Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття освітнього ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Дослідження стійкості матричних диференціальних рівнянь.

студентки 4 курсу
Баньковської Анни Олександрівни

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Пічкур В.В.

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та рекомендована до захисту, протокол №18 від 10.06.2022 р.

Завідувач кафедри МСС
доктор технічних наук, доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2022

Анотація

Робота присвячена дослідженню стійкості матричних диференціальних рівнянь. На основі першого методу Ляпунова записані та обґрунтовані критерії стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості для матричного рівняння Ляпунова. Обґрунтовані теореми другого методу Ляпунова, а саме теорема про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість для неавтономного та автономного випадку. Для матричного рівняння Ляпунова наведений метод побудови функції Ляпунова за допомогою матричного рівняння Ляпунова.

Зміст

Вступ

Матричні диференціальні рівняння, як математичний об'єкт, з'являються при розв'язуванні задач стійкості систем, керування і оцінювання параметрів. Так, при побудові функції Ляпунова для лінійної нестаціонарної системи одержуємо матричне рівняння Ляпунова. При розв'язуванні задачі оптимального керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості, при знаходженні розв'язків задачі лінійного оцінювання приходимо до матричного диференціального рівняння Ріккаті [2–4, 6].

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня бакалавра присвячена дослідженню стійкості матричних диференціальних рівнянь. Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків і літератури. У першому розділі вивчаються лінійні однорідні і неоднорідні матричні диференціальні рівняння. Для неоднорідного рівняння будується формула Коші. Для матричного диференціального рівняння Ляпунова розглядаються теореми стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості на основі першого методу Ляпунова [2]. У другому розділі розглядається матричне диференціальне рівняння Ріккаті, вивчаються найпростіші властивості та існування розв'язку [3, 6]. Третій розділ присвячений другому методу Ляпунова для матричних диференціальних рівнянь. Розглядаються два випадки: автономний та неавтономний. Для кожного випадку формулюється означення повної похідної в силу системи, розглядаються теореми про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість незбуреного розв'язку за Ляпуновим. Для диференціального рівняння Ляпунова розглядається методика конструювання функції Ляпунова, наводиться відповідний приклад.

Розділ 1

Лінійні матричні диференціальні рівняння

Розглядати матричні диференціальні рівняння почнемо з лінійних рівнянь вигляду [3]

$$\dot{X} = A(t) \cdot X + X \cdot B(t) + F(t), \tag{1.1}$$

де X – шукана n-мірна матриця , $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – задані неперервні матриці. Визначимо властивості розв'язків таких рівнянь, а також побудуємо загальні і частинні розв'язки.

1.1 Однорідне рівняння

Розглянемо однорідне рівняння [3]

$$\dot{X} = A(t) \cdot X + X \cdot B(t), \tag{1.2}$$

Для його аналізу запишемо систему рівнянь типу $\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) y_k, i = 1, \dots, n$ Таку систему можна записати у векторній формі:

$$\dot{y} = A(t) \cdot y, \tag{1.3}$$

де $y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Система має n лінійно незалежних розв'язків:

$$y^j(t) = \{y_1^j(t), \dots, y_n^j(t)\}.$$

Загальний розв'язок рівняня (1.3) можна записати у вигляді:

$$y(t) = Y(t) \cdot C, \tag{1.4}$$

$C = \{C_1, \dots, C_n\}$ – вектор довільних постійних, та

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_1^2(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & y_2^2(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^1(t) & y_n^2(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Якщо потрібно знайти частинний розв'язок що задовольняє початковій умові:

$$y(t_0) = y^0, \tag{1.5}$$

то постійний вектор c можна визначити з умови $Y(t_0) \cdot C = y^0$. Тому рішення задачі Коші (1.3), (1.5) можна представити у вигляді:

$$y(t) = W(t, t_0) \cdot y^0, W(t, t_0) = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0), \tag{1.6}$$

де $W(t, s)$ – матриця Коші .

Розглянемо властивості матриці Коші [3]

1. Матриці Коші задовольняє умова $W(t, t) = E$ при будь-якому значенні t.

2. $\dot{W}(t, s) = A(t) \cdot W(t, s)$

3. Матриця Коші $W(t, s)$ однозначно визначається матрицею $A(t)$ що входить в (1.3).

   З цих властивостей, зокрема, випливає, що матриця Коші $W(t, t_0)$ є розв'язком матричного диференціального рівняння:

$$\dot{Y} = A(t) \cdot Y, \tag{1.7}$$

   що задовольняє початковій умові $Y(t_0) = E$.

4. Якщо відома матриця Коші $W(t, s)$, то загальний розв'язок рівняння (1.7) знаходиться без квадратур за формулою:

$$Y(t) = W(t, s) \cdot C,$$

   де C - довільна n-мірна постійна матриця.

Разом з рівнянням (1.7) розглянемо ще одне матричне диференціальне рівняння:

$$\dot{Z} = Z \cdot B(t), \tag{1.8}$$

де $B(t)$ — задана неперервна матриця. Позначимо через $Z(t)$ довільний частинний розв'язок цього рівняння.Побудуємо його так :до обох частин рівняння (1.8) застосуємо операцію транспонування.Отримаємо рівняння

$$\dot{Z}^* = B^*(t) \cdot Z^*, \tag{1.9}$$

Це рівняння того ж типу, що й (1.7). Його властивості вже описані вище і можна розглядати його матрицю Коші. Для цього виписуємо відповідне векторне рівняння

$$\dot{z} = B^* \cdot z$$

і матрицю $U(t)$ довільних його n лінійно незалежних розв'язків . Тоді відповідна матриця Коші визначається формулою

$$V^*(t,s) = U(t)U^{-1}(s)$$

і частинний розв'язок рівняння (1.9) можна представити у вигляді

$$Z^*(t) = V^*(t,t_0) \cdot Z^*(t_0).$$

Тому частинний розв'язок рівняння (1.8) отримуємо у вигляді

$$Z(t) = Z(t_0) \cdot V(t,t_0).$$

Теорема 1.1. *[3] Якщо відомі неособливі розв'язки $Y(t)$, $Z(t)$ рівнянь (1.7) і (1.8), відповідно, то загальний розв'язок рівняння (1.2) знаходиться без квадратур за формулою*

$$X(t) = Y(t) \cdot C \cdot Z(t), \tag{1.10}$$

де C– довільна постійна матриця. Зокрема, якщо матриці A і B в рівнянні (1.2) постійні, то загальний його розв'язок можна представити у вигляді

$$X(t) = e^{At} \cdot C \cdot e^{Bt}.$$

1.2 Неоднорідне рівняння

Розглянемо властивості розв'язків неоднорідного рівняння (1.1) [3].

Теорема 1.2. *[3] Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.1) являє собою суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (1.2) і частинного розв'язку рівняння (1.1).*

Для рівняння вигляду

$$\dot{X} = A(t) \cdot X + F(t), \tag{1.11}$$

ця теорема дає важливий наслідок.

Наслідок [3] *Якщо відомі два частинні розв'язки рівняння (1.11) X_1 і X_2, то загальний розв'язок цього рівняння знаходиться без квадратур за формулою*

$$X = (X_1 - X_2) \cdot C + X_2,$$

де C —довільна постійна матриця. Аналогічне твердження справедливе і щодо рівняння:

$$\dot{Y} = Y \cdot B(t) + \Phi(t). \tag{1.12}$$

У загальному випадку для рівняння (1.1) це питання вирішується дещо складніше.

Теорема 1.3. *[3] Якщо відомі три частинні розв'язки $X_1(t)$, $X_2(t)$ и $X_3(t)$ неоднорідного рівняння (1.1) і існує момент часу t_0 такий, що матриця $X_{12}^0 = X_1(t_0) - X_2(t_0)$ неособлива, то загальний розв'язок неоднорідного рівняння знаходиться без квадратур.*

Тому загальний розв'язок рівняння (1.1) тепер можна представити у вигляді:

$$X(t) = W(t, t_0) \cdot C \cdot V(t, t_0) + X_3(t), \tag{1.13}$$

де $V(t, t_0) = (X_{12}^0)^{-1} \cdot W^{-1}(t, t_0) \cdot X_{12}(t)$ і $X_{13}(t) \cdot X_{12}^{-1}(t) \cdot W(t, t_0) = W(t, t_0) \cdot X_{13}^0 (X_{12}^0)^{-1}$.

