УДК 519.9

Резнік В.С, к.ф-м.н, н.с.

Про один метод визначення параметрів ядер спадковості нелінійно в'язкопржних матеріалів за умов складного напруженого стану

Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ;
e-mail : creep@inmech.kiev.ua

V.S. Reznik, Ph.D. (Phys.-Math.), Sci. researcher.

On some method of the heredity kernel parameters determination of nonlinear viscoelastic materials under the complex stress state

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, 252680, Nesterov str, 3, Kiev;
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Деформування в'язкопружних середовищ задається за допомогою визначальних рівнянь спадкового типу. Ці рівняння встановлюють залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і часовим інтегральним оператором і містять набір функцій і коефіцієнтів, що визначаються з базових експериментів. Розроблено метод визначення параметрів ядер спадковості нелінійно в'язкопружних матеріалів. В якості моделі в'язкопружності обрано визначальні рівняння спадкового типу в яких зв'язок між компонентами тензору деформацій і тензору напружень задається виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів тензорів, а нелінійність в'язкопружних властивостей задається рівняннями типу моделі Работнова. Метод ґрунтується на співвідношеннях між ядрами повзучості, що отримані за умов складного напруженого стану і ядрами повзучості за умов одновимірного напруженого стану. Метод апробуються експериментально на задачах розрахунку деформацій повзучості при комбінованому навантаженні тонкостінних трубчатих елементів з поліетилену високої щільності.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, складний напружений стан, повздовжня повзучість, зсувна повзучість, об'ємна повзучість.

The deformation of viscoelastic medium given by means of constitutive equations of the hereditary type. These equations establish the relationship between the components of strain tensor, the components of stress tensor and the integral time operator, and contain the set of function and coefficients that are determined from the basic experiments. A method of the heredity kernel parameters determination of nonlinear viscoelastic materials is developed. As the visco-elastic model, the constitutive equations of the hereditary type are chosen in which the relationship between the components of the strain tensor and the stress tensor is given based on the hypothesis of the deviators proportionality. The nonlinearity of the viscoelastic properties is given by the equations of Ratotnov's type. The method is based on the relations between the creep kernels under complex stress state and the creep kernels under one-dimensional stress state. The method verified experimentally for the problems of determination of creep deformations under combined loading applied to the thin-walled tubular elements made of polyethylene of high density.

Key words: nonlinear visco-elasticity, complex stressed state, longitudinal creep, shearing creep, volume creep.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Особливості деформування в'язкопружних середовищ найчастіше задаються за допомогою рівнянь спадкового типу [1-2]. Ці рівняння встановлюють залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і часовим інтегральним оператором, і містять ядра спадковості, набір функцій і коефіцієнтів, що мають бути визначені.

Однією з гіпотез, що використана при побудові визначальних рівнянь за умов складного напруженого стану є гіпотеза пропорційності девіаторів тензорів. В рамках цієї гіпотези в роботі [3] побудовано систему визначальних рівнянь для нелінійних в'язкопружних середовищ. В роботі [4] ядра спадковості за умов складного напруженого стану визначаються за ядрами повздовжньої і поперечної повзучості.

В даній роботі, в рамках гіпотези пропорційності девіаторів тензорів, ідентифікуються ядра спадковості за умов складного напруженого стану через ядра повздовжньої і зсувної повзучості.

1. Постановка задачі

В роботі розглядається деформування ізотропних нелінійно-в'язкопружних середовищ зі стабільними механіченими властивостями за умов складного напруженого стану із заданою програмою навантаження, так що

$$\sigma_{ij}(\tau), \quad \tau \in (0,t), \tag{1}$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; t – час спостереження; τ –час, що передує моменту спостереження. Процес навантаження (1) вважаємо простим, так що виконуються співвідношення

$$\sigma_{11} = \mu(t)\overline{\sigma}_{11},...,\tau_{12} = \mu(t)\overline{\sigma}_{12},...$$

Визначальні рівняння що задають залежність між компонентами тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ і компонентами тензора напружень $\sigma_{ij}(t)$ при повзучості запишемо у вигляді [3]

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \dfrac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_i(\sigma_i(t);t)}{\sigma_i(t)}\left(\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)\right); \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) = \sigma_i(t) + \lambda_i \displaystyle\int_0^t K_i(t-\tau)\sigma_i(\tau)d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \lambda_v \displaystyle\int_0^t K_v(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau, \end{cases}$$

(2)

де $\varepsilon_v(\cdot)$ і $\varepsilon_i(\cdot)$ – об'ємна деформація і інтенсивність тензора деформацій; $\sigma_0(t)$ і $\sigma_i(t)$ – перший інваріант і інтенсивність тензора напружень, δ_{ij} – дельта-функція Кронекера, $\varphi_i(\cdot)$ і $\varphi_v(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність скалярних властивостей; $K_i(\cdot)$, $K_v(\cdot)$, λ_i, λ_v – реологічні параметри.

