системи (3.2), обчислюємо приріст $E(x_1, x_2)$:

$$\Delta E = \varepsilon F_1(x_1^0) + O(\varepsilon^2),$$

де

$$F_1(x_1^0) = \frac{1}{x_1^0} \int_0^{k-\mu} e^{-\lambda\tau} ((g(x_1^0 e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu + \tau)e^{\lambda\tau}) - g(-x_1^0 e^{\lambda\tau}, -x_1^0(\mu + \tau)e^{\lambda\tau})) - (\mu + \tau + \frac{1}{\lambda})(f(x_1^0 e^{\lambda\tau}, x_1^0(\mu + \tau)e^{\lambda\tau}) - f(-x_1^0 e^{\lambda\tau}, -x_1^0(\mu + \tau)e^{\lambda\tau})))d\tau$$

А тому справедливе таке твердження.

Теорема 3.2.2. *Нехай в системі (3.2) $\lambda < 0$, функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ неперервно диференційовні в деякому крузі $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що $\mu < k$ і виконується рівність*

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)e^{(k - \mu)\lambda} = -1.$$

Якщо рівняння $F_1(x_1) = 0$ має ізольований корінь x_1^ , такий, що $F_1'(x_1^*) \neq 0$ то при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ вихідна система має розривний двоімпульсний цикл і цей цикл є асимптотично стійким, якщо*

$F'_1(x_1^*) < 0$ і $x_1^* > 0$, або ж $F'(x_1^*) > 0$ і $x_1^* < 0$ і нестійким, якщо $F'_1(x_1^*) > 0$ і $x_1^* > 0$ або ж $F'(x_1^*) < 0$ і $x_1^* < 0$.

Цей цикл належить деякому $U(\varepsilon)$ -околу ($U(\varepsilon) \rightarrow 0$, коли $\varepsilon \rightarrow 0$ ліній:

$$x_2 = x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_1}{x_1^*} \right), \quad e^{(k-\mu)\lambda} \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq 1.$$

і

$$x_2 = -x_1 \left(\mu + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{-x_1}{x_1^*} \right), \quad -1 \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq -e^{(k-\mu)\lambda}.$$

3.3. Про коливання маятника в середовищі з опором

В багатьох задачах теорії коливань приходиться досліджувати коливання маятника під дією імпульсних сил. Багато конкретних прикладів таких задач можна знайти в відомих монографіях [1, 8]. Математичною моделлю таких задач є розривна динамічна система, рух фазової точки в якій відбувається по траєкторіях лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \frac{\delta^2}{4} < \omega^2$$

і піддається дії імпульсної сили при проходженні фазовою точкою (x, \dot{x}) певних множин на фазовій площині (x, \dot{x}) , наприклад, при проходженні точкою $(x(t), \dot{x}(t))$ заданої прямої $x = x_0$, або ж прямої $\dot{x} = 0$. Ряд цікавих результатів дослідження такого осцилятора міститься в монографіях [1, 8]. В цих роботах припускається, що в результаті дії імпульсної сили в системі збільшується кількість руху або ж кінетична енергія осцилятора на деяку сталу величину. Встановлені умови існування розривних циклів в таких системах, досліджується питання стійкості таких циклів.

Продовжуючи дослідження існування розривних циклів в розривних динамічних системах на площині, розглянемо таку систему

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \dot{x} \neq 0,$$

$$\Delta\dot{x}|_{\dot{x}=0} = \begin{cases} I_0, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \omega^2 > \frac{\delta^2}{4}. \quad (3.3)$$

Ця система рівнянь описує рух осцилятора в середовищі з опором, причому сила опору не вважається малою. Зрозуміло, що коли $I_0 = 0$, то осцилятор з часом затухає. Коливання в такій системі можливі, якщо $I_0 \neq 0$. З'ясуємо зв'язок між параметрами системи, який забезпечує коливання в цій системі.

Запровадимо на фазовій площині (x, \dot{x}) амплітудно-фазові координати (a, φ) за формулами

$$x = a \cos \varphi, \quad \dot{x} = a \left(-\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right), \quad \Omega^2 = \omega^2 - \frac{\delta^2}{4}. \quad (3.4)$$

В цих координатах вихідна система набуває вигляду

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\delta}{2}a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\Omega, \quad \operatorname{tg} \varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}, \quad (3.5)$$

$$\Delta a|_{\varphi=\varphi_0+k\pi} = \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} - 1 \right) a, \quad \Delta \varphi|_{\varphi=\varphi_0+k\pi} = \varphi^* - \varphi_0.$$

Зауважимо, що змінні a і φ з x і \dot{x} пов'язані співвідношеннями

$$x^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left(\dot{x} + \frac{\delta}{2}x \right)^2 = a^2, \quad \frac{\dot{x}}{x} = -\frac{\delta}{2} + \Omega \operatorname{tg} \varphi.$$

Півпряма імпульсної дії $\dot{x} = 0$, $x > 0$ є промінь $\varphi = \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2\Omega}$.

Щоб з'ясувати, чи можливі в такій імпульсній системі незатухаючі коливання, досить дослідити відображення Пуанкаре півпрямой $\dot{x} = 0$ в себе, коли полярний кут φ по траєкторіям вихідної системи набуде приріст 2π від

початку руху фазової точки. Нехай фазова точка починає рух з точки $(x_0, 0)$ прямої, $x_0 > 0$. В цей момент під дією імпульсної сили вона "перескакує" в точку з координатами $(x_0, -I_0)$. Далі вона рухається по логарифмічній спіралі

$$a(\varphi) = a_0 e^{\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}$$

що проходить через цю точку, до моменту перетину цієї спіралі з півпрямною $\dot{x} = 0$, $x > 0$. Рух фазової точки буде періодичним, якщо вказана спіраль перетне цю півпрямую в точці $(x_0, 0)$. Точка x_0 і є нерухомою точкою описаного відображення Пуанкаре $h : x \rightarrow h(x)$.

Запишемо явно вираз для функції $h(x)$. Точка $(x_0, 0)$ в змінних (φ, a) має координати (φ_0, a_0) , $x_0 = a_0 \cos \varphi_0$, а точка $(x_0, -I_0)$ - координати

$$\left(\varphi^*, \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left(-I + \frac{\delta}{2} x_0 \right)^2} \right), \quad \varphi^* = \arctg \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{I}{x_0} \right), \quad (3.6)$$

а тому фазова точка, вийшовши з цієї точки, далі рухається по спіралі

$$a(\varphi) = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left(-I + \frac{\delta}{2} x_0 \right)^2} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi^*)}$$

доки зміна φ набуде значення $-2\pi + \varphi_0$, тобто спіраль перетне промінь $\dot{x} = 0$, $x > 0$.

В момент цього перетину

$$a(-2\pi + \varphi_0) = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left(-I + \frac{\delta}{2} x_0 \right)^2} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi + \varphi_0 - \varphi^*)}.$$

Таким чином, відображення Пуанкаре $h(x)$ має вигляд

$$h : x \rightarrow h(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left(-I + \frac{\delta}{2} x \right)^2} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}(2\pi + \varphi^* - \varphi_0)} \cdot \cos \varphi_0. \quad (3.7)$$

Нерухомі точки цього відображення – це розв'язки рівняння

$$\cos^2 \varphi_0 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left(-I + \frac{\delta}{2} x \right)^2 \right) = e^{\frac{\delta}{\Omega} (2\pi + \varphi^* - \varphi_0)} \cdot x^2. \quad (3.8)$$

Проаналізуємо це рівняння детальніше, переписавши його в вигляді

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{I}{x} \right)^2 \right] e^{-\frac{\delta}{\Omega} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{I}{x} \right)} = \\ = e^{\frac{\delta}{\Omega} (2\pi - \varphi_0)} \cdot \left(1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Позначивши ліву частину цього рівняння через $g(x)$, бачимо, що $g(x)$ монотонно спадає при $x > 0$ функція, причому $g(x) \rightarrow +\infty$, коли $x \rightarrow 0+ i$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \left(1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega} \right)^2 \right) e^{-\frac{\delta}{\Omega} \operatorname{arctg} \varphi_0}.$$

Порівнюючи це граничне значення з правою частиною рівняння, бачимо, що воно менше від правої частини, а тому дане рівняння завжди має один додатний корінь. Отже, для будь-якого фіксованого додатного значення I відображення Пуанкаре $h(x)$ має єдину нерухому точку $x^* > 0$, $h(x^*) = x^*$, а тому вихідна система має єдиний розривний цикл:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\dot{x} + \frac{\delta}{2} x \right)^2 \cdot \frac{1}{\Omega^2} = \left(x_*^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left(-I + \frac{\delta}{2} x \right)^2 \right) \cdot \\ \cdot e^{\frac{\delta}{2\Omega} \left(\varphi - \operatorname{arctg} \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{I}{x_*} \right) \right)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\varphi_0 < \varphi < 2\pi + \varphi^*.$$

Розглянемо тепер той же лінійний маятник під дією імпульсної сили за умови, що вона діє в момент проходження ним положення з нульовою швидкістю, а її величина пропорційна положенню маятника в цей момент, тобто розглянемо розривну динамічну систему

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega x^2 = 0, \quad \dot{x} \neq 0, \quad (3.11)$$

$$\Delta \dot{x}|_{\dot{x}=0} = \begin{cases} \alpha x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \alpha < 0.$$

Покажемо, що в такій імпульсній системі при певних значеннях параметрів всі розв'язки можуть бути періодичними, а їх траєкторії – це одноімпульсні розривні цикли. Зауважимо, що фазова точка (x, \dot{x}) , де $\dot{x} = 0$ не починала свій рух по траєкторії диференціального рівняння системи, з часом перетинатиме пряму імпульсної дії $\dot{x} = 0$, а тому достатньо розглянути можливі рухи фазової точки, які починаються з точок цієї прямої.

Перейшовши в системі (3.11) до змінних (a, φ) за формулами (3.4), матимемо систему рівнянь

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\delta}{2}a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\Omega, \quad \operatorname{tg} \varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}, \quad (3.12)$$

$$\Delta a|_{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} - 1 \right) a, \quad \operatorname{tg} \varphi^+|_{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \frac{1}{\Omega} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right),$$

в якій

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2\Omega}, \quad \varphi^* = \operatorname{arctg} \frac{1}{\Omega} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right).$$

Щоб побудувати відповідне відображення Пуанкаре, розмірковуємо, як і в попередньому випадку, так: нехай фазова точка $(x(t), \dot{x}(t))$ починає свій рух з точки прямої $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$. Зразу ж вона "перескакує" в точку

з координатами $(x_0, \alpha x_0)$ і далі рухається по траєкторії диференціальної системи із (3.5) до моменту перетину цієї траєкторії з додатною піввіссю осі абсцис: $\dot{x} = 0, x > 0$. Якщо такий перетин відбудеться в точці $(x_0, 0)$, то рух фазової точки стає періодичним, а її траєкторія – це шматок відповідної траєкторії диференціальної системи із (3.5).

Запишемо відповідне відображення Пуанкаре. В амплітудно-фазових координатах (φ, a) точці $(x_0, 0)$ відповідає запис (φ_0, a_0) , $x_0 = a_0 \cos \varphi_0$, а точка $(x_0, \alpha x_0)$ в цих змінних має координати $\left(\varphi^*, \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} a_0\right)$.

Вийшовши з цієї точки, фазова точка рухається далі за законом:

$$a(\varphi) = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} a_0 \cdot e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi^*)} \quad (3.13)$$

до тих пір, поки φ набуде значення $\varphi = -2\pi + \varphi_0$, тобто вказана спіраль перетне півпрямую $\dot{x} = 0, x > 0$. В момент перетину

$$a(-2\pi + \varphi_0) = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} a_0 \cdot e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi + \varphi_0 - \varphi^*)},$$

а тому вказана спіраль $a = a(\varphi)$ перетинає додатну вісь абсцис в точці $x_1 = a(-2\pi + \varphi_0) \cdot \cos \varphi_0$, або ж

$$x_1 = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} x_0 \cdot e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi + \varphi_0 - \varphi^*)}. \quad (3.14)$$

Таким чином, відображення Пуанкаре має вигляд

$$h : x \rightarrow \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi + \varphi_0 - \varphi^*)} \cdot x, \quad x > 0. \quad (3.15)$$

Це лінійне однорідне відображення, кожна точка $x_0 > 0$ для якого є нерухомою точкою, якщо тільки параметри вихідної системи рівнянь (3.11) такі, що

$$\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi + \varphi_0 - \varphi^*)} = 1. \quad (3.16)$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\Omega^2} \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)^2\right) e^{-\frac{\delta}{\Omega} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Omega} \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)} = \\ = \left(1 + \frac{\delta^2}{4\Omega^2}\right) e^{\frac{\delta}{\Omega} \left(2\pi - \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2\Omega}\right)}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

враховуючи, що

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\delta^2}{4\Omega^2}}, \quad \frac{1}{\cos^2 \varphi^*} = 1 + \frac{1}{\Omega^2} \left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)^2.$$

Позначивши ліву частину цього рівняння, як функцію змінної α , через $g(\alpha)$, дослідимо її для $\alpha < 0$. Безпосередньо переконуємося, що $g(\alpha) \rightarrow +\infty$, коли $\alpha \rightarrow -\infty$ і

$$g(\alpha) \rightarrow \left(1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega}\right)^2\right) \cdot e^{-\frac{\delta}{\Omega} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2\Omega}},$$

коли $\alpha \rightarrow -0$, і оскільки права частина рівняння стала і більша від $\lim_{\alpha \rightarrow -0} g(\alpha)$, то робимо висновок, що рівняння має при $\alpha < 0$ єдиний розв'язок, який ми позначимо через $\alpha = \alpha^*$.

Таким чином, якщо в системі рівнянь (3.11) $\alpha = \alpha^*$, то всі її розв'язки є періодичними, а траєкторії кожного з них є розривними циклами.

Розглянемо тепер збурений осцилятор під дією тієї ж імпульсної сили

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \dot{x} \neq 0, \\ \Delta \dot{x}|_{\dot{x}=0} = \begin{cases} \alpha^* x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тут $f(x, \dot{x})$ - задана функція змінних x, \dot{x} , вважатимемо її неперервно диференційовною, ε - малий додатний параметр α^* - корінь рівняння (14*).

Тобто ми розглядаємо випадок, коли всі розв'язки системи рівнянь (3.18) при $\varepsilon = 0$ є періодичними. Встановимо достатні умови існування ізольованих розривних циклів в системі (3.18), коли $\varepsilon \neq 0$.

Запровадивши в рівняннях (3.18) заміну змінних (3.4), перейдемо від цих рівнянь до системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta}{2}a + \frac{\varepsilon}{\Omega}f\left(a\cos\varphi, a\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi + \Omega\sin\varphi\right)\right)\sin\varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\Omega + \frac{\varepsilon}{a\Omega}f\left(a\cos\varphi, a\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi + \Omega\sin\varphi\right)\right)\cos\varphi, \end{aligned} \quad \text{tg } \varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}, \quad (3.19)$$

$$\Delta a \Big|_{\text{tg}\varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*} - 1\right)a, \quad \text{tg}\varphi^+ \Big|_{\text{tg}\varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \frac{1}{\Omega}\left(\alpha^* + \frac{\delta}{2}\right) \quad (3.20)$$

в яких, як і раніше,

$$\varphi_0 = \text{arctg}\frac{\delta}{2\Omega}, \quad \varphi^* = \text{arctg}\frac{1}{\Omega}\left(\alpha^* + \frac{\delta}{2}\right). \quad (3.21)$$

Для спрощення запису надамо рівняння (3.19) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta}{2}a + \frac{\varepsilon}{\Omega}f_0(a, \varphi)\sin\varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\Omega + \frac{\varepsilon}{\Omega a}f_0(a, \varphi)\cos\varphi, \end{aligned} \quad \text{tg } \varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}, \quad (3.22)$$

позначивши

$$f_0(a, \varphi) = f\left(a\cos\varphi, a\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi + \Omega\sin\varphi\right)\right),$$

а в моменти часу, коли $\text{tg } \varphi(t) = \frac{\delta}{2\Omega}$, $\cos\varphi(t) > 0$, маємо ті ж величини скачків, що описуються рівняннями (3.20).

Позначимо через $V(a, \varphi)$ функцію

$$V(a, \varphi) = ae^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi},$$

повна похідна якої по t , складена в силу системи рівнянь (3.22) при $\varepsilon = 0$,

$$\frac{d}{dt}V(a, \varphi) = e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \frac{da}{dt} - \frac{\delta}{2\Omega} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \equiv 0$$

на проміжках неперервності функцій $a = a(t)$ і $\varphi = \varphi(t)$, тобто при $tg\varphi(t) \neq \frac{\delta}{2\Omega}$, $\cos \varphi(t) > 0$ ця функція стала.

Обчислимо повну похідну по t від функції $V(\varphi, a)$ в силу системи рівнянь (3.22), коли $\varphi \neq \varphi_0 + 2k\pi$ і $\varepsilon \neq 0$. Маємо:

$$\frac{d}{dt}V(\varphi, a) = \frac{\varepsilon}{\Omega} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \left[f_0(a, \varphi) \sin \varphi - \frac{\delta}{2\Omega} f_0(a, \varphi) \cos \varphi \right],$$

або ж

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}V(a, \varphi) &= \frac{\varepsilon}{\Omega} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \left[f_0(a, \varphi) \sin \varphi - \frac{\delta}{2\Omega} f_0(a, \varphi) \cos \varphi \right] \times \\ &\times \frac{1}{-\Omega + \frac{\varepsilon}{a\Omega} f_0(a, \varphi) \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що з точністю до величини порядку малості ε^2

$$\frac{d}{d\varphi}V(a, \varphi) = -\frac{\varepsilon}{\Omega^2} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \left[f_0(a, \varphi) \sin \varphi - \frac{\delta}{2\Omega} f_0(a, \varphi) \cos \varphi \right].$$

Зрозуміло, що на відміну від випадку $\varepsilon = 0$, при $\varepsilon \neq 0$ фазова крива може не породжувати розривний цикл: вона може, з ростом φ , наближатися до початку координат або ж від нього відхилятися. Щоб з'ясувати, який з

цих випадків насправді має місце, розглянемо приріст функції $V(a, \varphi)$ за один оберт навколо початку координат. Нас цікавитиме знак цього приросту. На спіралі, що розкручується, приріст додатній, а на спіралі, що стискується з ростом φ , він від'ємний, а на циклі цей приріст дорівнює нулю.

