КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Кафедра прикладної статистики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 124 Системний аналіз
на тему:

СУЧАСНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЮ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Виконала студентка 4-го курсу
Ковальчук Оксана Геннадіївна
______________ (підпис)

Науковий керівник:
асистент, кандидат фіз.-мат. наук
Макушенко Ігор Анатолійович
______________ (підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент ______________ (підпис)

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри прикладної статистики

«_05_»_червня_2023 р.,
протокол № _11_
Завідувач кафедри
І. В. Розора
______________ (підпис)

Київ – 2023

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи: 41 сторінка, 8 ілюстрацій, 25 джерел, 1 додаток

Ключові слова: СУЧАСНА ПОРТФЕЛЬНА ТЕОРІЯ, МОДЕЛЬ МАРКОВІЦА, ОПТИМІЗАЦІЯ ПОРТФЕЛЮ, ЕФЕКТИВНИЙ ПОРТФЕЛЬ, ПРИБУТКОВІСТЬ, РИЗИК, ІНВЕСТИЦІЇ, ГЕНЕТИЧНИЙ АЛГОРИТМ.

Об’єкт дослідження: сучасні методи оптимізації портфелю цінних паперів.

Предмет дослідження: модель Марковіца, генетичний алгоритм.

Мета роботи: оптимізація портфелю цінних паперів за допомогою сучасних методів, виявлення їх переваг та недоліків.

Результати роботи: на прикладі даних десятьох публічних компаній розглянуто застосування моделі Марковіца та генетичного алгоритму для пошуку ефективного портфелю цінних паперів. Виявлені недоліки моделі Марковіца та запропоновані можливі шляхи їх вирішення. В якості альтернативного методу розроблено генетичний алгоритм та порівняно його ефективність з моделлю Марковіца.

Рекомендації щодо використання результатів роботи: результати можуть бути використані для створення і оптимізації портфелів цінних паперів.

Сфера застосування: фінансова аналітика, портфельний менеджмент.

Перспективи розвитку: дослідження та розробка нових методів, які поєднують у собі переваги моделі Марковіца та генетичних алгоритмів. Наприклад, комбінація стохастичного програмування, машинного навчання та інтелектуального аналізу даних може привести до появи нових ефективних методів оптимізації портфелю. А також розвиток адаптивних стратегій оптимізації, які здатні швидко реагувати на зміни ринкових умов та коригувати портфель, може бути важливим напрямком розвитку.

ЗМІСТ

ВСТУП

Фондовий ринок або ринок цінних паперів — це шлях до інвестицій і ефективний спосіб заробітку для країни та громадян, що забезпечує залучення капіталу для розвитку компаній та економіки в цілому.

Дедалі більше й більше людей починають цікавитися інвестуванням, як способом збереження та примноження власних доходів з використанням цінних паперів, як надійного і зрозумілого інструменту досягнення мети.

Для бізнесу ж і держави це – чи ненайдієвіший спосіб оперативного залучення фінансового ресурсу на розвиток внутрішніх і зовнішніх інвестицій в реальний сектор економіки. Умова одна: бізнес має приносити прибуток. І самому бізнесу, і тим, хто підтримав його копійкою чи центом.

На початку 2021 року уряд України підписав меморандум про створення в Україні реального й повноцінного фондового ринку. Одним із ключових завдань Національної економічної стратегії до 2030 року було покращення інвестиційної привабливості країни. Підписантами документа були Європейський банк реконструкції та розвитку, Агентство США з міжнародного розвитку, Американська торговельна палата в Україні та інші міжнародні фінансові партнери.[1]

Для нормального функціонування фондового ринку потрібні три основні складові: інвестори, майданчики зі зручними інструментами, де вони можуть розмістити вкладення, і об’єкти для інвестування. А також низка умов, такі як стабільність самої економіки, перманентне її зростання, низька інфляція, прогнозованість курсу національної валюти, дієвість та прозорість судової системи, податкова реформа, прозора приватизація, зважена кредитна політика, розумна регуляція тощо.[1]

Повний запуск українського фондового ринку планувався на осінь 2023 року[2] , але на жаль, на даний момент це все ще залишається теорією. Після початку повномасштабного вторгнення українська економіка перейшла зі стану розвитку у стан виживання і відповідно призупинила будь-які дії щодо створення власного фондового ринку.

Основними інструментами залишаються облігації внутрішньої державної позики (військові облігації), які приносять гарантований державою прибуток. Наскільки вигідною є дана пропозиція судити важко, але як мінімум, таким чином громадяни своїми коштами допомагають у забезпечуванні державних потреб у період воєнного стану.

У 2022 році весь світ стикнувся із шаленою інфляцію через російське вторгнення в Україну, коли глобальна економіка ще не встигла оговтатися після тривалої пандемії. Глобальний рівень інфляції становив приблизно 9%, що навіть для розвинених країн є найвищим показником за останні 40-50 років.[3]

По всіх регіонах у 2022 році більш ніж половину інфляції в середньому становили продукти харчування та паливо. Тенденція на зростання цін спостерігалася ще з початку 2020 року, коли пандемія COVID-19 серйозно позначилася на вартості багатьох споживчих товарів. Однак, вторгнення Росії в Україну у лютому 2022 року призвело до ще більш серйозного та руйнівного впливу на економіку. Вартість нафти зросла на третину, оскільки західні країни ввели санкції проти країни агресорки, яка була основним постачальником нафти. Ціни на продовольство також різко підвищились через витрати на добрива та транспортування, а також через блокаду Росією експорту зерна з України, яка є основним виробником пшениці.[3]

Оскільки купівельна спроможність наших грошей повільно падає з кожним днем, єдиним способом усунути цей ефект є інвестувати свої гроші кудись для їх збереження та збільшення прибутку з часом. Цінні папери не просто захищають гроші, не даючи їм здешевитись, а й дозволяють суттєво обігнати підвищення рівня цін та «вийти в плюс».

Задача вибору оптимального портфеля є однією із класичних задач і була вперше поставлена і розв’язана Гаррі Марковіцем у 1952 році. Підхід, який був ним запропонований відомий як підхід «прибутковість-ризик» та базується на очікуваній прибутковості і ризику портфеля. Основна ідея полягає в тому, що ризик слід розглядати щодо портфеля в цілому, а не щодо окремо взятих цінних паперів. Але на жаль, даний підхід не враховує, що з практичної точки зору інвесторам доводиться вводити ряд обмежень і припущень у свої моделі. Такі обмеження можуть бути сформульовані в нелінійній змішаній цілочисельній задачі програмування, яка є набагато складнішою ніж вихідна модель.

У своїй роботі я хочу розібрати застосування теорії Марковіца та її узагальнення на реальному ринку акцій. А також як насправді можна адресувати ряд недоліків цієї теорії і як можна зробити цю теорію більш застосовною до реальності.

Натомість ітераційні методи, зокрема генетичний алгоритм є надійним методом вирішення змішаних нелінійних і цілочисельних задач програмування. Перевагою даного алгоритму перед іншими методами точного пошуку є його гнучкість і здатність легко отримати розв’язок там, де детерміновані методи не працюють. Застосування генетичного алгоритму у запропонованих задачах оптимізації портфеля привабливе й тим, що воно дозволяє мати справу з класом цільових функцій, які важко вирішити іншими точними алгоритмами.

Одним з результатів моєї роботи є продемонстрована ефективність використання генетичного алгоритму для вирішення проблем оптимізації портфеля при накладанні обмеження на ризик. Виконано програмні реалізації для автоматизації процесу порівняння та пошуку оптимального портфеля за допомогою ГА. Аналізуються реальні дані компаній з американського біржового ринку. Такий вибір обумовлений наявністю у вільному доступі детальної інформації щодо вартості акцій за значний проміжок часу. Важливість роботи полягає у можливості наочно проілюструвати і проаналізувати роботу теоретичних методів на реальних даних. Також програмна реалізація дозволяє розрахувати оптимальне значення портфеля на майбутній період.

1. СУЧАСНА ПОРТФЕЛЬНА ТЕОРІЯ

1.1 Вибір найкращого портфеля та диверсифікація

Будь-яка економічна проблема зводиться до задачі найкращого розподілу ресурсів. Будь-який економічний суб'єкт – окрема людина, підприємство, чи уряд, стикається з питанням – як розподілити наявні в його розпорядженні ресурси – матеріальні, фінансові, людські тощо. Економічна теорія виходить з того, що будь-який суб'єкт, приймаючи рішення, прагне найбільшої вигоди, тобто, діє раціонально. Такий самий принцип лежить в основі рішень про найкраще інвестування.

Що краще, скажімо, для даного інвестора: тримати свої заощадження під подушкою, розмістити на банківському депозиті, дати у позику державі, купити акції підприємства А, а може краще В? Відповідь на це питання не очевидна. Кожне з можливих рішень має безліч вимірів – вигоди від різних способів інвестицій, час, на який інвестор розлучається зі своїми коштами і, нарешті, ризик, пов'язаний із тим чи іншим рішенням.

Розглянемо варіанти рішення інвестора з капіталом W, який задався питанням – яким чином використовувати цей капітал? Вважатимемо, що вибір між поточним споживанням та інвестиціями вже зроблено, відповідно, нехай W – це вартість, яка не буде спожита в поточному періоді. Припустимо для простоти, що інвестор розглядає фіксований плановий горизонт – кошти W йому необхідно розподілити на деякий певний період. У нашого інвестора існує n можливостей використання коштів, кожна з яких принесе відповідно $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ доларів прибутку у розрахунку на 1 долар вкладень. Найбільш істотною проблемою для ухвалення рішення є те, що величини ξ_i у загальному випадку випадкові, тобто якою саме буде прибутковість, наперед невідомо.

Головним припущенням, яке прийняв Гаррі Марковіц, аналізуючи цю задачу, було те, що для інвестора, що оцінює альтернативні рішення, важливими є лише два параметри кожного з них: очікувана прибутковість інвестицій $\mu_i = E\xi_i$ (E – математичне сподівання) та стандартне відхилення прибутковості як показник, що характеризує ризик прийнятого рішення $\sigma_i = \sqrt{D\xi_i}$ (D – дисперсія).[4]

Іншим, не менш важливим припущенням, є те, що інвестор не обов'язково має вибрати якесь одне рішення, він може обрати будь-яку комбінацію можливих інвестицій, розподіляючи свій капітал на різні напрямки вкладень. Виявляється, що проблема вибору у цьому випадку суттєво спрощується. Нехай x_i $(i = 1, \dots, n)$ – частка від загального обсягу капіталу, інвестованого в i -й актив. Сформовану таким чином комбінацію інвестицій ми називатимемо портфелем. Інвестору необхідно вибрати портфель, очікувана прибутковість μ_p та стандартне відхилення σ_p якого були б для нього найкращими.[5]

1.2 Середня прибутковість портфеля

Насамперед, необхідно встановити середню (очікувану) прибутковість портфеля. Прибутковість портфеля (ξ_p) визначають як приріст капіталу у розрахунку на одиницю вкладень, що забезпечується цим портфелем до моменту часу, який розглядається в якості планового горизонту

$$\xi_p = \frac{W_p - W}{W},$$

де W – поточний розмір капіталу, W_E – розмір капіталу на кінець періоду. Прибутковість портфеля можна розрахувати як зважену за обсягами інвестицій прибутковість кожного активу, що входить у портфель.[5]

$$\xi_p = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$$

Цей вираз можна подати у векторній формі $\xi_p = \xi^T x$, де

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Очікувана прибутковість портфелю μ_p визначається за формулою математичного сподівання суми випадкових величин:

$$\mu_p = E\xi_p = E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n] = E[\xi_1 x_1] + E[\xi_2 x_2] + \cdots + E[\xi_n x_n]$$

Виносячи детерміновані величини $x_i\ (i = 1, \dots, n)$ за знак математичного сподівання, отримаємо

$$\mu_p = E\xi_p = x_1 E\xi_1 + x_2 E\xi_2 + \cdots + x_n E\xi_n = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \cdots + x_n\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mu_i$$

або у векторній формі $\mu_p = x^T \mu$, де $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$.