Нелінійність в'язкопружних властивостей в рівнянні (2) задається функціями $\varphi_i(\cdot)$ і $\varphi_v(\cdot)$, які задовольняють гіпотезі єдиної діаграми короткотривалого деформування (рис. 1) в координатах „інтенсивність напружень σ_i - інтенсивність деформацій ε_i" і „середнє напруження σ_0 – об'ємна деформація ε_v".

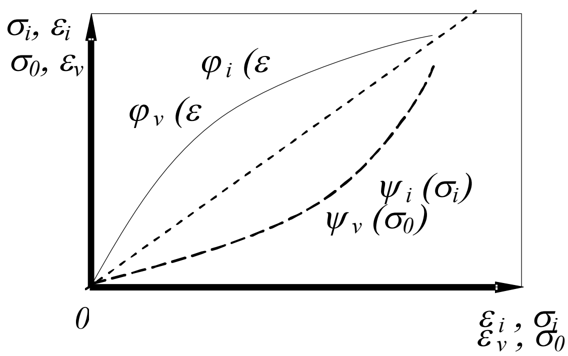

Рис. 1 – Графічне представлення функцій, що задають нелінійність в'язкопружних властивостей за умов складного напруженого стану

Вважається, що діаграми короткотривалого деформування інваріантні по відношенню до виду напруженого стану.

Функції, що виміряються в експерименті та задані дискретно, апроксимуються згладжуючими кубічними сплайнами

$$y(x) = y_i + \left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2k_i + k_{i+1})\right](x-x_i) + \frac{k_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{k_{i+1}-k_i}{6h_i}(x-x_i)^3; \quad x \in [x_i, x_{i+1}]; \; h_i = x_{i+1} - i = \overline{1, L-1}, \tag{3}$$

де k_i – коефіцієнти сплайна, які визначаються з умови неперервності першої похідної в точках x_i і деяких крайових умов на кінцях відрізка, що задають апроксимуючу функцію $y(x)$; x_i – табличні значення апроксимуючої функції.

Задача полягає у встановленні залежності між ядрами спадковості за умов складного напруженого стану визначаються та ядрами повздовжньої і зсувної повзучості та апробації отриманих залежностей між ядрами на задачах розрахунку деформацій повзучості та релаксації напружень.

2. Встановлення залежностей між ядрами за умов складного напруженого стану і одновимірного напруженого стану

Одновимірні визначальні рівняння, що задають нелінійні в'язкпружні властивості в повздовжньому і зсувному напрямах, запишемо у вигляді

$$\varphi_{11}\left(\varepsilon_{11}(t)\right)=\sigma_{11}(t)+\lambda_{11}\int_0^t K_{11}(t-\tau)\sigma_{11}(\tau)d\tau; \tag{4}$$

$$\varphi_{12}\left(\varepsilon_{12}(t)\right)=\sigma_{12}(t)+\lambda_{12}\int_0^t K_{12}(t-\tau)\sigma_{12}(\tau)d\tau.$$

Застосовуючи до обернення функцій $\varphi_{11}\left(\varepsilon_{11}(t)\right)$ і $\varphi_{12}\left(\varepsilon_{12}(t)\right)$ в (9) і до перших рівнянь систем (3) і (4) отримаємо співвідношення

$$\begin{cases}\varepsilon_{11}(t)=\psi_{11}(\sigma_{11}(t))+\lambda_{11}\int_0^t K_{11}(\mathrm{t}-\tau)\psi_{11}(\sigma_{11}(\tau))d\tau;\\ \varepsilon_{12}(t)=\psi_{12}(\sigma_{12}(t))+\lambda_{12}\int_0^t K_{12}(\mathrm{t}-\tau)\psi_{12}(\sigma_{12}(\tau))d\tau;\end{cases} \tag{5}$$

і відповідно співвідношення

$$\begin{cases}\varepsilon_i(t)=\psi_i(\sigma_i(t))+\lambda_i\int_0^t K_i(t-\tau)\psi_i(\sigma_i(\tau))d\tau;\\ \varepsilon_v(t)=\psi_v(\sigma_0(t))+\lambda_v\int_0^t K_v(t-\tau)\psi_v(\sigma_0(\tau))d\tau,\end{cases} \tag{6}$$

де $\sigma_{12}(\cdot)$ – дотичне напруження; $\varphi_{12}(\cdot)$ – функція, що задає нелінійність зсувної повзучості; $K_{12}(\cdot)$ – ядро зсувної повзучості; λ_{12} – реологічний параметр; $\psi_{12}\left(\sigma_{12}\right)$, – функція, що задає нелінійність в'язкопружних властивостей в зсувному напрямі.