Щоб обчислити приріст функції $V(a, \varphi)$ за один оберт, треба цю функцію проінтегрувати вздовж неперервної частини траєкторії, яка на жаль, невідома. Але в силу теореми про диференційовність розв'язку за параметром (див. наприклад [58], теорема 5.12) при достатньо малих значеннях параметра ε розв'язок системи при $\varepsilon \neq 0$ на скінченному проміжку часу відрізняється поправкою порядку ε від відповідного розв'язку системи при $\varepsilon = 0$. Тому інтегрування можна провести з точністю до величини порядку ε^2 по куску спіралі

$$a(\varphi) = a_0 e^{\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi + \varphi^*.$$

Нагадаємо, що кожен такий кусок спіралі у випадку $\alpha = \alpha^*$ є траєкторією періодичного розв'язку системи рівнянь (3.22) при $\varepsilon = 0$.

Отже, приріст функції $V(a, \varphi)$ є величина

$$-\frac{\varepsilon}{\Omega^2} \int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \left[f_0 \left(a e^{\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}, \varphi \right) \left(\sin \varphi - \frac{\delta}{2\Omega} \cos \varphi \right) \right] d\varphi + \varepsilon^2 \dots,$$

що з точністю до ε^2 визначається виразом

$$F(a) = \frac{\varepsilon}{\Omega} \cdot \sqrt{\Omega^2 + \frac{\delta^2}{4}} \int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} f_0 \left(a e^{\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}, \varphi \right) \cos(\varphi + \vartheta) d\varphi,$$

$$\text{де } \vartheta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\Omega^2}}}.$$

За властивостями функції $F(a)$ можемо судити про поведінку розв'язків системи (3.18) (при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$). Якщо функція додатна, то в вихідній системі коливання наростають, а якщо від'ємна, то відбуваються згасаючі коливання. Можливий випадок, коли ця функція змінює знак. Нехай $a = a^*$ - простий додатний корінь функції $F(a) : F(a^*) = 0$ і $F'(a^*) \neq 0$. Тоді при достатньо малих значеннях $\varepsilon > 0$ точка $a = a^*$ породжує у вихідній системі одноімпульсний розривний цикл.

Підводячи підсумок, можна сформулювати таке твердження.

Теорема 3.3.1. *Нехай в системі рівнянь (3.18) функція $f(x, \dot{x})$ є неперервно диференційовною в деякому крузі $x^2 + (\dot{x})^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що $\alpha = \alpha^*$ є від'ємним коренем рівняння (3.17). Якщо рівняння $F(a) = 0$ має ізольований додатний корінь $a = a^*$ такий, що $F'(a^*) \neq 0$, то при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ система рівнянь має розривний одноімпульсний цикл. Цей цикл є асимптотично стійким, якщо $F'(a^*) < 0$ і нестійким, якщо $F'(a^*) > 0$.*

Розглянемо тепер випадок, коли осцилятор піддається дії імпульсної сили кожний раз коли фазова точка проходить положення $\dot{x} = 0$ і величина імпульсу в цей момент пропорційна положенню, тобто αx , $\alpha < 0$. Система рівнянь, що описує рух такого осцилятора має вигляд

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \dot{x} \neq 0, \quad (3.23)$$

$$\Delta\dot{x}|_{\dot{x}=0} = \alpha x|_{\dot{x}=0},$$

Як і раніше, запровадивши змінні (a, φ) за формулами

$$x = a \cos \varphi, \quad \dot{x} = a \left(-\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right), \quad \Omega^2 = \omega^2 - \frac{\delta^2}{4},$$

перейдемо до системи рівнянь

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\delta}{2}a + \frac{\varepsilon}{\Omega}f\left(a \cos \varphi, a\left(-\frac{\delta}{2}\cos \varphi + \Omega \sin \varphi\right)\right) \sin \varphi, \quad (3.24)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Omega + \frac{\varepsilon}{a\Omega}f\left(a \cos \varphi, a\left(-\frac{\delta}{2}\cos \varphi + \Omega \sin \varphi\right)\right) \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}$$

$$\Delta a \Big|_{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} - 1\right) a, \quad \Delta \varphi \Big|_{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \varphi^* - \varphi_0.$$

Спочатку встановимо умови, при виконанні яких в вихідній системі у випадку $\varepsilon = 0$ всі розв'язки є періодичними, тобто кожна траєкторія породжує двоімпульсний розривний цикл. Для цього, як і при дослідженні існування одноімпульсних циклів, побудуємо відповідне відображення Пуанкаре.

Фазова точка (x, \dot{x}) , почавши рух з положення $(x_0, 0)$, під дією імпульсної сили миттєво перескакує в точку $(x_0, \alpha x_0)$. Далі під дією неперервного закону руху вона попадає в точку $(x_1, 0)$, $x_1 < 0$, звідки миттєво попадає в точку $(x_1, \alpha x_1)$. З цієї точки під дією неперервного закону руху вона з часом попадає в точку прямої $\dot{x} = 0$, $x > 0$. Позначимо цю точку $(x^*, 0)$. Якщо $x^* = x_0$, то це й означає, що траєкторією руху фазової точки є двоімпульсний розривний цикл. Точка x_0 , що породжує цей розривний цикл, є нерухомою точкою описаного відображення Пуанкаре: $h : x_0 \rightarrow x^*$.

Встановимо вигляд функції $h = h(x_0)$. Коли $\varepsilon = 0$, то змінні a і φ залежать від t таким чином

$$a = a(t) = a(t_0)e^{-\frac{\delta}{2}(t-t_0)}, \quad \varphi = \varphi(t) = \varphi(t_0) - \Omega(t-t_0)$$

для всіх t , таких що $\operatorname{tg} \varphi(t) \neq \frac{\delta}{2\Omega}$, тобто коли $\varphi(t) \neq \varphi_0 + k\pi$, а при $\varphi(t) = \varphi_0 + k\pi$ ці змінні зазнають розривів першого роду згідно системи (3.24).

Отже, на проміжках неперервності зміни φ : $-\pi < \varphi - \varphi_0 < \varphi^* - \varphi_0$
і $-2\pi < \varphi - \varphi_0 < -\pi + \varphi^* - \varphi_0$

$$a(\varphi) = a_0 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi^*)}, \quad -\pi + \varphi_0 < \varphi < \varphi^*; \quad (3.25)$$

$$a(\varphi) = a_1 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi + \pi - \varphi^*)}, \quad -2\pi + \varphi_0 < \varphi < -\pi + \varphi^*,$$

де

$$a_1 = a_0 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-\pi + \varphi_0 - \varphi^*)}.$$

Таким чином

$$a(\varphi_0 - 2\pi) = a_0 \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}(\pi + \varphi^* - \varphi_0)},$$

а значить, функція $h = h(x)$ відображає початкову точку x_0 в точку

$$x = a(\varphi_0 - 2\pi) \cos \varphi_0 = x_0 \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi^*} \cdot e^{-\frac{\delta}{\Omega}(\pi + \varphi^* - \varphi_0)},$$

тобто

$$h = h(x) = x \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi^*} e^{-\frac{\delta}{\Omega}(\pi + \varphi^* - \varphi_0)}. \quad (3.26)$$

Нерухомі точки відображення Пуанкаре $h : x \rightarrow h(x)$ - це розв'язки рівняння

$$x \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi^*} = e^{\frac{\delta}{\Omega}(\pi + \varphi^* - \varphi_0)} \cdot x,$$

з якого робимо висновок, що кожна точка $x > 0$ є нерухомою точкою відображення h , якщо тільки виконується рівність

$$\frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi^*} = e^{\frac{\delta}{\Omega}(\pi + \varphi^* - \varphi_0)}, \quad (3.27)$$

яку ще можна подати в такому вигляді

$$\frac{1 + \frac{1}{\Omega^2} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right)^2}{1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega} \right)^2} = e^{\frac{\delta}{\Omega} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{\Omega} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right) - \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2\Omega} \right)}, \quad (3.28)$$

або

$$\begin{aligned} & \ln \left(1 + \frac{1}{\Omega^2} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right) - \frac{\delta}{\Omega} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Omega} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right) = \\ & = \ln \left(1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega} \right)^2 \right) + \frac{\delta}{\Omega} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2\Omega} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Дослідимо цю рівність, як рівняння щодо $\alpha < 0$. Позначивши ліву частину рівняння через

$$g(\alpha) = \ln \left(1 + \frac{1}{\Omega^2} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right) - \frac{\delta}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Omega} \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right), \quad (3.30)$$

бачимо, що

$$\lim_{\alpha \rightarrow -0} g(\alpha) = \ln \left(1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega} \right)^2 \right) - \frac{\delta}{2} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2\Omega},$$

тобто, ця величина завжди менша від правої частини рівняння. Оскільки права частина рівняння стала, а ліва $g(\alpha) \rightarrow +\infty$, коли $\alpha \rightarrow -\infty$, то рівняння (26) має від'ємний корінь, який ми позначимо $\alpha = \alpha^* < 0$. Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 3.3.2. *Якщо в системі рівнянь (3.23) $\alpha = \alpha^* < 0$ - є корінь рівняння (3.28), то при $\varepsilon = 0$ всі розв'язки цих рівнянь є періодичними,*

а траєкторія кожного з них є двоімпульсний розривний цикл. Цей цикл задається в параметричному вигляді рівняннями:

$$x = \frac{x_0}{\cos \varphi_0} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi_0)} \cdot \cos \varphi,$$

$$\dot{x} = \frac{x_0}{\cos \varphi_0} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi_0)} \left(-\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right), \quad \varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi^*,$$
(3.31)

і рівняннями

$$x = \frac{x_0}{\cos \varphi^*} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \pi - \varphi_0)} \cdot \cos \varphi,$$
(3.32)

$$\dot{x} = \frac{x_0}{\cos \varphi^*} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \pi - \varphi_0)} \left(-\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right),$$

якщо $\pi + \varphi_0 < \varphi < 2\pi + \varphi^*$.

Тут, як і раніше, $\varphi_0 = \arctg \frac{\delta}{2\Omega}$, а $\varphi^* = \arctg \frac{1}{\Omega} \left(\alpha^* + \frac{\delta}{2} \right)$.

З'ясуємо тепер можливість існування розривних циклів в системі (3.24) при $\varepsilon \neq 0$ у випадку $\alpha = \alpha^*$.

Ввівши позначення

$$f_0(a, \varphi) = f \left(a \cos \varphi, a \left(-\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right) \right),$$

подамо її в вигляді

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\frac{\delta}{2}a + \frac{\varepsilon}{\Omega}f_0(a, \varphi) \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\Omega + \frac{\varepsilon}{a\Omega}f_0(a, \varphi) \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}\end{aligned}\quad (3.33)$$

$$\Delta a \Big|_{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} - 1 \right) a, \quad \Delta \varphi \Big|_{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \varphi^* - \varphi_0,$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2\Omega}, \quad \varphi^* = \operatorname{arctg} \frac{1}{\Omega} \left(\alpha^* + \frac{\delta}{2} \right),$$

де α^* - від'ємний корінь рівняння (3.28).

Як і при дослідженні питання існування одноімпульсних циклів, розглянемо функцію

$$V(a, \varphi) = a \cdot e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}.$$

Ця функція є сталою вздовж розв'язків системи (3.33) при $\varepsilon = 0$, а при $\varepsilon \neq 0$ похідна цієї функції по t , складена в силу рівнянь (3.33), є

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \frac{da}{dt} - \frac{\delta}{2\Omega} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \\ &= e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \left[-\frac{\delta}{2}a + \varepsilon f_0(a, \varphi) \sin \varphi - \frac{\delta a}{2\Omega} \left(-\Omega + \frac{\varepsilon}{\Omega a} f_0(a, \varphi) \cos \varphi \right) \right] = \\ &= e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \cdot \frac{\varepsilon}{\Omega} \left[f_0(a, \varphi) \sin \varphi - \frac{\delta}{2\Omega} f_0(a, \varphi) \cos \varphi \right],\end{aligned}$$

а

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\Omega^2} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \left[f_0(a, \varphi) \sin \varphi - \frac{\delta}{2\Omega} f_0(a, \varphi) \cos \varphi \right] + \varepsilon^2 \dots$$

Щоб з'ясувати, який приріст одержує функція $V(a, \varphi)$, коли φ одержує приріст 2π , треба її проінтегрувати в межах від 0 до 2π вздовж траєкторії системи рівнянь (3.33). На жаль, цієї траєкторії нам невідомо. Але ми вже знаємо, що кожна така траєкторія лежить в деякому околі U_ε розривного циклу системи (3.33) при $\varepsilon = 0$, рівняння (3.31), (3.32) якого нам вже відомі.

Інтегруючи останню рівність по циклу, маємо приріст функції $V(a, \varphi)$ за один оборот φ з урахуванням скачків для змінних a і φ :

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon}{\Omega^2} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}} \left[\int_{\varphi_0}^{\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} f_0 \left(a e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi_0)}, \varphi \right) \cos(\varphi + \vartheta) d\varphi + \right. \\ & \left. + \int_{\pi+\varphi_0}^{2\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} f_0 \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} a e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \pi - \varphi_0)} \cos(\varphi + \vartheta) \right) d\varphi + \varepsilon^2 \dots \right] \\ & = \frac{\varepsilon}{\Omega^2} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}} F(a) + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} F(a) = & - \int_{\varphi_0}^{\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \cdot f_0 \left(a e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi_0)} \cdot \cos(\varphi + \vartheta) \right) d\varphi + \\ & + \int_{\pi+\varphi_0}^{\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \cdot f_0 \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} a e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \pi - \varphi_0)} \cdot \cos(\varphi + \vartheta) \right) d\varphi. \quad (3.34) \end{aligned}$$

Підсумовуючи наведені вище викладки, можемо сформулювати таке твердження.

Теорема 3.3.3. *Нехай в рівняннях (3.23) функція $f(x, \dot{x})$ є неперервно диференційовною в деякому крузі*

$$x^2 + (\dot{x})^2 \leq r^2,$$

а $\alpha = \alpha^* < 0$ є від'ємним коренем рівняння (3.28).

Якщо рівняння $F(a) = 0$ має ізольований додатний корінь $a = a^*$, такий, що $F'(a^*) \neq 0$, то існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що для кожного ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ система рівнянь (3.23) має двоімпульсний розривний цикл. Цей цикл є стійким, якщо $F'(a^*) < 0$ і нестійким, якщо $F'(a^*) > 0$.

Зауважимо, що цей розривний цикл знаходиться в деякому $U(\varepsilon)$ -околі кусків кривої, якщо на фазовій площині в параметричному вигляді задається рівняннями

$$x = a^* e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi_0)} \cdot \cos \varphi, \quad \dot{x} = a^* e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi_0)} \left(-\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right),$$

якщо $\varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi^*$ і рівняннями

$$x = a^* \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \pi - \varphi_0)} \cdot \cos \varphi,$$

$$\dot{x} = a^* \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi^*} e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \pi - \varphi_0)} \left(-\frac{\delta}{2} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right),$$

якщо $\pi + \varphi_0 < \varphi < 2\pi + \varphi^*$.

Рух фазової точки по цьому циклу є періодичним з періодом щодо

Ωt рівним $2(\pi + \varphi^* - \varphi_0)$.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі:

- обґрунтовано метод усереднення в слабонелінійних розривних динамічних системах на площині в випадку сідлової точки її лінійної диференціальної частини;

- встановлені достатні умови існування одно- та двоімпульсних ізольованих розривних циклів в слабонелінійних розривних динамічних системах на площині у випадку, коли початок координат лінійної диференціальної системи є стійким "вузлом" ;
- проведено широке дослідження можливості коливань маятника в середовищі з (великим) опором під дією імпульсної сили, а також обґрунтовано метод усереднення в системі "маятникового" виду;
- встановлені достатні умови існування розривних циклів в таких системах та досліджено питання їх стійкості.

Розділ 4. ІНВАРІАНТНІ ТОРОЇДАЛЬНІ МНОЖИНИ ТА ЇХ СТІЙКІСТЬ

Четвертий розділ присвячений дослідженню питання існування інваріантних тороїдальних множин динамічних систем, фазовим простором яких є прямиий добуток m - вимірного тора і n - вимірного евклідового простору. Досліджується питання асимптотичної стійкості тривіального інваріантного тора як для лінійних розширень динамічних систем без імпульсних збурень так і для розривних динамічних систем. В останньому випадку імпульсному збуренню піддається "нормальна" складова в момент проходження "дотичною" складовою фазової точки заданих множин на m - вимірному торі. Основні результати цього розділу опубліковані в роботах [27, 39, 40, 41, 72, 82].

4.1. Основні поняття теорії динамічних систем

Автономну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \quad (4.1)$$

де $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $X(x) = \text{col}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ часто називають динамічною системою. Ми вважатимемо, що вектор-функція $X(x)$ є неперервно диференційовною в деякій області M евклідового простору R^n . Змінну t називатимемо часом, а розв'язок $x = \varphi_t(x_0)$, $\varphi_0(x_0) = x_0$, системи (4.1) називатимемо рухом фазової точки. Якщо всі розв'язки системи (4.1) можна продовжити на всю числову вісь R , то їх множина утворює динамічну систему в тому розумінні, що закон еволюції (зміна фазової точки з часом t), тобто відображення будь-якої заданої точки x_0 фазового простору M і будь-якого значення t в однозначно визначене положення $\varphi_t(x_0) \in M$ задовольняє таким теоретико-груповим властивостям:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \varphi_0(x_0) = x_0, \\
2) \quad & \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x_0)) = \varphi_{t_1+t_2}(x_0), \\
3) \quad & \varphi_t(x) \text{ неперервне відображення по } (t, x)
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

Динамічну систему ще називають потоком. Іншими словами, потік - це однопараметрична група гомеоморфізмів (дифеоморфізмів) фазового простору M в себе. Зафіксувавши x_0 і змінюючи t від $-\infty$ до $+\infty$, одержуємо орієнтовану криву, яку називають траєкторією руху фазової точки або фазовою кривою. Фазові криві класифікують на три типи: положення рівноваги, замкнена крива і незамкнена крива. Додатною півтраєкторією називають криву

$$\{x \in M : x = \varphi_t(x_0), t \geq 0\}, \tag{4.3}$$

а від'ємною півтраєкторією - криву

$$\{x \in M : x = \varphi_t(x_0), t \leq 0\}. \tag{4.4}$$

Об'єднання цих двох множин називають цілою траєкторією. Отже, ціла траєкторія – це така множина

$$\{x \in M : x = \varphi_t(x_0), t \in \mathbb{R}\}. \tag{4.5}$$

Якщо відображення $\varphi_t(x_0) : M \rightarrow M$ дифеоморфізм, то потік називають гладким. В цьому випадку фазовий простір M динамічної системи має деяку додаткову гладку структуру. Ми вподальшому матимемо справу, коли фазовим простором потоку є евклідів простір \mathbb{R}^n , або ж прямий добуток цього простору і m -вимірному тора T_m .