Наслідок [3] *Для будь-яких трьох частинних розв'язків $X_1(t)$, $X_2(t)$ і $X_3(t)$ справедливі рівності*

$$\begin{cases} W^{-1}(t, s) X_{13}(t) X_{12}^{-1}(t) W(t, s) = X_{13}(s) X_{12}^{-1}(s), \\ V(t, s) X_{13}^{-1}(t) X_{12}(t) V^{-1}(t, s) = X_{13}^{-1}(s) X_{12}(s), \end{cases}$$

де $X_{jk} = X_j - X_k$.

1.3 Частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Формула Коші

Використовуючи наведені вище факти про розв'язок рівняння (1.2),можна показати, що загальний розв'язок рівняння (1.1) представимо у вигляді

$$X(t) = Y(t) \cdot C \cdot Z(t) + \tilde{X}(t), \tag{1.14}$$

де перший доданок в правій частині рівності являє собою загальний розв'язок рівняння (1.2), а другий доданок є довільним частинним розв'язком рівняння (1.1) [3]. Щоб отримати частинний розв'язок $\tilde{X}(t)$, можна скористатися методом варіації довільної сталої, тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.1) можна представити у вигляді:

$$X(t) = Y(t) \cdot C \cdot Z(t) + \int_{t_0}^{t} W(t, s) \cdot F(s) \cdot V(t, s) ds, \tag{1.15}$$

де C – довільна постійна матриця, $Y(t)$ і $Z(t)$ – частинні розв'язки рівнянь (1.7) і (1.8), відповідно, а матриці $W(t, s)$ і $V(t, s)$ визначаються формулами

$$W(t, s) = Y(t) \cdot Y^{-1}(s), V(t, s) = Z^{-1}(s) Z(t).$$

Розв'язок рівняння (1.1),що задовольняє початковій умові:

$$X(t_0) = X^0, \tag{1.16}$$

очевидно, визначається наступною формулою Коші:

$$X(t) = W(t, t_0) \cdot X^0 \cdot V(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t, s) \cdot F(s) \cdot V(t, s) ds. \tag{1.17}$$

1.4 Дослідження стійкості

Розглянемо диференціальне рівняння Ляпунова [4]

$$\dot{X} = A(t) \cdot X + X \cdot A^T(t), X(t_0) = X_0, \tag{1.18}$$

де $A(t)$ задана матриця ,X — шукана n-квадратна матриця. Відомо , що розв'язок має наступний вигляд

$$X(t) = Q(t, t_0)X_0Q^T(t, t_0). \tag{1.19}$$

1.4.1 Перший метод Ляпунова.

Теорема 1.4. *[4]Для того, щоб нульовий розвязок системи (1.18) був стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $Q(t, t_0)$ цієї системи була обмеженою.*

Доведення. Спочатку покажемо необхідність. Доведемо від супротивного.Припустимо, що нульовий розвязок (1.18) є стійким за Ляпуновим, але її фундаментальна матриця $Q(t, t_0)$ необмежена. Це означає, що серед всіх стовпців матриці $Q(t, t_0)$ існує хоч би один $j-$ й стовпець $x^j(t)$,а також послідовність $t_k \geq t_0, k = 1, 2.., $, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(j)}(t_k)\| = \infty.$$

Зафіксуємо деяке $\epsilon > 0$. Оскільки нульовий розвязок системи (1.18) є стійким за Ляпуновим, то існує $\delta > 0$ таке, що

$$\|X(t, X_0, t_0)\| < \epsilon \tag{1.20}$$

як тільки $\|X_0\| < \delta$. З умови $Q(t_0, t_0) = E$ маємо, що $j-$ й стовпчик матриці $Q(t_0, t_0)$ співпадає з $j-$ м ортом $e^{(j)}$, тобто $x^{(j)}(t_0) = e^{(j)}$. Отже,запишемо розв'язок системи (1.18) за формолую (1.19)

$$x^{(j)}(t) = Q(t, t_0)e^{(j)}Q^T(t, t_0)$$

Розглянемо $y(t) = \frac{\delta}{2}x^{(j)}$. Оскільки система (1.18) лінійна, то $y(t)$ є її розвязком, при цьому $\|y(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. З(1.20) випливає $\|y(t)\| < \epsilon$. Але

$$\lim_{k\to\infty} \|y(t_k)\| = \frac{\delta}{2} \lim_{k\to\infty} \|x^{(j)}(t_k)\| = \infty.$$

Одержали протиріччя.

Достатність. Якщо фундаментальна матриця $Q(t, t_0)$ обмежена, то знайдуться константи $C > 0$,$M > 0$,

такі, що $\|Q(t, t_0)\| \leq C$,$\|Q^T(t, t_0)\| \leq M$. Тоді з формули (1.19) випливає

$$\|X(t, X_0, t_0)\| \leq \|Q(t, t_0)\| \cdot \|X_0\| \cdot \|Q^T(t, t_0)\| \leq C \cdot \|X_0\| \cdot M \tag{1.21}$$

Зафіксуємо довільне $\epsilon > 0$ і виберемо $\delta = \frac{\epsilon}{CM}$. Тоді з (1.21) при $\|X_0\| < \delta$ одержуємо

$$\|X(t, X_0, t_0)\| \leq C\|X_0\|M < \epsilon$$

Отримаємо, що нульовий розвязок системи (1.18) є стійким за Ляпуновим. $\square$

Теорема 1.5. *[4] Для того, щоб нульовий розвязок системи* (1.18) *був нестійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $Q(t, t_0)$ цієї системи не була обмеженою.*

Доведення. Спочатку покажемо необхідність. Доведемо від супротивного.Припустимо, що нульовий розвязок (1.18) є нестійким за Ляпуновим, але її фундаментальна матриця $Q(t, t_0)$ обмежена. Якщо фундаментальна матриця $Q(t, t_0)$ обмежена, то знайдеться константа $C > 0$,така, що

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(j)}(t_k)\| \leq C.$$

Зафіксуємо деяке $\epsilon > 0$. Оскільки нульовий розвязок системи (1.18) є нестійким за Ляпуновим, то існує $\delta > 0$ таке, що

$$\|X(t, X_0, t_0)\| \geq \epsilon \tag{1.22}$$

як тільки $\|X_0\| < \delta$. З умови $Q(t_0, t_0) = E$ маємо, що $j-$ й стовпчик матриці $Q(t_0, t_0)$ співпадає з $j-$ м ортом $e^{(j)}$, тобто $x^{(j)}(t_0) = e^{(j)}$. Отже,запишемо розв'язок системи (1.18) за формолую (1.19)

$$x^{(j)}(t) = Q(t, t_0)e^{(j)}Q^T(t, t_0)$$

Розглянемо $y(t) = \frac{\delta}{2}x^{(j)}$. Оскільки система (1.18) лінійна, то $y(t)$ є її розвязком, при цьому $\|y(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. З(1.22) випливає $\|y(t)\| \geq \epsilon$. Але

$$\lim_{k\to\infty} \|y(t_k)\| = \frac{\delta}{2} \lim_{k\to\infty} \|x^{(j)}(t_k)\| \leq \frac{\delta C}{2}.$$

Одержали протиріччя.