Із систем спільного розв'язку (5) і (6) і враховуючи, що за умов одновісного розтягу і чистого кручення

$$\sigma_i(t)=\sigma_{11}(t);\ \varepsilon_i(t)=\frac{2}{3}\left(\varepsilon_{11}(t)-\varepsilon_{22}(t)\right);\ \sigma_0(t)=\frac{1}{3}\sigma_{11}(t);$$

$$\varepsilon_v(t)=\frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11}(t)+2\varepsilon_{22}(t)\right);\ \ \varepsilon_i=\frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon_{12};\ \ \sigma_i=\sqrt{3}\sigma_{12},$$

отримаємо залежності між ядрами інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ і ядрами повздовжньої $K_{11}(t)$ і зсувної $K_{21}(t)$ повзучості у вигляді

$$\lambda_i K_i(t)=\lambda_{12}K_{12}(t), \tag{7}$$

а також залежності між ядрами об'ємної повзучості $K_v(t)$ із ядрами повздовжньої $K_{11}(t)$ і зсувної $K_{12}(t)$ повзучості у вигляді

$$\lambda_v K_v(t)=\frac{3\lambda_{11}K_{11}(t)\psi_{11}\left(\sigma_{11}(\tau)\right)-2\sqrt{3}\lambda_{12}K_{12}(t)\psi_{12}\left(\frac{\sigma_{11}(\tau)}{\sqrt{3}}\right)}{3\psi_{11}\left(\sigma_{11}(t)\right)-2\sqrt{3}\psi_{12}\left(\frac{\sigma_{11}(t)}{\sqrt{3}}\right)} \tag{8}$$

звідки випливає, що ядро інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ співпадає з ядром зсувної повзучості $K_{12}(t)$.

3. Розрахунок деформацій повзучості за умов складного напруженого стану

В роботі в якості ядра спадковості обрано дробово-експоненційне ядро

$$K(t-\tau)=\frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n(t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma\left[(1+n)(1+\alpha)\right]}\ ; \tag{9}$$

де α і β – параметри ядер $(-1<\alpha<0;\ \ \beta>0)$; $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Для компонент тензора деформацій повзучості $\varepsilon_{ij}(t)$ із системи рівнянь (2) з врахуванням (9) отримаємо рівняння

$$\varepsilon_{ij}(t)=\frac{3}{2}\frac{1}{\sigma_i(t)}\psi_i\left[\sigma_i(t)+\lambda_i\int_0^t\frac{\left(-\beta_i\right)^n(t-\tau)^{(1+\alpha_i)n}}{\Gamma\left[(1+n)(1+\alpha_i)\right]}\sigma_i(\tau)d\tau\right] \tag{10}$$
$$\left[\sigma_{ij}(t)-\delta_{ij}\sigma_0(t)\right]+\frac{1}{3}\delta_{ij}\psi_v\left[\sigma_0(t)+\lambda_v\int_0^t\frac{\left(-\beta_v\right)^n(t-\tau)^{(1+\alpha_v)n}}{\Gamma\left[(1+n)(1+\alpha_v)\right]}\sigma_0(\tau)d\tau\right],$$

Розраховуються деформації повздовжньої, поперечної і зсувної повзучості тонкостінних трубчатих елементів із поліетилену ПЭВП за умов складного напруженого стану при постійних значеннях компонент тензора напружень. Для деформації повздовжньої повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ при $\sigma_{11}=const$ і $\tau_{21}=const$ із (15) отримаємо рівняння

$$\varepsilon_{11}(t)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}^2+3\tau_{21}^2}}\sum_{k=0}^{3}g_{k,j}\left\{\sqrt{\sigma_{11}^2+3\tau_{21}^2}\left[1+\lambda_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\beta_i\right)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma\left[1+(1+n)(1+\alpha_i)\right]}\right]\right\}^k+$$
$$+\frac{1}{3}\delta_{ij}\sum_{k=0}^{3}m_{k,j}\left\{\frac{1}{3}\sigma_{11}\left[1+\lambda_v\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\beta_v\right)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma\left[1+(1+n)(1+\alpha_v)\right]}\right]\right\}^k, \tag{11}$$

а для деформацій зсувної повзучості $\varepsilon_{12}(t)$ – рівняння

$$\varepsilon_{12}(t)=\frac{3}{2}\frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}^2+3\tau_{21}^2}}\sum_{k=0}^{3}g_{k,j}\times \tag{12}$$
$$\times\left\{\sqrt{\sigma_{11}^2+3\tau_{21}^2}\left[1+\lambda_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma\left[1+(1+n)(1+\alpha_i)\right]}\right]\right\}^k.$$

Параметри ядер спадковості, знайдені за викладеною вище методикою та методикою, викладеною в роботі 4 наведені в таблиці 1 для поліетилену ПЕВП/