Нагадаємо ще деякі поняття теорії динамічних систем [38].

Множину $M^* \subseteq M$ називатимемо інваріантною відносно динамічної системи, якщо $\varphi_t(M^*) = M^*$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$, де

$$\varphi_t(M^*) = \bigcup_{x \in M^*} \varphi_t(x).$$

З цього означення випливає, що коли $x \in M^*$ то вся траєкторія $\varphi_t(x) \in M^*$, тобто інваріантна множина складається з цілих траєкторій.

Точка $x_0 \in M$ називається блукаючою, якщо існують відкритий окіл $U(x_0)$ цієї точки і таке додатне число T , що

$$U(x_0) \cap \varphi_t(U(x_0)) = \emptyset, \quad t > T. \quad (4.6)$$

Множину блукаючих точок позначатимемо через W . Ця множина є відкритою інваріантною множиною. Справді, її відкритість випливає з того, що разом з x_0 будь-яка точка із $U(x_0)$ є блукаючою.

Інваріантність множини W випливає з того, що коли точка x_0 - блукаюча, то точка $\varphi_{t_0}(x_0)$ також є блукаючою для будь-якого значення $t_0 \in \mathbb{R}$. Щоб переконатися в справедливості цього твердження, виберемо $\varphi_{t_0}(U(x_0))$ за окіл точки φ_{t_0} . Маємо

$$\varphi_{t_0}(U(x_0)) \cap \varphi_t(\varphi_{t_0}(U(x_0))) = \emptyset, \quad t > T.$$

Отже, множина неблукаючих точок $\Omega = M$ є замкненою і інваріантною множиною.

Множина неблукаючих точок динамічної системи може бути порожньою. Наприклад, всі точки заданої на площині системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

є блукаючими.

Прикладом неблукаючих точок є положення рівноваги, а також всі точки періодичних траєкторій. Точки, що належать стійким за Пуассоном траєкторіями, також неблукаючі.

Означення [38]. Точка $x_0 \in M$ називається додатно стійкою за Пуассоном, якщо для довільного її околу $U(x_0)$ і будь-якого додатного числа T знайдеться таке значення $t > T$, що

$$\varphi_t(x_0) \subset U(x_0) \quad (4.7)$$

Якщо для довільного $T > 0$ існує таке значення $t < -T$ і виконується включення (4.7), то x_0 називають від'ємно стійкою за Пуассоном точкою. Якщо точка одночасно є і додатно і від'ємно стійкою за Пуассоном, то вона називається стійкою за Пуассоном.

Зауважимо, що коли точка x_0 додатно (від'ємно) стійкою за Пуассоном, а тому можна ввести поняття P^+ – траєкторії (додатно стійкою за Пуассоном), P^- – траєкторії (від'ємно стійкої за Пуассоном) і просто P –траєкторії (стійкої за Пуассоном). Із включення (4.7) безпосередньо випливає, що P^+ , P^- і P – траєкторії повністю складаються із неблукаючих точок, так що положення рівноваги і періодичні траєкторії є замкненими P -траєкторіями.

Якщо фазовим простором динамічної системи є евклідова площина, то P -траєкторіями в такій динамічній системі є лише положення рівноваги і періодичні траєкторії. Цікавіші ситуації з'являються в просторах більшої розмірності.

Приклад 4.1.1. *В трьохвимірному евклідовому просторі розглянемо двовимірний тор T_2 і на ньому задамо динамічну систему*

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2, \quad (4.8)$$

де φ_1 і φ_2 – відповідно паралель і меридіан (координати точки на торі).

Цей простий приклад показує, що будь-яка траєкторія на торі є P -траєкторією. Якщо відношення ω_1/ω_2 є раціональним числом, то кожна траєкторія на торі

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 + \frac{\omega_2}{\omega_1} (\varphi_1 - \varphi_1^0) \quad (4.9)$$

є замкненою лінією. Якщо ж число ω_1/ω_2 - ірраціональне, то кожна траєкторія (4.9) всюди щільно лежить на торі, замиканням такої траєкторії є сам тор T_2 .

Цей приклад показує, що в просторах розмірності $n > 2$ динамічна система може мати незамкнені P -траєкторії.

Наступний приклад показує, що в розривних динамічних системах на площині можуть бути P -траєкторії, відмінні від точок спокою і періодичних траєкторій.

Приклад 4.1.2. [52]. Розглянемо розривну динамічну систему, рух фазової точки в якій описується рівняннями

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y, \quad (4.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y, \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0,$$

множинами

$$\Gamma = \{(x; y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = r_1^2\} \quad (4.11)$$

$$\Gamma_0 = \{(x; y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = r_2^2\},$$

$r_2 > r_1$, і відображенням $A : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$, яке кожній точці $(x; y) \in \Gamma$ ставить у відповідність точку $(x_1; y_1) \in \Gamma_0$, що лежить з точкою $(x; y)$ на одному промені, який виходить з початку координат.

Якщо перейти до полярних координат за формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

матимемо

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha\rho, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta, \quad (4.12)$$

$$\Gamma = \{(\rho; \varphi) | \rho = r_1\}, \quad \Gamma_0 = \{(\rho; \varphi) | \rho = r_2\},$$

$$A : \Gamma \rightarrow \Gamma_0, \quad A : (r_1; \varphi) \rightarrow (r_2; \varphi).$$

Оскільки рух фазової точки в цій системі відбувається по логарифмічних спіралях

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$$

і $\alpha < 0$, а $\beta > 0$, то з часом будь-яка фазова точка прямує в початок координат, а тому попаде на коло $\rho = r_2$. Отже, для повного дослідження можливих траєкторій системи досить дослідити ті з них, що починаються на колі $\rho = r_2$.

Нехай фазова точка починає свій рух з точки з координатами $(r_2; \varphi_0)$. Вона рухається по спіралі

$$\rho = r_2 e^{\frac{\alpha}{\beta}(\varphi - \varphi_0)}$$

до того часу, поки не попаде на коло $\rho = r_1$.

Момент попадання її на це коло визначається з рівняння

$$r_1 = r_2 e^{\alpha t_1},$$

тобто $t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r_1}{r_2}$, при цьому вона попадає в точку (r_1, φ_1) , де

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \beta t_1 = \varphi_0 + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

В цей момент фазова точка "переводиться" оператором A на коло Γ_0 в точку $(r_2; \varphi_1) = (r_2; \varphi_0 + \Delta)$, де

$$\Delta = \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{r_1}{r_2}. \quad (4.13)$$

Після цього рух продовжується по спіралі

$$\rho = r_2 e^{\frac{\alpha}{\beta}(\varphi - \varphi_1)},$$

до тих пір, поки фазова точка не попаде знову на коло Γ .

Неважко підрахувати, що після повторного відображення оператором A фазової точки цього руху вона попадає на коло Γ_0 в точку $(r_2; \varphi_2)$, де $\varphi_2 = \varphi_0 + 2\Delta$, а після n -го в точку $(r_2; \varphi_0 + n\Delta)$.

Таким чином, щоб описати рух в цілому, досить дослідити розташування на колі Γ_0 точок

$$\varphi_0, \quad \varphi_0 + \Delta, \quad \varphi_0 + 2\Delta, \dots, \quad \varphi_0 + n\Delta, \dots \quad (4.14)$$

Зрозуміло, що якщо число Δ раціонально сумірне з 2π , тобто

$$\Delta = 2\pi \cdot \frac{p}{q},$$

де p і q взаємно прості натуральні числа, то точка $\varphi_0 + q\Delta$ співпадає з $\varphi_0 \pmod{2\pi}$, а тому траєкторія руху "замикається" і рух є періодичним. Отже, у випадку раціональної сумірності числа $\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{r_1}{r_2}$ з 2π рух будь-якої точки, що розпочинається на колі Γ_0 , є періодичним.

Нехай Δ раціональне не сумірне з 2π [2].

Лема 4.1.1. *Образи будь-якої точки на колі при відображенні-повороті її на кут Δ , раціонально не сумірний з 2π , всюди щільно лежать на колі.*

Доведення. Поділимо коло Γ_0 на k рівних частин довжини $\frac{2\pi}{k}$. Зауважимо, що в силу несумірності Δ з 2π ні при якому натуральному n $\varphi_n = \varphi_0 + n\Delta$ не співпадає з φ_0 .

Серед перших $k + 1$ точок послідовності

$\varphi_0, \varphi_0 + s\Delta, \varphi_0 + 2s\Delta, \dots, \varphi_0 + ns\Delta, \dots \pmod{2\pi}$ кожні дві сусідні розташовані на відстані, меншій ніж $\frac{2\pi}{k}$.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Вибираючи k досить великим, можна добитись виконання нерівності $\frac{2\pi}{k} < \varepsilon$. Таким чином, в будь-якому ε -околі довільної точки на колі Γ_0 . Точки послідовності $\{\varphi_0 + Ns\Delta\}$, а це й означає, що точки послідовності (4.14) всюди щільно лежать на колі Γ_0 .

З доведеної лема випливає, що коли в динамічній системі (4.12) число

$$\frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

раціонально не сумірне з числом 2π , то траєкторія будь-якого розв'язку цієї системи, що починається поза кругом $x^2 + y^2 > r_1^2$, всюди щільно заповнює кільце

$$r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2.$$

4.2. Про стійкість тороїдального многовиду одного класу динамічних систем

В прямому добутку m - вимірного тора T_m та евклідового простору R^n розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad (4.15)$$

де $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$, $a(\varphi), P(\varphi)$ -

відповідно векторна та матрична неперервні 2π - періодичні по кожній компоненті φ_j , ($j = \overline{1, m}$) функції, визначені на m - вимірному торі T_m . Що до функції $a(\varphi)$ вимагатимемо, що вона задовольняє умову Ліпшиця по φ з деякою константою Ліпшиця L , тобто для будь-яких двох точок $\varphi', \varphi'' \in T_m$

$$\|a(\varphi') - a(\varphi'')\| \leq L\|\varphi' - \varphi''\|. \quad (4.16)$$

В цьому параграфі встановимо деякі достатні умови асимптотичної стійкості тривіального тора системи (4.15) і застосуємо ці результати для дослідження більш складних, в порівнянні з системою (4.15), нелінійних систем диференціальних рівнянь визначених в прямому добутку $T_m \times R^n$.

В подальшому нам знадобиться деяке узагальнення нерівності Важевського [17]. Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого з рівнянь системи (4.15) і розглянемо систему рівнянь відносно x

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x. \quad (4.17)$$

Згідно з теоремою Важевського [17] будь-який розв'язок $x_t(t_0, \varphi, x_0)$, $x_{t_0}(t_0, \varphi, x_0) = x_0$ цієї системи допускає оцінку

$$\|x_0\| e^{\int_{t_0}^t \lambda(\varphi_s(\varphi)) ds} \leq \|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{\int_{t_0}^t \Lambda(\varphi_s(\varphi)) ds}, \quad (4.18)$$

де $\lambda(\varphi)$ і $\Lambda(\varphi)$ відповідно найменше і найбільше з власних чисел симетричної матриці

$$\hat{P}(\varphi) = \frac{1}{2} (P(\varphi) + P^T(\varphi)),$$

$P^T(\varphi)$ - транспонована по відношенню до $P(\varphi)$ матриця.

З нерівності (4.18) випливає оцінка

$$\|x_0\| e^{\lambda(t-t_0)} \leq \|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{\Lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0,$$

в якій

$$\lambda = \min_{\varphi \in T_m} \lambda(\varphi), \quad \Lambda = \max_{\varphi \in T_m} \Lambda(\varphi).$$

На основі цієї оцінки можна зробити такий висновок: якщо в системі (4.15) матриця $P(\varphi)$ така, що $\Lambda < 0$, то тривіальний тор цієї системи є експоненціально стійким, бо матрицант $\Omega_{t_0}^t(\varphi)$ системи (4.17) допускає оцінку

$$\|\Omega_{t_0}^t(\varphi)\| \leq K e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (4.19)$$

$$\varphi \in T_m, \quad K \geq 1, \quad \gamma > 0.$$

Покажемо, що аналогічний висновок про експоненціальну стійкість тривіального тора системи рівнянь (4.15) можна зробити при слабших умовах на матрицю $P(\varphi)$.

Нагадаємо [38], що точку $\varphi \in T_m$ динамічної системи на торі

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) \quad (4.20)$$

називають блукаючою, якщо існують її окіл $U(\varphi)$ і додатне число T такі, що

$$U(\varphi) \cap \varphi_t(U(\varphi)) = \emptyset \quad \text{для} \quad t \geq T.$$

Позначимо множину блукаючих точок через W , а множину неблукаючих точок - через $\Omega = T_m \setminus W$. Множина W блукаючих точок є інваріантною і відкритою множиною, бо разом з φ блукаючими є всі точки околу $U(\varphi)$.

Множина Ω неблукаючих точок, в силу компактності тора T_m , є непереривною замкненою інваріантною множиною.

Очевидно, Ω є і компактною множиною, як замкнена множина тора.

Як показано в [38], будь-який розв'язок системи (4.20) з часом наближається до множини неблукаючих точок, точніше: яке б не було $\varepsilon > 0$ будь-яка фазова точка $\varphi_t(\varphi)$ знаходиться лише скінченний проміжок часу, що не перевищує $T(\varepsilon)$, поза ε -околом $U_\varepsilon(\Omega)$ множини Ω .

Скористаємося властивістю неблукаючих точок для доведення такої теореми.

Теорема 4.2.1. *Якщо в системі рівнянь (4.15) матриця $P(\varphi)$ така, що найбільше з власних чисел $\Lambda(\varphi)$ симетричної матриці $\hat{P}(\varphi)$ є від'ємним на множині Ω неблукаючих точок динамічної системи (6), то тривіальний тор системи (4.15) є експоненціально стійким.*

Доведення. Зафіксуємо достатньо малий ε -оکیل $U_\varepsilon(\Omega)$ множини Ω . Оскільки $\Lambda(\varphi) < 0$ для всіх $\varphi \in \Omega$ і Ω є замкненою компактною множиною, то можна вказати достатньо мале додатне число ε_0 таке, що для кожного $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $\Lambda(\varphi) < -\gamma(\varepsilon)$ для всіх $\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)$, де $\gamma(\varepsilon)$ — додатна монотонно незростаюча функція параметра ε , $\gamma(\varepsilon) \rightarrow \gamma(0)$, коли $\varepsilon \rightarrow 0$, де

$$-\gamma(0) = \max_{\varphi \in \Omega} \Lambda(\varphi).$$

Якщо $\varphi_t(\varphi)$ — неблукаюча траєкторія, то з нерівності (4.18) маємо оцінку для будь-якого розв'язку

$$\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{-\gamma(0)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad \varphi \in \Omega.$$

Якщо ж $\varphi_t(\varphi)$ — блукаюча траєкторія, то можна вказати таке додатне число $T(\varepsilon)$,

що поза множиною $U_\varepsilon(\Omega)$ така траєкторія перебуває часу не довше, ніж $T(\varepsilon)$. Тому з нерівності (4.18) маємо оцінку

$$\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{\Lambda T(\varepsilon)} \cdot e^{-\gamma(\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad \varphi \in W.$$

Таким чином, в умовах теореми будь-який розв'язок $x_t(t_0, \varphi, x_0)$ системи (4.17) для довільного $\varphi \in T_m$ експоненціально прямує до нуля, коли $t \rightarrow \infty$, а тому матрицант $\Omega_{t_0}^t(\varphi)$ цієї системи допускає оцінку виду (4.19), що й завершує доведення теореми.

Для доведення стійкості (нестійкості) інваріантного тора можна застосувати прямий метод Ляпунова. Сформулюємо тут одну теорему, яка частково доповнює класичні дослідження в цьому напрямку, проведені в монографіях [31, 60].

Теорема 4.2.2. *Нехай для системи рівнянь (4.15) існує додатно визначена квадратична форма*

$$V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x \rangle$$

з симетричною матрицею $S(\varphi)$ така, що повна похідна її, складена в силу вихідної системи (4.15), тобто квадратична форма

$$\frac{d}{dt}V(\varphi, x) = \langle \hat{S}(\varphi)x, x \rangle,$$

де

$$\hat{S}(\varphi) = \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot a(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S(\varphi),$$

є від'ємно визначеною на множині Ω неблукаючих точок системи (4.20).

Тоді тривіальний тор системи рівнянь (4.15) є експоненціально стійким.