Таким чином, очікувана прибутковість інвестиційного портфеля – це середньозважена за частками інвестицій очікувана прибутковість кожного з активів, що входять до портфелю.

1.3 Стандартне відхилення портфеля

Дисперсія прибутковості портфеля розраховується як дисперсія суми випадкових величин. Якщо η та ζ – випадкові величини, тоді

$$\begin{aligned} D[\eta + \zeta] &= E(\eta + \zeta)^2 - (E[\eta + \zeta])^2 \\ &= E\eta^2 - (E\eta)^2 + E\zeta^2 - (E\zeta)^2 + 2(E[\eta\zeta] - E\eta E\zeta) \\ &= D\eta + D\zeta + 2\,\mathrm{cov}(\eta, \zeta)\,, \end{aligned}$$

де $\operatorname{cov}(\eta, \zeta)$ – коефіцієнт коваріації випадкових величин η та ζ. Таким чином для портфеля

$$
\begin{aligned}
D\xi_p &= D[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n] \\
&= \sum_{i=1}^{n} D[\xi_i x_i] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \operatorname{cov}(x_i \xi_i, x_j \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 D\xi_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)
\end{aligned}
$$

або, позначивши $\sigma_p^2 = D\xi_p, \sigma_i^2 = D\xi_i, \sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2, & i = j \\ \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j), & i \neq j \end{cases}$,

отримаєм

$$
D\xi_p = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} .
$$

Стандартне відхилення портфеля σ_p, таким чином, дорівнюватиме

$$
\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}} .
$$

1.4 Оцінка середньої прибутковості та стандартного відхилення на основі історичних даних

Одним із методів оцінки середньої прибутковості та стандартного відхилення фінансового інструменту є використання історичних даних.[6] Необхідно одразу відзначити недоліки цього підходу. По-перше, історичний метод оцінює параметри фінансового активу у минулому (кажуть, що результатом у цьому випадку є величини ex post – після спостереження), тоді як інвестора, який приймає рішення, цікавлять майбутні величини (ex ante). [5] По-друге, для розрахунків необхідно мати ряд спостережень над фактичною величиною прибутковості за ряд періодів – а ця інформація часто може або зовсім не існувати (якщо йдеться про цінний папір, що знову випускається), або бути важкодоступною, або містити значні спотворення. Тим не менш, якщо існує необхідність оцінки середньої прибутковості та ризику деякого цінного паперу, і неможливе застосування більш точних методів, історичний підхід є корисним.

Позначимо через r_t прибутковість деякого цінного паперу, що спостерігалася в періоді t. Усього є T спостережень $(t = 1, \ldots, T)$. Тоді статистична оцінка для показника середньої прибутковості дорівнюватиме

$$r = \sum_{t=1}^{T} r_t \Big/ T \,,$$

оцінка дисперсії

$$\sigma_r^2 = \sum_{t=1}^{T} (r_t - r)^2 \Big/ (T - 1) \,.$$

Для розрахунку статистичної оцінки коефіцієнта коваріації двох випадкових величин використовується формула

$$\sigma_{rs} = \sum_{t=1}^{T} (r_t - r)(s_t - s) \Big/ (T - 1) \,,$$

де r_t, s_t – спостереження, r, s – середні величини.

Необхідно ще раз підкреслити, що показники, що розраховуються за даними формулами є лише статистичними оцінками історичних значень середньої прибутковості, дисперсії та коваріації. Тим паче не можна вважати, що ці оцінки скільки-небудь точно прогнозують майбутні значення показників, що розглядаються. Але в той же час, на практиці, коли немає можливості вимірювання більш точної оцінки показників прибутковості та ризику цінних паперів, часто використовують статистичні методи.

1.5 Ефект диверсифікації

Якщо σ_{12} – коефіцієнт коваріації показників прибутковості деяких двох цінних паперів, то $\sigma_{12} = \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$, де σ_1, σ_2 – стандартні відхилення, ρ_{12} – коефіцієнт кореляції випадкових величин прибутковості 1-го та 2-го активів. Отже, формулу для розрахунку стандартного відхилення портфеля, що складається з 2-х активів, можна записати так:

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}\,.$$

Таким чином, загальний ризик портфеля залежить від величини ризику активів, що входять у портфель σ_i, частки кожного з активів у портфелі x_i та коефіцієнта, що характеризує статистичний взаємозв'язок між величинами прибутковості активів, що входять до портфеля ρ_{12}.

Ефект диверсифікації або розподілу інвестицій між різними напрямками, полягає у тому, що, вибираючи обсяги інвестицій у різні активи, інвестор може регулювати ризикованість портфеля, тобто вибирати таку величину з можливих, що відповідає його вподобанням. Можливості зниження ризику портфеля залежать від тісноти статистичного взаємозв'язку між прибутковістю різних інвестиційних рішень (у нашому прикладі – величини ρ_{12}). Нагадаємо, що величина коефіцієнта кореляції двох випадкових величин може змінюватися в межах від -1 до 1. Величина $\rho_{12} = -1$ означає досконалий негативний взаємозв'язок, тобто якщо прибутковість одного активу збільшується, прибутковість другого – пропорційно знижується. У випадку $\rho_{12} = 1$ обидва активи характеризуються досконалим позитивним взаємозв'язком: будь-яке збільшення прибутковості одного з них призводить до пропорційного збільшення прибутковості другого. Якщо ж

$\rho_{12} = 0$ – прибутковість одного активу ніяк не пов'язана з прибутковістю другого.

1.6. Портфель мінімального ризику

Для більшого розуміння розглянемо портфель з двома активами. Нехай метою інвестора є вибір портфеля з мінімальним можливим ризиком, тобто необхідно вибрати x_1 і x_2 таким чином, щоб величина ризику портфеля була б найменшою. Це завдання можна просто вирішити аналітично. Насамперед, зауважимо, що для портфеля з 2-х активів завжди має виконуватися бюджетне обмеження:

$x_1 + x_2 = 1$ – сума часток дорівнює одиниці.

Значення x_2 можна виразити через x_1: $x_2 = 1 - x_1$.

Позначимо $x = x_1$ та $1 - x = x_2$.

Задачу вибору портфеля з найменшим ризиком можна записати як

$$\min_x \left\{ \sqrt{x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \right\}$$

Запишемо умову першого порядку для цієї задачі (візьмемо похідну по x і прирівняємо її до нуля)

$$-\frac{2x\sigma_1^2 + 2(1-x)\sigma_2^2 + 2(1-2x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{2\sqrt{x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}} = 0$$

звідки, за умови, що знаменник не дорівнює нулю, отримаємо

$$x^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}.$$

Ця формула дає можливість визначити портфель, ризик якого є мінімальним. Розглянемо деякі окремі випадки:

1. Нехай $\rho_{12} = -1$, тоді

$$x^* = \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$1 - x^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

В цьому випадку ризик портфеля дорівнює нулю

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2 \sigma_2^2 - 2\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma_1\sigma_2} = 0.$$

Тобто, якщо прибутковість першого активу знизиться, для портфеля це буде повністю компенсовано зростанням прибутковості другого активу.

2. У випадку, коли $\rho_{12} = 0$, тобто якийсь взаємозв'язок між прибутковістю першого та другого активу відсутній, портфель з найменшим ризиком вибирається так:

$$x^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \qquad 1 - x^* = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Стандартне відхилення такого портфеля буде рівним. Якщо $\sigma_1 < 1$ та $\sigma_2 < 1$, ризик портфеля буде меншим, ніж ризик кожного з окремо взятих активів.

3. Якщо $\rho_{12} = 1$, оптимальний портфель обирається наступним чином:

$$x^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}, \qquad 1 - x^* = \frac{-\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

Ризик такого портфелю також дорівнюватиме нулю:

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{-\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}\right)^2 \sigma_2^2 + 2\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}\frac{(-\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1}\sigma_1\sigma_2} = 0,$$

але існує важлива відмінність від випадку, коли $\rho_{12} = -1$: при досконалій негативній кореляції оптимальні обсяги інвестицій у кожен із активів були додатніми. Але в цьому випадку або $x^* < 0$, або $1 - x^* < 0$ (причому, якщо $x^* < 0$, то $1 - x^* > 1$ і навпаки). Від'ємний обсяг інвестицій означає короткий продаж (short selling) – коли продається актив, взятий у борг із зобов'язанням подальшого повернення. Отже, у разі позитивної кореляції для того, щоб отримати портфель з мінімальним ризиком, необхідно коротко продати один з активів і інвестувати всі наявні та виручені за рахунок короткого продажу кошти в другий актив.

1.7 Хеджування

Отримані вище результати дозволяють зробити дуже важливий висновок: чим більший ступінь статистичного взаємозв'язку між прибутковістю двох активів, тим більше можливостей зниження ризику шляхом комбінації інвестицій в ці активи (формування портфеля). Іншими словами тим ефективніша диверсифікація, що застосовується з метою зниження ризику. Цей факт є основою стратегії хеджування.

Хеджування являє собою стратегію зниження ризику[7], за якої інвестор, для того, щоб убезпечити себе від можливих втрат, пов'язаних з інвестуванням у певний актив, одночасно інвестує в інший актив, дохідність якого негативно корелюється з прибутковістю першого. Як приклад розглянемо те саме завдання вибору портфеля, але у дещо зміненому вигляді.

Нехай інвестор має одну одиницю деякого активу, яка принесе йому ζ одиниць чистого прибутку протягом планового горизонту. Позначимо через x обсяг інвестицій у цей актив: $x = 1$. Прибутковість ζ є випадковою величиною. Припустимо, що вона може бути як додатньою, так і від’ємною. Нехай інвестор бажає убезпечити себе від ризику втрати вартості свого активу – тих випадків, коли ζ виявиться від’ємною. Для цього він інвестує кошти в інший актив, прибутковість якого також випадкова, але пов'язана негативним статистичним взаємозв'язком з прибутковістю першого активу. Позначимо через h обсяг інвестицій у другий актив. Сумарна очікувана прибутковість інвестицій (портфеля) становитиме:

$$\mu_p = E\zeta \times 1 + E\eta \times h = \mu_\zeta + h\mu_\eta.$$

Ризик портфеля дорівнюватиме $\sigma_p = \sqrt{\sigma_\zeta^2 + h^2\sigma_\eta^2 + 2h\mathrm{cov}(\zeta, \eta)}$.

Ризик буде мінімальним, якщо виходячи з умов першого порядку мінімуму функції виконується умова:

$2h\sigma_\eta^2 + 2\mathrm{cov}(\zeta, \eta) = 0$ або

$h = -\frac{\mathrm{cov}(\zeta,\eta)}{\sigma_\eta^2} = -\frac{\sigma_\zeta\sigma_\eta\rho_{\zeta\eta}}{\sigma_\eta^2} = -\rho_{\zeta\eta}\frac{\sigma_\zeta}{\sigma_\eta}$, де

$h -$ коефіцієнт хеджування з мінімальним ризиком,

$\rho_{\zeta\eta} -$ коефіцієнт кореляції випадкових величин ζ та η.

Зауважимо, що якщо $\rho_{\zeta\eta} = -1$, тоді $h = 1$, тобто хеджування забезпечуватиме мінімальний ризик, якщо в портфелі кожної одиниці коштів, інвестованих у перший актив, відповідатиме рівно одна одиниця інвестицій в актив, що використовується для хеджування. Хеджування в пропорції «один до одного» називають ще «наївним хеджем», оскільки коефіцієнт хеджування з мінімальним ризиком дорівнює одиниці лише у разі абсолютного негативного взаємозв'язку між прибутковістю двох активів.