Достатність.Якщо матриця $Q(t, t_0)$ необмежена,то це означає, що серед всіх стовпців матриці $Q(t, t_0)$ існує хоч би один $j-$ й стовпець $x^j(t)$,а також послідовність $t_k \geq t_0, k = 1, 2.., $, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(j)}(t_k)\| = \infty.$$

Тоді згідно попередньої теореми про стійкість, розв'язання буде нестійке. $\square$

Теорема 1.6. *[4] Для того, щоб нульовий розвязок системи* (1.18) *був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{t\to\infty} \|Q(t, t_0)\| = 0.$$

Доведення. Спочатку покажемо необхідність. Доведемо від супротивного.Припустимо, що нульовий розвязок (1.18) є асимптотично стійким за Ляпуновим,але умова $\lim_{t\to\infty}\|Q(t,t_0)\| = 0$ не виконується. Тоді знайдеться $j-$ й стовпчик $x^j(t)$ матриці $Q(t,t_0)$ такий, що $\lim_{t\to\infty}\|x^j(t)\| \neq 0$. З умови $Q(t_0,t_0) = E$ маємо $x^{(j)}(t_0) = e^{(j)}$, де $e^{(j)}-$ $j-$ й орт. Зафіксуємо довільне $\delta > 0$ і розглянемо $y(t) = \frac{\delta}{2}x^{(j)}(t)$. Оскільки $x^{(j)}(t)$ є розвязком системи (1.18) і система (1.18) лінійна, то $y(t)$ є розвязком цієї системи, при цьому $\|y(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\|y(t)\| = \frac{\delta}{2}\lim_{t\to\infty}\|x^{(j)}(t)\| \neq 0.$$

Одержали протиріччя з означенням асимптотичної стійкості розвязку.

Достатність. Якщо $\lim_{t\to\infty}\|Q(t,t_0)\| = 0$, то фундаментальна матриця $Q(t,t_0)$ є обмеженою,а також обмеженою є матриця $Q^T(t,t_0)$. За теоремою про стійкість нульовий розвязок системи (1.18) є стійким за Ляпуновим. З формули (1.19) випливає

$$\|X(t,X_0,t_0)\| \leq \|Q(t,t_0)\|\cdot\|X_0\|\cdot\|Q^T(t,t_0)\| \tag{1.23}$$

Для довільного δ і початкових умов, що задовольняють умову $\|X_0\| < \delta$ з нерівності (1.23) одержуємо $\lim_{t\to\infty}\|X(t,X_0,t_0)\| = 0$. □

Наслідок [4] *Якщо в (1.18) матриця A має постійні елементи, то для того, щоб незбурений розвязок $X(t) = 0$,нашої отриманної системи був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння*

$$P(\lambda) = |A - \lambda\cdot E| = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1}\ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0,$$

де p_0, p_{1n}-– дійсні числа, мали відємні дійсні частини $Re\lambda_j \leq 0$, $j = 1,2\ldots,n$.

Якщо серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n$ є хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений розвязок $X(t) = 0$ рівняння є нестійким.

Нехай корені характеристичного рівняння задовольняють умови: $Re\lambda_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$, $Re\lambda_i \leq 0$, $i = m+1,\ldots,n$. Якщо корені $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_m$ -– прості, то незбурений розвязок $X(t) = 0$ є стійким. Якщо серед $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ є кратні, але вони задовольняють умову $r = n-k$, $r = rang(A-\lambda\cdot E)$, k -– кратність кореня, то незбурений розвязок $X(t) = 0$ матричного рівняння є стійким. В іншому випадку розвязок є нестійким.

1.5 Інтегральна лійка та її властивості

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду [1]

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{1.24}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ - вектору стану,$t \in \mathbb{R}^n$, $(x,t) \in D, D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область, $f : D \to \mathbb{R}^n$ –функція, яка в області D задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші системи (1.24). Зокрема, можемо вважати, що відображення f задовільняє умову неперервності за змінною t і локальної ліпшицевості за x. Позначимо $x(t, x_0, t_0)$ розв'язок системи (1.24) з умовою Коші $x(t_0) = x_0$.

Теорема 1.7. *[1] Припустимо, що $A \subset D$– компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$, всі розв'язки $x(t, x_0, t_0)$ системи (1.24) з початковими умовами $x(t_0) = x_0, (x_0, t_0) \in A$ при $t \in [a, b]$ існують і їхні графіки належать області D. Тоді сукупність ψ таких розв'язків є компактом в просторі $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Крім того, множина*

$$H = \{(x, t) \in D : x = x(t, x_0, t_0), t \in [a, b], (x_0, t_0) \in A\},$$

яка складається з точок, що лежать на графіках розв'язків системи (1.24) з початковими умовами $x(t_0) = x_0$, $(x_0, t_0) \in A$ при $t \in [a, b]$ є компактом в $\mathbb{R}^{n+1}$

Розглянемо властивості перетину інтегральної лійки лінійної системи диференціальних рівнянь. Розглянемо систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + g(t), \tag{1.25}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$, $C(t)$– $n \times n$ - матриця з неперервними компонентами, $g(t)$ – n-вимірна неперервна функція, $t \in [a, b]$. Позначимо $\Theta(t, s)$ фундаментальну матрицю системи $\frac{dx}{dt} = C(t)x$ нормовану за моментом s, де t, $s \in [a, b]$.За формулою Коші

$$x(t, x_0, t_0) = \Theta(t, t_0)x_0 + a(t), a(t) = \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)g(s)ds.$$

Теорема 1.8. *[1] Нехай*

$$A_0 = E(Q_0, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Q_0^{-1}(x - x_0), x - x_0\rangle \leq 1\}$$

є еліпсоїдом, точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ є центром еліпсоїда, Q_0 – симетрична додатновизначена $n \times n$- матриця. Тоді перетин інтегральної лійки є еліпсоїдом

$$H(\tau) = E(Q(\tau), z(\tau)),$$

де $z(t)$ є розв'язком системи (1.25) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, $Q(t)$ – симетрична додатновизначена $n \times n$- матриця, яка є розв'язком матричного диференціального рівняння Ляпунова

$$\frac{dQ(t)}{dt} = C(t)Q(t) + Q(t)C^*(t), Q(t_0) = Q_0, \tag{1.26}$$

де $\tau \in [a, b]$.

Як знайти обернену матрицю?

Розглянемо матричне диффеременціальне рівняння Ляпунова (1.26). Далі , продиференціюємо рівняння (1.26) :

$$\frac{d}{dt}(Q(t)Q^{-1}(t)) = 0.$$

Продиференціювавши, отримаємо :

$$Q^{'}(t)Q^{-1}(t) + Q(t)(Q^{-1}(t))^{'} = 0.$$

Зробимо заміну :

$$Q^{-1}(t) = R(t).$$

Помножимо на $Q^{-1}(t)$:

$$Q^{-1}(t)Q(t)R^{'}(t) = Q^{-1}(t)(-Q^{'}(t))R(t).$$

Використовуючи відомий факт, що $Q(t)Q^{-1}(t) = E$, спростимо рівняння:

$$R^{'}(t) = -R(t)Q^{'}(t)R(t).$$

Розпишемо множник $Q^{'}(t)$:

$$R^{'}(t) = -R(t)(C(t)Q(t) + Q(t)C^{*}(t))R(t),$$

$$R^{'}(t) = -R(t)C(t)Q(t)R(t) - R(t)Q(t)C^{*}(t)R(t),$$
$$R^{'}(t) = -R(t)C(t) - C^{*}(t)R(t), R(t_0) = Q_0^{-1}.$$

Зауважимо, що отримали матричне диференціальне рівняння Ляпунова, тоді можемо записати аналогічну формулу для знаходження $Q(t)$ тільки для знаходження $R(t)$:

$$R(t) = X(t, t_0)Q_0^{-1}X^{*}(t, t_0).$$

Щоб знайти потрібну фундаментальну матрицю , використаємо такий факт:

$$X(t, t_0) = \Theta^{*}(t_0, t), \Theta^{-1}(t, t_0) = \Theta(t_0, t).$$

1.5.1 Приклади

Приклад 1.1. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax + e^{t}, x(0) = x_0 \in [-1, 1]. \tag{1.27}$$

Тоді запишемо , що

$$A_0 = E(Q_0, x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \langle Q_0^{-1}(x - x_0), x - x_0\rangle \leq 1\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^1 : Q_0^{-1}(t)(x - x_0)^2 \leq 1\right\}.$$