Доведення. Насамперед зауважимо, що $V(\varphi, x)$ допускає оцінку

$$\lambda(\varphi) \langle x, x \rangle \leq V(\varphi, x) \leq \Lambda(\varphi) \langle x, x \rangle, \quad \varphi \in T_m, \quad x \in R^n$$

де $\lambda(\varphi)$ і $\Lambda(\varphi)$ відповідно найменше та найбільше власне число симетричної матриці $S(\varphi)$. Похідну від $V(\varphi, x)$, складену в силу системи (4.15), тобто квадратичну форму $\langle \hat{S}(\varphi)x, x \rangle$, як від'ємно визначену для $\varphi \in \Omega$ можна аналогічно оцінити:

$$-\hat{\Lambda}(\varphi) \langle x, x \rangle \leq \langle \hat{S}(\varphi)x, x \rangle \leq -\hat{\lambda}(\varphi) \langle x, x \rangle, \quad \varphi \in \Omega, \quad x \in R^n,$$

де $\hat{\lambda}(\varphi)$ і $\hat{\Lambda}(\varphi)$ – відповідно найменше і найбільше з власних чисел симетричної матриці

$$-\frac{1}{2}(\hat{S}(\varphi) + \hat{S}^T(\varphi)).$$

Зафіксуємо тепер достатньо малий ε - окіл $U_\varepsilon(\Omega)$ множини Ω . Як стверджувалось вище, можна вказати таке додатне число $T = T(\varepsilon)$, що будь-яка траєкторія $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in T_m$ на множині блукаючих точок $T_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$ перебуває часовий проміжок довжини не більше, ніж $T = T(\varepsilon)$.

В силу додатньої визначенності квадратичної форми $V(\varphi, x)$ і від'ємної визначенності її похідної на множині Ω можемо стверджувати існування додатнього числа ε_0 , що для всіх ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливі оцінки:

$$\lambda(\varepsilon) \langle x, x \rangle \leq V(\varphi, x) \leq \Lambda(\varepsilon) \langle x, x \rangle, \quad \varphi \in U_\varepsilon(\Omega), \quad x \in R^n;$$

$$-\hat{\Lambda}(\varepsilon) \langle x, x \rangle \leq \frac{d}{dt}V(\varphi, x) \leq -\hat{\lambda}(\varepsilon) \langle x, x \rangle, \quad \varphi \in U_\varepsilon(\Omega), x \in R^n,$$

де

$$\lambda(\varepsilon) = \min_{\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)} \lambda(\varphi), \quad \Lambda(\varepsilon) = \max_{\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)} \Lambda(\varphi),$$

$$\hat{\lambda}(\varepsilon) = \min_{\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)} \hat{\lambda}(\varphi), \quad \hat{\Lambda}(\varepsilon) = \max_{\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)} \hat{\Lambda}(\varphi).$$

Далі міркуємо таким чином:

якщо $\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)$ і для всіх $t > 0$ $\varphi_t(\varphi) \in U_\varepsilon(\Omega)$, то для будь-якого розв'язку $x_t(t_0, \varphi, x_0) \equiv x(t)$ системи (4.17) маємо:

$$\lambda(\varepsilon) \langle x(t), x(t) \rangle \leq V(\varphi_t(\varphi), x(t)) \leq \Lambda(\varepsilon) \langle x(t), x(t) \rangle,$$

$$-\hat{\Lambda}(\varepsilon) \langle x(t), x(t) \rangle \leq \frac{d}{dt} V(\varphi_t(\varphi), x(t)) \leq -\hat{\lambda}(\varepsilon) \langle x(t), x(t) \rangle .$$

Звідси випливає, що

$$\frac{1}{\Lambda(\varepsilon)} (V(\varphi_t(\varphi), x(t))) \leq \langle x(t), x(t) \rangle \leq -\frac{1}{\hat{\lambda}(\varepsilon)} \frac{d}{dt} V(\varphi_t(\varphi), x(t)),$$

а тому

$$\frac{dv}{dt}(\varphi_t(\varphi), x(t)) \leq -\frac{\hat{\lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)} V(\varphi_t(\varphi), x(t)).$$

Таким чином,

$$V(\varphi_t(\varphi), x_t(t_0, \varphi, x_0)) \leq V(\varphi, x_0) e^{\frac{-\hat{\lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)}(t - t_0)} .$$

Отже,

$$x_t(t_0, \varphi, x_0) \rightarrow 0, \quad \text{коли } t \rightarrow \infty.$$

Нехай тепер $\varphi \in T_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$, або ж $\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)$, але не для всіх $t > 0$ $\varphi_t(\varphi) \in U_\varepsilon(\Omega)$,

тобто траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ може залишати $U_\varepsilon(\Omega)$ на деякий час, а пізніше знову повертатися в ε -оکیل множини Ω , але перебувати поза множиною $U_\varepsilon(\Omega)$ така траєкторія може сумарно не більше T часу.

З'ясуємо, на яку величину зможе змінитися $\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\|$, або ж функція $V(\varphi, x)$ вздовж цього розв'язку, коли траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ перебуває поза множиною $U_\varepsilon(\Omega)$.

Виходячи з нерівності Важевського, маємо оцінку зміни будь-якого розв'язку $x_t(t_0, \varphi, x_0)$ на протязі будь-якого часового проміжку довжини T :

$$\|x_{t+T}(\tau, \varphi, x(\tau))\| \leq e^{\Lambda(t+T-\tau)} \|x(\tau, x_0)\|, \quad t \geq \tau,$$

$$\|x_{t+T}(\tau, \varphi, x_\tau(t_0, \varphi, x_0))\| \leq e^{\Lambda T} \|x_\tau(t_0, \varphi, x_0)\|,$$

тут

$$\Lambda = \max_{\varphi \in T_m} \Lambda(\varphi).$$

Таким чином, можемо записати величину зміни функції $V(\varphi, x)$ вздовж такого розв'язку на часовому проміжку T :

$$V(\varphi_{\tau+T}(\varphi), x_{\tau+T}(\tau, \varphi, x_\tau(t_0, \varphi, x_0))) \leq K e^{2\Lambda T} V(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(t_0, \varphi, x_0)),$$

де

$$K = \max_{\varphi \in T_m} \|S(\varphi)\|.$$

Позначивши через $\tau^*(\varphi)$ момент часу входження траєкторії $\varphi_t(\varphi)$ в множину $U_\varepsilon(\Omega)$, після якого вона не виходить з цієї множини, для $t \geq \tau^*(\varphi)$ маємо оцінку

$$V(\varphi_t(\varphi), x_t(t_0, \varphi, x_0)) \leq V(\varphi_{\tau^*}(\varphi), x_{\tau^*}(t_0, \varphi, x_0)) e^{-\frac{\hat{\lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)}(t - \tau^*(\varphi))}$$

для $t \geq \tau^*(\varphi)$. Враховуючи попередню нерівність, остаточно маємо:

$$V(\varphi_t(\varphi), x_t(t_0, \varphi, x_0)) \leq K e^{2\Lambda T} e^{-\frac{\hat{\lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)}(t - t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Звідси робимо висновок, що

$$\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \rightarrow 0, \text{ коли } t \rightarrow \infty,$$

тобто тривіальний тор вихідної системи (4.15) експоненціально стійкий, що і завершує доведення теореми 4.2.2.

Природно може виникнути питання про існування квадратичної форми $V(\varphi, x)$, що задовольняє умову теореми 4.2.2.

Наведемо один приклад, коли така форма існує і дає змогу стверджувати про експоненціальну стійкість тривіального тора системи (4.15).

Теорема 4.2.3. *Нехай в системі (4.15) матриця $P(\varphi)$ є сталою матрицею $P(\varphi) = P_0$ на множині Ω . Якщо дійсні частини власних чисел $\operatorname{Re}\lambda_j(P_0)$ матриці P_0 від'ємні, то існує додатно визначена квадратична форма $v(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x \rangle$ з симетричною матрицею $S(\varphi)$ така, що її похідна в силу системи (4.15) є від'ємно визначеною квадратичною формою на множині Ω .*

Доведення. Запишемо систему рівнянь (4.15) в такому вигляді:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P_0x + (P(\varphi) - P_0)x$$

і розглянемо систему зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = P_0x.$$

Так як за умовою теореми дійсні частини власних чисел матриці P_0 всі від'ємні, то можна стверджувати ([24], Теорема 1, стор. 67) що для будь-якої від'ємно визначеної квадратичної форми $U(x)$ рівняння

$$\langle \operatorname{grad}V(x), P_0x \rangle = U(x)$$

в класі квадратичних форм має єдиний розв'язок і він обов'язково є додатно визначеною квадратичною формою.

Покладемо в останньому рівнянні $U(x) = - \langle x, x \rangle$ і за функцію $V(x)$ візьмемо додатно визначену квадратичну форму - розв'язок рівняння

$$\langle \operatorname{grad}V(x), P_0x \rangle = - \langle x, x \rangle .$$

Повна похідна від квадратичної форми $V(x)$, складена в силу системи (4.15), є

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x) &= \langle \text{grad}V(x), P(\varphi)x \rangle = \langle \text{grad}V(x), P_0x \rangle + \\ &+ \langle \text{grad}V(x), (P(\varphi) - P_0)x \rangle = \\ &= - \langle x, x \rangle + \langle \text{grad}V(x), (P(\varphi) - P_0)x \rangle . \end{aligned}$$

Оскільки, на множині неблукаючих точок Ω $P(\varphi) = P_0$, то знайдена квадратична форма $V(x)$ задовольняє умови попередньої теореми.

Твердження доведених теорем дають можливість стверджувати про існування тороїдальних інваріантних множин систем вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi), \quad (4.21)$$

в яких $a(\varphi)$ і $P(\varphi)$ такі ж, як і в системі (4.15), а $f(\varphi)$ - довільна неперервна 2π - періодична по кожній компоненті φ_j , ($j = \overline{1, m}$) функція.

Справді, умови кожної з доведених теорем гарантують для матрицанта $\Omega_\tau^t(\varphi)$ лінійної однорідної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x$$

оцінку

$$\|\Omega_\tau^t(\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma(t - \tau)}, \quad t \geq \tau, \quad \varphi \in T_m \quad (4.22)$$

з деякими додатними константами K і γ .

Тому система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)) \quad (4.23)$$

має сім'ю обмежених на всій осі $t \in R$ розв'язків

$$x_t(\varphi) = \int_{-\infty}^t \Omega_\tau^t(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau,$$

залежних від $\varphi \in T_m$ як від параметра, а тому

$$x = U(\varphi) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \quad (4.24)$$

і є інваріантною тороїдальною множиною системи рівнянь (4.21).

Переконаємося, що ця множина є асимптотично стійкою.

Дійсно, заміна змінних $x = U(\varphi) + y$, враховуючи що функція $U(\varphi)$ задовольняє систему рівнянь з частинними похідними

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial \varphi}, a(\varphi) \right\rangle = P(\varphi)U + f(\varphi),$$

питання про асимптотичну стійкість множини $x = U(\varphi)$ зводиться до з'ясування стійкості інваріантного тривіального тора системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = P(\varphi)y.$$

А відповідь на це питання дають якраз теореми 4.2.1 - 4.2.3.

Зауважимо, що представлення (4.24) інваріантної тороїдальної множини $x = U(\varphi)$ є не що інше як представлення через функцію $G_0(\tau, \varphi)$ Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори [60], яка в даному випадку має вигляд

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0. \end{cases}$$

Як ілюстративний приклад розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = \cos\varphi \cdot x + f(\varphi), \quad (4.25)$$

в якій $a(\varphi)$ - 2π періодична скалярна ліпшицева функція на колі (одновимірному торі,) x - скалярна змінна, $f(\varphi)$ - неперервна 2π - періодична функція.

Вважатимемо, що функція $a(\varphi)$, перетворюється в нуль лише в одній точці $\varphi = \pi$, а в інших точках проміжку $[0, 2\pi]$ набуває значень одного знаку.

В такому випадку множиною Ω неблукаючих точок динамічної системи на колі $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ є лише точка $\varphi = \pi$ і в цій точці $P(\varphi) = \cos\varphi = -1$.

Покладемо $V(x) = x^2$, тоді

$$\frac{dV}{dt} = 2x\dot{x} = 2\cos\varphi \cdot x^2$$

є від'ємно визначеною на Ω , а тому тривіальний розв'язок системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = \cos\varphi \cdot x$$

є асимптотично стійким, а система (4.25) для будь-якої неперервної 2π - періодичної функції має асимптотично стійкий інваріантний многовид

$$x = U(\varphi) = \int_{-\infty}^0 e^{\int_0^s \cos(\varphi_s(\varphi)) ds} f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau.$$

Теорему 4.2.2 можна застосувати для дослідження стійкості тривіального тора нелінійної по x системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x)x, \quad (4.26)$$

в якій матрична функція $P(\varphi, x)$ є неперервною по $\varphi \in T_m$ і x , $\|x\| \leq a_0$, a_0 — деяке додатне число.

Анонсуємо тут ще одне твердження в цьому напрямку.

Якщо для системи рівнянь (4.26) існує додатно-визначена квадратична форма $V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x \rangle$ така, що повна похідна її, складена в

силу рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, 0)x, \quad (4.27)$$

є від'ємно визначеною на множині неблукаючих точок динамічної системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, $\varphi \in T_m$, то тривіальний тор системи рівнянь (4.26) асимптотично стійкий.

4.3. Випадок Лаппо-Данилевського

Розглянемо ще деякі достатні умови асимптотичної стійкості тривіального тора лінійного розширення динамічної системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad (4.28)$$

в якій $\varphi \in T_m$, $x \in R^n$, $a(\varphi)$ і $P(\varphi)$ - 2π -періодичні по кожній компоненті φ_ν , $\nu = \overline{1, m}$ функції.

Вважатимемо, що матриця $P(\varphi)$ вздовж розв'язків першого з рівнянь системи (4.45) комутує з своїм інтегралом (це так званий випадок Лаппо-Данилевського ([17], гл. II, §13), тобто для будь-яких $t, \tau, t \geq \tau$ і $\varphi \in T_m$

$$P(\varphi_t(\varphi)) \int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds = \int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds \cdot P(\varphi_t(\varphi)). \quad (4.29)$$

Цю умову можна подати ще в такому вигляді

$$P(\varphi) \int_0^{t-\tau} P(\varphi_{-\tau}(\varphi)) d\tau = \int_0^{t-\tau} P(\varphi_{-\tau}(\varphi)) d\tau \cdot P(\varphi). \quad (4.30)$$

В цьому випадку матрицантом однорідної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \quad (4.31)$$

в якій $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$ - розв'язок першого із рівнянь (4.45), є матрична функція

$$\Omega_\tau^t(\varphi) = e^{\int_\tau^t P(\varphi_s(\varphi)) ds}, \quad (4.32)$$

яка залежить від $\varphi \in T_m$ як від параметра. Справді, $\Omega_\tau^\tau(\varphi) = E$, а для інших значень t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Omega_\tau^t(\varphi) &= e^{\int_\tau^t P(\varphi_s(\varphi)) ds} \cdot \frac{d}{dt} \int_\tau^t P(\varphi_s(\varphi)) ds = \\ &= e^{\int_\tau^t P(\varphi_s(\varphi)) ds} \cdot P(\varphi_t(\varphi)) = P(\varphi_t(\varphi)) \cdot \Omega_\tau^t(\varphi). \end{aligned}$$

Зауважимо, що у випадку двовимірної матриці $P(\varphi)$ умова Лапко-Данилевського (4.29) виконується, якщо ця матриця має вигляд

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} p(\varphi) & q(\varphi) \\ q(\varphi) & p(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Справді,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} p(\varphi_t(\varphi)) & q(\varphi_t(\varphi)) \\ q(\varphi_t(\varphi)) & p(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix} \int_\tau^t \begin{pmatrix} p(\varphi_s(\varphi)) & q(\varphi_s(\varphi)) \\ q(\varphi_s(\varphi)) & p(\varphi_s(\varphi)) \end{pmatrix} ds = \\ &= \int_\tau^t \begin{pmatrix} p_t \cdot p_s + q_t \cdot q_s & p_t \cdot q_s + q_t \cdot p_s \\ q_t \cdot p_s + p_t \cdot q_s & q_t \cdot q_s + p_t \cdot p_s \end{pmatrix} ds = \\ &= \int_\tau^t \begin{pmatrix} p(\varphi_s(\varphi)) & q(\varphi_s(\varphi)) \\ q(\varphi_s(\varphi)) & p(\varphi_s(\varphi)) \end{pmatrix} ds \cdot \begin{pmatrix} p(\varphi_t(\varphi)) & q(\varphi_t(\varphi)) \\ q(\varphi_t(\varphi)) & p(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де позначено $p_t = p(\varphi_t(\varphi))$, $p_s = p(\varphi_s(\varphi))$, $q_t = q(\varphi_t(\varphi))$, $q_s = q(\varphi_s(\varphi))$.

Достатні умови асимптотичної стійкості тривіального тора системи рівнянь (4.45) встановлює наступна теорема.

Теорема 4.3.1. *Нехай при $t \geq \tau$, $\varphi \in T_m$ виконується умова Лапко-Данилевського (4.29) та рівномірно по $\varphi \in T_m$ існує границя*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds = A, \quad (4.33)$$

де A - стала матриця.

Якщо дійсні частини всіх власних чисел, матриці A від'ємні, то тривіальний тор системи рівнянь (4.45) асимптотично стійкий.

Доведення. Продиференціювавши по τ рівність (4.29) при маємо

$$P(\varphi_t(\varphi))P(\varphi_{\tau}(\varphi)) = P(\varphi_{\tau}(\varphi))P(\varphi_t(\varphi)).$$

Звідси можемо написати

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds \cdot \frac{1}{u} \int_{\tau}^u P(\varphi_{\nu}(\varphi)) d\nu = \\ &= \frac{1}{u} \int_{\tau}^t \int_{\tau}^u P(\varphi_s(\varphi)) P(\varphi_{\nu}(\varphi)) d\nu ds = \\ &= \frac{1}{u} \int_{\tau}^u P(\varphi_{\nu}(\varphi)) d\nu \cdot \int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds. \end{aligned}$$

Перейдемо в останній рівності до границі, коли $u \rightarrow \infty$, маємо:

$$\int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds \cdot A = A \cdot \int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds, \quad (4.34)$$

тобто, гранична матриця A комутує з інтегралом

$$\int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds.$$

Покладемо

$$\frac{1}{t} \int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds = A + B(t, \varphi), \quad (4.35)$$

де $B(t, \varphi) \rightarrow 0$, коли $t \rightarrow \infty$ для будь-якого $\varphi \in T$, і переконуємося, що матриці A і $B(t, \varphi)$ комутують. Справді, враховуючи рівність (4.34), маємо

$$\begin{aligned}
A \cdot B(t, \varphi) &= A \cdot \left[\frac{1}{t} \int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds - A \right] = \\
&= \frac{1}{t} \int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds \cdot A - A^2 = B(t, \varphi) \cdot A.
\end{aligned}$$

Матрицант $\Omega_{\tau}^t(\varphi)$ однорідної системи рівнянь (4.56) матиме представлення

$$\Omega_{\tau}^t(\varphi) = e^{\int_{\tau}^t P(\varphi_s(\varphi)) ds} = e^{At} \cdot e^{B(t, \varphi)} \cdot t.$$

Нехай

$$\max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j(A) = -\gamma < 0 \quad (4.36)$$

і $\varepsilon > 0$ таке, що $-\gamma + 2\varepsilon < 0$.