2. МОДЕЛЬ МАРКОВІЦА

Модель поведінки інвестора, згідно з якою інвестиції оцінюються виключно за двома параметрами – очікуваною прибутковістю та ризиком, що вимірюється як величина стандартного відхилення прибутковості, дозволяє сформулювати єдине правило формування портфеля, якому слідують всі без винятку інвестори: незалежно від індивідуальних вподобань, всі інвестори прагнуть сформувати ефективний портфель – такий, що забезпечує мінімальний ступінь ризику для обраного рівня прибутку, або, що те саме, максимальний очікуваний прибуток при заданому ступені ризику. Цей підхід, і сама задача вибору ефективного портфеля носить назву моделі Марковіца.

Гаррі Марковіц написав дуже впливову статтю у 1952 році про ризики, прибутковість та взаємозалежність інструментів інвестування. Її основна ідея полягала в тому, що ризик слід розглядати щодо портфеля загалом, а не щодо окремо взятих цінних паперів. Стаття стала відправною точкою, яка започаткувала сучасну портфельну теорію. За це Марковіц отримав Нобелівську премію з економіки 1990 року. Також його теорія стала фундаментом для наступних моделей, наприклад для моделі CAPM (Capital Asset Pricing Model [8]) та основою для багатьох евристик сучасного інвестиційного менеджменту.

2.1 Побудова моделі Марковіца способом Мертона

До цього моменту задля більшого розуміння самої теорії Марковіца розглядалися досить прості і нереалістичні випадки, де портфель складався лише з двох активів. Розглянемо аналіз більш реальної ситуації – коли інвестор має можливість вибирати не з двох, а з набагато більшої кількості активів, кожен з яких характеризується своїми показниками прибутковості та ризику. Тепер інвестор може вибирати будь-який актив (і у будь-якій кількості) для включення до свого портфеля.

Найбільш узагальнену репрезентацію теорії Марковіца мовою математики було запропоновано відомим фінансистом Робертом Мертоном (1973) [9]. Він сформулював портфельну теорію мовою лінійної алгебри та базового матаналізу. Розглянемо, що потрібно в якості вхідних даних, для того, щоб застосовувати цю модель.

Для початку потрібно визначити так званий інвестиційний всесвіт (investible universe) з n акцій, де n – кількість акцій, в які інвестор може теоретично вкладати гроші. Візьмемо 10 акцій великих відомих технологічних компаній із різних секторів, $n = 10$. Для того, щоб почати моделювати, потрібно визначити:

e – вектор-рядок из n одиниць

r – вектор-рядок из n очікуваних прибутковостей (очікувані річні прибутковості кожної з акції у нашому всесвіті)

C – матриця n х n коваріацій (по діагоналі – дисперсії)

Далі потрібно модифікувати вхідні дані, щоб було простіше проводити з ними маніпуляції та виводити які портфелі будуть найбільш оптимальними. Необхідно знайти такі величини:

C^{-1} – матриця, обернена коваріаційній

$h = eC^{-1}$ – вектор-рядок, що відповідає за ризик

$g = rC^{-1}$ – вектор-рядок, що відповідає за прибутковість

Далі ми зможемо задати всі властивості інвестиційного всесвіту за допомогою чотирьох констант – параметрів, що повністю характеризують «всесвіт». Знаючи їх, можна визначити, що відбувається на ринку і який є взаємозв’язок між ризиком та прибутковістю в оптимальних портфелях.

$$\alpha = he^T\,, \quad \beta = ge^T\,, \quad \gamma = gr^T\,, \quad \Delta = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma}$$

Насправді ключове завдання полягає в тому, як визначити, в яких пропорціях варто інвестору вкладати свій капітал у ті чи інші акції, щоб досягати найбільшої прибутковості при заданому рівні ризику або найменшого ризику при заданому рівні прибутковості. Портфель, що забезпечує дані умови, називають ефективним. Якщо в інвестора є певна кількість акцій, навіть 10, дуже нетривіальною є задача визначити скільки відсотків його заощаджень вкласти, наприклад, у NVIDIA або скільки відсотків вкласти в Microsoft.

Очевидно, якщо існує безліч альтернатив для інвестування (безліч активів), то існує і безліч ефективних портфелів. Множину ефективних портфелів називають границею ефективних портфелів або фронтир (EFP – efficient portfolio frontier). За допомогою констант $\alpha, \beta, \gamma, \Delta$ можна задати функціональну залежність між ризиком і прибутковістю ефективних портфелів. Тобто ми можемо вибрати лише ті портфелі, які дають найкращі значення із можливих, та на які інвесторам варто звернути увагу.

Границя (фронтир) ефективних портфелів (EPF) задається функцією:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha R^2 - 2\beta R + \gamma}{\Delta}}$$

Важливо те, що тут є однозначний функціональний взаємозв’язок і відразу зрозуміло, чому модель Марковіца така впливова. Вона дозволяє в загальному вигляді вивести цей взаємозв’язок, з тисяч або десятків тисяч різних акцій, який є дуже наочним і корисним. Виходячи з констант $\alpha, \beta, \gamma, \Delta$ і з цієї взаємозалежності можна відразу вивести ряд важливих портфелів, які далі застосовуються в аналізі дуже широко.

Портфель мінімального ризику (MVP) – це початкова точка границі ефективних портфелів, як зазначалося раніше, це той портфель, який дає найменший ризик з усіх можливих комбінацій акцій. Також можна розрахувати його прибутковість та ризик:

$$MVP = \frac{h}{\alpha}\ , \qquad R_{MVP} = \frac{\beta}{\alpha}\ , \qquad \sigma_{MVP} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Не менш важливим є так званий «дотичний» або ринковий портфель (MKT). Дуже важливу функцію виконує портфель, пряма до якого є дотичною до границі ефективних портфелів, якщо вона виходить з точки безризикової прибутковості. Це дозволяє перевести задачу в іншу площину і досліджувати випадок, коли в інвестора є і ризикові активи і безризикові.

«Дотичний» (ринковий портфель):

$$R_{MKT} = \frac{\gamma - \beta RF}{\beta - \alpha RF}$$

Треба зазначити, що за допомогою констант, що характеризують інвестиційний «всесвіт», ми можемо точно зрозуміти, яка буде прибутковість у дотичного портфеля і відразу провести цю саму дотичну та зрозуміти якою лінією характеризується ринок капіталів.

Нахил лінії ринку капіталів (CML) та функція взаємозалежності прибутковості та ризику за наявності безризикового активу:

$$R = RF + k\sigma\ , \qquad k = \frac{\sqrt{\Delta(\alpha R_{MKT}^2 - 2\beta R_{MKT} + \gamma)}}{\alpha R_{MKT} - \beta}$$

Тут насправді вже можна зрозуміти, чому ця модель настільки популярна, незважаючи на всі недоліки, які в ній є: вона дозволяє стисло сформулювати ряд важливих евристик, які потім можна застосовувати фінансово на практиці, але наскільки добре розглянемо далі.

Наступним розглянемо виведення оптимального портфеля для інвестора. Нехай існує деяка множина ефективних портфелів (фронтир), які можуть бути оптимальними теоретично для будь-якого інвестора, але якщо ми і є цим інвестором, і в нас є деякі вподобання щодо співвідношення ризику та прибутковості, тоді який з цих портфелів буде найкращим для нас? Для цього є ще одне, так би мовити, уточнення теорії Марковіца, яке запропонували Ерроу-Пратт [10] незалежно один від одного, що виводить деяку функцію корисності інвестора, яка характеризується його ступенем несхильності до ризику.

Оптимальний портфель при коефіцієнті неприйняття ризику θ: (функція корисності Ерроу-Пратта)

$$U = R - \frac{\theta}{2}\sigma^2$$

Чим вище коефіцієнт неприйняття ризику, тим менше схильний до ризику деякий інвестор.

За допомогою введення двох додаткових параметрів λ та μ, заснованих на необхідній прибутковості та на основі констант, які характеризують інвестиційний «всесвіт», можна вивести оптимальний портфель P^*.

Введемо параметри λ та μ:

$$\lambda = \frac{\gamma - \beta R}{\Delta}, \qquad \mu = \frac{\alpha R - \beta}{\Delta}$$

Тоді оптимальний портфель і його прибутковість:

$$P^* = \lambda h + \mu g, \qquad R^* = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\Delta}{\alpha\theta}$$

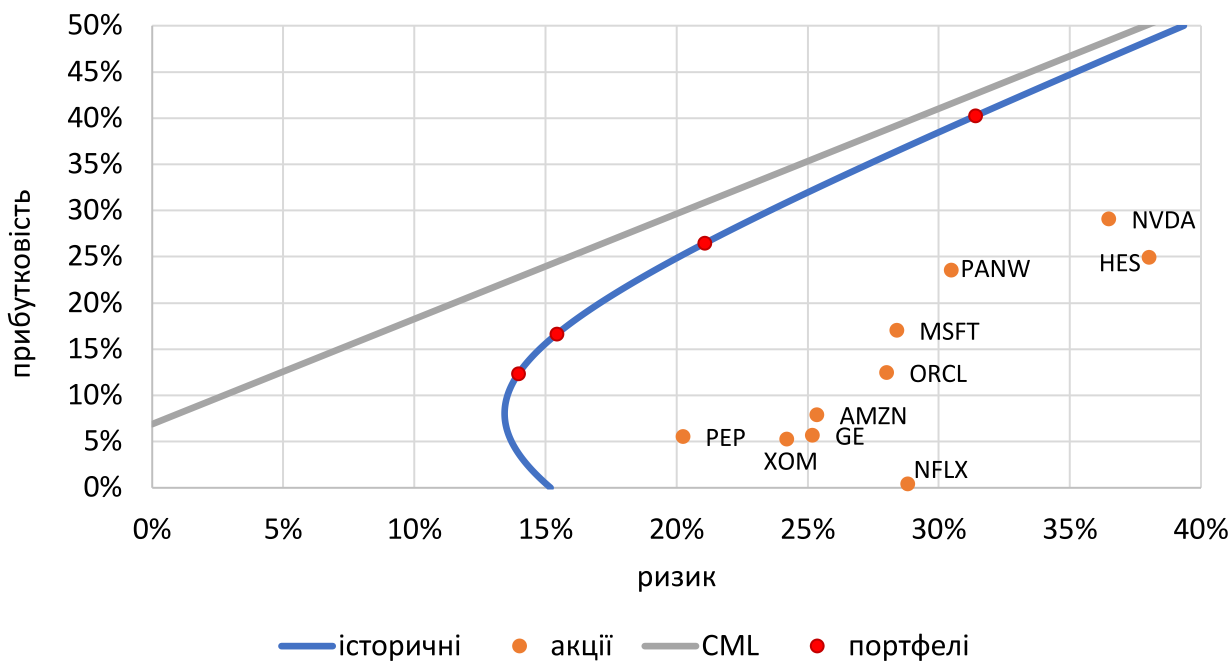
А також на основі констант та коефіцієнта неприйняття ризику розрахувати прибутковість оптимального портфеля, тобто як інвестору розподілити заощадження між різними активами і в яких пропорціях досягти цього оптимуму.

2.2 Графічне представлення моделі Марковіца на реальному ринку акцій

Виходить, що можна вирішити цілу низку задач за допомогою досить простих побудов з лінійної алгебри та матаналізу. Але на основі яких припущень робляться всі ці побудови? Задля кращого розуміння питання, випадковим чином оберемо акції десятьох американських публічних компаній з різних галузей: NVIDIA Corporation (NVDA)[11], Oracle Corporation (ORCL)[12], PepsiCo Inc. (PEP)[13], General Electric Company (GE)[14], Hess Corporation (HES)[15], Microsoft Corporation (MSFT)[16], Exxon Mobil Corporation (XOM)[17], Palo Alto Networks, Inc. (PANW)[18], Amazon.com Inc. (AMZN)[19], Netflix, Inc. (NFLX)[20]. Історично акції приносять найвищий прибуток з усіх фінансових інструментів. Акції завжди випереджають і банківські вклади, і облігації, і цінні метали, навіть золото. Звичайно, вони є більш ризикованим інструмент, але все ж таки прибуток, який вони можуть принести, є вагомою відповіддю на питання чому потрібно інвестувати саме в ці активи.

