УДК 519.1
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.6

Б.С. Пономарчук[1]

Метрична розмірність прямої суми та прямого добутків метричних просторів

[1]Національний університет "Києво-Могилянська академія", 04655, м. Київ, вул. Григорія Сковороди, 2.
e-mail: [1]ponomarchuk.bogdan@gmail.com

B.S. Ponomarchuk[1]

Metric dimension of a direct sum and direct product of metric spaces

[1]National University of Kyiv-Mohyla Academy, 04655, Kyiv, 2 Scovoroda st.
e-mail: [1]ponomarchuk.bogdan@gmail.com

Для довільного метричного простору (X, d) підмножина $A \subset X$ називається розділяючою, якщо для деяких двох точок $x \neq y \in X$ існує точка a з множини A така, що $d(a, x) \neq d(a, y)$. Метричною розмірністю $md(X)$ простору X називається потужність розділяючої множини з найменшою кількістю елементів.

Загалом задача пошуку метричної розмірності метричного простору є NP–важкою задачею [1]. В даній роботі описано метричну розмірність для деяких конструкцій метричних просторів, зокрема повністю охарактеризовано метричну розмірність прямої суми метричних просторів і розглянуто певні властивості метричної розмірності прямого добутку метричних просторів.

Ключові слова: метрична розмірність, пряма сума метричних просторів, прямий добуток метричних просторів.

For an arbitrary metric space (X, d) subset $A \subset X$ is called resolving if for any two points $x \neq y \in X$ there exists point a in subset A for which following inequality holds $d(a, x) \neq d(a, y)$. Cardinality of the subset A with the least amount of points is called metric dimension.

In general, the problem of finding metric dimension of a metric space is NP–hard[1]. In this paper metric dimension for particular constructs of metric spaces is provided. In particular, it is fully characterized metric dimension for the direct sum of metric spaces and shown some properties of the metric dimension of direct product.

Key Words: metric dimension, direct sum of metric spaces, direct product of metric spaces.

1 Вступ

Поняття метричної розмірності метричних просторів було введене в 1953 році Блюменталем [2]. Через 20 років воно було застосоване до метричних просторів визначених на графах Харарі, Мелтером і Слатером [3, 4]. З'ясувалось, що метрична розмірність має широке коло застосувань, зокрема в хімії, робототехніці, для визначення місцезнаходження роботів, біології, комбінаторій оптимізації та інших [5, 4]. В загальному випадку пошук метричної розмірності простору, що визначається графами, є NP-важкою задачею, оскільки до задачі пошуку метричної розмірності зводиться задача пошуку кліки в графі [1]. Тому дослідження метричної розмірності проводились в декількох напрямках, зокрема опис метричної розмірності для певних родин графів [6, 4], або для певних конструкцій [7].

У 2013 році С. Бау та А. Ф. Беардон в роботі [8] продовжили ідею Блюменталя досліджувати метричу розмірність метричних просторів. Зокрема, ними було обчислено метричну розмірність куль в k–вимірному Евклідовому просторі. Пізніше М. Хейдарпур та С. Махсауді обчислили метричну розмірність геометричних просторів. Зрозуміло, що в загальному випадку задача пошуку метричної розмірності метричних просторів є NP-важкою, оскільки вона є NP-важкою для просторів, визначених графами. Тому є цікавими, як і у випадку графів, випадки, коли можна отримати формулу для обчислення метричної розмірності для певних родин метричних просторів.

В цій замітці ми розглянемо метричну розмірність конструкцій метричних просторів. А саме, повністю охарактеризуємо метричну розмірність для прямої суми метричних просторів і отримаємо певні оцінки для метричної розмірності прямого добутку метричних просторів.

2 Метрична розмірність деяких просторів

Нагадаємо означення метричної розмірності метричних просторів [9].

Нехай (X, d) — метричний простір. Кажуть, що непорожня підмножина A множини X розділяє точки простору (X, d) якщо для довільних різних точок x і y простору X існує така точка $a \in A$, що виконується нерівність $d(x, a) \neq d(y, a)$. Точки цієї підножини A називаються *розділяючими*. *Метричною розмірністю* $md(X)$ метричного простору (X, d) називають потужність мінімальної за відношенням включення множини B з усіх розділяючих підмножин множини X, а сама така підмножина B називається *метричним базисом* метричного простору (X, d).