Отримаємо , що :

$$(x - x_0)^2 \leq Q_0(t),$$

Знайшовши корінь квадратний з нерівності , отримаємо

$$-\sqrt{Q_0(t)} \leq (x - x_0) \leq \sqrt{Q_0(t)},$$

Тоді для нашого випадку,коли $x_0 = 0$, отримаємо

$$\left\{x \in \mathbb{R}^1 : x^2 \leq 1\right\} = [-1, 1].$$

Використовуючи матричне диференціальне рівняння Ляпунова ,знайдемо $Q(t)$:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 2aQ(t).$$

З попередніх міркувань , запишемо , що

$$Q(t_0) = Q_0 = 1.$$

Звідси,

$$Q(t) = e^{2at}.$$

За формулою Коші знайдемо z(t) , де z(t) розв'язок рівняння (1.27):

$$z(t) = a(t) = \int_0^t e^{a(t-s)} e^s ds = \begin{vmatrix} u = s + a(t-s) \\ \frac{du)}{ds} = 1 - a \\ ds = \frac{1}{1-a} du \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-a} \int_0^t e^u du = \frac{1}{1-a} e^u \Big|_0^t = \frac{e^{s+a*(t-s)}}{1-a} \Big|_0^t = \frac{e^t}{1-a} - \frac{e^{at}}{1-a} = \frac{e^t - e^{at}}{1-a}.$$

За теоремою 1.8 , можемо записати

$$H(t) = E(Q(t), z(t)) = \left\{ x \in \mathbb{R}^1 : e^{-2at}(x - \frac{e^t - e^{at}}{1-a})(x - \frac{e^t - e^{at}}{1-a}) \leq 1 \right\}.$$

Отримаємо нерівність, що описує множину H

$$(x - \frac{e^t - e^{at}}{1-a})^2 \leq e^{2at}.$$

Розглянемо три випадки :

1. Для $a > 0$,

$$[-e^{at} + \frac{e^t - e^{at}}{1-a}; e^{at} + \frac{e^t - e^{at}}{1-a}].$$

2. Для $a = 0$,
$$[-2 + e^{-t}; e^{t}].$$

3. Для $a > 0$,
$$[-e^{-at} + \frac{e^{t} - e^{-at}}{1 + a}; e^{-at} + \frac{e^{t} - e^{-at}}{1 + a}].$$

Приклад 1.2. Розглянемо систему диференціальних рівнянь :

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1. \end{cases}$$

Для системи, отримаємо загальний розв'язок :

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 sin(t) + C_2 cos(t), \\ x_2 = C_1 cos(t) - C_2 sin(t). \end{cases}$$

Розглянемо кілька випадків :

1. Розглянемо перший випадок , коли для початкових умов задана така умова
$$x_{10}^2 + x_{20}^2 \leq R^2.$$
З нерівності початкових умов , маємо:
$$Q_0 = R^2 E.$$
Запишемо фундаментальну матрицю системи :
$$\Theta(t, 0) = \begin{pmatrix} sin(t) & cos(t) \\ cos(t) & -sin(t) \end{pmatrix}.$$
Знайдемо $Q(t)$ за формулою
$$Q(t) = \Theta(t, 0) Q_0 \Theta^*(t, 0) = R^2 E.$$
Використовуючи теорему 1.8 , отримаємо :
$$H(t) = E(Q(t), 0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle R^{-2} x, x \rangle \leq 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, x \rangle \leq R^2\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq R\right\}.$$
Нехай візьмемо $R = 1$, побудуємо еліпс (рис. 1.1)

2. Наступний випадок
$$\frac{x_{10}^2}{r_1^2} + \frac{x_{20}^2}{r_2^2} \leq 1.$$

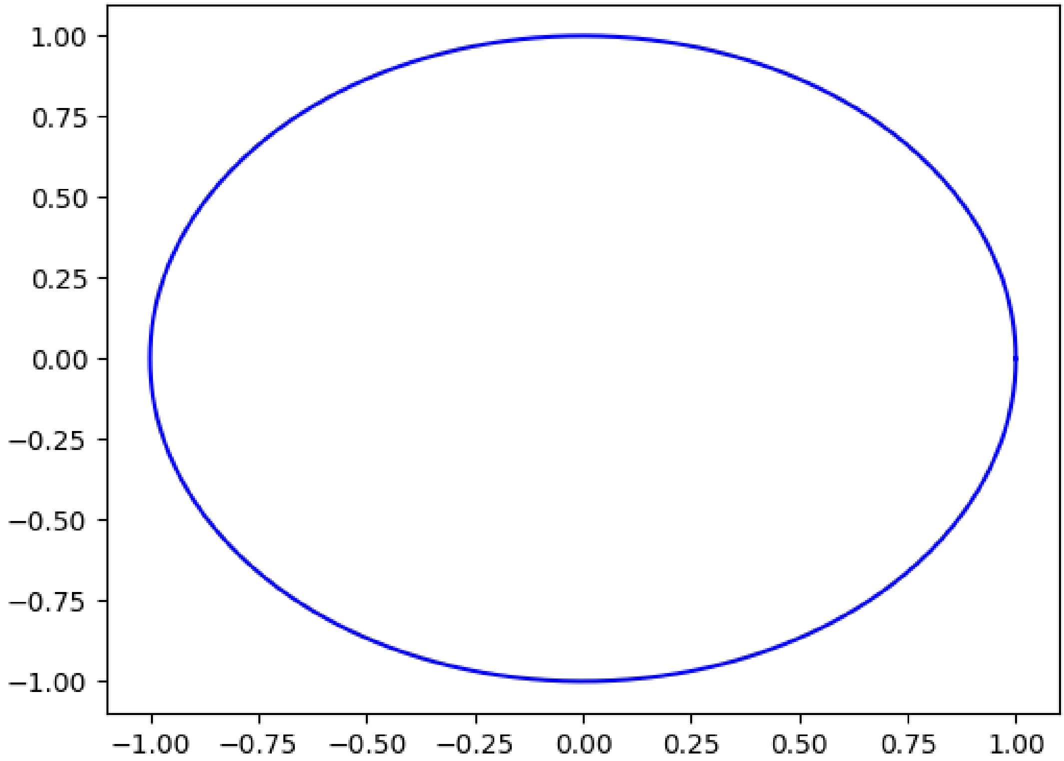

Рис. 1.1. Перетин інтегральної лійки

Анологічно до попереднього випадку , з нерівності початкових умов знайдемо Q_0:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} r_1^2 & 0 \\ 0 & r_2^2 \end{pmatrix}.$$

Запишемо фундаментальну матрицю системи :

$$\Theta(t,0) = \begin{pmatrix} sin(t) & cos(t) \\ cos(t) & -sin(t) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо $Q(t)$ за формулою $Q(t) = \Theta(t,0)Q_0\Theta^*(t,0) =$

$$= \begin{pmatrix} sin^2(t)r_1^2 + cos^2(t)r_2^2 & \frac{sin(2t)}{2}(r_1^2 - r_2^2) \\ \frac{sin(2t)}{2}(r_1^2 - r_2^2) & cos^2(t)r_1^2 + sin^2(t)r_2^2 \end{pmatrix}.$$

Для того щоб знайти обернену матрицю до $Q(t)$,знайдемо визначник матриці $Q(t)$ та союзну матрицю:

$$\triangle = \begin{vmatrix} sin^2(t)r_1^2 + cos^2(t)r_2^2 & sin(t)cos(t)r_1^2 - cos(t)sin(t)r_2^2 \\ sin(t)cos(t)r_1^2 - cos(t)sin(t)r_2^2 & cos^2(t)r_1^2 + sin^2(t)r_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (sin^2(t)r_1^2 + cos^2(t)r_2^2)(cos^2(t)r_1^2 + sin^2(t)r_2^2) -$$

$$-(sin(t)cos(t)r_1^2 - cos(t)sin(t)r_2^2)^2.$$

Для того щоб знайти союзну матрицю треба знайти алгебраїчні доповнення елементів матриці A (в нашим випадку це матриця $Q(t)$). Вони рівні мінорам, помноженим на $(-1)i+j$ в степені суми рядка і стовпця, для якого шукаємо.