В своїй роботі для графічного представлення моделі Марковіца я використовуватиму репрезентацію Мертона, для побудови якої я взяла дані десятьох вище зазначених компаній за останні 5 років по дням з веб-сайту Yahoo Finance. Усі розрахунки і побудова графіків відбувалися в MS Excel.

На графіку зображені акції, які характеризуються деяким рівнем ризику та деяким рівнем прибутковості. За допомогою комбінування цих акцій, на основі історичних даних ми можемо вивести границю ефективних портфелів або фронтир (синя крива), яка дозволяє нам досягти кращого співвідношення ризику і прибутковості, ніж індивідуальні акції, за рахунок процесу диверсифікації.



Наприклад, якщо інвестор вкладає в портфель, який знаходиться в точці на границі ефективних портфелів то він може, наприклад, досягти більш високої прибутковості та нижчого ризику, ніж, наприклад, акції Apple або Amazon окремо взяті. Тобто комбінація дозволяє покращити прибутковість і ризики портфелів, тому диверсифікація та вкладання у різні активи є таким важливим аспектом. Червоними точками на фронтирі позначені оптимальні портфелі для різних інвесторів. Якщо інвестор дуже не любить ризик, то він вкладає свій капітал в портфель, який знаходиться дуже близько до портфеля мінімального ризику (початок вигину дуги). Якщо ж інвестор схильний до ризиків, то він може обрати інші портфелі, які хоч і мають вищий ризик, але при тому мають і суттєво більшу прибутковість.

І тут ми бачимо першу проблему: інвестори, що дуже схильні до ризику, тобто у яких коефіцієнт неприйняття ризику θ прямує до нуля, згідно графічного представлення моделі отримуватимуть нескінченну прибутковість та ризик. За рахунок чого це досягається, якщо акції окремих компаній мають скінченну прибутковість, розглянемо далі.

Варто зауважити, що крива або продовження кривої, що знаходиться нижче портфеля мінімального ризику, не є оптимальною та ефективною. Але це продовження все одно зазвичай представляють на графіках для розуміння того, як саме обмежена множина можливих портфелів, у які можна вкладати гроші. Границі ефективних портфелів виступають так званим «кордоном» між доступним та недоступним, між можливим та бажаним. Теорія стверджує, що портфелі, які лежать за фронтиром (що на графіку зображені лівіше і вище), вони неможливі. Як би ми не намагалися, ми не можемо досягти такого співвідношення очікуваної прибутковості та ризику. Останнє, це сіра лінія ринку капіталів, яка виходить з безризикової ставки (у США на 2023 рік вона складає 6.89%) і має деякий нахил, щоб мати точку дотику з границею ефективних портфелів. Чому точка дотику буде десь дуже далеко, ми розглянемо, коли говоритимемо про недоліки моделі.

2.3 Припущення моделі Марковіца

Модель Марковіца має кілька явних припущень:

1. Для того, щоб вивести границю ефективних портфелів і деякі маніпуляції з нею, нам треба припустити, що інвестор не схильний до ризику, тобто θ істотно більша за нуль.

2. Прибутковість можна однозначно описати середнім та стандартним відхиленням для повного розуміння, як вона розподілена.

3. Ми можемо оцінити очікувані прибутковості та очікуваний ризик, вони відомі і досить стійкі.

Тобто якщо портфель створюється на основі історичних даних, інвестор може бути впевнений, що вони не сильно зміняться в майбутньому.

4. Необмежене відкриття коротких позицій.

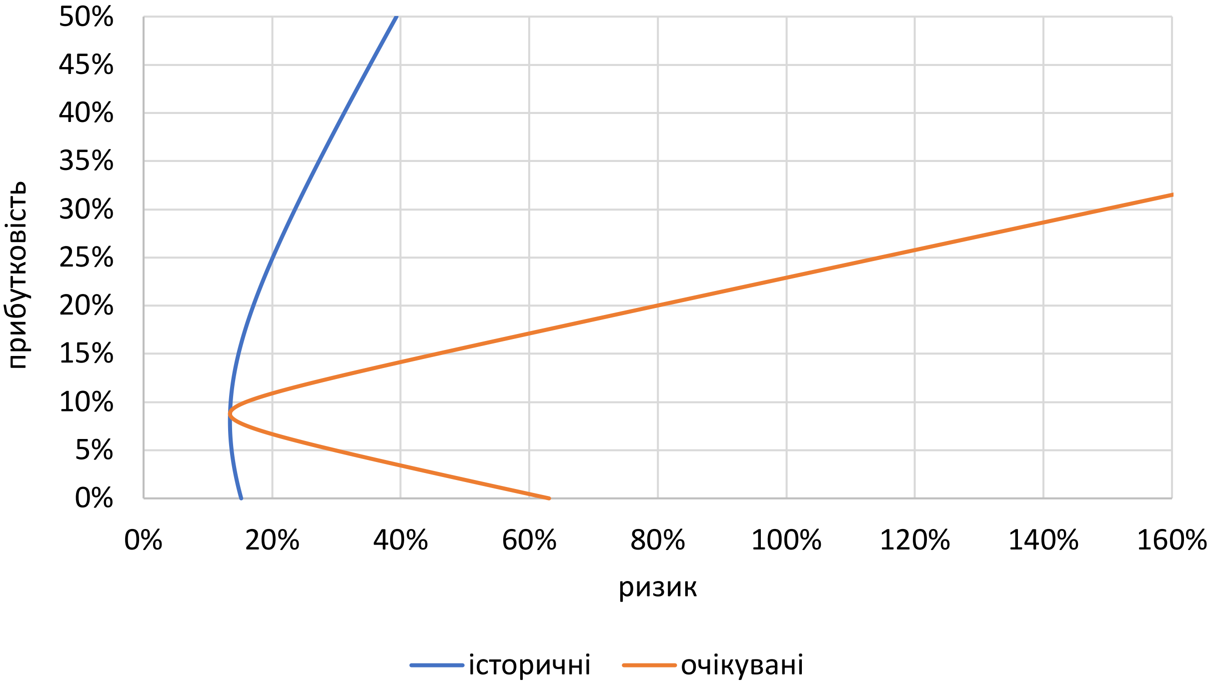
Тобто інвестор може мати не тільки додатні ваги в своєму портфелі, але й від’ємні. Це означає, що інвестор бере деяку акцію в борг (вірячи в те, що її ціна впаде або прибутковість буде низькою), продає її та використовує ці гроші для того, щоб купити акцію, яка зростатиме дуже сильно. Згодом, інвестор реалізує акції, які він купив на ці гроші, потім купує ту акцію, яку позичав і повертає її людині, у якої позичав. Необмежене відкриття коротких позицій є припущенням в багатьох моделях фінансів і теж постійно критикується.

5. Для того, щоб перейти від цих побудов до ринку лінії капіталів нам необхідне припущення про досконалість ринку капіталу. Це теж дуже поширене припущення у багатьох фінансових моделях. Воно означає рівно те, що кожен інвестор може нескінченно брати або давати гроші в борг за безризиковою ставкою. Тобто відсутня банківська маржа та премія за ризик дефолту. Також реалістично ми розуміємо, що не можемо прийти в банк і взяти кредит на мільярд доларів, тому що є деякі розумні обмеження на обсяг кредитування. Досконалий ринок капіталу це припущення, яке ці обмеження ігнорує. Далі в своїй роботі, я розглядаю як цей недолік можна обійти.

2.4 Які прибутковості використовувати

Перше питання, яке постає, коли намагаються щось оцінити за моделлю Марковіца – це які саме прибутковості використовувати в якості очікуваних. Є два варіанти: використовувати історичні прибутковості або використовувати прибутковості оцінені за моделлю CAPM (Capital Asset Pricing Model)[8]. У моделі CAPM треба оцінити β (числа, що характеризують прибутковість) і з точки зори певної очікуваної прибутковості ринку оцінити індивідуальні прибутковості акцій. Зауважимо, що CAPM, хоч і повністю походить із портфельної теорії Марковіца, критикує її. Недолік базової моделі полягає в тому, що потрібно знати дуже багато параметрів (n прибутковостей, які якось потрібно оцінити, наприклад, за допомогою історичних прибутковостей, оцінити коваріаційну матрицю) в яких потрібно бути впевненим, тому будь-які допущені помилки нашаровуються одна на одну і призводять до того, що результат стає менш надійним. У CAPM потрібно оцінити лише n параметрів β, тому часто кажуть, що CAPM покращує модель Марковіца в цьому сенсі.

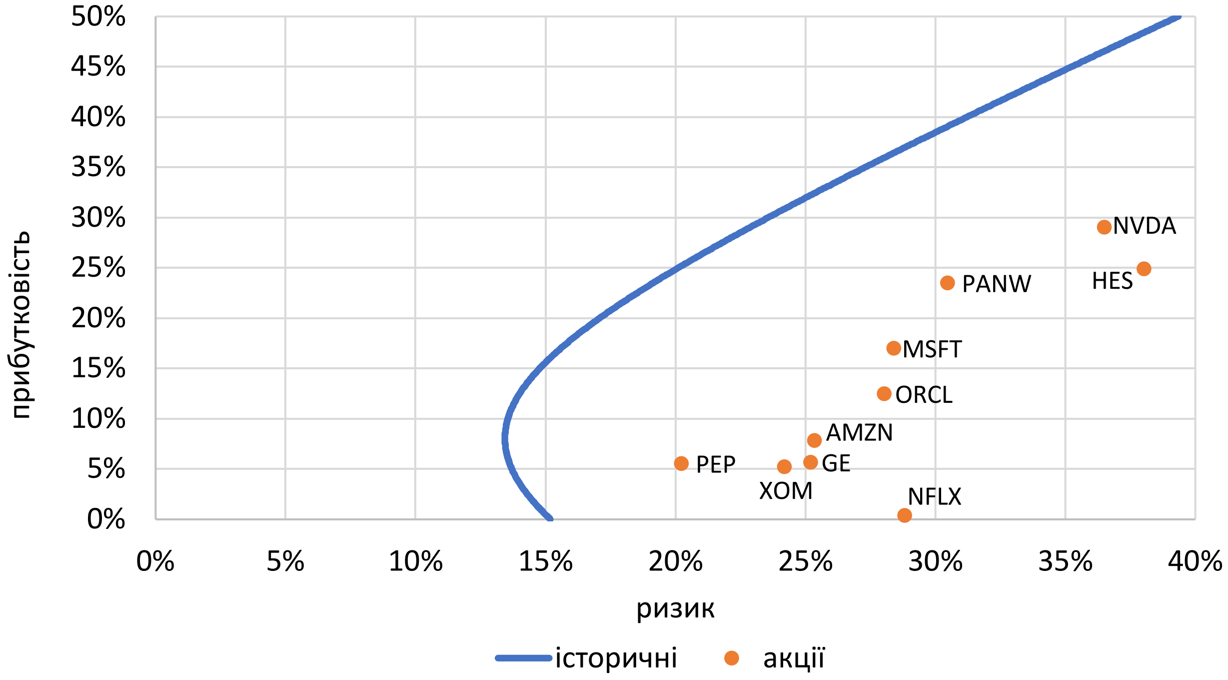
Подивимося на графіках, які все-таки прибутковості краще використовувати. Для цього порівняємо два фронтири, які ми отримали на основі історичних прибутковостей та на основі очікуваних прибутковостей згідно з CAPM.