Твердження 1. *Нехай (X, d) — метричний простір, у якого всі значення метрики d різні. В такому випадку $md(X) = 1$.*

Нагадаємо, що метричний простір (Y, d_Y) називається *еквідистантним*, якщо існує таке додатнє дісне число $c \in \mathbb{R}^+$, що для всіх $y_1, y_2 \in Y$ виконується рівність

$$d(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y_1 = y_2, \\ c, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Твердження 2. *Метричний базис n-точкового еквідистантного простору складається з $n - 1$ точок, тобто $md(Y) = |Y| - 1$.*

Твердження 3. *Нехай I — деяка множина індексів, $X = \{x_i\}_{i \in I}$ — підмножина множини дійсних чисел, для якої існує найбільший або найменший елемент x_0. Тоді точка x_0 є метричним базисом простору X з Евклідовою метрикою, і, відповідно, $md(X) = 1$.*

3 Пряма сума метричних просторів

Нехай (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n) — скінченні метричні простори, причому вважатимемо, що $X_i \cap X_j = \emptyset$, для всіх i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Прямою сумою метричних просторів $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$ називається простір визначений на множині $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ з метрикою

$$\tau_c(u, v) = \begin{cases} d_{X_i}(u, v), \text{ якщо } u, v \in X_i \\ c, \text{ в іншому випадку} \end{cases},$$

де c — деяке фіксоване додатнє число, для якого виконується нерівність

$$max\{diam(X_1), \ldots, diam(X_n)\} < c.$$

Тобто, якщо точки u та v належать до різних множин X_i та X_j, то відстань між ними дорівнює c. Якщо ж вони належать до однієї множини $u, v \in X_i$, то значення функції τ_c дорівнює відстані між цими точками відповідно до метрики визначеної на цій множині $d_{X_i}(u, v)$. Конструкція названа прямою сумою метричних просторів, оскільки група ізометрій прямої суми метричних просторів ізоморфна як група підстановок прямій сумі груп ізометрій цих просторів (див. [10]).

Теорема 1. *Метрична розмірність прямої суми $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ метричних просторів X_1, ..., X_n дорівнює сумі метричних розмірностей цих просторів*

$$md(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n) = \sum_{i=1}^{n} (md(X_i)).$$

Доведення. Нехай $V_i = \{v_1^i, \ldots, v_{k_i}^i\}$ — метричний базис простору X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Спочатку покажемо, що об'єднання множин $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ є розділяючою множиною. Справді, нехай x, y довільні точки простору $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$. Якщо x і y належать одній множині X_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, то існує точка v_i^j, $1 \leqslant i \leqslant k_j$, метричного базису V_j, а отже і множини V, що їх розділяє. Якщо x і y належать різним множинам X_j і X_q, $1 \leqslant j, q \leqslant n$, то вони розділятимуться довільною точкою множин V_j або V_q, які є підмножинами множини V.

Покажемо тепер, що множина V є метричним базисом прямої суми $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$, тобто найменшою за відношенням включення розділяючою множиною.

Нехай $v_j^q \in V$ — деяка точка метричного базису простору (X_q, d_{X_q}), $1 \leqslant q \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant k_q$. Покажемо, що множина $V \setminus \{v_j^q\}$ не є метричним базисом $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$. Оскільки точка, $v_j^q \in V$ входить до метричного базису простору (X_q, d_{X_q}), то існують деякі точки $u, w \in X_q$, що розділяються точкою v_j^q і не розділяються іншими точками з V_q. Тоді точки $u, w \in X_q$ не розділятимуться довільною точкою множини $V \setminus \{v_j^q\}$. Справді, точками множини $V_q \setminus \{v_j^q\}$ вони не розділятимуться за вибором пари u, w. Крім того, згідно з визначенням метрики τ для довільної точки $v_i^l \in V$, $1 \leqslant l \leqslant n$, $l \neq q$,

$1 \leqslant i \leqslant k_l$, яка не є точкою підмножини X_q виконується рівність:

$$\tau(u, v_l) = \tau(w, v_l) = c.$$

Оскільки точку v_j^q ми вибирали довільну, то V є найменшою за відношенням включення розділяючою множиною $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$, тобто метричним базисом. □

4 Прямий добуток метричних просторів

Прямим добутком метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) називається метричний простір визначений на множині $X \times Y$ та заданою на ній однією з трьох метрик d_1, d_2 або d_∞ (див. [11]):

1) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$;
2) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$;
3) $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2); d_Y(y_1, y_2)\}$.