Оскільки векторна функція $a(\varphi)$ і матрична $B(\varphi)$ неперервні, то для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує скінчений момент часу $T > 0$, не залежний від $\varphi \in T_m$ такий, що $\|B(t, \varphi)\| < \varepsilon$ для будь-якого $t \geq T$.

Враховуючи цю нерівність, для матрицанта $\Omega_{\tau}^t(\varphi)$ маємо оцінку

$$\begin{aligned}
\|\Omega_{\tau}^t(\varphi)\| &\leq \|\Omega_{\tau}^{\tau+t}(\varphi)\| \cdot \|\Omega_{\tau+t}^t(\varphi)\| \leq \\
&\leq K e^{(-\gamma + \varepsilon)(t - \tau)} \cdot e^{(t - \tau) \|B(t, \varphi)\|} \leq K e^{(-\gamma + 2\varepsilon)(t - \tau)}, \quad t \geq \tau,
\end{aligned}$$

де стала

$$K = \left\| \Omega_{\tau}^{\tau} + T(\varphi) \right\| e^{-(\gamma + 2\varepsilon)T}.$$

З останньої нерівності випливає асимптотична стійкість тривіального тора системи (4.45), що й завершує доведення теореми 4.3.1.

Приклад 4.2.1. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

в якій φ змінюється на колі T_1 (одновимірному торі), $(x_1, x_2) \in R^2$.

Матриця

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

задовольняє умову Лаппо-Данилевського. Динамічна система на колі

$$\frac{d\varphi}{dt} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad (4.38)$$

має положення рівноваги $\varphi = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, а інші траєкторії до цих положень притягуються, коли $t \rightarrow +\infty$. Розв'язки цієї системи неважко виписати

$$\varphi_t(\varphi) = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + 2k\pi, \quad \varphi \neq \pi + 2k\pi,$$

$$\varphi_t(\varphi) = \pi + 2k\pi, \quad \varphi = \pi + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Переконаємося в існуванні границі (4.33). Скористаємося тригонометричними співвідношеннями

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

і обчислимо

$$\sin \varphi_t(\varphi) = \sin \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \frac{2 \left(\frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \left(\frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2},$$

$$\cos \varphi_t(\varphi) = \cos \left(2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{act} 2 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \frac{1 - \left(\frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2}{1 + \left(\frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2}.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sin \varphi_s(\varphi) ds &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{2 \left(\frac{s}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \left(\frac{s}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2} ds = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{t} \int_0^t d \ln \left[1 + \left(\frac{s}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{t} \left\{ \ln \left[1 + \left(\frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] - \ln \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right\} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \cos \varphi_s(\varphi) ds &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1 - \left(\frac{s}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2}{1 + \left(\frac{s}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2} ds = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(-1 + \frac{2}{1 + \left(\frac{s}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2} \right) ds = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[-t + 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right] = -1. \end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(\varphi_s(\varphi)) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos \varphi_s(\varphi) & \sin \varphi_s(\varphi) \\ \sin \varphi_s(\varphi) & \cos \varphi_s(\varphi) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а тому тривіальний тор системи рівнянь (4.37) асимптотично стійкий.

Доведемо ще одне твердження про асимптотичну стійкість тривіального тора системи рівнянь (4.45) у випадку, коли матриця $P(\varphi)$ вздовж

розв'язків динамічної системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ комутує з своїм інтегралом, тобто виконується рівність (4.29).

Позначимо через Ω множину всіх неблукаючих точок першого із рівнянь (14.28).

Теорема 4.3.2. *Нехай матриця $P(\varphi)$ в системі рівнянь (14.28) вздовж розв'язків динамічної системи*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) \quad (4.39)$$

комутує з своїм інтегралом, тобто виконується рівність (4.29), і $P(\varphi)$ є сталою матрицею на множині Ω неблукаючих точок системи (4.39).

$$P(\varphi) = A, \quad \varphi \in \Omega. \quad (4.40)$$

Якщо дійсні частини всіх власних чисел $\lambda_j(A)$ матриці A від'ємні, то тривіальний тор системи рівнянь (4.45) асимптотично стійкий.

Доведення. В умовах теореми матрицантом системи рівнянь (4.31) є матрична функція

$$\Omega_0^t(\varphi) = e^{\int_0^t P(\varphi_s(\varphi)) ds}. \quad (4.41)$$

Зафіксуємо достатньо малий ε_0 -окіл $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$ множини неблукаючих точок системи (4.39) і через $T = T(\varepsilon_0)$ позначимо максимальну довжину часового проміжку, на протязі якого траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ може перебувати поза $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$. Зауважимо, що число T залежить лише від величини ε_0 -околу $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$ і не залежить від конкретної траєкторії $\varphi_t(\varphi)$.

Якщо $\varphi \in \Omega$ і вся півтраєкторія $\varphi_t(\varphi) \in \Omega$, $t \geq 0$, то $P(\varphi_t(\varphi)) = A$ для всіх таких $\varphi \in \Omega$, $t \geq 0$ і для матрицанта $\Omega_0^t(\varphi)$ справедлива оцінка

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma t}, \quad t \geq 0, \quad (4.42)$$

$$K \geq 1, \quad -\gamma = \max \operatorname{Re} \lambda_j(A), \quad j = \overline{1, n}.$$

Зафіксуємо $\varepsilon^0 > 0$ і вважатимемо ε_0 -окил $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$ настільки малим, що для всіх $\varphi \in U_{\varepsilon_0}$

$$\|P(\varphi) - A\| \leq \varepsilon^0. \quad (4.43)$$

Для довільної траєкторії $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \Omega$, а також траєкторії, яка починається в Ω , $\varphi \in \Omega$, але може виходити на деякий час з $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$, справедлива оцінка

$$\begin{aligned} \|\Omega_0^t(\varphi)\| &\leq \left\| e^{At + \int_0^t (P(\varphi_s(\varphi)) - A) ds} \right\| \leq \\ &\leq K e^{-\gamma t} \left\| e^{\int_0^t P(\varphi_s(\varphi)) - A ds} \right\| \leq K e^{-\gamma t} \cdot e^{mT} \cdot e^{\varepsilon^0 t} \leq \\ &\leq K_1 e^{-(\gamma - \varepsilon^0)t}, \quad K_1 = K e^{mT}, \quad m = \max_{\varphi \in T_m} \|P(\varphi)\|. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Вважаючи, що ε^0 може бути достатньо малим, наприклад, $\varepsilon^0 < \frac{\gamma}{2}$, то з останньої нерівності, з врахуванням нерівності (4.42), робимо висновок, що для всіх $\varphi \in T_m$ і $t \geq 0$ матрицант допускає оцінку

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq K_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad t \geq 0, \quad (4.45)$$

а, отже, тривіальний тор системи рівнянь (4.45) асимптотично стійкий.

Зауважимо, що в процесі одержання нерівності (4.44) ми скористалися тим, що матриця A комутує з інтегралом від $P(\varphi_t(\varphi))$. Це дійсно так, бо, згідно з (4.40) і в силу інваріантності Ω $P(\varphi_t(\varphi)) = A$, $\varphi \in \Omega$.

Як приклад, розглянемо подібну до (??) систему рівнянь в прямому добутку двовимірного тора T_2 і R^2 .

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\cos^2 \frac{\varphi_1}{2}, \quad \frac{dx_1}{dt} = (\cos \varphi_1)x_1 + (\sin \varphi_1)x_2, \quad (4.46)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = 1, \quad \frac{dx_2}{dt} = (\sin \varphi_1)x_1 + (\cos \varphi_1)x_2.$$

Система на торі $\dot{\varphi}_1 = -\cos^2 \frac{\varphi_1}{2}$, $\dot{\varphi}_2 = 1$ за множини Ω має меридіан $\varphi_1 = \pi \pmod{2\pi}$:

$$\Omega = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) \in T_2 : \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} = 0 \right\}.$$

Матриця $P(\varphi_1, \varphi_2)$ цієї системи

$$P(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}$$

комутує з своїм інтегралом вздовж розв'язків системи на торі T_2 і на множині Ω вона є сталою

$$P(\pi, \varphi_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

На основі доведеної теореми робимо висновок про асимптотичну стійкість тривіального тора системи (4.46).

4.4. Стійкість інваріантної тороїдальної множини імпульсної системи

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad \varphi \in T_m \setminus \Gamma, \quad x \in R^n, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x|_{\varphi \in \Gamma}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

в якій векторна функція $a(\varphi)$ та матричні функції $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ визначені для всіх $\varphi \in T_m$ неперервні і 2π -періодичні по кожній змінній φ_ν . Щодо $B(\varphi)$, то достатньо, щоб вона була визначена на множині Γ .

Щодо множини Γ вважаємо, що вона є підмножиною тора T_m і задається рівнянням

$$\Phi(\varphi) = 0, \quad (4.48)$$

де $\Phi(\varphi)$ - скалярна неперервно диференційовна 2π -періодична по кожній змінній φ_ν , $\nu = \overline{1, m}$, функція. Вважатимемо також, що кожна з траєкторій системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ перетинає множину Γ трансверсально. Для цього достатньо виконання умови $\langle \text{grad}\Phi(\varphi), a(\varphi) \rangle \neq 0$, $\varphi \in \Gamma$. Позначимо через $G \subseteq T_m$ множину точок всіх траєкторій, що починаються в Γ :

$$G = \{\varphi \in T_m : \varphi = \varphi_t(\varphi_0), \varphi_0 \in \Gamma, t \in R\}, \quad (4.49)$$

де R - дійсна числова вісь.

Позначимо через $t = t_i(\varphi)$ розв'язки рівняння (4.49) для яких рівномірно по $t \in R : \varphi \in T_m$ існує

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p, \quad (4.50)$$

де $i(t, t+T)$ - кількість розв'язків рівняння (4.49) $t = t_i(\varphi)$, що знаходяться між t і $t+T$.

Як показано в [52] також така границя існує, коли послідовність $\{t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi)\}$ є періодичною або майже періодичною. В цій же монографії показано, що границя (4.50) існує, коли послідовність $\{t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi), \}$ $i \in Z$, $\varphi \in T_m$ є майже періодичною.

В [52] доводиться, що умова існування границі (4.50) рівносильна такій: можна вказати такі числа додатне l і натуральне q , що будь-який проміжок довжини l $[t, t+l]$ містить не більше, ніж q членів послідовності $\{t_i(\varphi)\}$.

Теорема 4.4.1. *рівнянь (4.47) виконується умова (4.51) матриці $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ такі, що для деяких $\gamma(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$ і $x \in R^n$*

$$\langle P(\varphi)x, x \rangle \leq \gamma(\varphi) \langle x, x \rangle, \quad \varphi \in T_m, \quad (4.51)$$

$$\langle (E + B^T(\varphi))(E + B(\varphi))x, x \rangle \leq \alpha^2(\varphi) \langle x, x \rangle, \quad \varphi \in \Gamma.$$

Якщо

$$\gamma_0 + p \ln \alpha_0 < 0, \quad (4.52)$$

де $\gamma_0 = \max_{\varphi \in T_m} \gamma(\varphi)$, $\alpha_0 = \max_{\varphi \in \Gamma} \alpha(\varphi)$, то тривіальний тор системи рівнянь (4.48) асимптотично стійкий.

Справді, для будь-якого розв'язку $x_t(\varphi, x_0)$ системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x \quad (4.53)$$

справджується нерівність

$$\|x_t(\varphi, x_0)\|^2 = \langle x_t(\varphi, x_0), x_t(\varphi, x_0) \rangle \leq e^{2 \int_{\tau}^t \gamma(\varphi_\tau(\varphi)) ds} \|x_\tau(\varphi, x_0)\|^2,$$

а в момент імпульсної дії маємо:

$$x_{\tau_i(\varphi)}^+ = (E + B(\varphi_{\tau_i(\varphi)}(\varphi))) x_{\tau_i(\varphi)}(\varphi),$$

тому

$$\langle x_{\tau_i(\varphi)}^+, x_{\tau_i(\varphi)}^+ \rangle = \langle (E + B(\varphi_{\tau_i(\varphi)}(\varphi))) x, (E + B(\varphi_{\tau_i(\varphi)}(\varphi))) x \rangle$$

$$\langle x_t^+(\varphi, x_0), x_t^+(\varphi, x_0) \rangle|_{t=\tau_i(\varphi)} = \langle (E + B(\varphi_t(\varphi)))x, (E + B(\varphi_t(\varphi)))x \rangle|_{t=\tau_i(\varphi)}$$

$$\|x_{\tau_i(\varphi)+0}(\varphi, x_0)\|^2 \leq \alpha^2(\varphi_{\tau_i(\varphi)}) \|x_{\tau_i(\varphi)-0}^{(\varphi, x_0)}\|^2.$$

На проміжках неперервності $[\tau_i(\varphi), t]$, $t < \tau_{i+1}(\varphi)$

$$\|x_t(\varphi, x_0)\|^2 \leq e^{2 \int_{\tau_i(\varphi)}^t \gamma(\varphi_\tau(\varphi)) ds} \|x_{\tau_i(\varphi)+0}(\varphi, x_0)\|^2, \quad (4.54)$$

а при $t = \tau_i(\varphi)$

$$\|x_{\tau_i(\varphi)+0}(\varphi, x_0)\|^2 \leq \alpha^2(\varphi_{\tau_i(\varphi)}(\varphi)) \|x_{\tau_i(\varphi)}(\varphi, x_0)\|^2. \quad (4.55)$$

Тому на проміжку $[t_0, t]$ маємо:

$$\|x_t(\varphi, x_0)\|^2 \leq e^{2 \int_{t_0}^t \gamma_{\varphi_\tau(\varphi)} d\tau} \alpha^{2i(t, t_0)}(\varphi)$$

де $i(t, t_0)$ - кількість моментів імпульсної дії, тобто кількість точок $\tau_i(\varphi)$.

Враховуючи умови (4.50) і (4.51), маємо

$$\|x_t(\varphi, x_0)\|^2 \leq K e^{2(\varepsilon + \gamma_0 + p \ln \alpha_0)(t - t_0)} \|x_0\|^2. \quad (4.57)$$

Звідси робимо висновок, що тривіальний тор системи рівнянь (4.47) асимптотично стійкий в силу умови теореми (4.53).

Дану теорему можна покращити, тобто дещо послабити вимоги до системи (4.47).

Справедливе таке твердження.

Теорема 4.4.2. *Нехай в системі рівнянь (4.47) функції $a(\varphi)$, $P(\varphi)$, $B(\varphi)$ такі, як і в попередній теоремі.*

Якщо для неперервних функцій $\gamma(\varphi)$, $\alpha(\varphi) > 0$ виконується нерівність

$$\gamma_0 + p \ln \alpha_0 < 0, \quad (4.58)$$

де

$$\gamma_0 = \max_{\varphi \in \Omega} \gamma(\varphi), \quad \alpha_0 = \max_{\varphi \in \Gamma \cap \Omega} \alpha(\varphi),$$

де Ω - множина неблужаючих точок динамічної системи (4.40), то тривіальний тор системи рівнянь (4.48) асимптотично стійкий.

Доведення. Насамперед зауважимо, що з нерівності (4.55) випливає оцінка розв'язку $x_t(\varphi, x_0)$ на будь-якому часовому проміжку довжини T $[\tau, \tau + T]$, $\tau \geq t_0$

$$\|x_\tau(\varphi, x_0)\|^2 \leq e^{2 \int_\tau^{\tau+T} \gamma(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau} \alpha^{2i(t_1, t_1+T)}(\varphi_{\tau_i(\varphi)}(\varphi)) \cdot \|x_\tau(\varphi, x_0)\|^2 \quad (4.59)$$

Тепер розмірковуємо так: якщо $\varphi \in \Omega$ і вся траєкторія $\varphi_t(\varphi) \in \Omega$ при $t \geq t_0$, то вздовж цієї траєкторії виконується нерівність (4.57). В силу інваріантності і компактності множини Ω

$$\gamma_0 + p \ln \alpha_0 \leq -\bar{\gamma}, \quad (4.60)$$

а тому для таких φ

$$\|x_t(\varphi, x_0)\| \leq K e^{(\varepsilon - \bar{\gamma})(t - t_0)} \|x_0\|. \quad (4.61)$$

Якщо ж $\varphi \in \Gamma$ є блукаючою точкою, то зафіксувавши достатньо мале число ε_0 , можна вказати додатне число $T = T(\varepsilon_0)$ таке, що траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ проводить поза ε_0 -околом множини Γ часу не більше, ніж T . Це стосується кожної блукаючої траєкторії, тобто число T залежить лише від ε_0 і не залежить від φ . Оскільки для $\varphi \in \Omega$ виконується нерівність (4.60), то при достатньо малому ε_0 виконуватиметься нерівність $-\bar{\gamma} + \varepsilon_0 < 0$ для всіх φ із ε_0 -околу множини Γ , а тому для неблукаючих точок φ розв'язок $x_t(\varphi, x_0)$ допускає оцінку

$$\begin{aligned} \|x_t(\varphi, x_0)\|^2 &\leq e^{2 \int_{t_0}^t \gamma(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau} \cdot \alpha^{2i(t, t_0)}(\varphi_{\tau_i(\varphi)}(\varphi)) \|x_0\|^2 \leq \\ &\leq e^{2 \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau} \cdot \alpha^{2i(t_0, t_1)}(\varphi_{\tau_i(\varphi)}(\varphi)) \cdot e^{2 \int_{t_1}^{t_1+T} \gamma(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau}. \end{aligned}$$

$$\alpha^{2i(t_1, t_1 + T)}(\varphi_{\tau_i(\varphi)}(\varphi)) \cdot e^{2 \int_{t_1+T}^t \gamma(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau}.$$

$$\alpha^{2i(t_1 + T, t)}(\varphi_{\tau_i(\varphi)}(\varphi)) \|x_0\|^2, \quad t_1 = t_1(\varphi) \quad t > t_1 + T,$$

де $[t_1, t_1 + T]$ проміжок, поза яким траєкторія знаходиться в $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$. Тому з останньої нерівності, враховуючи (4.50), випливає оцінка

$$\|x_t(\varphi, x_0)\| \leq K e^{(\varepsilon + \varepsilon_0 - \bar{\gamma})(t - t_0)} \cdot K e^{(\varepsilon + \gamma_0 + p \ln \alpha_0)T} \|x_0\|, \quad (4.62)$$

з якої і випливає асимптотична стійкість тривіального тора системи (4.47).