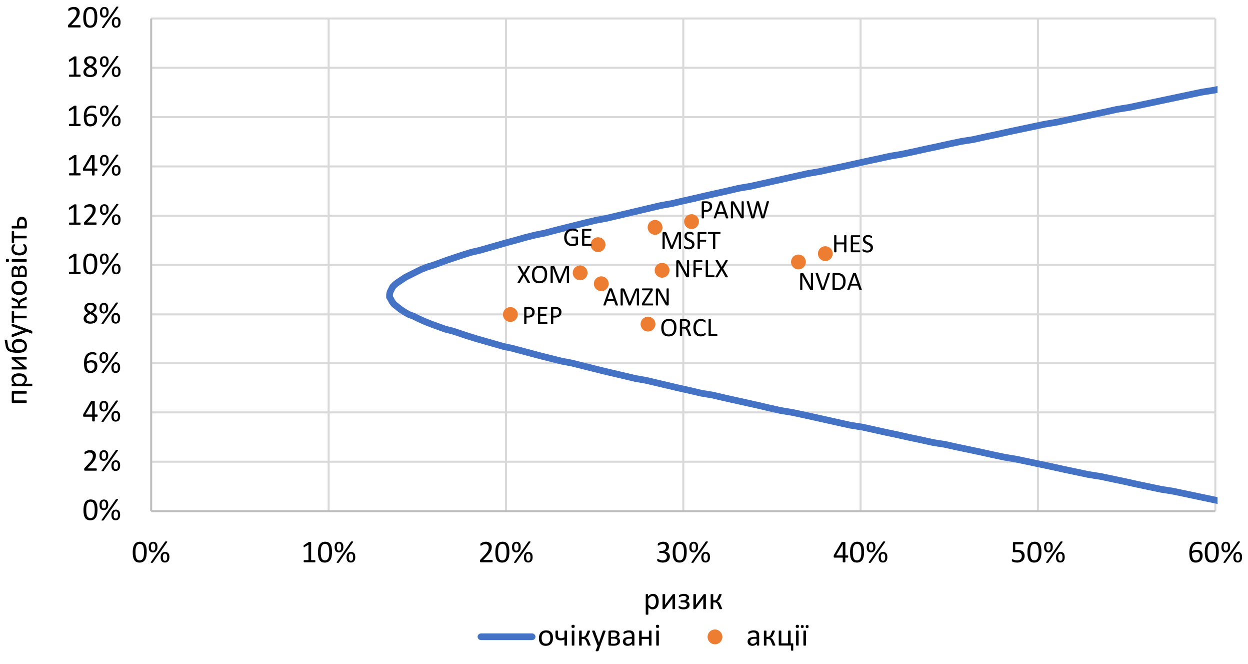


Одразу бачимо, що фронтир історичних прибутковостей досить плаский. Також ми бачимо, що, наприклад, його очікувану прибутковість в 50% можна отримати з річним ризиком всього в 40%, що є досить нереалістичним. У випадку, наприклад, з очікуваними прибутковостями CAPM, можна отримати прибуток в районі 30% із ризиком у 120%, що вже більше схоже на правду.

Але інша проблема залишається: в обох цих портфелях, і в історичному, і в очікуваному (меншою мірою) є короткі позиції. Згідно з послідовною логікою виведення однієї моделі з іншої, це означає, що в рівновазі капіталізація якоїсь компанії буде від’ємною, чого бути не може. Можна сказати, що очікувані прибутковості CAPM набагато кращі, ніж історичні, але таке досить просте покращення моделі не дає нам повністю позбутися недоліків.

Можемо помітити, що у районі портфеля мінімального ризику моделі дуже схожі, але чому тоді історичні прибутковості настільки нереалістичні? Тому що з компаніями, крім очікуваних речей, відбувається дуже багато несподіваних речей, хороших і поганих. Справа в тому, що історичні прибутковості завжди або надто високі, або надто низькі. Коли ми маємо акції, які сильно корелюються одна з одною, але в однієї висока історична прибутковість, а в іншої низька, то модель Марковіца на історичних прибутковостях намагається зробити «наївний хедж». Тобто модель очікує, що на різниці прибутковості ми отримаємо майже безризикову вигоду. Саме для цього дуже важливо, щоб наші прибутковості не були занадто високі або занадто малі, інакше модель намагатиметься хеджувати, і ми в результаті отримаємо ось такі нереалістичні показники.

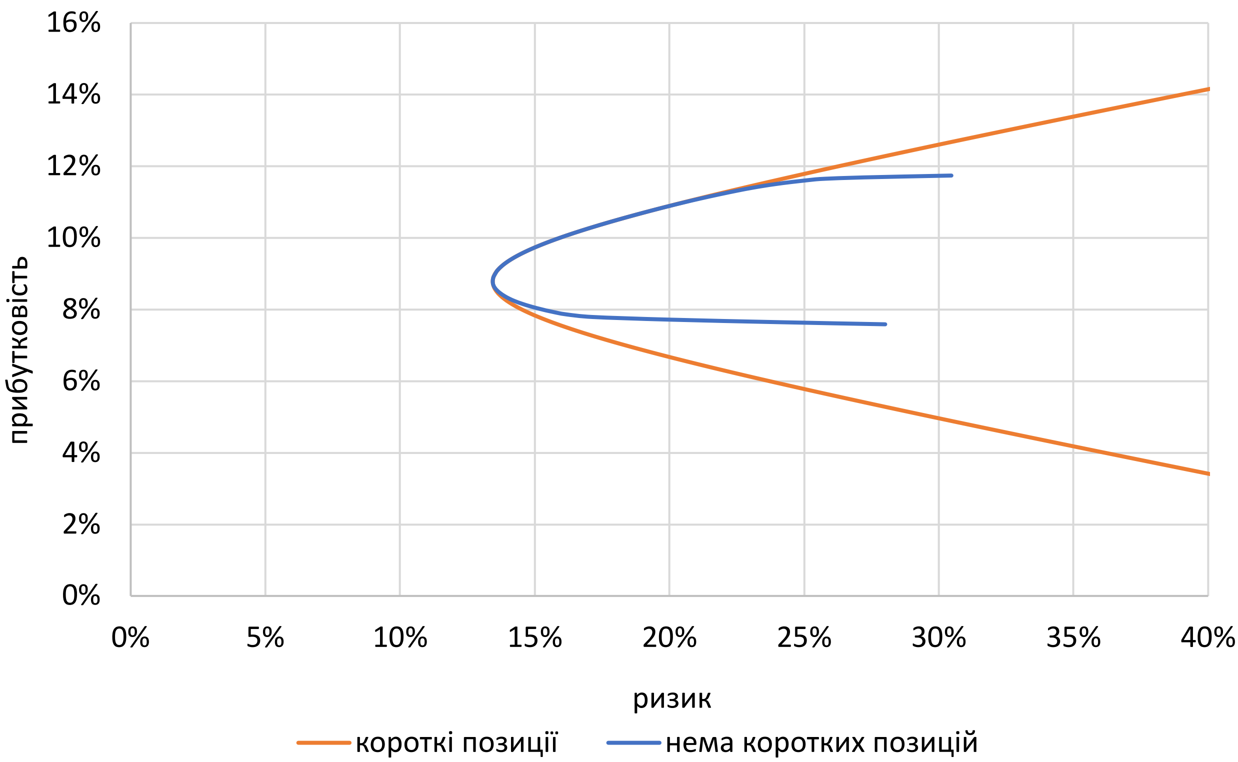




Тут ми можемо побачити графічне порівняння двох фронтирів та відповідних акцій з двома припущеннями: історичними та очікуваними прибутковостями. Як бачимо, другий фронтир куди крутіше йде вгору, тобто при певному рівні ризику співвідношення «ризик-прибутковість» стає досить стабільним і реалістичним. Очікувані прибутковості менше одна від одної відрізняються, ніж історичні знову ж таки, тому що історичні включають в себе деякі події, які не факт що відбудуться знову.

2.5 Забагато коротких позицій

Зрозуміло, що коли ми не обмежуємо короткі позиції, модель Марковіца передбачає, що їх буде занадто багато, тому можна їх просто заборонити. І це, з одного боку, цілком логічно, тому що короткі позиції часто недоступні, особливо маленьким інвесторам та фізичним особам. І справді може виникнути думка: якщо Марковіц використовує короткі позиції занадто часто, особливо у випадку з історичними прибутковостями, або коли у нас модель з очікуваними прибутковостями і при цьому маленьким коефіцієнтом неприйняття ризику, то може просто ввести додаткове обмеження, що всі ваги мають бути невід'ємними. Тоді в нас вийде ось такі два фронтири, в яких ми дозволяємо і не дозволяємо короткі позиції:

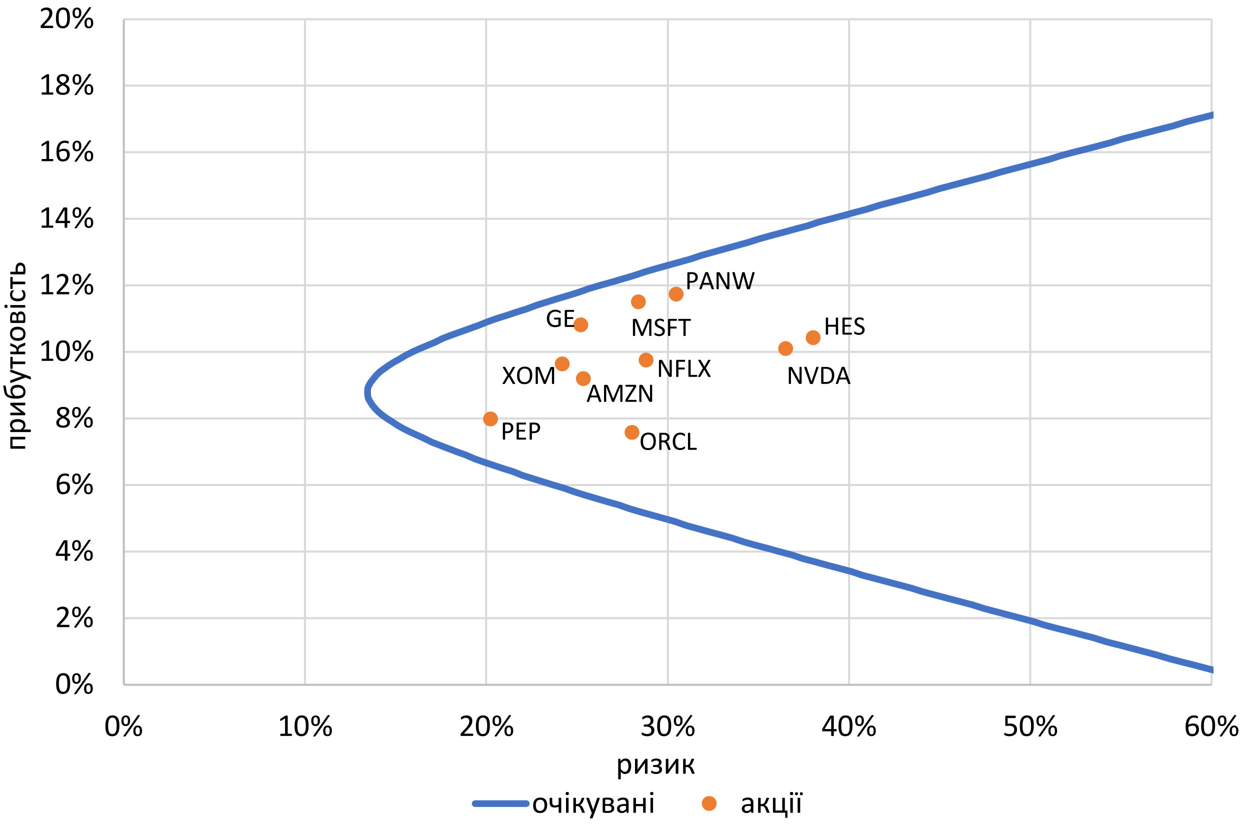


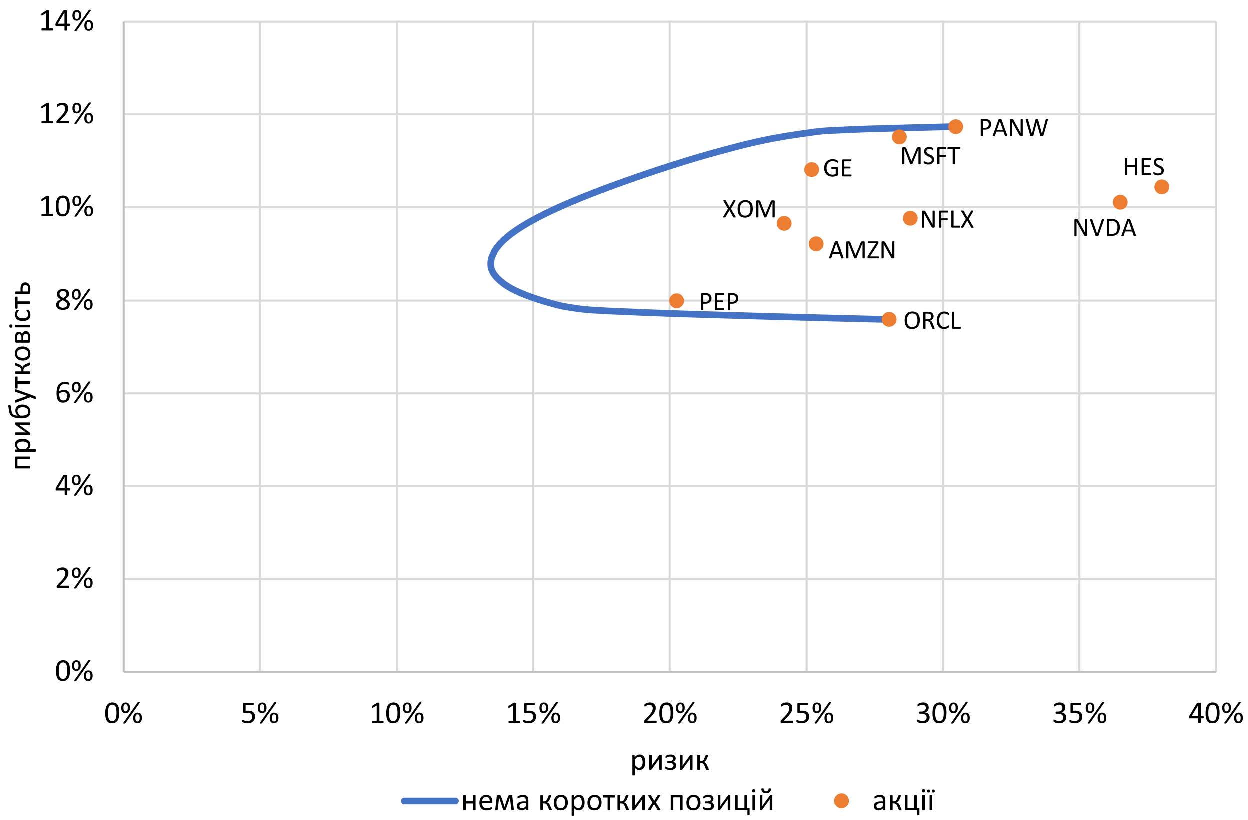
Можемо побачити, що фронтири збігаються на досить великому проміжку, тобто для дуже великої кількості інвесторів не буде різниці, чи накладається обмеження на короткі позиції чи ні. Але що важливо, це якраз поведінка моделей у граничних випадках. По-перше, у моделі без коротких позицій діапазон очікуваних прибутковостей, яких ми можемо досягти, обмежений найменш прибутковою акцією і найбільш прибутковою акцією знизу і зверху відповідно. І щоб досягти цих точок, нам доводиться взяти на себе куди більше ризику, ніж у випадку, коли ми можемо відкривати короткі позиції. Спостерігається також розбіжність між фронтирами, і вона дедалі більше, коли ми йдемо у область високої очікуваної прибутковості чи високого ризику.

Чому не можна постійно використовувати цю модель, коли ми забороняємо короткі позиції: по-перше, обчислювальні потужності, по-друге, немає явної функціональної форми у нашого рішення і функції ефективних портфелів, аналітична складність. І що важливо, що іноді все-таки можна використовувати короткі позиції, а як це концептуалізувати я розгляну далі в роботі.

Останній висновок, який можна зробити з огляду на даний графік це те, що на великому проміжку проста модель з короткими позиціями все ж таки робоча. Бо навіть якщо ми можемо відкривати короткі позиції, модель нам цього не радитиме робити, тільки якщо у нас не екстремально низька схильність до ризику. Таких інвесторів також треба враховувати, саме тому наша критика релевантна.

Покажемо наскільки обмежений з точки зору доступних комбінацій наш фронтир без коротких позицій в порівнянні з фронтиром очікуваних прибутковостей, де дозволяються короткі позиції. Також подивимось яким чином акції співвідносяться з фронтирами.





Тут ми можемо бачити, що в портфелі без коротких позицій ми з'єднуємо нашим фронтиром дві акції – одну з найнижчою очікуваною прибутковістю, а іншу з найвищою: PANW та ORCL відповідно. Чому ми не з'єднуємо HES або NVDA: тому що з точки зору раціонального інвестора PANW явно краще індивідуально, тому що має нижчий ризик і вищу очікувана прибутковість.

2.6 Кредитний ризик

У цьому розділі розглянемо як можна контролювати використання коротких позицій (коли трохи можна, а багато ні). Припустимо, що інвестор бере акції в борг в кредитора, який піклується про те, щоб акції повернули назад. І, відповідно, це пов'язано з деякою премією за ризик дефолту.

Нехай інвестор, який відкриває короткі позиції, бере акції в борг у ризик-нейтрального кредитора, який враховує можливість його дефолту. Тоді ми зможемо вивести прибуток за ризик дефолту виходячи з ймовірності дефолту та величини левереджа. Левереджем називають співвідношення позикових коштів, отриманих на придбання цінних паперів, до власних грошових активів.

Якщо очікуваний виграш кредитора дорівнює нулю, то премія за ризик дефолту:

$$d = \frac{P_D}{1 - P_D}\left(\sum_{i=1}^{n}|\omega_i| - 1\right)$$

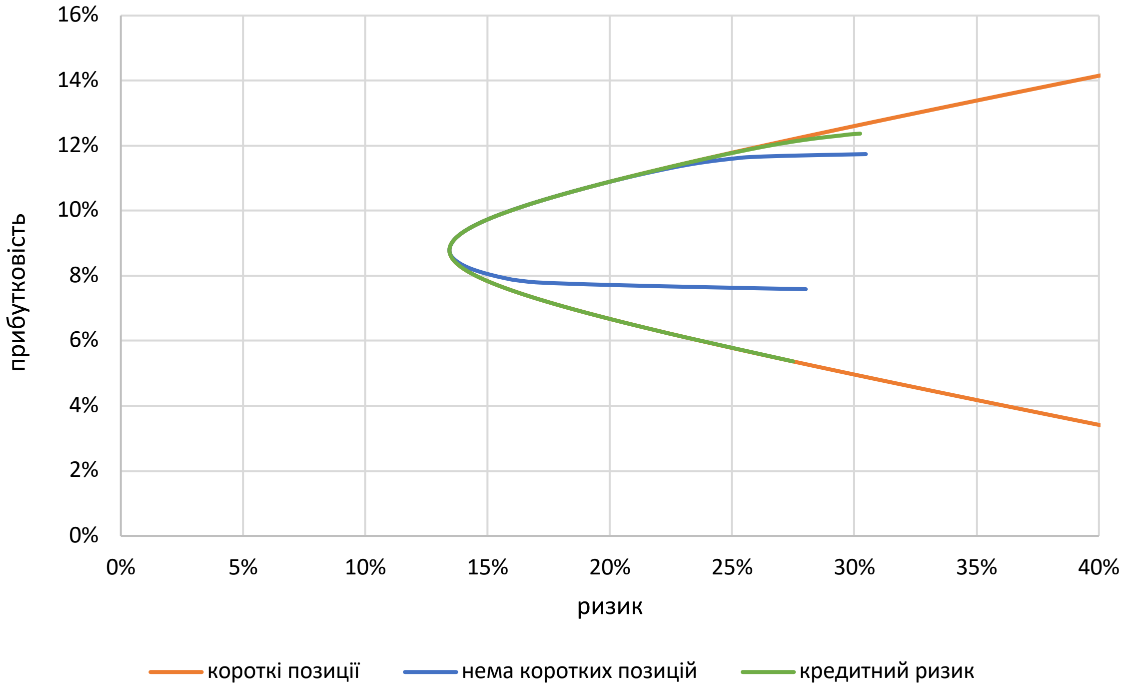
$$P_D = P(1 + R < |\omega_i| - 1)$$

Дефолт траплятиметься тоді, коли в інвестора вартість портфеля недостатня, щоб віддати всі позичені акції.

Тоді інвестор максимізуватиме:

$$U = (\mu - d) - \frac{\theta}{2}\sigma^2$$

Подивимось наскільки реалістичнішими будуть висновки моделі в цьому випадку. Зобразимо фронтир, коли короткі позиції дозволені у невеликих кількостях, а якщо інвестор відкриває їх забагато, то йому доведеться за це заплатити . Також порівняємо з іншими фронтирами, отриманими на минулих кроках.



Як бачимо, досягається «золота середина» між двома попередніми фронтирами. Також варто відзначити, що навіть якщо інвестор не має схильності до нульового ризику, тобто він є ризик-нейтральним, у моделі з необмеженими короткими позиціями він пішов би на нескінченність, але тут він на нескінченність не йде. Також бачимо, що на дуже великому перетині множини ефективних портфелів всі три збігаються.

Чому завжди не використовувати цю модель: вона пов'язана з додатковими припущеннями, які ми накладаємо на ризик дефолту. Який розподіл прибутковості? Яка ймовірність дефолту? Наскільки кредитор, який позичає акції інвестору дійсно ризик-нейтральний? Якщо він не ризик-нейтральний, то який у нього ступінь неприйняття ризику? Знову ж таки важко судити з точки зору обчислювальних потужностей, тому що потрібно розраховувати ймовірності і накладати їх на модель. За підсумком, для багатьох випадків границі ефективних портфелів просто збігаються.

2.7 Короткі висновки

Підсумовуючи, початковий вид моделі Марковіца – це дуже спрощена модель. Вона має багато явних нереалістичних припущень, але їх можна значно послабити чи навіть зовсім виключити. Це має свою ціну, оскільки доводиться використовувати досить велику кількість обчислювальних потужностей. Але також варто зазначити, що спрощена форма працює для інвесторів із середнім рівнем схильності до ризику, але у разі екстремальних значень необхідно цю модель модифікувати.

3. ГЕНЕТИЧНИЙ АЛГОРИТМ

Розглянуті й реалізовані методи оперують з різними мірами ризику і не враховують природного бажання інвестора накласти деякі додаткові обмеження. Такими обмеженнями, як вже зазначалось, можуть бути торговельні обмеження, розмір портфеля, транзакційні виплати тощо. Такі додаткові умови можуть бути сформульовані в нелінійній змішаній цілочисельній задачі програмування, яка є набагато складнішою, ніж розглянуті моделі та вимагає для свого розв’язання застосування ітераційних алгоритмів, таких як генетичний алгоритм.