Оскільки метричні простори $(X \times Y, d_1)$, $(X \times Y, d_2)$, $(X \times Y, d_\infty)$ топологічно еквівалентні, то часто не уточнюють, як саме задається метрика. З точки зору метричної розмірності всі три конструкції різні, і для відповідних метричних просторів метрична розмірність обчислюватиметься по-різному.

Теорема 2. *Нехай X — деякий метричний простір, всі значення метрики в якому попарно різні, а Y — скінченний еквідистантний метричний простір, $|Y| = m \geqslant 4$. Тоді для метричного простору $(X \times Y, d_1)$ виконується рівність*

$$md(X \times Y, d_1) = md(Y) = m - 1.$$

Доведення. Побудуємо розділяючу множину B метричного простору $(X \times Y, d_1)$ визначеного як прямий добуток просторів $X = \{x_i\}_{i \in I}$ та $Y = \{y_1, \ldots y_m\}$, де I — деяка множина індексів.

Нехай маємо дві різні точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times Y, d_1)$. Припустимо, що ці точки розділяються деякою точкою $(x_i, y_j) \in B$, $i \in I$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Тоді, згідно визначення матимемо:

$$d_1((x_1, y_1), (x_i, y_j)) \neq d_1((x_2, y_2), (x_i, y_j)).$$

Цю нерівність можна переписати в такому вигляді:

$$d_X(x_1, x_i) + d_Y(y_1, y_j) \neq d_X(x_2, x_i) + d_Y(y_2, y_j) \quad (1)$$

Розглянемо наступні випадки:

1. $x_1 = x_2$. В такому випадку в умові (1) доданки $d_X(x_1, x_i)$ та $d_X(x_2, x_i)$ будуть рівними і наша умова зведеться до

$$d_Y(y_1, y_j) \neq d_Y(y_2, y_j),$$

тобто y_j повинна розділяти точки y_1 і y_2. А оскільки простір Y еквідістантний, і точки y_1 і y_2 ми вибирали довільним чином, то в множину B мають входити всі точки вигляду (x_i, y_j), $1 \leqslant j \leqslant m - 1$, для деякого фіксованого i, $i \in I$.

2. $x_1 \neq x_2$. Покажемо, що довільна точка (x_i, y_j), $1 \leqslant j \leqslant m - 1$, $y_j \neq y_1$, $y_j \neq y_2$, розділятиме точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times Y)$. Спочатку зауважимо, що в множині B така точка існує, оскільки $|Y| \geqslant 4$. Так як простір (Y, d_Y) – еквідистантний, то

$$d_Y(y_1, y_j) = d_Y(y_2, y_j),$$

а отже умова 1 зведеться до вигляду

$$d_X(x_1, x_i) \neq d_X(x_2, x_i).$$

Але в просторі (X, d_X) всі значення метрики попарно різні, тому нерівність виконуватиметься.

Зауважимо, що за побудовою, множина

$$B = \{(x_i, y_1), \ldots, (x_i, y_{m-1})\},$$

де i деякий фіксований інекс з множини I, є також мінімальною розділяючою множиною, тобто базисом. Таким чином матимемо, що розмірність прямого добутку метричних просторів дорівнює розмірності еквідистантного простору

$$md(X \times Y, d_1) = m - 1 = md(Y).$$

□

Теорема 3. *Якщо (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, то метрична розмірність прямого добутку цих просторів з визначеною метрикою d_1 дорівнює*

$$md(X \times Y, d_1) = md(X) + md(Y).$$

Доведення. Нехай $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ і $Y = \{y_1, \dots y_m\}$, для яких $md(X)$ та $md(Y)$ — їх метричні розмірності відповідно. Покажемо, що множина

$$B_{X \times Y} = \{(x_1, y_m), \dots, (x_{n-1}, y_m), (x_{n-1}, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{m-1})\}$$

є базисом простору $(X \times Y, d_1)$. Справді, для будь-яких двох точок (x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2}) простору $X \times Y$, ми завжди можемо знайти розділяючу точку (x_u, y_v) таку, щоб одна з її координат співпадала з відповідною кординатою точок (x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2}). Тобто, щоб виконувалась одна з рівностей $x_u = x_{u_1}$ чи $x_u = x_{u_2}$, $y_v = y_{v_1}$ чи $y_v = y_{v_2}$. Тоді один з доданків в сумах:

$$d_1((x_{u_1}, y_{v_1}), (x_u, y_v)) = d_X(x_{u_1}, x_u) + d_Y(y_{v_1}, y_v)$$

$$d_1((x_{u_2}, y_{v_2}), (x_u, y_v)) = d_X(x_{u_2}, x_u) + d_Y(y_{v_2}, y_v)$$

буде перетворюватися в 0. Відповідно, відстані будуть різними. Таким чином $B_{X \times Y}$ є розділяючою множиною.