Наведемо ще одну достатню умову, при виконанні якої тривіальний тор системи (4.47) буде асимптотично стійким.

Позначимо через

$$\hat{P}(\varphi) = \frac{1}{2}(P(\varphi) + P^T(\varphi)), \quad \hat{Q} = (E + B^T(\varphi))(E + B(\varphi)),$$

а через $\Lambda(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$ і $\alpha(\varphi)$, $\alpha_1(\varphi)$ відповідно найбільші і найменші власні числа цих симетричних матриць. Щодо моментів імпульсного збурення $\tau_i(\varphi)$ вважатимемо, що виконується гранична рівність (4.47).

Теорема 4.4.3. *Якщо система (4.47) така, що виконується нерівність*

$$\Lambda + p\alpha < 0, \quad (4.63)$$

де

$$\Lambda = \max_{\varphi \in \Omega} \Lambda(\varphi), \quad \alpha = \max_{\varphi \in \Omega \cap \Gamma} \alpha(\varphi),$$

де Ω — множина неблукуючих точок динамічної системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, то тривіальний тор системи рівнянь (4.47) асимптотично стійкий.

Доведення. Згідно з нерівністю Важевського [17] будь-який розв'язок лінійної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x$$

допускає оцінку

$$e^{\int_{t_0}^t \lambda(\varphi_s(\varphi)) ds} \langle x_0, x_0 \rangle \leq \langle x_t(\varphi, x_0), x_t(\varphi, x_0) \rangle \leq e^{\int_{t_0}^t \Lambda(\varphi_s(\varphi)) ds} \langle x_0, x_0 \rangle \quad (4.64)$$

при $t \geq t_0$. При $t = \tau_i(\varphi)$ розв'язок системи рівнянь (4.47) терпить скачок, величина якого оцінюється таким чином

$$\alpha_1^2(\varphi)$$

З останніх двох нерівностей випливає, що для розв'язків $x_t(\varphi, x_0)$ в яких $\varphi \in \Omega$ і вся траєкторія $\varphi_t(\varphi) \in \Omega$, справедлива оцінка

$$\|x_t(\varphi, x_0)\| \leq K e^{(\varepsilon - \gamma_0)(t - t_0)} \|x_0\| \quad (4.66)$$

де

$$\gamma_0 = -(\Lambda + p\alpha).$$

Якщо ж $\varphi \in \bar{\Omega}$, тобто є блукаючою точкою, або ж $\varphi \in \Omega$, але не для всіх $t \geq t_0$ $\varphi_t(\varphi) \in \Omega$, то, як і при доведенні попередньої теореми, для достатньо малого фіксованого числа $\varepsilon_0 > 0$ можна вказати додатне число $T = T(\varepsilon)$ таке, що траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ перебуває поза ε_0 -околом множини Ω не довше, ніж T . В силу нерівності (4.63) при достатньо малому ε_0 виконуватиметься нерівність $-\gamma_0 + \varepsilon_0 < 0$ для всіх φ із ε_0 -околу множини Ω , а тому

$$\|x_t(\varphi, x_0)\| \leq K e^{(\varepsilon + \gamma^0)T} \cdot K e^{(\varepsilon + \varepsilon_0 - \gamma)(t - t_0)} \|x_0\|.$$

Звідси випливає асимптотична стійкість тривіального тора системи рівнянь (4.47).

4.5. Багаточастотні системи з імпульсними збуреннями

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, визначену в $T_m \times R^n$, яка зазнає імпульсних збурень в момент потрапляння зображуючої точки в задану підмножину фазового простору

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P(\varphi)x + f(\varphi), \quad \varphi \neq \Gamma, \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi),$$

де $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)^T \in T_m$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$, $P(\varphi), B(\varphi) \in C(T_m)$, $f(\varphi), g(\varphi) \in C_\Gamma(T_m)$; $C_\Gamma(T_m)$ - простір кусково-неперервних 2π -періодична по кожній компоненті φ_v , $v = 1, \dots, m$ функцій, визначених на m -мірному торі T_m .

Вважатимемо множину Γ гладким підмноговидом тору T_m розмірності $m - 1$, який визначається рівнянням $\Phi(\varphi) = 0$, де $\Phi(\varphi)$ - неперервна скалярна 2π -періодична по кожній компоненті φ_v , $v = 1, \dots, m$ функція.

Позначимо через $t_i(\varphi)$, $i \in Z$ розв'язки рівняння $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$, які є моментами імпульсних збурень в системі (4.67). Вважатимемо, що розв'язки $t = t_i(\varphi)$ існують і

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} t_i(\varphi) = \pm\infty, \quad \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p < \infty \quad (4.68)$$

рівномірно по $t \in R$, де $i(a, b)$ - кількість точок $t_i(\varphi)$ на інтервалі (a, b) .

Поряд із системою рівнянь (4.67) розглянемо лінійну систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \quad t \neq t_i(\varphi),$$

(4.69)

$$\Delta x|_{t=t_i(\varphi)} = B(\varphi_{t_i(\varphi)}),$$

що залежить від $\varphi \in T_m$ як від параметра. Ми одержали систему (4.69) замінюючи φ на $\varphi_t(\varphi)$ в другому та третьому рівняннях системи (4.67). Під інваріантною тороїдальною множиною системи рівнянь (4.67) ми розуміємо множину, визначену кусково-неперервною функцією $u(\varphi) \in C_\Gamma(T_m)$ такою, що функція $x(t, \varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$ є розв'язком системи рівнянь (4.69) для будь-якого $\varphi \in T^m$.

Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \quad t \neq t_i(\varphi),$$

(4.70)

$$\Delta x|_{t=t_i(\varphi)} = B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))x,$$

яка залежить від $\varphi \in T^m$ як від параметра. Позначимо через $X_\tau^t(\varphi)$ матрицант системи (4.70), а через

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} X_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leq 0, \\ -X_\tau^0(\varphi)(E - C(\varphi_\tau(\varphi))), & \tau > 0. \end{cases}$$

функцію Гріна-Самойленка.

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad \varphi \neq \Gamma, \quad \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x$$

Якщо

$$\|X_\tau^t(\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t - \tau|}, \quad t, \tau \in R,$$

(4.71)

для деяких $K \geq 1$, $\gamma > 0$. Тоді інваріантна тороїдальна множина системи рівнянь (4.67) може бути представлена у вигляді

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \\ + \sum_{-\infty < t_i(\varphi) < \infty} G_0(t_i(\varphi) + 0, \varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)), \quad \varphi \in T_m.$$

Умови (4.68), (4.71) забезпечують збіжність інтеграла та суми, а існування функції Гріна-Самойленка $G_0(\tau, \varphi)$ є достатньою умовою для існування інваріантної тороїдальної множини системи рівнянь (4.67).

Теорема 4.5.1. *Нехай в системі рівнянь (4.67) матриця $P(\varphi)$ задовольняє умову Лапко-Данилевського [17] для будь-яких $t \geq \tau \geq 0$ і рівномірно по $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T_m$ існує скінченна границя (4.68).*

Тоді, якщо

$$\gamma + p \ln \alpha < 0, \quad (4.72)$$

де

$$\gamma = \max_{j=1, \dots, n} \operatorname{Re} \lambda_j(A), \quad A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\tau}^t (\varphi) P(\varphi_{t_1}(\varphi)) dt_1,$$

$$\alpha^2 = \sup_{\varphi \in T_m} \max_{j=1, \dots, n} \lambda_j((E + B(\varphi))^T (E + B(\varphi))),$$

то система рівнянь (4.67) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину.

Доведення. Матрицант системи рівнянь з імпульсним збуренням (4.70) може бути представлений у вигляді [52]

$$X_0^t(\varphi) = \Omega_{t_i(\varphi)}^t \times \prod_{0 < t_j(\varphi) < t_i(\varphi)} (E + B(\varphi_{t_j(\varphi)}(\varphi))) \Omega_{t_{j-1}(\varphi)}^{t_j(\varphi)}(\varphi), \quad (4.73)$$

де $t_0(\varphi) = 0$, $t_i(\varphi) < t \leq t_{i+1}(\varphi)$.

В силу виконання умови Лапко-Данилевського [17], для матрицанту $\Omega_\tau^t(\varphi)$ системи без імпульсних збурень справедлива оцінка

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq K e^{(\gamma + 2\varepsilon)t} \quad \text{при } t \geq 0 \quad \text{для деякого } K \geq 1.$$

Тоді

$$\|X_0^t(\varphi)\| \leq K e^{(\gamma + 2\varepsilon)t} \alpha^{i(0,t)} \quad \text{при } t \geq 0.$$

З існування скінченної границі (4.68) випливає, що для будь-якого $\varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $K_2 = K_2(\varepsilon_2) \geq 1$, при якому $\alpha^{i(0,t)} \leq K_2 e^{(\varepsilon_2 + p \ln \alpha)t}$.

Звідки одержимо оцінку матрицанта

$$\|X_0^t(\varphi)\| \leq K \cdot K_2 e^{(2\varepsilon + \varepsilon_2 + \gamma + p \ln \alpha)t} \quad \text{при } t \geq 0.$$

Враховуючи (4.72) та вибираючи ε та ε_2 настільки малим, щоб $2\varepsilon + \varepsilon_2 + \gamma + p \ln \alpha < 0$, одержимо

$$\|X_0^t(\varphi)\| \leq K_1 e^{-\gamma_1 t} \tag{4.74}$$

для будь-якого $t \geq 0$ та деяких $K_1 \geq 1$, $\gamma_1 > 0$.

З справедливості (4.74) випливає, що функція

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} X_\tau^0(\varphi), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0 \end{cases} \tag{4.75}$$

є функцією Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори. Отже, система рівнянь (4.67) має асимптотично стійкий інваріантний торроїдальний многовид, який визначається співвідношенням

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^0 X_{\tau}^0(\varphi) f(\varphi_{\tau}(\varphi)) d\tau + \\ + \sum_{-\infty < t_i(\varphi) < 0} X_{t_i(\varphi)+0}^0(\varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)), \quad \varphi \in T_m.$$

В теорії багаточастотних коливань важливим є питання збереження інваріантного тороїдального многовиду при малих збуреннях системи диференціальних рівнянь, що описує ці коливання [9, 60, 98]. В багатьох роботах (наприклад, [31]) успішно застосовано прямий метод Ляпунова для встановлення грубості тороїдального многовиду і вказані достатні умови, при виконанні яких малі збурення не руйнують цей многовид.

На завершення цього параграфа наведемо умови збереження асимптотично стійкого інваріантного многовиду при малих збуреннях.

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad \varphi \in T_m \setminus \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi), \quad (4.76)$$

де $\varphi \in T_m$, $x \in R^n$, $A(\varphi), B(\varphi) \in C(T_m)$, $f(\varphi), g(\varphi) \in C_{\Gamma}(T_m)$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$.

Тут $C(T_m)$ — простір неперервних 2π — періодичних по кожній компоненті φ_{μ} , ($\mu = \overline{1, m}$) функцій, визначених на m — вимірному торі T_m .

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$ розв'язок першого із рівнянь системи (4.76), тобто системи на торі T_m

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi). \quad (4.77)$$

Зауважимо, що в силу того, що $a(\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця, для будь-якого $\varphi \in T_m$ розв'язок $\varphi_t(\varphi)$ системи рівнянь (4.77) існує єдиний і ви-

значений на всіх $t \in R$, в силу компактності фазового простору цієї системи, тобто тора T_m .

Що до множини імпульсної дії Γ вважатимемо, що вона є підмножиною тора T_m розмірності 1 і задається рівнянням

$$\Phi(\varphi) = 0, \quad (4.78)$$

в якому $\Phi(\varphi)$ – деяка скалярна неперервна функція. Позначивши через $t_i(\varphi)$ розв'язки рівняння $\Phi(\varphi_{t_i}(\varphi)) = 0$, тобто моменти імпульсного збурення в системі (4.76) вважатимемо, що вони задовольняють умову

$$t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) > v > 0. \quad (4.79)$$

Поряд з системою рівнянь (4.76) розглянемо лінійну систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)), \quad \varphi \in T_m \setminus \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi_t(\varphi))x + g(\varphi_t(\varphi)) \end{aligned} \quad (4.80)$$

що залежить від $\varphi \in T_m$ як від параметра.

Нехай $C(\varphi) \in C_\Gamma(T_m)$ довільна $(n \times n)$ - квадратна матриця і $X_\tau^t(\varphi)$ – матрицант лінійної системи

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(\varphi_t(\varphi))x, \quad \varphi \in T_m \setminus \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi_t(\varphi))x, \end{aligned} \quad (4.81)$$

залежний від $\varphi \in T_m$ як від параметра.

Існування функції Гріна-Самойленка гарантує існування інваріантної тороїдальної множини системи (4.76) і цю множину можна подати в вигляді

$$\begin{aligned} x = u(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \\ &+ \sum_{-\infty < t_i(\varphi) < \infty} G_0(t_i(\varphi) + 0, \varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)), \quad \varphi \in T_m, \end{aligned} \quad (4.82)$$

для будь-яких функцій $f(\varphi), g(\varphi) \in C_\Gamma(T_m)$.

В подальших міркуваннях ми розглядатимемо випадок, коли матрицант $X_\tau^t(\varphi)$ системи рівнянь (4.81) задовольняє оцінку

$$\|X_\tau^t(\varphi)\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} \quad \text{для } t \geq \tau. \quad (4.83)$$

з (4.83) безпосередньо випливає, що функція Гріна-Самойленка в цьому випадку існує і має вигляд

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} X_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0, \end{cases} \quad (4.84)$$

Інваріантна тороїдальна множина є асимптотично стійкою і притягує до себе всі траєкторії.

Поряд з системою (4.76) розглянемо збурену систему,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= [A(\varphi) + A_1(\varphi)]x + f(\varphi), \quad \varphi \in T_m \setminus \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= [B(\varphi) + B_1(\varphi)]x + g(\varphi), \end{aligned} \quad (4.85)$$

в якій матриці збурення $A_1(\varphi)$ і $B_1(\varphi) \in C(T_m)$.

Так як матричні функції $A_1(\varphi)$ і $B_1(\varphi)$ неперервні на компактному многовиді, то їх норми обмежені

$$\max_{\varphi \in T_m} \|A_1(\varphi)\| \leq a_1, \quad \max_{\varphi \in T_m} \|B_1(\varphi)\| \leq b_1,$$

де a_1 і b_1 деякі додатні числа.

Справедливе таке твердження.

Теорема 4.5.2. *Нехай матрицант системи (4.80) допускає оцінку (4.83) з деякими константами $K \geq 1$, $\gamma > 0$.*

Якщо виконується нерівність

$$K a_1 + \frac{1}{\Theta} \ln(1 + K b_1) < \gamma, \quad (4.86)$$

то система (4.85) має експоненціально стійкий інваріантний тороїдальний многовид для будь-яких функцій $f(\varphi)$ і $g(\varphi) \in C_\Gamma(T_m)$.

Доведення. Матрицант $\Omega_0^t(\varphi)$ збуреної системи (4.85) допускає інтегральне представлення

$$\begin{aligned} \Omega_0^t(\varphi) &= X_0^t(\varphi) + \int_0^t X_0^s(\varphi) A_1(\varphi_s(\varphi)) \Omega_0^s(\varphi) ds + \\ &+ \sum_{0 < t_i(\varphi) < t} X_{t_i(\varphi)}^t(\varphi) B_1(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)) \Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Беручи до уваги оцінку (4.83), маємо:

$$\begin{aligned} \|\Omega_0^t(\varphi)\| &\leq K e^{-\gamma t} + \int_0^t K e^{-\gamma(t-s)} a_1 \|\Omega_0^s(\varphi)\| ds + \\ &+ \sum_{0 < t_i(\varphi) < t} K e^{-\gamma(t-t_i(\varphi))} b_1 \left\| \Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi) \right\|, \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} \|\Omega_0^t(\varphi)\| &\leq K + \int_0^t K e^{\gamma s} a_1 \|\Omega_0^s(\varphi)\| ds + \\ &+ \sum_{0 < t_i(\varphi) < t} K e^{\gamma t_i(\varphi)} b_1 \left\| \Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi) \right\|. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Використовуючи нерівність типу Гронуола-Беллмана для кусково неперервних функцій [99], дістаємо

$$e^{\gamma t} \|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq K(1 + K b_1)^{i(0,t)} e^{K a_1 t}, \quad (4.90)$$

де $i(a, b)$ — число імпульсних збурень на проміжку (a, b) . Остаточно маємо:

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq K e^{-(\gamma - K a_1 - \frac{1}{\delta} \ln(1 + K b_1))t}, \quad \text{для } t \geq 0. \quad (4.91)$$

З умови (4.86) безпосередньо випливає, що матрицант $\Omega_0^t(\varphi)$ збуреної системи задовольняє оцінку типу (4.83) з тією ж константою K і іншою, але додатною, константою $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma} = \gamma - K a_1 - \frac{1}{v} \ln(1 + K b_1).$$

А це означає, що існує функція Гріна-Самойленка в вигляді (4.84) і експоненціально стійкий інваріантний тороїдальний многовид для довільних функцій $f(\varphi), g(\varphi) \in C\Gamma(T_m)$. Теорему доведено.