$$A_{11} = (-1)^2(cos^2(t)r_1^2 + sin^2(t)r_2^2),$$

$$A_{12} = (-1)^3(sin(t)cos(t)r_1^2 - cos(t)sin(t)r_2^2),$$
$$A_{21} = (-1)^3(sin(t)cos(t)r_1^2 - cos(t)sin(t)r_2^2),$$
$$A_{22} = (-1)^2(sin^2(t)r_1^2 + cos^2(t)r_2^2).$$

Складемо матрицю з алгебраїчних доповнень елементів матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} cos^2(t)r_1^2 + sin^2(t)r_2^2 & sin(t)cos(t)r_1^2 - cos(t)sin(t)r_2^2 \\ sin(t)cos(t)r_1^2 - cos(t)sin(t)r_2^2 & sin^2(t)r_1^2 + cos^2(t)r_2^2 \end{pmatrix}.$$

Залишилось тільки протранспонувати матрицю $\bar{A}$:

$$\bar{A}^T = \begin{pmatrix} cos^2(t)r_1^2 + sin^2(t)r_2^2 & sin(t)cos(t)r_1^2 - cos(t)sin(t)r_2^2 \\ sin(t)cos(t)r_1^2 - cos(t)sin(t)r_2^2 & sin^2(t)r_1^2 + cos^2(t)r_2^2 \end{pmatrix}.$$

І можемо записати Q^{-1}:

$$Q^{-1} = \frac{1}{\triangle}\bar{A}^T =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{cos^2(t)}{r_2^2} + \frac{sin^2(t)}{r_1^2} & \frac{(-r_1^2+r_2^2)sin(2t)}{(2r_1^2r_2^2)} \\ \frac{(-r_1^2+r_2^2)sin(2t)}{(2r_1^2r_2^2)} & \frac{sin^2(t)}{r_2^2} + \frac{cos^2(t)}{r_1^2} \end{pmatrix}.$$

Тоді ,отримаємо , що

$$H(t) = E(Q(t), 0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle Q^{-1}(t)x, x\rangle \leq 1\right\}.$$

Нехай візьмемо $r_1 = 2$,$r_2 = 3$,$t = \frac{\pi}{4}$ і побудуємо еліпс (рис. 1.2)

3. Останній випадок , коли множина початкових умов має вигляд

$$a_1x_1^2 + b_1x_2^2 + 2c_1x_1^2x_2^2 \leq 1.$$

З нерівності можемо записати :

$$Q_0^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}.$$

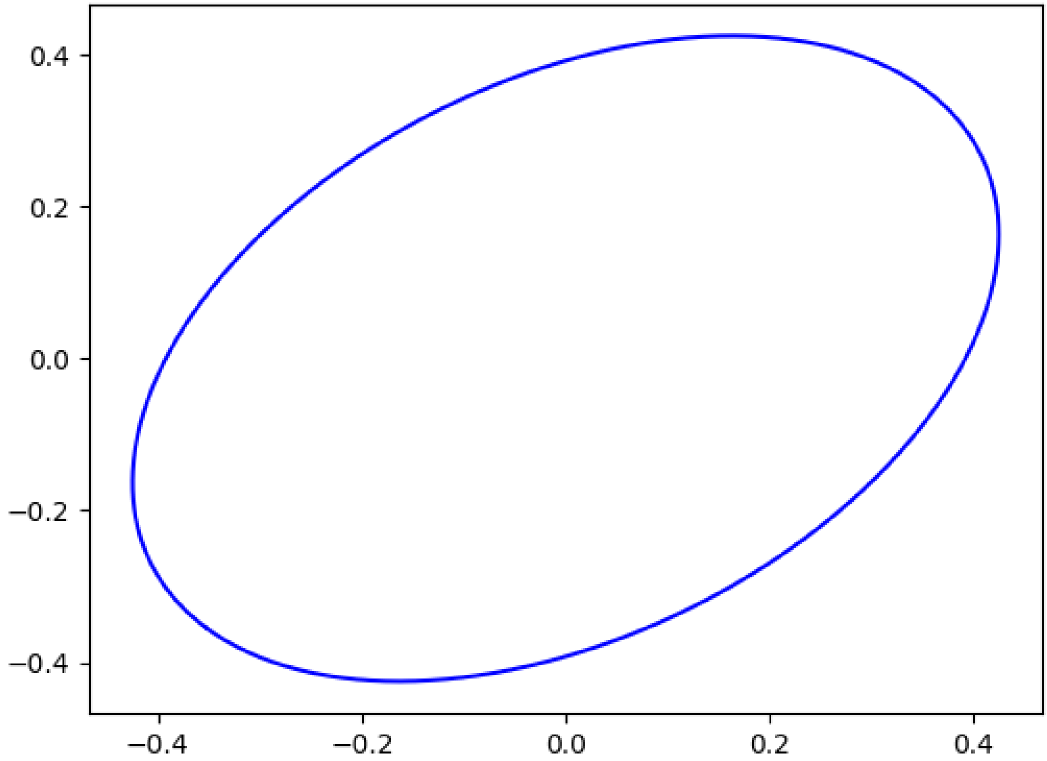

Рис. 1.2. Перетин інтегральної лійки

В цьому випадку , нам треба спочатку знайти обернену до цієї матриці Q_0 . Для цього як і в попередньому випадку , знайдемо визначник матриці Q_0^{-1} :

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_1 b_1 - c_1^2.$$

Анологічно, як і в попередньому випадку знайдемо союзну матрицю :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} b_1 & -c_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Та протранспонуємо її :

$$\bar{A}^T = \begin{pmatrix} b_1 & -c_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

І за формулою знайдемо Q_0 :

$$Q_0 = \frac{1}{\triangle} \bar{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_1 b_1 - c_1^2} & \frac{-c_1}{a_1 b_1 - c_1^2} \\ \frac{-c_1}{a_1 b_1 - c_1^2} & \frac{a_1}{a_1 b_1 - c_1^2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо $Q(t)$ за формулою

$$Q(t) = \Theta(t,0)Q_0\Theta^*(t,0) =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{sin^2(t)b_1+2cos(t)sin(t)c_1+cos^2(t)a_1}{a_1b_1-c_1^2} & \frac{cos(t)sin(t)(b_1-a_1)+c_1(cos^2(t)-sin^2(t))}{a_1b_1-c_1^2} \\ \frac{cos(t)sin(t)(b_1-a_1)+c_1(cos^2(t)-sin^2(t))}{a_1b_1-c_1^2} & \frac{cos^2(t)b_1-2cos(t)sin(t)c_1+sin^2(t)a_1}{a_1b_1-c_1^2} \end{pmatrix}.$$

Знову використовуючи ту саму формулу і такий сам алгоритм знайдемо обернену матрицю Q^{-1}:

$$Q^{-1} = \frac{1}{\triangle}\bar{A}^T.$$

Введемо позначення де A і B дорівнюють , відповідно

$$A = (sin^2(t)b_1 + 2cos(t)sin(t)c_1 + cos^2(t)a_1)\times$$
$$\times(cos^2(t)b_1 - 2cos(t)sin(t)c_1 + sin^2(t)a_1),$$
$$B = (cos(t)sin(t)(b_1 - a_1) + c_1(cos^2(t) - sin^2(t))^2.$$

Тоді :

$$\triangle = \frac{A - B}{(a_1b_1 - c_1^2)^2}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці

$$A_{11} = (-1)^2(\frac{cos^2(t)b_1 - 2cos(t)sin(t)c_1 + sin^2(t)a_1}{a_1b_1 - c_1^2}),$$

$$A_{12} = (-1)^3(\frac{cos(t)sin(t)(b_1 - a_1) + c_1(cos^2(t) - sin^2(t))}{a_1b_1 - c_1^2}),$$

$$A_{21} = (-1)^3(\frac{cos(t)sin(t)(b_1 - a_1) + c_1(cos^2(t) - sin^2(t))}{a_1b_1 - c_1^2}),$$

$$A_{22} = (-1)^2(\frac{sin^2(t)b_1 + 2cos(t)sin(t)c_1 + cos^2(t)a_1}{a_1b_1 - c_1^2}).$$