Покажемо тепер, що $B_{X \times Y}$ є мінімальною за відношенням включення.

Припустимо, що метричним базисом буде множина $B_{X \times Y} = \{(x_1, y_m), \dots, (x_{n-1}, y_m), (x_{n-1}, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{m-1})\} \setminus \{(x_i, y_j)\}$, де $1 \leqslant i < n, j = m$ або $i = n-1, 1 \leqslant j < m$. Розглянемо дві точки з координатами (x_i, y_j) та (x_i, y_m). В множині B для них має існувати розділяюча точка з координатами (u, v). Згідно визначення розділяючої точки матимемо:

$$d_1((u, v), (x_i, y_j)) \neq d_1((u, v), (x_i, y_m))$$

$$d_X(u, x_i) + d_Y(v, y_i) \neq d_X(u, x_i) + d_Y(v, y_m)$$

$$d_Y(v, y_i) \neq d_Y(v, y_m)$$

А так як наші простори еквідистантні то відстані $d_Y(v, y_i)$ та $d_Y(v, y_m)$ будуть рівними, тобто наше припущення неправильне і точка з координатами (x_i, y_j) має входити до метричного базису.

Розмір, таким чином, визначеного базису буде дорівнювати:

$$n-1+m-1 = (n-1)+(m-1) = md(X)+md(Y)$$

□

Вводячи додаткові обмеження на метричні простори, кількість точок у базисі прямого добутку можна зменшити. Найтривіальнішим прикладом в даному разі буде випадок, коли простори (X, d_X) і (Y, d_Y) такі, що всі відстані в $(X \times Y, d_1)$ є попарно різними. Тоді, відповідно, метрична розмірність простору $(X \times Y, d_1)$ дорівнюватиме одиниці $md(X \times Y) = 1$.

Теорема 4. *Якщо (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, то метричний простір визначений на їх добуткові з Евклідовою метрикою*

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \\ = \sqrt{(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2}$$

матиме метричну розмірність, що дорівнює сумі метричних розмірностей цих просторів

$$(X \times Y, d_2) = md(X) + md(Y). \qquad (2)$$

Доведення. Для просторів (X, d_X) та (Y, d_Y), де $X = \{x_1, \dots, x_n\}, Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ визначимо підмножину $B_{X \times Y} = \{(x_1, y_m), \dots, (x_{n-1}, y_m), (x_{n-1}, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{m-1})\}$ прямого добутку $X \times Y$ й покажемо, що ця множина є розділяючою. Нехай маємо дві різні точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times Y)$ та розділяючу їх (x_i, y_j). Згідно визначення метричного базису матимемо:

$$d_2((x_1, y_1), (x_i, y_j)) \neq d_2((x_2, y_2), (x_i, y_j))$$

$$\sqrt{d_X(x_1, x_i)^2 + d_Y(y_1, y_j)^2} \neq \\ \neq \sqrt{d_X(x_2, x_i)^2 + d_Y(y_2, y_j)^2}$$

$$d_X(x_1, x_i)^2 + d_Y(y_1, y_j)^2 \neq d_X(x_2, x_i)^2 + d_Y(y_2, y_j)^2$$

Далі застосовуючи міркування аналогічні неведеним в доведенні теореми (3) матимемо, що базис метричного простору $(X \times Y, d_2)$ такий самий як і для метричного простору $(X \times Y, d_1)$, а відповідно їх метричні розмірності збігаються. □

Зауваження 1. *В теоремі* 4 *рівність* (2) *виконується така ж як і для метрики d_1. Але, метрична розмірність просторів $(X \times Y, d_1)$*

та $(X \times Y, d_2)$ збігається не завжди. Для прикладу можна взяти в якості простору X вершини прямокутного трикутника з відстанями між ними, що дорівнюють 3, 4 та 5. А простір Y визначити як дві точки з відстанню 3 між ними. В такому випадку до метричного базису $(X \times Y, d_1)$ входитиме лише одна точка, а в метричний базис простору $(X \times Y, d_2)$ входитимуть дві точки. Тому матимемо, що $md(X \times Y, d_1) \neq md(X \times Y, d_2)$.