Покажемо, що твердження доведеної теореми залишається вірним, якщо вимагати виконання нерівності (4.86) не на всьому торі T_m , а лише на множині Ω неблукаючих точок динамічної системи (4.77) на торі T_m .

Оскільки множина Ω є компактом, а функції $A_1(\varphi)$ і $B_1(\varphi)$ є неперервними, то їх норми досягають максимуму на Ω .

Позначемо

$$\max_{\varphi \in \Omega} \|A_1(\varphi)\| = \tilde{a}_1, \quad \max_{\varphi \in \Omega} \|B_1(\varphi)\| = \tilde{b}_1.$$

Справедлива теорема.

Теорема 4.5.3. *Нехай матрицант $X_\tau^t(\varphi)$ задовольняє оцінку (4.83).*

Якщо виконується умова

$$K\tilde{a}_1 + \frac{1}{\Theta} \ln(1 + K\tilde{b}_1) < \gamma, \quad (4.92)$$

то при довільних функціях $f(\varphi), g(\varphi) \in C\Gamma(T_m)$ система (4.85) має експоненціально стійку інваріантну тороїдальну множину.

Доведення. Матрицант $\Omega_0^t(\varphi)$ збуреної системи допускає інтегральне представлення

$$\begin{aligned} \Omega_0^t(\varphi) &= X_0^t(\varphi) + \int_0^t X_s^t(\varphi) A_1(\varphi_s(\varphi)) \Omega_0^s(\varphi) ds + \\ &+ \sum_{0 < t_i(\varphi) < t} X_{t_i(\varphi)}^t(\varphi) B_1(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)) \Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Враховуючи оцінку (4.83) маємо:

$$\begin{aligned}
\|\Omega_0^t(\varphi)\| &\leq Ke^{-\gamma t} + \int_0^t Ke^{-\gamma(t-s)} \|A_1(\varphi_s(\varphi))\| \|\Omega_0^s(\varphi)\| ds + \\
&+ \sum_{0 < t_i(\varphi) < t} Ke^{-\gamma(t-t_i(\varphi))} \|B_1(\varphi_{t_i(\varphi)})\| \left\| \Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi) \right\|, \\
e^{\gamma t} \|\Omega_0^t(\varphi)\| &\leq K + \int_0^t Ke^{\gamma s} \|A_1(\varphi_s(\varphi))\| \|\Omega_0^s(\varphi)\| ds + \\
&+ \sum_{0 < t_i(\varphi) < t} Ke^{\gamma t_i(\varphi)} \|B_1(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\| \left\| \Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi) \right\|.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Далі міркуємо так, як і в роботі [43].

Позначимо через $U_\varepsilon(\Omega)$ ε -окіл множини Ω неблукаючих точок динамічної системи (4.77). Як і в [38] і [43] переконуємося, що для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ і довільного $\varphi \in T_m$ існує скінченний момент часу $T = T(\varepsilon) > 0$, не залежний від $\varphi \in T_m$, такий, що для моментів часу $t \geq T$ півтраєкторія $\varphi_t(\varphi) \in U_\varepsilon(\Omega)$. Так як матриці $A_1(\varphi)$ і $B_1(\varphi)$ неперервні, то для будь-якої пари фіксованих додатних чисел ε_a і ε_b можна вказати такі додатні числа $\tilde{a} > 0$ і скінченне, незалежне від $\varphi \in T_m, T$ такі, що для будь-якого $\varphi \in T_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$,

$$\|A_1(\varphi_t(\varphi))\| \leq \tilde{a} + \varepsilon_a, \|B_1(\varphi_t(\varphi))\| \leq \tilde{b} + \varepsilon_b \quad \text{для } t \geq T. \tag{4.95}$$

Тоді з (4.94) маємо

$$\begin{aligned}
e^{\gamma t} \|\Omega_0^t(\varphi)\| &\leq K + \int_0^T Ke^{\gamma s} \|A_1(\varphi_s(\varphi))\| \|\Omega_0^s(\varphi)\| ds + \\
&+ \sum_{0 < t_i(\varphi) < T} Ke^{\gamma t_i(\varphi)} \|B_1(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\| \left\| \Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi) \right\| + \\
&+ \int_T^t Ke^{\gamma s} (\tilde{a}_1 + \varepsilon_a) \|\Omega_0^s(\varphi)\| ds + \\
&+ \sum_{T < t_i(\varphi) < t} Ke^{\gamma t_i(\varphi)} (\tilde{b}_1 + \varepsilon_b) \left\| \Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi) \right\|.
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Оцінюючи

$$\begin{aligned}
& K + \int_0^T K e^{\gamma s} \|A_1(\varphi_s(\varphi))\| \|\Omega_0^s(\varphi)\| ds + \\
& + \sum_{0 < t_i(\varphi) < T} K e^{\gamma t_i(\varphi)} \|B_1(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\| \|\Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\| \leq \tilde{K},
\end{aligned} \tag{4.97}$$

дістаємо

$$\begin{aligned}
e^{\gamma t} \|\Omega_0^t(\varphi)\| & \leq \tilde{K} + \int_T^t K e^{\gamma s} (\tilde{a}_1 + \varepsilon_a) \|\Omega_0^s(\varphi)\| ds + \\
& + \sum_{T < t_i(\varphi) < t} K e^{\gamma t_i(\varphi)} (\tilde{b}_1 + \varepsilon_b) \|\Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\| \leq \\
& \leq \tilde{K} + \int_0^t K e^{\gamma s} (\tilde{a}_1 + \varepsilon_a) \|\Omega_0^s(\varphi)\| ds + \\
& + \sum_{0 < t_i(\varphi) < t} K e^{\gamma t_i(\varphi)} (\tilde{b}_1 + \varepsilon_b) \|\Omega_0^{t_i(\varphi)}(\varphi)\|.
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Скориставшись нерівністю типу Гронуола-Беллмана для кусково неперервних функцій, маємо

$$\begin{aligned}
e^{\gamma t} \|\Omega_0^t(\varphi)\| & \leq \tilde{K} (1 + K(\tilde{b}_1 + \varepsilon_b))^{i(0,t)} e^{K(\tilde{a}_1 + \varepsilon_b)t}, \\
\|\Omega_0^s(\varphi)\| & \leq \tilde{K} e^{-\gamma - K(\tilde{a}_1 + \varepsilon_a) - \frac{1}{\Theta} \ln(1 + K(\tilde{b}_1 + \varepsilon_b))t} \\
& \text{для } t > 0, \varphi \in T_m \setminus U_\varepsilon(\Omega).
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Тепер розглянемо випадок, коли $\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)$. Це означає, що для будь-якого початкового значення $\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)$ існує додатне число $T_1(\varphi)$ таке, що

$$\begin{aligned}
\|A_1(\varphi_t(\varphi))\| & \leq \tilde{a}_1 + \varepsilon_a, \quad \|B_1(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\| \leq \tilde{b}_1 + \varepsilon_b \\
& \text{для } t \in (0, T_1(\varphi)) \cup (T_1(\varphi) + T, +\infty).
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Зауважимо, що коли $\varphi \in \Omega$, то, в силу інваріантності Ω , $\varphi_t(\varphi) \in \Omega$ для всіх $t \geq 0$ і оцінки (4.100) є справедливими для всіх $t \geq 0$. Така ж ситуація буде мати місце, коли $\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)$, але траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ не покидає з часом цієї множини $U_\varepsilon(\Omega)$. Найгірший для оцінок випадок, коли траєкторія, стартувавши з точки $\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)$ залишає на деякий час $T_1(\varphi)$, що залежить від φ , цю множину.

В цьому випадку з (4.94) для $t > T_1(\varphi) + T$ маємо

$$\begin{aligned}
& \left(e^{\gamma t} \|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq K e^{\int_0^t K \|A_1(\varphi_s(\varphi))\| ds} \right) \cdot \left(\prod_{0 < t_i(\varphi) < t} (1 + K \|B_1(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\|) \right) \leq \\
& \leq \left(K e^{K(\tilde{a}_1 + \varepsilon_a)t} e^{\int_{T_1(\varphi)}^{T_1(\varphi)+T} K \|A_1(\varphi_s(\varphi))\| ds} \right) \cdot \left(\prod_{0 < t_i(\varphi) < t} (1 + K(\tilde{b}_1 + \varepsilon_b)) \right) \times \\
& \times \left(\prod_{T_1(\varphi) < t_i(\varphi) < T_1(\varphi)+T} (1 + K \|B_1(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\|) \right) \geq \left(\bar{K} e^{K(\tilde{a}_1 + \varepsilon_a)t} e^{\frac{1}{\Theta} \ln(1 + K(b_1 + \tilde{\varepsilon}_b))t} \right),
\end{aligned} \tag{4.101}$$

де константа K не залежить від φ . Справді,

$$\begin{aligned}
& e^{\int_{T_1(\varphi)}^{T_1(\varphi)+T} K \|A_1(\varphi_s(\varphi))\| ds} \prod_{0 < t_i(\varphi) < t} (1 + K \|B_1(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))\|) \leq \\
& \leq K e^{\int_{T_1(\varphi)}^{T_1(\varphi)+T} K a_1 ds} \prod_{T_1(\varphi) < t_i(\varphi) < T_1(\varphi)+T} (1 + K b_1) \leq K e^{K a_1 T} (1 + K b_1)^{\frac{1}{\Theta}} = \bar{K}.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Тоді оцінка для матрицанта Ω_0^t набуває вигляду

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq \bar{K} e^{-(\gamma - K(\tilde{a}_1 + \varepsilon_a) - \frac{1}{\Theta} \ln(1 + K(\tilde{b}_1 + \varepsilon_b)))t} \quad \text{для } t > 0, \varphi \in U_\varepsilon(\Omega). \tag{4.103}$$

Остаточно, позначивши $\hat{K} = \max\{\tilde{K}, \bar{K}\}$, маємо оцінку

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq \hat{K} e^{-(\gamma - K(\tilde{a}_1 + \varepsilon_a) - \frac{1}{\Theta} \ln(1 + K(\tilde{b}_1 + \varepsilon_b)))t} \quad \text{для } t > 0, \varphi \in T_m. \tag{4.104}$$

Якщо умова (4.92) виконується, то матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ задовольняє умову виду (4.83), але можливо, з іншими константами K і γ , бо сталі ε_a і ε_b ми можемо вибрати достатньо малими. Це означає, що існує функція Гріна-Самойленка в вигляді (4.84), а отже існує експоненціально стійка тороїдальна множина системи рівнянь (4.85) для довільних функцій $f(\varphi)$ і $g(\varphi) \in C_\Gamma(T_m)$, що й завершує доведення теореми.

Як приклад розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= -\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}, & \frac{d\varphi_2}{dt} &= \omega, & \varphi &\in T_2, \\ \frac{dx}{dt} &= -x + f(\varphi), & \varphi &\in T_2 \setminus \Gamma, & \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= g(\varphi), \end{aligned} \quad (4.105)$$

в якій $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in T_2$, x — скаляр, ω — додатне число, $f(\varphi), g(\varphi)$ — скалярні 2π — періодичні функції. За множину Γ нехай служить деяка замкнена лінія на T_2 $\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, для якої розв'язки рівняння $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$ задовольняє умову (4.79). Система (4.105) має інваріантну тороїдальну множину і відповідний матрицант $X_\tau^t(\varphi)$ задовольняє умову (4.83) з константами $K = \gamma = 1$.

Розглянемо тепер збурену систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= -\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}, & \frac{d\varphi_2}{dt} &= \omega, & \varphi &\in T_2, \\ \frac{dx}{dt} &= (-1 + A \sin \varphi_1)x + f(\varphi), & \varphi &\in T_2 \setminus \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B \sin \varphi_1 \cdot x + g(\varphi), \end{aligned} \quad (4.106)$$

в якій A і B фіксовані додатні числа. З'ясуємо запитання: чи матиме збурена система (4.106) експоненціально стійку інваріантну множину для будь-яких функцій $f(\varphi), g(\varphi) \in C_\Gamma(T_2)$?

Оскільки для збурюючих величин маємо оцінки

$$\max_{\varphi \in T_2} A \sin \varphi_1 = A, \quad \max_{\varphi \in T_2} B \sin \varphi_1 = B.$$

то зрозуміло, що не для всіх A і B система (4.106) має експоненціально стійку тороїдальну множину.

Звернемося тепер до тверджень теореми 1 і теореми 2.

В нашому випадку умова (4.86) набуває вигляду

$$A + \frac{1}{\Theta} \ln(1 + B) < 1$$

і зрозуміло, що завжди можна підібрати додатні константи A і B такими, щоб остання нерівність стала суперечливою, а отже, теорема 1 не дає відповіді на поставлене вище запитання. Разом з тим динамічна система на двовимірному торі T_2 в деякому прикладі має досить просту структуру множини неблукаючих точок. Цією множиною є лише один меридіан $\varphi_1 = 0$,

$$\Omega = \{\varphi \in T_2 : \varphi_1 = 0, \varphi_2 \in T_1\}.$$

На цьому меридіані для елементів збурення маємо:

$$\max_{\varphi \in \Omega} A \sin \varphi_1 = 0, \quad \max_{\varphi \in \Omega} B \sin \varphi_1 = 0$$

і нерівність (4.92) набуває вигляду $0 + \frac{1}{\Theta} \ln 1 < 1$

Таким чином, з теореми 2 випливає, що система (4.106) має експоненціально стійку інваріантну тороїдальну множину для будь-яких $f(\varphi), g(\varphi) \in C_\Gamma(T_2)$, якщо тільки послідовність моментів імпульсного збурення задовольняє умову (4.79).

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі:

- доведені нові теореми про асимптотичну стійкість тривіального тора лінійного розширення динамічної системи на торі;
- встановлені достатні умови експоненціальної стійкості тривіального тора у випадку Лаппо-Данилевського;
- досліджено питання існування та стійкості інваріантної тороїдальної множини розривної динамічної системи, визначеної в прямому добутку m -вимірному тора T_m та n -вимірному евклідовому простору R^n .

ВИСНОВКИ

Основні наукові результати дисертаційної роботи стосуються дослідження широкого класу розривних динамічних систем на площині і в прямому добутку m – вимірного тора T_m та n – вимірного евклідового простору R^n . Ці результати полягають в наступному:

- Встановлені необхідні і достатні умови існування розривних періодичних розв’язків лінійних систем диференціальних рівнянь другого порядку, що піддаються імпульсному збуренню в момент проходження фазовою точкою фіксованої прямої;
- досліджено питання існування одно- і дво-імпульсних розривних циклів слабо нелінійних розривних динамічних систем на площині, встановлено достатні умови асимптотичної стійкості і нестійкості цих циклів;
- встановлені достатні умови асимптотичної стійкості розв’язків широкого класу лінійних розширень динамічних систем на торі;
- досліджені питання існування інваріантних тороїдальних множин достатньо широкого класу розривних динамічних систем, фазовим простором яких є прямий добуток m – вимірного тора T_m та n – вимірного евклідового простору R^n , сформульовані достатні умови асимптотичної стійкості таких множин.

Одержані в дисертаційній роботі теоретичні результати в вигляді теорем і критеріїв стійкості успішно можуть бути використані при дослідженні різного роду задач природознавства, математичні моделі яких зводяться до дослідження якісної поведінки розв’язків імпульсних диференціальних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Андронов А.А. Теория колебаний / Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. – М.: Наука, 1981. – 568 С.
- [2] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Арнольд В.И. // – М.: Наука, 1984. – 272 С.
- [3] Асроров Ф.А. Функция Грина-Самойленко и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных уравнений / Асроров Ф.А., Перестюк Н.А. // Укр. мат. журн. – 1994. Т. 46, №8, – С. 1067–1071.
- [4] Ахметов М.У. Метод сравнения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. / Ахметов М.У., Перестюк Н.А., Самойленко А.М. // –Киев: Препринт ИМ АН УССР, 1989, №3, 42 с.
- [5] Ахметов М.У. Периодические и почти периодические решения сильно нелинейных импульсных систем / Ахметов М.У., Перестюк Н.А. // Прикладная математика и механика. – 1992. –Т.56, –№6, 926–934.
- [6] Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости / Барбашин Е.А. // М.: Наука, – 1967. – 224 с.
- [7] Барбашин Е.А. Функции Ляпунова / Барбашин Е.А. // М.: Наука, – 1970. – 240 с.
- [8] Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. – М.: Наука, 1974. – 502 С.
- [9] Боголюбов Н.Н. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике / Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. – М.: Наука, 1969. – 320 С.
- [10] Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике / Боголюбов Н.Н. // К.: Издательство АН УССР, – 1945. – 137 с.

- [11] Бойчук А.А. Обобщенно-обратные краевые задачи и нетеровы краевые задачи / Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. // К.: ИМ НАН Украины, – 1995. – 318 с.
- [12] Бойчук А.А. Периодические решения автономных систем с импульсным воздействием в критических случаях / Бойчук А.А., Чуйко С.М. // Укр. мат. журн. – 1995. – Т.47, №11. – С. 1478–1484.
- [13] Гаушус Э.В. Исследование динамических систем методом точечных преобразований / Гаушус Э.В. – М.: Наука, 1976. – 320 С.
- [14] Горбунов В.К. Процессы с управляемыми разрывами фазовых траекторий и моделирование производства с перемещением основных фондов / Горбунов В.К., Нурахонова Г.У. – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1975. №6, С. 55-61
- [15] Гургула С.И. О втором методе Ляпунова в системах с импульсным воздействием / Гургула С.И., Перестюк Н.А. // Докл. АН УССР, сер. А. – 1982. – №10. – С. 11-14.
- [16] Гургула С.И. Об устойчивости решений импульсных систем / Гургула С.И., Перестюк Н.А. – Вест. Киев. ун-та. Математика и механика. – 1981. №23, С. 33–40.
- [17] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Демидович Б.П. – М.: Изд-во Москв. Ун-та, 1998, 480 С.
- [18] Завалицин С.Т. Динамические системы с импульсной структурой / Завалицин С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е. – Свердловск: Сред. – Урал. кн. изд-во, 1983. 112 С.
- [19] Калитин Б.С. О колебании маятника с ударным импульсом / Калитин Б.С. // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6, – №12. – С. 2174–2181.
- [20] Капустян О.В. Глобальні атрактори імпульсних нескінченновимірних систем / Капустян О. В., Перестюк М. О. // Укр. мат. журн. – 2016. – 68, – №4. – С. 517–528.