Генетичні алгоритми, що базуються на принципі Дарвіна «виживає найсильніший», вперше були запропоновані Джоном Холландом у 1975 році та відтоді швидко набули слави найвідоміших еволюційних методів (Голдберг, 1997; Мітчелл, 1996) [21]. Новаторський метод Холланда викликав хвилю досліджень, пов'язаних з використанням ГА-підходів до вибору оптимального портфеля. Арнон, Лоращі та Теттаманзі (1993) представили використання ГА для задачі безумовної оптимізації портфеля, де ризик розглядався як ризик падіння ціни акції [22]. Кйон, Таї та Сангхі (2005) також використовують ГА в оптимізації індексу портфеля для управління фондом [23]. Лін і Ліу (2008) застосовують ГА для розв'язання проблеми вибору портфеля з мінімальним транзакційним лотом [24].

Генетичні алгоритми також набули широкого застосовування й в інших сферах, таких як оптимізація, адаптивне керування, машинне навчання, нейронні мережі, нечіткі системи тощо.

Оскільки в основу цього підходу покладено модель «еволюції обмеженої популяції особин», для побудови та опису процесів пошуку генетичних алгоритмів, як правило, прийнято використовувати символьну мову популяційної генетики.

3.1. Загальна схема генетичного алгоритму

Виходячи з моделі еволюції, метою генетичного алгоритму є не просто вибір, але й моделювання на основі наявного набору «хромосом» нової особини, максимально пристосованої до навколишнього середовища, тобто тієї, що має найбільш оптимальні значення всіх заданих критеріїв вибору.

Кожна особина при цьому (у нашому випадку – інвестиційний портфель) кодується у вигляді певного набору генів (що є бітовими рядками заданої довжини). Кожен ген є кодовим позначення заданого інтервалу значень одного з критеріїв. Повний набір «генів» портфеля складає хромосому – основний матеріал для моделювання еволюційного процесу. Кількість «генів», що становлять хромосому, визначається розмірністю задачі.

Визначимо початкові умови задачі формування оптимального портфеля цінних паперів з певної обмеженої множини N.

1. Позначимо популяцію як сукупність індивідуумів (M).

2. Визначимо особину M як можливий варіант рішення (у нашому випадку – можливу структуру інвестиційного портфеля), що є набором $N-1$, який складається з x_i хромосом. Введемо обмеження, обумовлене вимогами інвестора:

$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$, де θ_i – частка капіталу, вкладеного в i-й актив.

Це обмеження є необхідною умовою завдання та відображає обмеженість (скінченність) інвестиційного капіталу. Воно має враховуватись при побудові популяції.

3. Позначимо хромосому x_i – при розв'язанні задачі оптимізації інвестиційного портфеля хромосоми являтимуть собою закодовану в двійковій системі частку вихідного інвестиційного капіталу, що вкладається в i-й актив.

Виходячи з цих умов, у загальному вигляді генетичний алгоритм відбору оптимальних інвестиційних портфелів можна представити таким чином:

Крок 1. Ініціалізація. Формування початкової популяції «особин» – інвестиційних портфелів.

Крок 2. Оцінка кожного портфеля у вигляді оціночної функції (функції пристосованості).

Крок 3. Перевірка відповідності одержаних рішень умовою зупинення алгоритму. За відповідністю – алгоритм зупиняється. У разі невідповідності – крок 4.

Крок 4. Відбір за допомогою селекції двох портфелів із множини (батьки).

Крок 5. Послідовне застосування до пари портфелів «батьки» генетичних операторів (схрещування, мутація, інверсія із заданою ймовірністю).

Крок 6. Формування нової популяції.

Крок 7. Перевірка відповідності одержаних рішень нової популяції умові зупинення алгоритму. За відповідністю – алгоритм зупиняється. У разі невідповідності – крок 4.

Таким чином, генетичний алгоритм на початковому етапі генеруватиме випадковим чином безліч ймовірних рішень (батьківську популяцію). Потім, послідовно застосовуючи до неї функцію пристосованості, здійснюватиме перебір одержаних рішень на їхню відповідність необхідним умовам. Доки оптимальне рішення не буде знайдено, алгоритм буде на основі ведених критеріїв відбору генерувати нові покоління популяції рішень. При цьому кожному варіанту рішення при відборі надається ймовірність p_{si}, що дорівнює відношенню «пристосованості особини» до середнього значення пристосованості популяції. Подальший відбір рішень відбувається виходячи з величини p_{si}.

Особливістю генетичного алгоритму є послідовність двох процесів, за допомогою яких генерується нова популяція або видається множина готових рішень:

1) пропорційний відбір (рулетка, roulette-wheel selection);

2) послідовний вплив на нову популяцію, що виникла в результаті відбору, генетичними операторами.

Відбір дозволяє за допомогою принципу рулетки здійснювати селекцію рішень за допомогою n запусків програми. Селекція нових особин здійснюється пропорційно присвоєної їм p_{si}. Таким чином, вводиться пропорційна залежність ймовірності відбору від ступеня відповідності випадково генерованого рішення умовам оціночної функції.

Щоб ефективніше планувати швидкість обчислень і витрати часу, в генетичний алгоритм було введено обмеження на кількість особин у поколінні. Слід зазначити, що ефективність генетичних алгоритмів багато в чому залежить від принципів відбору батьківських особин у популяції. В основі алгоритму відбору батьківських пар використовують різні математичні методи: метод випадкового відбору, метод селективного відбору, метод елітного відбору, метод аутбридингу та інбридингу тощо.

3.2. Кросинговер (схрещування) та мутація

Оскільки механізм пошуку оптимальних рішень здійснюється за допомогою застосування до популяції генетичних операторів, розглянемо їх вплив на множину генерованих рішень більш детально.

Спочатку нове покоління рішень (дочірня популяція особин) піддається схрещуванню, що також має назву, за аналогією з терміном популяційної генетики, кросинговером (кросовером) із заданим коефіцієнтом ймовірності p_{cros}. Для цього кожне дочірнє покоління розв'язків розбивається на $n/2$ пари, де n – загальна кількість розв'язків у поколінні.

Кросинговер містить у собі наступну послідовність операцій:

Крок 1. Вибір у кожній «хромосомі» батьківської пари випадкової точки – точки розриву.

Крок 2. Поділ «хромосом» (генерованих рішень) у цій точці на два сегменти.

Крок 3. Поєднання ділянок «хромосом» батьківських особин між собою, внаслідок чого з'являються два нових генотипи, що витісняють собою батьківські особини у популяції.

Крок 4. Формування нової генерації рішень, що складається з p_{cros} нових (зазнали кросинговеру) і $(1 - p_{cros})$ старих (особин, що залишилися без змін).

Крок 5. Вплив на дочірню генерацію рішень оператором мутації.

Мутація (термін також запозичений з популяційної генетики) – це зміна кожного біта (ділянки хромосоми, позначеної нами як ген) з p_{mut} часткою ймовірності на протилежний. Потім відбувається витіснення новими особинами батьківських особин відповідно до відбору з урахуванням ступеня їхнього пристосування p_{si}.

Розрізняють декілька варіантів кросинговеру: одноточковий (з однією точкою розриву), двоточковий, багатоточковий, а також евристичний та арифметичний. Зауважимо, що тип кросинговеру, який використовується в ГА, впливає на процес і, отже, на розв'язок.

Для задач оптимізації з обмеженнями підходить арифметичний кросинговер[25]. Тут нащадки створюються за такими рівняннями:

$$\text{Нащадок } A = \alpha * \text{Батько } A + (1-\alpha) * \text{Батько } B$$

$$\text{Нащадок } B = (1-\alpha) * \text{Батько } A + \alpha * \text{Батько } B,$$

де α – випадковий ваговий коефіцієнт, який обирають перед кожним оператором кросоверу.

Евристичний кросинговер[25] використовує фітнес-функцію (fitness function) для оцінки двох батьківських хромосом, щоб визначити напрямок пошуку. Значення цієї функції вимірює пристосованість геномів (співвідношення прибутковість-ризик портфеля) так, щоб геноми можна було впорядкувати від найкращого до найгіршого. Евристичний кросовер аналогічно рухається від найгіршого батька до трохи кращого і так до найкращого. Потомство створюється за рівнянням:

$$\text{Нащадок } A = \text{Найкращий Батько } + \\ + \beta * (\text{Найкращий батько} - \text{Найгірший Батько}$$

$$\text{Нащадок } B = \text{Найкращий Батько },$$

де β – випадкове число від 0 до 1.

3.3 Реалізація генетичного алгоритму

В якості вхідних даних візьмемо ті ж самі дані десяти американських компаній, що використовувалися для побудови моделі Марковіца. Метою є обґрунтування того, що результати, отримані із застосуванням ГА, наближені до показників, розрахованих традиційним класичним методом Марковіца. Реалізація здійснена на мові програмування Python (код програми представлено в Додатку А) на базі класичної моделі «прибутковість-ризик». Мета оптимізації портфеля полягає в тому, щоб знайти значення вагових коефіцієнтів, які максимізують прибуток і одночасно мінімізують ризик інвестиційного портфеля за певних обмежень.

Процес оптимізації розпочинається зі зчитування історичних даних цін акцій з файлів CSV. Потім дані об'єднуються в єдиний набір даних. Далі проводиться обчислення історичних прибутковостей акцій для різних періодів часу.

Генетичний алгоритм починається зі створення початкової популяції, яка складається з хромосом (набору генів), що представляють ваги акцій у портфелі. Кожна хромосома має випадкові значення, сума яких дорівнює 1. Оскільки у нас є 10 акцій компаній, згенеруємо 10 дробових значень (генів), які становитимуть 1 хромосому. Далі відбувається створення популяції (двовимірний масив), що є набором випадково згенерованих хромосом. Обчислюється прибутковість та ризик портфеля на основі цих ваг. Використовуючи фітнес-функцію, яка враховує співвідношення прибутковості та ризику, вибирається елітна популяція з найкращими хромосомами. Застосовуються оператори мутації, де випадково обрані елементи міняються місцями, та кросинговеру (евристичний та арифметичний, принцип яких було описано раніше), щоб створити нову популяцію з потенційно кращими рішеннями. Цей процес повторюється протягом кількох ітерацій, або до досягнення певних критеріїв зупинки, таких як бажані значення доходності (не менше 13%) та ризику (не більше 10 %). Після закінчення оптимізації виводиться найкращий портфель акцій з вагами, що максимізують доходність при мінімальному ризику:

Portfolio of stocks after all the iterations:

amzn : 0.09345062896875928
orcl : 0.08674707275912158
nflx : 0.33297460067827755
pep : 0.08797452039465589
ge : 0.0810876078903686
nvda : 0.04224403632814033
msft : 0.07271057487857724
panw : 0.06063494477309799
hes : 0.061203640460632626
xom : 0.08097237286836911

Expected returns of 0.13969332739522396 with risk of 0.0830085379463408
Number of iterations 1117

Згідно з моделлю Марковіца на тих самих даних ми отримали портфель з прибутковістю у 13.56% та ризиком у 8.53%. Результати, отримані із застосуванням ГА, наближені до показників, розрахованих традиційним класичним методом Марковіца. Як бачимо, розв’язок двох принципово різних підходів не мають великих відмінностей. Варто зазначити, що реалізація для класичного варіанту проводилася в MS Excel, але при використанні портфеля з великої кількості паперів, реалізація досить громіздка, не дивлячись на правильний розв’язок.

Важливим в постановці задачі і в розробці алгоритму, рішення якої пов'язане з ГА, є правильне завдання умови для виходу з циклу. Ймовірність того, що ми досягнемо необхідного оптимального значення (як рішення поставленої задачі) не завжди буде стовідсотковою і цикл може виявитися нескінченним. У таких випадках, слід передбачити додаткові умови виходу з циклу, наприклад, задати кількість кроків для виконання тіла циклу, яке визначає задану кількість поколінь (сходження популяцій) або, в крайньому випадку, задати час роботи циклу. У такому разі, в якості рішення отримаємо значення найбільш пристосованої хромосоми (особини) з останньої популяції.