Складемо матрицю

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{cos^2(t)b_1-2cos(t)sin(t)c_1+sin^2(t)a_1}{a_1b_1-c_1^2} & -\frac{cos(t)sin(t)(b_1-a_1)+c_1(cos^2(t)-sin^2(t))}{a_1b_1-c_1^2} \\ -\frac{cos(t)sin(t)(b_1-a_1)+c_1(cos^2(t)-sin^2(t))}{a_1b_1-c_1^2} & \frac{sin^2(t)b_1+2cos(t)sin(t)c_1+cos^2(t)a_1}{a_1b_1-c_1^2} \end{pmatrix},$$

та протранспонуємо її

$$\bar{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{cos^2(t)b_1-2cos(t)sin(t)c_1+sin^2(t)a_1}{a_1b_1-c_1^2} & -\frac{cos(t)sin(t)(b_1-a_1)+c_1(cos^2(t)-sin^2(t))}{a_1b_1-c_1^2} \\ -\frac{cos(t)sin(t)(b_1-a_1)+c_1(cos^2(t)-sin^2(t))}{a_1b_1-c_1^2} & \frac{sin^2(t)b_1+2cos(t)sin(t)c_1+cos^2(t)a_1}{a_1b_1-c_1^2} \end{pmatrix}.$$

Тоді запишемо обернену матрицю

$$Q^{-1} = r\bar{A}^T,$$

де $r = \frac{a_1 b_1 - c_1^2}{A - B}$, а A і B дорівнюють , відповідно :

$$A = (sin^2(t)b_1 + 2cos(t)sin(t)c_1 + cos^2(t)a_1)\times$$

$$\times(cos^2(t)b_1 - 2cos(t)sin(t)c_1 + sin^2(t)a_1),$$

$$B = (cos(t)sin(t)(b_1 - a_1) + c_1(cos^2(t) - sin^2(t))^2.$$

Тоді отримаємо, що

$$H(t) = E(Q(t), 0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle Q^{-1}(t)x, x\rangle \leq 1\right\}.$$

Нехай візьмемо $a_1 = 2$,$b_1 = 3$,$c_1 = 1$, $t = \pi$, і побудуємо еліпс (рис. 1.3)

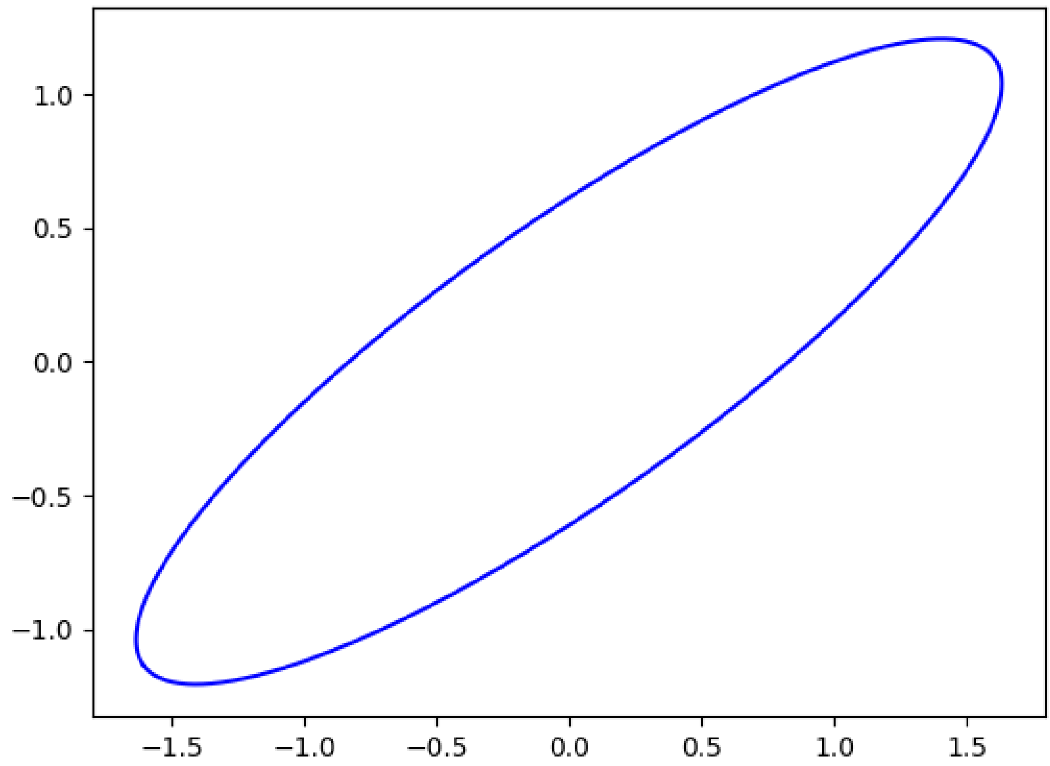

Рис. 1.3. Перетин інтегральної лійки

1.5.2 Обчислювальний експеримент

Розглянемо таку задачу . Треба побудувати перетин інтегральної лійки в момент $t = T$ системи

$$\begin{cases} x_1^{'} = 3x_1 - 2x_2, \\ x_2^{'} = x_1 + x_2, t \in [0, T]. \end{cases}$$

за умови, що $(x_1(0), x_2(0)) \in M_0$ і множина початкових умов має вигляд

$$M_0 = \left\{ x_1, x_2 : \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

Для системи, отримаємо загальний розв'язок :

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1(-e^{2t}sin(t) + e^{2t}cos(t)) + C_2(-e^{2t}sin(t) - e^{2t}cos(t)), \\ x_2 = C_1e^{2t}cos(t) - C_2e^{2t}sin(t). \end{cases}$$

З нерівності початкових умов знайдемо Q_0:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Запишемо фундаментальну матрицю системи :

$$\Theta(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{2t}(cos(t) - sin(t)) & -e^{2t}(sin(t) + cos(t)) \\ e^{2t}cos(t) & -e^{2t}sin(t) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо $Q(t)$ за формулою

$$Q(t) = \Theta(t, 0)Q_0\Theta^*(t, 0) =$$

$$= \begin{pmatrix} (5sin(2t) + 13)e^{4t} & \sqrt{2}(-10cos(2t + \frac{\pi}{4}) + 13\sqrt{2})\frac{e^{4t}}{4} \\ (-5\sqrt{2}cos(2t + \frac{\pi}{4}) + 13)\frac{e^{4t}}{2} & (5sin^2(t) + 4)e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю Q^{-1}:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} (20sin^2(t) + 16)\frac{e^{-4t}}{144} & (5\sqrt{2}cos(2t + \frac{\pi}{4}) - 13)\frac{e^{-4t}}{72} \\ (5\sqrt{2}cos(2t + \frac{\pi}{4}) - 13)\frac{e^{-4t}}{72} & (5sin(2t) + 13)\frac{e^{-4t}}{36} \end{pmatrix}.$$

За теоремою 1.8 побудуємо перетин інтегральної лійки

$$H(t) = E(Q(t), 0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \langle Q^{-1}(t)x, x \rangle \leq 1 \right\}.$$

Візьмемо наприклад $T = \frac{\pi}{2}$. Тоді отримаємо (рис. 1.4)

Якщо візьмемо $T = \frac{\pi}{6}$, то отримаємо наступний еліпс (рис. 1.5)

А при $T = \pi$, то виходить еліпс (рис. 1.6)