Теорема 5. *Нехай (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, на яких визначено прямий добуток $X \times Y$ з метрикою*

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2); d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Метрична розмірність метричного простору $(X \times Y, d_\infty)$ в такому випадку дорівнюватиме

$$md(X\times Y, d_\infty) = \begin{cases} |X| \times (|Y| - 1), & \text{у випадку, якщо } c_X > c_Y, \\ |Y| \times (|X| - 1), & \text{у випадку, якщо } c_X < c_Y, \\ |X| \times |Y| - 1, & \text{у випадку, якщо } c_X = c_Y. \end{cases}$$

де c_X і c_Y ненульові значення метрик просторів X і Y відповідно.

Доведення. Нехай, як і раніше, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ і $Y = \{y_1, \ldots y_m\}$ і $md(X)$ та $md(Y)$ — їх метричні розмірності відповідно. Розглянемо можливі випадки.

1. $c_X > c_Y$. Визначимо множину $B = \{(x_i, y_j)|i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m - 1\}$ й покажемо, що вона є метричним базисом простору $(X \times Y, d_\infty)$.

В такому випадку, для двох довільних точок (x_u, y_m) та (x_v, y_m), що належать множині $X \times Y$ та не входять до метричного базису B ми зможемо взяти розділяючою деяку точку (x_u, y_j) й таким чином матимемо що

$$\begin{gathered} d_\infty((x_u, y_m), (x_u, y_j)) = \\ = \max\{d_X(x_u, x_u); d_Y(y_m, y_j)\} = \\ = d_Y(y_m, y_j) \\ d_\infty((x_v, y_m), (x_u, y_j)) = \\ = \max\{d_X(x_u, x_v); d_Y(y_m, y_j)\} = \\ = d_X(x_u, x_v) \\ d_Y(y_m, y_1) \neq d_X(x_u, x_v). \end{gathered}$$

В результаті наші відстані будуть різними й B буде розділяючою множиною. Тепер покажемо, що B є мінімальною.

Нехай існує деяка множина $B' = \{(x_i, y_j)|i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m - 1\} \setminus \{(x_{u'}, y_{v'})\}$, де $1 \leqslant u' \leqslant n, 1 \leqslant v' < m$, і припустимо, що вона є метричним базисом простору $(X \times Y, d_\infty)$. Нехай також задано пару точок $(x_{u'}, y_{v'})$ та $(x_{u'}, y_m)$ простору $X \times Y$. Якщо ця пара точок розділятиметься точкою з метричного базису $(x_u, y_v) \in B'$ матимемо:

1. $x_u \neq x_{u'}$. Розглянемо відстані між точками

$$\begin{gathered} d_\infty((x_{u'}, y_{v'}), (x_u, y_v)) = \\ = \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_{v'}, y_v)\} = \\ = d_X(x_{u'}, x_u) = \\ = \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_m, y_v)\} = \\ = d_\infty((x_{u'}, y_m), (x_u, y_v)). \end{gathered}$$

Тобто $d_\infty((x_{u'}, y_{v'}), (x_u, y_v)) = d_\infty((x_n, y_m), (x_u, y_v))$. А це неможливо за визначенням метричного базису.

2. $x_u = x_{u'}$. В цьому разі наші відстані матимуть наступний вигляд

$$\begin{gathered} d_\infty((x_{u'}, y_{v'}), (x_u, y_v)) = \\ = \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_{v'}, y_v)\} = \\ = d_Y(y_{v'}, y_v) = d_Y(y_m, y_v) = \\ = \max\{d_X(x_{u'} x_u); d_Y(y_m, y_v)\} = \\ = d_\infty((x_{u'}, y_m), (x_u, y_v)). \end{gathered}$$

Що також неможливо за визначенням.

Таким чином точка $(x_{u'}, y_{v'})$ має входити до метричного базису B метричного простору $(X \times Y, d_\infty)$, а сама визначена нами множина B є мінімальною.

В результаті матимемо, що $md(X\times Y, d_\infty) = |X| \times (|Y| - 1)$.