- [21] Кирилич В.М. Колебания мембраны под воздействием импульсных сил / Кирилич В.М., Мышкис А.Д., Прохоренко М.В. // Укр. мат. журн. – 2009. – Т.61, № 8. – 1148 – 1153.
- [22] Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. // К.: Издательство АН УССР, – 1937. – 363 с.
- [23] Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации / Лоуден Д.Ф. – М.: Мир, 1966. – 150 С.
- [24] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / Малкин И.Г. // – М.: Наука – 1966, – 530 С.
- [25] Мамса К. Про розривні коливання в двовимірних імпульсних системах / Мамса К., Перестюк Ю. // Міжнародна математична конференція “Боголюбовські читання “ Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” 23 – 30 червня 2013” Севастополь, Україна, 157-158 С.
- [26] Мамса К.Ю. Періодичні розв’язки одного класу розривних динамічних систем на площині / Мамса К.Ю., Перестюк Ю.М. // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 8–10 червня 2011, Київ, Україна, С. 115.
- [27] Мамса К.Ю. Розривні цикли однієї імпульсної системи / Мамса К.Ю., Перестюк Ю.М. // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 19–21 травня 2016, Ужгород, Україна, с. 96.
- [28] Мильман В.Д. Об устойчивости движения при наличии толчков / Мильман В.Д., Мышкис А.Д. // Сибирский. мат. журн. – 1960. – Т. 1, №2, – С. 1034–1045.
- [29] Митропольский Ю.А. Влияние внешних периодических сил на гармонический осциллятор с импульсным воздействием / Митропольский Ю.А., Елгондыев К.К. – Киев: Препринт ИМ АН УССР, 1989, 36 с.
- [30] Митропольский Ю.А. Интегральные многообразия в нелинейной механике / Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. // М.: Наука, – 1973. – 512 с.

- [31] Митропольский Ю.А. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова / Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. // – Киев. Наукова думка, 1992. – 272 С.
- [32] Митропольский Ю.А. К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием / Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Перестюк Н.А. // Укр. мат. журн. – 1977. – Т.29, №6. – С. 750–762.
- [33] Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике / Митропольский Ю.А. Киев: Наук. думка, 1974. – 440 С.
- [34] Митропольский Ю.А. Метод усреднения в системах с импульсным воздействием / Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Перестюк Н.А. // Укр. мат. журн. – 1985. – Т.37, №1. – С. 56–64.
- [35] Мороз М.В. Про існування періодичних розв'язків системи двох диференціальних рівнянь з імпульсною дією / Мороз М.В. // Укр. матем. журн. – 2002. – Т. 54, № 1. – С. 133–137.
- [36] Мышкис А.Д. Бушующие динамические системы / Мышкис А.Д., Хохряков А.Я. // Матем. сб. – 1958. – Т.45, №3. – С. 401–414.
- [37] Мышкис А.Д. Системы с толчками в заданные моменты времени / Мышкис А.Д., Самойленко А.М. // Мат. сб. – 1967. – Т.74, №2. – С. 202–208.
- [38] Немыцкий В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений / Немыцкий В.В., Степанов В.В. // – М: Едиториал УРСС, 2004. – 552 С.
- [39] Перестюк М.М. Про стійкість тороїдального многовиду / Перестюк М.М., Перестюк Ю.М. // Друга Всеукраїнська наукова конференція "Прикладні задачі математики" 13–15 жовтня 2016, Івано-Франківськ, Україна, с. 70–72.
- [40] Перестюк М.М. Про стійкість тороїдального многовиду одного класу динамічних систем / Перестюк М.М., Перестюк Ю.М. // Нелінійні коливання, – 2016, – Т.19, – №4, С. 555–563.

- [41] Перестюк М.М. Стійкість інваріантного многовиди одного класу систем диференціальних рівнянь / Перестюк М.М., Перестюк Ю.М. // Науковий вісник Ужгородського університету, – 2016, – Т.28, – №1, С. 97–104.
- [42] Перестюк М.О. Інваріантні многовиди одного класу систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням / Перестюк М.О., Фекета П.В. // Нелінійні коливання. – 2010. – Т.11. – №3, – С. 240–252.
- [43] Перестюк М.О. Про збереження інваріантного тора багаточастотних систем / Перестюк М.О, Фекета П.В. // Укр. мат. журн. – 2013. – Т.65. – №11 – С. 1498–1505.
- [44] Перестюк Н.А. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Перестюк Н.А, Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. // К.: ИМ НАН Украины, – 2007. 427 с.
- [45] Перестюк Н.А. Отображения последования и периодические решения систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / Перестюк Н.А., Самойленко В.Г., Елгондыев К.К. // Нелінійні коливання – 1998. – №1, – С. 44–50.
- [46] Перестюк Ю.М. Обґрунтування методу усереднення для одного класу імпульсних систем / Перестюк Ю.М. // Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова, 15–22 червня 2013, Одеса, Україна, С. 81–82.
- [47] Перестюк Ю.М. Про коливні розв'язки в одній імпульсній системі / Перестюк Ю.М. // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" 27–29 вересня 2012, Ужгород Україна, С. 67.
- [48] Перестюк Ю.М. Про розривні коливання в одній імпульсній системі / Перестюк Ю. // Вісник Ужгородського університету. – 2012. – Т.23. – №2. – С.131–136.
- [49] Перестюк Ю.М. Розривні коливання в одній імпульсній системі / Перестюк Ю.М. // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. 15, – №4, – С. 494-503. (Translated in Perestyuk Yu. Discontinuous oscillations in one impulsive

system / Yu. M. Perestyuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 194, – № 4. P. 404–413.)

- [50] Петришин Р.І. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь з імпульсною дією / Петришин Р.І., Сопронюк Т.М. // – Чернівці: Чернівецький національний ун-т, – 2010. – 200 с.
- [51] Рожко В.Ф. Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах / Рожко В.Ф. // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, – №6. – С. 1005–1012.
- [52] Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / Самойленко А.М., Перестюк Н.А. // – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
- [53] Самойленко А.М. Инвариантные множества систем с мгновенным изменением в стандартной форме / Самойленко А.М., Перестюк Н.А. // Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25, №1, – С. 129–134.
- [54] Самойленко А.М. Метод усреднения в системах с толчками / Самойленко А.М. // Мат. физика – 1971. Вып. 9. – С. 101–117.
- [55] Самойленко А.М. Некоторые вопросы исследования дифференциальных уравнений с нерегулярной правой частью / Самойленко А.М. // Bulletin Institute Politechnik. – 1965. – 11(15), №3–4, – С. 85–92.
- [56] Самойленко А.М. Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием / Самойленко А.М., Перестюк Н.А. // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т.17, – №11. – С. 1995–2001.
- [57] Самойленко А.М. Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією / Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Собчук В.В. // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51, №6. – С. 827–834.
- [58] Самойленко А.М. Диференціальні рівняння / Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. // К.: ВПЦ “Київський університет”, – 2010, – 527 с.

- [59] Самойленко А.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / Самойленко А.М., Перестюк Н.А. // Дифференциальные уравнения – 1981. – Т.13, – №11. – С. 1981–1992.
- [60] Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы / Самойленко А.М. // М.: Наука, – 1987. – 304 с.
- [61] Самойленко В.Г. Асимптотическое интегрирование слабо нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / Самойленко В.Г., Елгондыев К.К. // Препринт ИМ АН УССР 89.37, Киев, – 1989, – 52 с.
- [62] Самойленко В.Г. Періодичні розв'язки рівняння Дюффінга з імпульсною дією / Самойленко В.Г., Собчук В.В., Єлгондєєв К.К. // Вісник Київського нац. університету Серія: Математика. Механіка. Вип. 5. – 2000. – С. 47-51.
- [63] Самойленко В.Г. Періодичні розв'язки рівняння Льенара з імпульсною дією / Самойленко В.Г., Собчук В.В. // Нелінійні коливання – 2000. –Т.3, №2, – С. 256–265.
- [64] Самойленко В.Г. Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією / Самойленко В.Г., Єлгондєєв К.К. // Укр. мат. журн. – 1997. – Т.49, №1. – С. 141–148.
- [65] Самойленко В.Г. Существование периодических режимов в нелинейных системах, подвергающимся внешним возмущающим силам импульсной природы / Самойленко В.Г., Собчук В.В., Елгондыев К.К. // Differential equations and Applications. – Saint-Petersburg: June 12-17, – 2000. – P. 184.
- [66] Слюсарчук В.Е. Слабо нелинейные возмущения импульсных систем / Слюсарчук В.Е. // Математическая физика и нелинейная механика. – 1991. – Т. 15, – С. 32–35.
- [67] Собчук В.В. Існування періодичних розв'язків рівняння математичного маятника з імпульсною дією / Собчук В.В. // Dynamical system modeling and stability investigation, Mechanical Systems. – Kyiv: Thesis of conference reports, May 25–29. – P. 74.

- [68] Ткаченко В.И. О линейных почти периодических импульсных системах / Ткаченко В.И. // Укр. мат. журн. – 1993. – Т.45, №1. – С. 105–113.
- [69] Ткаченко В.И. Про експоненціальну дихотомію лінійних імпульсних майже періодичних систем / Ткаченко В.И. // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, №1. – С. 136–142.
- [70] Трофимчук С.И. Необходимые условия существования инвариантного многообразия линейного расширения динамической системы на компактном многообразии / Трофимчук С.И. // Укр. мат. журн. – 1984. Т. 36, №3, – С. 390–393.
- [71] Фекета П.В. Про інваріантні тори багаточастотних систем у випадку Лаппо-Данилевського / Фекета П.В., Перестюк Ю.М. // Вісник Київського університету. – 2012. – №3. – С. 105–110.
- [72] Фекета П.В. Теорема про збурення для многочастотної системи з імпульсами / Фекета П.В., Перестюк Ю.М. // Нелінійні коливання. – 2015. –Т. 18, – № 2, – С. 280–289. (Translated in Feketa P. Perturbation Theorems for a Multifrequency System with Pulses / Feketa P., Yu Perestyuk // Journal of mathematical sciences. – 2016. – Vol. 217, – № 4. P. 515-524.)
- [73] Филипов А.Ф. Дифференциальные уравнения с правой частью, разрывной на пересекающихся поверхностях / Филипов А.Ф. // Дифференциальные уравнения – 1979. –Т. 15, №10, – С. 1814–1823.
- [74] Филипов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / Филипов А.Ф. // М.: Наука, – 1985. – 224 с.
- [75] Халанай А. Качественная теория импульсных систем / Халанай А., Векслер Д. // – М.: Мир, – 1971. – 310 с.
- [76] Akhmet M. On the general problem of stability for impulsive differential equations / Akhmet M. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – Vol. 288, – №1, – P. 182–196.
- [77] Akhmet M. On the smoothness of solutions of impulsive autonomous systems / Akhmet M. // Nonlinear Analysis. – 2005. – Vol. 60, – №2, – P. 311–324.

- [78] Akhmetov M.U. On the method of comparison for impulsive differential equations / Akhmetov M.U., Perestyuk N.A. // *Differenc. Uravn.* – 1990. – Vol. 26, – №9, – P. 1475–1483.
- [79] Bainov D.D Impulsive differential equations with a small parameter / Bainov D.D., Covachev V. // Singapore: World Scientific, – 1994. – 277pp.
- [80] Boichuk A.A. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems / Boichuk A.A., Samoilenko A.M. // Utrecht: VSP, – 2004. – 317 P.
- [81] Chu J. Impulsive periodic solutions of first-order singular differential equations / Chu J., Nieto J. // *Bull. London Math. Soc.* – 2008. – Vol. 40, – №1, – P. 143–150.
- [82] Feketa P.V. Invariant Manifolds of a Certain Class of Differential Equations / Feketa P.V., Perestyuk Yu.M. // International Workshop "on the Qualitative Theory of Differential Equations" December 18–20, 2014, Tbilisi, Georgia, P. 44–46.
- [83] Gladilina R.I. On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of impulsive systems / Gladilina R.I., Ignat'ev A.O. // *Ukr. Mat. Zh.* – 2003. – Vol. 55, – №8. – P. 1035–1043.
- [84] Gladilina R.I. On the stability of periodic systems with pulse influence / Gladilina R.I., Ignat'ev A.O. // *Mat. Zametki.* – 2004. – Vol. 76, – №1. – P. 44–51.
- [85] Korol I. Discontinuous Cycles of Impulsive Autonomous System in the plane / Korol I., Perestyuk Y. // *Mathematical analysis, differential equations and their applications.* Sofia – 2011. – P. 111–120.
- [86] Kulev G.K. Global stability of the solutions of systems with impulsive effect / Kulev G.K., Bainov D.D. // *J. Math. and Phys. Sci.* – 1991. – Vol. 25, – №2, – P. 166–178.
- [87] Lakshmikantham V. Theory of impulsive differential equations / Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. – Singapore: World Scientific, – 1989. – 520 P.

- [88] Liu X. On stability in terms of two measures for impulsive systems of functional differential equations / Liu X., Wang Q. // *J. Math. Anal. Appl.* – 2007. – Vol. 326, – №1, – P. 252–265.
- [89] Mamsa K. A certain class of discontinuous dynamical systems in the plane / Mamsa K., Perestyuk Y. // *Mathematical analysis, differential equations and their applications*. Sofia – 2011. – P. 121–128.
- [90] Mamsa Kateryna A Certain Class of Discontinuous Dynamical Systems in the Plane / Mamsa Kateryna, Perestyuk Yuriy // *International Workshop "On the Qualitative Theory of Differential Equations"* November 4–6, 2011, Tbilisi, Georgia, P. 51.
- [91] Milev N.V. Stability of linear impulsive differential equations / Milev N.V., Bainov D.D. // *Inst. J. Syst. Sci.* – 1990. – Vol. 21, – №11, – P. 2217–2224.
- [92] Perestiuk Yu. On a Certain Discontinuous Dynamical System in the Plane / Perestiuk Yu. // *International Workshop "On the Qualitative Theory of Differential Equations"* December 20–22, 2013, Tbilisi, Georgia, P. 116-117.
- [93] Perestiuk Yu. On Discontinuous Cycles in One Impulsive System / Perestiuk Yu. // *The 3rd international scientific conference of students and young scientists Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics*, 2013, Kyiv, Bukrek: Proceedings – P. 187-192.
- [94] Perestyuk M. On preservation of the invariant torus for multifrequency systems / Perestyuk M., Feketa P. // *Ukr. Math. J.* 2014. – 65, № 11, – P. 1661–1669.
- [95] Perestyuk M.O. On the stability of integral sets of impulsive differential systems / Perestyuk M.O., Chernikova O.S. // *Math. Notes.* – 2001. – Vol. 2, – №1, – P. 48–60.
- [96] Perestyuk M.O. On the stability of invariant sets of discontinuous dynamical systems / Perestyuk M.O., Chernikova O.S. // *Ukr. Math. Zh.* – 2001. – Vol. 53, – №1, – P. 78–84.
- [97] Perestyuk N.A. On the existence of periodic solutions of some classes of differential equations with random pulse influence / Perestyuk N.A.,

- Samoilenko A.M., Stanzhitskii A.N. // Ukr. Math. Zh. – 2001. – Vol. 53, – №8, – P. 1061–1079.
- [98] Samoilenko A.M. Elements of the Mathematical Theory of Multifrequency Oscillations / Samoilenko A.M. // Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., – 1991. – 337 pp.
- [99] Samoilenko A.M. Impulsive Differential equations / Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. // – Singapore: World Scientific, – 1995. 462 pp.
- [100] Stamov G.T. Asymptotic stability on the large of the solutions of almost periodic impulsive differential equations / Stamov G.T. // Math. Notes. – 2005. – Vol. 25, – №2, – P. 75–83.
- [101] Tkachenko V.I. On invariant sets of differential equation with impulses / Tkachenko V.I. // Нелінійні коливання – 1999. –Т.2, №4, – С. 540-558.
- [102] Tkachenko V.I. On multi-frequency systems with impulses / Tkachenko V.I. // Nonlinear Oscillations. – 1998. – Vol. 1, – №1, – P. 107–116.
- [103] Perestyuk M. Invariant sets of impulsive differential equations with particularities in omega-limit set / Perestyuk M., Feketa P. // Abstract and Appl. Anal. – 2011. – Article ID 970469. – P. 14.
- [104] Perestyuk M. Invariant manifolds of one class of system of impulsive differential equations / Perestyuk M., Feketa P. // Nonlinear Oscillations. – 2010. – 13, №2. – P. 260 – 273.
- [105] Perestyuk M. On preservation of the invariant torus for multifrequency systems / Perestyuk M., Feketa P. // Ukr. Math. J. – 2014. – 65, № 11. – P.1661 – 1669.
- [106] Perestyuk M. On preservation of an exponentially stable invariant torus / Perestyuk M., Feketa P. // Tatra Mountain Math. Publ. – 2015. – V. 63, Issue. 1. – P. 215 – 222.
- [107] Perestyuk N. Invariant sets of a class of discontinuous dynamical systems / Perestyuk M. // Ukr. Math. J. – 1984. – 36, № 1. – P.58 – 62.

- [108] Perestyuk M. Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects / Perestyuk M., Kapustyan O. // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2012. – 56, – P.89 – 113.
- [109] Kapustyan O. Existence of global attractors for impulsive dynamical systems. / Kapustyan O., Perestyuk M. // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Pryr. Tekh. Nauky – 2015. – №12, – P.13 – 18.
- [110] Romaniuk I. Global attractor for one multi-valued impulsive dynamical systems / Romaniuk I. // Bull. T. Shevch. Nat. Univ. of Kyiv Series: Math. and Mech. – 2016. – 35, – P.14 – 19.