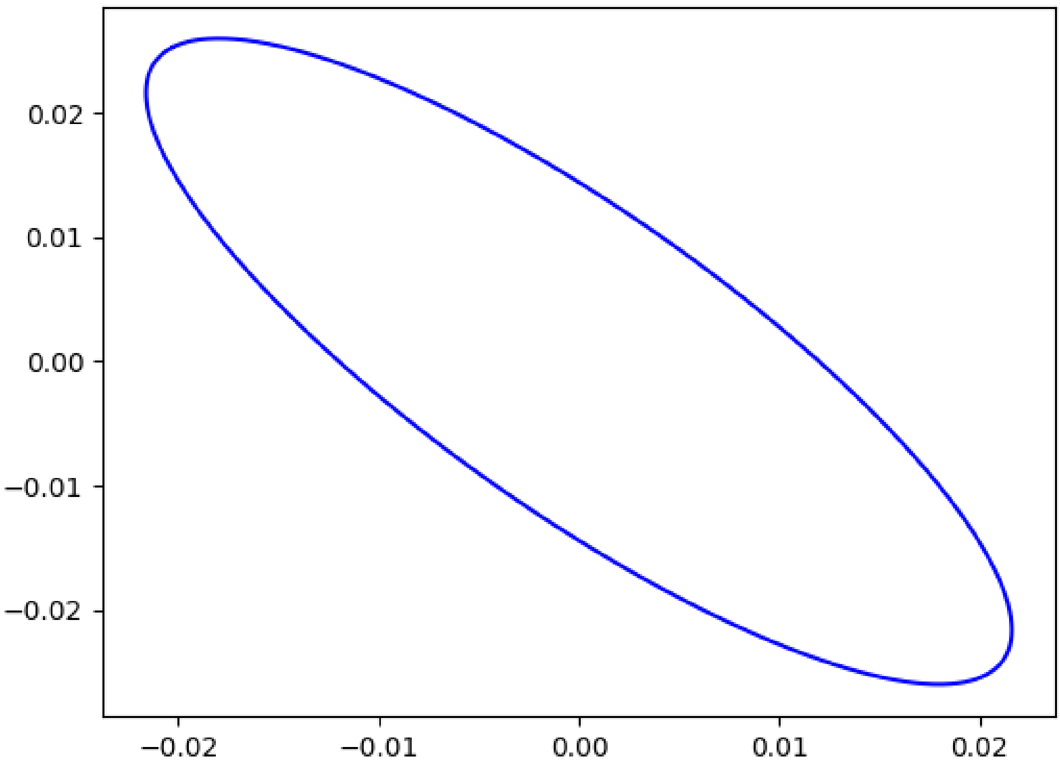

Рис. 1.4. Перетин інтегральної лійки

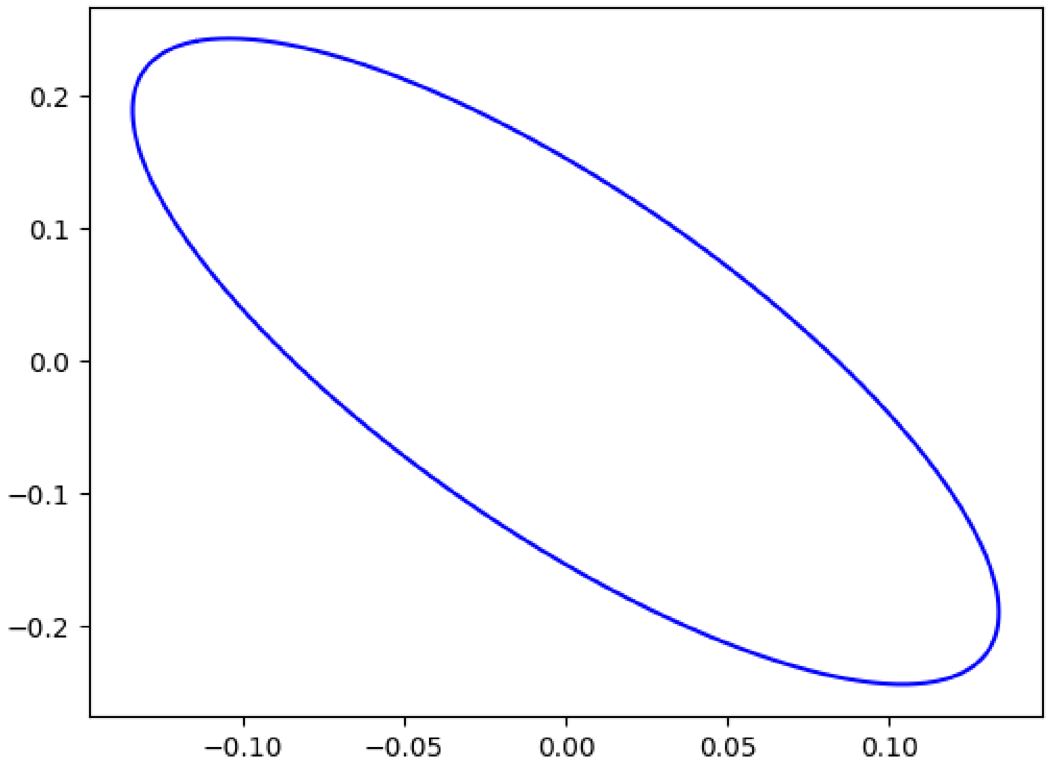

Рис. 1.5. Перетин інтегральної лійки

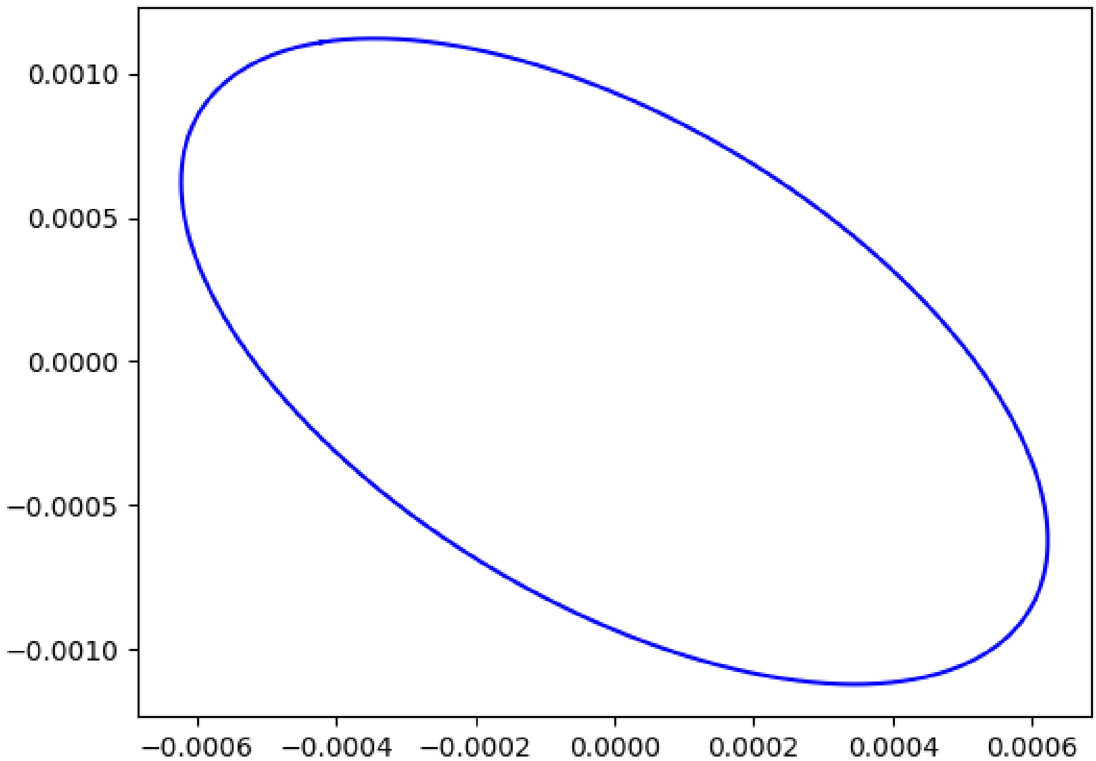

Рис. 1.6. Перетин інтегральної лійки

Розділ 2

Матричне диференціальне рівняння Ріккаті

Як і в попередніх розділах розглядаємо диференціальне рівняння [3]

$$\dot{X} = Q(t) + A(t) \cdot X + X \cdot B(t) + X \cdot R(t) \cdot X, \tag{2.1}$$

де $Q(t)$, $A(t)$, $B(t)$ і $R(t)$ — задані n-квадратні матриці, визначені на деякому відрізку часу t, X — шукана n-квадратна матриця.