2. $c_X < c_Y$. Використовуючи аналогічні попереднім міркування, в цьому випадку отримаємо, що метричниа розмірність прямого добутку становить

$$md(X \times Y, d_\infty) = |Y| \times (|X| - 1).$$

$c_X = c_Y$. Спробуємо побудувати розділяючу множину B для простору $(X\times Y, d_\infty)$. Нехай маємо дві різні точки $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2}) \in X \times Y$

та розділяючу їх $(x_i, y_j) \in B$. В такому випадку, згідно визначення, в нас має виконуватись наступна нерівність:

$$\max\{d_X(x_{u_1}, x_i); d_Y(y_{v_1}, y_j)\} \neq$$
$$\neq \max\{d_X(x_{u_2}, x_i); d_Y(y_{v_2}, y_j)\}$$

Так як наші відстані еквідистантних просторів X та Y однакові, то дана нерівність може виконуватись лише у випадку, коли один із максимумів перетворюється в 0. Це можливо лише тоді, коли одна з точок $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2})$ співпадатиме з базисною. І так має бути для кожної з пар точок простору $(X \times Y, d_\infty)$. Таким чином в базис B входитимуть всі точки окрім однієї, а метрична розмірність цього простору становитиме $md(X \times Y, d_\infty) = |X| \times |Y| - 1$. При чому за побудовою така множина B є мінімальною.

$\square$

Список використаних джерел

1. *Гарі М. Р., Джонсон Д. С.* Комп'ютери та некерованість; Посібник з теорії NP-повноти., В. Х. Фріман і Ко., Нью-Йорк, 1990.
2. *Блюменталь Л. М.* Теорія та застосування геометрії відстаней. Кларендон Пресс, Оксфорд, 1953.
3. *Харарі Ф., Мелтер Р. А. Про метричну розмірність грфу.* Арс Комбін. 1976, 20, 191–195.
4. *Слейтер П. Дж. Листя дерев.* Конгр. Нумер. 1975, 14, 549-559.
5. *Себо А., Таньє Е. Про метричні генератори графів.* Мат. Опер. Рес. 2004, 29 (2), 383-393.
6. *Дуденко М., Олійник. Б. Про уніциклічні графи метричної розмірності 2 з вершинами ступеня 4.* Алгебра Дискретна Мат. 2018, 26 (2), 256-269.
7. *Родрігес-Веласкес Ж.А., Єро І.Г. Примітка про часткову розмірність декартового добутку графів.* Прикл. Мат. Обч. 2010, 217, 3571–3574.
8. *Бау С., Бердон А. Метрична розмірність метричних просторів.* Обч. Методи Функц. Теорія 2013, 13.
9. *Гейдарпур М., Саїд М. Метрична розмірність геометричних просторів.* Топологія Прикл. 2014, 178, 230–235.
10. *Олійник Б. k-однорідність n-кратної прямої суми метричного простору з собою.* Вісник Унів. Київ 2008, 36–39.
11. *Сіркоїд М.* Метрики. Спрінгер, Лондон, 2007.

References

1. GAREY, M. R. and JOHNSON, D. S. (1990) "Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness", W. H. Freeman & Co., New York.
2. BLUMENTHAL, L. M. (1953) "Theory and applications of distance geometry", Clarendon Press, Oxford.
3. HARARY, F. and MELTER R. A. (1976) "On the Metric Dimension of a Graph" Ars Combin. 20, pp. 191–195.
4. SLATER, P. J. (1975) "Leaves of Trees", Congr. Numer., 14, pp. 549–559.
5. SEBO, A. and TANNIER, E. (2004) "On Metric Generators of Graphs", Math. Oper. Res., 29 (2), pp. 383–393.
6. DUDENKO, M. and OLIYNYK, B. (2018) "On unicyclic graphs of metric dimension 2 with vertices of degree 4", Algebra Discrete Math., 26 (2), pp. 256–269.
7. RODRIGUEZ-VELAZQUEZ, J. A. and YERO, I. G. (2010) "A note on the partition dimension of Cartesian product graphs", Appl. Math. Comput., 217, pp. 3571–3574.
8. BAU, S. and BEARDON, A. (2013) "The Metric Dimension of Metric Spaces", Comput. Methods Funct. Theory, 13.
9. HEYDARPOUR, M. and SAEID, M. (2014) "The metric dimension of geometric spaces", Topology Appl., 178, pp. 230–235.
10. OLIYNYK, B. (2008) "k-homogeneity of the n-fold direct sum of metric space over itself", Bull Univ. Kyiv, pp. 36–39.
11. SEARCOID, M. (2007) "Metrics", Springer, London.