ВИСНОВКИ

Оптимізація структури портфелю цінних паперів є однією із класичних задач, яка була вперше поставлена і розв'язана Гаррі Марковіцем на початку 1950-х рр. Проте запропонований автором підхід використовував ряд припущень, які в загальному випадку не виконуються.

В даній роботі розглянутий класичний підхід, запропонований Марковіцем, та ряд нових, що допомагають послабити ряд припущенн. В першій модифікації (розділ 2.4) для розрахунку очікуваних прибутковостей використовуються не історичні дані, а дані з деякими модифікаціями оцінені за допомогою більш сучасної моделі CAPM, що походить майже повністю від моделі Марковіца.

В другій процедурі задля обмеження границі ефективних портфелів забороняється використання коротких позицій (розділ 2.5). Цей підхід є адаптивною оптимізацією структури портфелю і підходить для малих інвесторів або фізичних осіб, які тільки знайомляться з інвестиційним ринком.

Третій метод, запропонований в моїй роботі, є комбінацією адаптивного методу з дозволом використання коротких позицій в деяких випадках за певних умов прибутку ЦП, що входять в портфель (розділ 2.6).

Порівняння ефективності різних підходів виконується шляхом графічного представлення для більшого розуміння.

З метою подолання цих недоліків, було також розроблено та реалізовано генетичний алгоритм для оптимізації портфелю цінних паперів.

Результати дослідження підтвердили ефективність генетичного алгоритму в оптимізації портфелю на реальному ринку акцій. Використання генетичного алгоритму дозволило досягти кращих результатів, забезпечити більшу стабільність та уникнути деяких недоліків моделі Марковіца. Крім того, було розроблено відповідний код та проведено його тестування на реальних даних ринку акцій.

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Фондовий ринок України: буде вигідно і підприємствам, і громадянам URL: https://www.ukrinform.ua/rubric-economy/3178661-fondovij-rinok-ukraini-bude-vigidno-i-pidpriemstvam-i-gromadanam-ot-lis-sudi.html
2. Фондовий ринок в Україні може повноцінно запрацювати у 2023 році URL: https://www.epravda.com.ua/news/2021/01/20/670182/
3. 2022 has been a year of brutal inflation URL: https://www.economist.com/finance-and-economics/2022/12/21/2022-has-been-a-year-of-brutal-inflation
4. Modern Portfolio Theory: What MPT Is and How Investors Use It URL: https://www.investopedia.com/terms/m/modernportfoliotheory.asp
5. Мертенс О. Сучасна теорія портфелю URL: http://mertens.com.ua/books/files/finmrkts_ch06.doc
6. Markowitz Model https://www.wallstreetmojo.com/markowitz-model/
7. Солодкий М.О., Яворська В.О. Біржовий товарний ринок: навч. посіб. Київ: КОМПРИНТ, 2017. 482 с.
8. Модель оцінювання капітальних активів (CAPM) URL: https://buklib.net/books/26654/
9. Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown та William N. Goetzmann Modern Portfolio Theory and Investment Analysis 2014, 752 с.
10. H.Levy, A.Levy Arrow-Pratt Measures of Risk Aversion: The Multivariate Case, International Economic Review 1991 (с. 891-898).
11. NVIDIA Corporation (NVDA) Historical data URL:https://finance.yahoo.com/quote/NVDA/history?p=NVDA
12. ORACLE Corporation (ORCL) Historical data URL: https://finance.yahoo.com/quote/ORCL/history?p=ORCL
13. PepsiCo Inc. (PEP) Historical data URL: https://finance.yahoo.com/quote/PEP/history?p=PEP
14. General Electric Company (GE) Historical data URL: https://finance.yahoo.com/quote/GE/history?p=GE

15. Hess Corporation (HES) Historical data URL: https://finance.yahoo.com/quote/HES/history?p=HES
16. Microsoft Corporation (MSFT) Historical data URL: https://finance.yahoo.com/quote/MSFT/history?p=MSFT
17. Exxon Mobil Corporation (XOM) Historical data URL: https://finance.yahoo.com/quote/XOM/history?p=XOM
18. Palo Alto Networks, Inc. (PANW) Historical data URL: https://finance.yahoo.com/quote/PANW/history?p=PANW
19. Amazon.com, Inc. (AMZN) Historical data URL: https://finance.yahoo.com/quote/AMZN/history?p=AMZN
20. Netflix, Inc. (NFLX) Historical data URL: https://finance.yahoo.com/quote/NFLX/history?p=NFLX
21. Tun-Jen Chang, Sang-Chin Yang, Kuang-Jung Chang. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. Expert Systems with Applications 36 (2009): 529–537.
22. Arnone, S., Loraschi, A., & Tettamanzi, A. (1993). A genetic approach to portfolio selection. Neural Network World, 6, 597–604.
23. Kyong, J. O., Tae, Y. K., & Sungky, M. (2005). Using genetic algorithm to support portfolio optimization for index fund management. Expert Systems with Applications, 28, 371–379.
24. Lin, C. C., & Liu, Y. T. (2008). Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. European Journal of Operational Research, 185, 393–404.
25. Ackora-Prah J., Asante Gyamerah S. A heuristic crossover for portfolio selection URL: https://www.researchgate.net/publication/286952225_A_heuristic_crossover_for_portfolio_selection

ДОДАТОК А

```
import numpy as np
import pandas as pd
from functools import reduce

files=['amzn.csv','orcl.csv','nflx.csv','pep.csv','ge.csv','nvda.csv','msft.csv','panw.csv
','hes.csv','xom.csv']
dfs=[]

for file in files:
    temp=pd.read_csv(file)
    temp.columns=['Date',file.replace('.csv','')]
    dfs.append(temp)

stocks = reduce(lambda left,right: pd.merge(left,right,on='Date'), dfs)
print(stocks.shape)
stocks.head()

def hist_return(months):
    idx=[]
    df=pd.DataFrame()
    for mon in months:
        temp=(stocks.iloc[0,1:] - stocks.iloc[mon,1:])/(stocks.iloc[mon,1:])
        idx.append(str(mon)+'_mon_return')
        df=pd.concat([df, temp.to_frame().T], ignore_index=True)
    df.index=idx
    return df

hist_stock_returns=hist_return([3,6,12,24,36])
hist_stock_returns

gene = np.random.rand()
gene

def chromosome(n):
    ch = np.random.rand(n)
    return ch/sum(ch)

child=chromosome(10)
print(child,sum(child))

n=10
population_size=1000
```

```
population = np.array([chromosome(n) for _ in range(population_size)])
print(population.shape)
print(population)

print(hist_stock_returns.info())
cols=hist_stock_returns.columns
hist_stock_returns[cols] = hist_stock_returns[cols].apply(pd.to_numeric,
errors='coerce')
print(hist_stock_returns.info())

cov_hist_return=hist_stock_returns.cov()

print(cov_hist_return)

#коваріація
for i in range(10):
    cov_hist_return.iloc[i][i]=0

cov_hist_return

mean_hist_return=hist_stock_returns.mean()
mean_hist_return

sd_hist_return=hist_stock_returns.std()
sd_hist_return

def mean_portfolio_return(child):
    return np.sum(np.multiply(child,mean_hist_return))

mean_portfolio_return(population[0])

def var_portfolio_return(child):
    part_1 = np.sum(np.multiply(child,sd_hist_return)**2)
    temp_lst=[]
    for i in range(10):
        for j in range(10):
            temp=cov_hist_return.iloc[i][j] * child[i] * child[j]
            temp_lst.append(temp)
    part_2=np.sum(temp_lst)
    return part_1+part_2

var_portfolio_return(population[0])

#безризикова ставка
rf= 0.0689
```

```
def fitness_fuction(child):
    return (mean_portfolio_return(child)-rf)/np.sqrt(var_portfolio_return(child))

fitness_fuction(population[11])

def Select_elite_population(population, frac=0.3):
    ''' Обирається елітна популяція із повної популяції за допомогою
    значень фітнес функції'''
    population = sorted(population,key = lambda x: fitness_fuction(x),reverse=True)
    percentage_elite_idx = int(np.floor(len(population)* frac))
    return population[:percentage_elite_idx]

print(len(Select_elite_population(population, frac=0.3)))
Select_elite_population(population, frac=0.3)

[fitness_fuction(x) for x in population][:3]
def mutation(parent):
    '''Випадково обрані елементи міняються місцями'''
    child=parent.copy()
    n=np.random.choice(range(10),2)
    while (n[0]==n[1]):
        n=np.random.choice(range(10),2)
    child[n[0]],child[n[1]]=child[n[1]],child[n[0]]
    return child

mutation(population[1]),population[1]

def Heuristic_crossover(parent1,parent2):
    '''    Off_spring A = Best Parent  + β ∗ ( Best Parent − Worst Parent)
           Off_spring B = Worst Parent - β ∗ ( Best Parent − Worst Parent)
              Where β is a random number between 0 and 1.'''
    ff1=fitness_fuction(parent1)
    ff2=fitness_fuction(parent2)
    diff=parent1 - parent2
    beta=np.random.rand()
    if ff1>ff2:
        child1=parent1 + beta * diff
        child2=parent2 - beta * diff
    else:
        child2=parent1 + beta * diff
        child1=parent2 - beta * diff
    return child1,child2

for i in population[:30]:
```

```
    for j in population[:30]:
        print(Heuristic_crossover(i,j))

def Arithmetic_crossover(parent1,parent2):
    '''  Off spring A = α ∗ Parent1 + (1 −α) ∗ Parent2
         Off spring B = (1 −α) ∗ Parent1 + α ∗ Parent2
              Where α is a random number between 0 and 1.
    '''
    alpha = np.random.rand()
    child1 = alpha * parent1 + (1-alpha) * parent2
    child2 = (1-alpha) * parent1 + alpha * parent2
    return child1,child2

# Arithmetic_crossover(population[2],population[3])
def next_generation(population_size, elite, crossover=Heuristic_crossover):
    new_population = []
    elite_range = range(len(elite))
    while len(new_population) < population_size:
        if len(new_population) > 2 * population_size / 3:
            mutate_or_crossover = np.random.choice([0, 1], p=[0.9, 0.1])
        else:
            mutate_or_crossover = np.random.choice([0, 1], p=[0.4, 0.6])
        if mutate_or_crossover:
            indx = np.random.choice(elite_range)
            new_population.append(mutation(elite[indx]))
        else:
            p1_idx, p2_idx = np.random.choice(elite_range, 2)
            c1, c2 = crossover(elite[p1_idx], elite[p2_idx])
            chk = 0
            for gene in range(6):
                if c1[gene] < 0:
                    chk += 1
            if chk > 0:
                p1_idx, p2_idx = np.random.choice(elite_range, 2)
                c1, c2 = crossover(elite[p1_idx], elite[p2_idx])
            new_population.extend([c1, c2])
    return new_population

elite=Select_elite_population(population)
next_generation(100,elite)[:3]

elite=Select_elite_population(population)
next_generation(100,elite,Arithmetic_crossover)[:3]

n=10 #кількість акцій
```

```
population_size=100


population = np.array([chromosome(n) for _ in range(population_size)])


elite = Select_elite_population(population)

iteration=0
Expected_returns=0
Expected_risk=1

while (Expected_returns < 0.13 and Expected_risk > 0.1) or iteration <= 100:
    print('Iteration:',iteration)
    population = next_generation(100,elite,Arithmetic_crossover)
    elite = Select_elite_population(population)
    Expected_returns=mean_portfolio_return(elite[0])
    Expected_risk=var_portfolio_return(elite[0])
    print('Expected returns of {} with risk of
{}\n'.format(Expected_returns,Expected_risk))
    iteration+=1
    print('Number of iterations ', iteration)


print('Portfolio of stocks after all the iterations:\n')
[print(hist_stock_returns.columns[i],':',elite[0][i]) for i in list(range(10))]


print('\nExpected returns of {} with risk of
{}\n'.format(Expected_returns,Expected_risk))
```