Таблиця 1

Значення параметрів ядер поліетилена ПЭВП

$\alpha_{11=}$-0,168	$\beta_{11=}$5,404	$\lambda_{11=}$4,572
α_{12}-=0,206	$\beta_{12=}$4,675	$\lambda_{12=}$3,322
$\alpha_{i=}$ -0,206	β_i =4,675	λ_i =3,322
$\alpha_{v=}$ -0,209	β_v =3,927	$\lambda_{v=}$ 48,444

Результати розрахунків деформацій повздовжньої $\varepsilon_{11}(t)$ повзучості згідно (11), з використанням параметрів ядер з табл.1 (штрих-пунктирні лінії) співставленні на рис. 2 для поліетилену ПВП з експериментальними даними, за умов одночасної дії розтягу з крученням

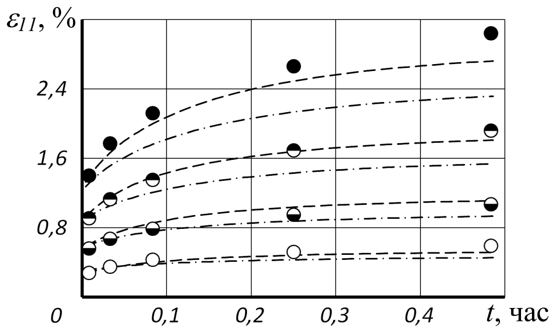

Рис.2 Результати розрахунків деформацій повздовжньої повзучості.

при напруженнях σ_{11} = 1,77, τ_{21} = 0,83 (○); σ_{11} = 3,54, τ_{21} = 1,66 (◒); σ_{11} = 5,31, τ_{21} = 2,49 (◓); σ_{11} = 7,08, τ_{21} = 3,32 (●) МПа. Штриховими лініями нанесено розрахунки виконані в роботі (4). Результати розрахунків деформацій зсувної $\varepsilon_{12}(t)$ повзучості за рівняннями (12), з використанням параметрів ядер з таблиці 1 (штрих-пунктирні лінії) співставленні на рис. 3 для поліетилену ПЭВП з експериментальними даними, за умов одночасної дії розтягу з крученням при напруженнях σ_{11} = 1,77, τ_{21}= 0,83 (○); σ_{11} = 3,54, τ_{21}= 1,66 (◒); σ_{11} = 5,31, τ_{21}= 2,49 (◓); σ_{11} = 7,08, τ_{21}= 3,32 (●) МПа.

Як видно з рисунків 2 і 3, за методикою, викладеною в статті [4] і за викладеною в даній статті методикою отримані практично однакові результати, але експеримент

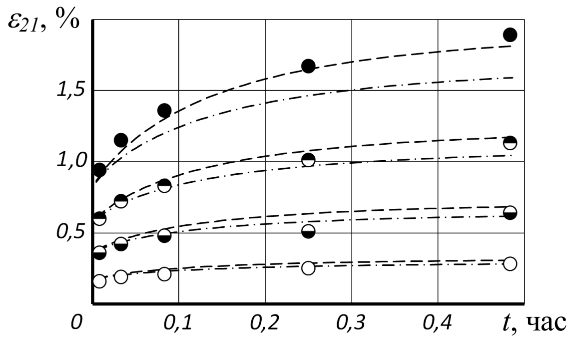

Рис.3 Результати розрахунків деформацій зсувної повзучості

на повздовжню повзучість більш поширений ніж на поперечну. В середньому, максимальна похибка розрахунків не перевищує 20%.

Список використаних джерел

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций.– Москва: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Кристенсен Р.М.* Введение в теорию вязкоупругости//Пер. с англ. под ред. Г.С.Шапиро. – Москва: Мир, 1974. – 340 с.
3. *Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С.* К задаче определения параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прик. механика. – 2013. – №5(51). – С. 26-35.
4. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В. К решению задач ползучести изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теор и прикл. механика.- 2014.- Вып 8 (54).- С. 45-56

References

1.RABOTNOV, U. N. (1966) *Polzuchest` elementov konstrukcii. Moskva: Nauka.*

2.KRISTENSEN, R.M. (1974). *Vvedenie v teoriu vyazkouprugosti*. Moskva: Mir.

3.GOLUB, V.P., KOBZAR, U.M. & RAGULINA, V.S. (2013) K zadache opredeleniya parametrov yader nasledstvennosri izotropnih nelineyno-vyazkouprugih materialov pri slognom napryagennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mehanika*. **5**(51). pp. 26-35.

4.GOLUB, V.P., KOBZAR, U.M. & FERNATI, P.V. (2014) K resheniu zadach polzuchesti izotropnih nelineyno-vyazkouprugih materialov pri slognom napryagennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mehanika*. **5**(51). pp. 26-35.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджен" (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 16.05.2019