2.1 Найпростіші властивості рівняння

Розглянемо деякі найпростіші властивості рівняння (2.1) [3].

1. Тип рівняння не змінюється при заміні незалежної змінної за формулою $t = \phi(\tau)$, де $\phi(\tau)$ — довільна диференційована функція.

2. Якщо матриця R^{-1} існує, то заміною $Y = R \cdot X$ рівняння (2.1) приводиться до вигляду

   $$\dot{Y}(t) = Q_1(t) + A_1(t) \cdot Y + Y \cdot B_1(t) + Y^2, \tag{2.2}$$

   де $Q_1 = R \cdot Q, A_1 = (R \cdot A + \dot{R}) \cdot R^{-1}, B_1 = B$.

3. Заміною змінної $Y = Z - B_1$ рівняння (2.2) приводиться до вигляду

   $$\dot{Z} = Q_2 + A_2(t) \cdot Z + Z^2, \tag{2.3}$$

   де $A_2 = A_1 - B_1$, $Q_2 = Q_1 - A_1 \cdot B + \dot{B}_1$. Аналогічно, заміною $Y = Z - A_1$ рівняння (2.2) приводиться до вигляду

   $$\dot{Z} = Q_3 + Z \cdot B_3 + Z^2, \tag{2.4}$$

   де $B_3 = B_1 - A_1$, $Q_3 = Q_1 - A_1 \cdot B_1^2 - \dot{A}_1$.

Теорема 2.1. *[3] Якщо $X = X_1(t)$ — частинний розв'язок рівняння (2.1),то за допомогою заміни $X = Y + X_1$ це рівняння зводиться до рівняння Бернуллі*

$$\dot{Y} = A_3 \cdot Y + Y \cdot B_3 + Y \cdot R \cdot Y, \tag{2.5}$$

де $A_3 = A + X_1 \cdot R$, $B_3 = B + R \cdot X_1$.

Теорема 2.2. *[3] Якщо $X_1(t)$ — частинний розв'язок рівняння (2.1) ,а $Z = Z_1(t)$ і $U = U_1(t)$ — неособливі розв'язки рівнянь*

$$\dot{Z} = -B_3(t) \cdot Z,$$

$$U = -U \cdot A_3(t),$$

відповідно, де матриці A_3 і B_3 визначаються формулами $A_3 = A + X_1 \cdot R$, $B_3 = B + R \cdot X_1$, то загальний розв'язок рівняння (2.1) знаходиться однієї квадратурою.

Теорема 2.3. *[3] Матриця $X(t) = (Z(t)CU(t) + R(t))^{-1} + S(t)$, де C — довільна постійна матриця, $Z(t)$ і $U(t)$ — неособливі матриці, а $Z(t)$, $U(t)$, Z^{-1}, $U^{-1}(t)$, $S(t)$ и $R(t)$ диференційовані, є розв'язком деякого рівняння Ріккаті.*

Теорема 2.4. *[3] Нехай X_1, X_2, X_3 и X_4 — частинні розв'язки рівняння (2.1), а $U(t)$ — неособливий розв'язок рівняння $U + U \cdot A_3(t) = 0$, де $A_3(t)$ визначається формулою $A_3 = A + X_1 \cdot R$, $B_3 = B + R \cdot X_1$. Тоді існує постійна матриця C_0 така, що*

$$U(X_4 - X_1)(X_4 - X_2)^{-1}(X_3 - X_2)(X_3 - X_1)^{-1}U^{-1} = C_0. \tag{2.6}$$

2.2 Існування розв'язку

Розглянемо питання про існування розв'язку рівняння (2.1) [3]. Будемо вважати, що матриці $Q(t)$, $A(t)$, $B(t)$ і $R(t)$ неперервні на відрізку

$$a \leq t \leq b.$$

Тут ми покажемо, як можна побудувати розв'язок рівняння (2.1) у всій області його існування. Для цього визначимо дві n-мірних вектор-функції $x(t) = x_1...x_n$ і $y(t) = y_1...y_n$ як розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = -B(t)x - R(t)y, \dot{y} = Q(t)x + A(t)y, \tag{2.7}$$

що задовольняє початковим умовам

$$x(t_0) = x^0, y(t_0) = y^0. \tag{2.8}$$

Далі , позначимо через $W(t, t_0)$ $2n$-мірну матрицю Коші системи рівнянь (2.7).Тоді розв'язок задачі Коші (2.7)-(2.8) можна представити у вигляді

$$z(t) = W(t, t_0)z^0, z = \{x, y\}, z^0 = \{x^0, y^0\}. \tag{2.9}$$

Якщо , матрицю $W(t, t_0)$ представити через її n-мірні блоки

$$W(t, t_0) = \begin{pmatrix} W_{11}(t, t_0) & W_{12}(t, t_0) \\ W_{21}(t, t_0) & W_{22}(t, t_0) \end{pmatrix},$$

то формулу (2.9) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x(t) = W_{11}(t, t_0)x^0 + W_{12}(t, t_0)y^0, \\ y(t) = W_{21}(t, t_0)x^0 + W_{22}(t, t_0)y^0. \end{cases}$$

При цьому виконуються умови

$$W_{ii}(t, t) = I, W_{ij}(t, t) = \theta, i \neq j.$$

Також зрозуміло, що розв'язок цієї системи рівнянь визначено на відрізку $a \leq t \leq b$. Нехай візьмемо матрицю $K(t)$ таку , що

$$y(t) = K(t)x(t), \tag{2.10}$$

і покажемо ,що вона задовольняє попередньому рівнянню у всіх тих точках відрізка $a \leq t \leq b$, в яких вона неперервна і диференційована. Так як вектори $x(t)$ і $y(t)$ утворюють розв'язок системи рівнянь (2.7) , то з рівності $\dot{y}(t) = \dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t)$ отримуємо

$$\dot{K}(t)x(t) = K(t)[B(t)x(t) + R(t)y(t)] + Q(t)x(t) + A(t)y(t). \tag{2.11}$$

Підставимо в це співвідношення замість $y(t)$ його значення з (2.10), отримуємо співвідношення , яке можна записати у вигляді

$$[\dot{K}(t) - Q(t) - A(t)K(t) - K(t)B(t) - K(t)R(t)K(t)]x(t) = 0, \tag{2.12}$$

де через 0 позначений нульовий n-мірний вектор. Рівність (2.12) має виконуватися при будь-яких значеннях вектора $x(t)$. Тому вираз в квадратних дужках цієї рівності має представляти собою матрицю з нульовими елементами, а це означає, що $K(t)$ - розв'язок рівняння (3.6).

Дамо аналітичне представлення матриці $K(t)$, для цього скористаємося співвідношеннями (2.2). Припустимо, що нас цікавить розв'язок рівняння (3.6), яке задовольняє умові

$$K(T) = F, a \leq T \leq b, \tag{2.13}$$

де F- задана матриця. У рівності (2.2) замінимо t на T, а t_0 на t. В результаті отримаємо рівність

$$\begin{cases} x(T) = W_{11}(T,t)x(t) + W_{12}(T,t)y(t), \\ y(T) = W_{21}(T,t)x(t) + W_{22}(T,t)y(t). \end{cases}$$

Якщо тепер скористатися тим, що $y(T) = K(T)x(T)$ і $y(T) = Fx(T)$, то, з урахуванням (2.2), отримуємо $y(t) = [W_{22}(T,t) - FW_{12}(T,t)]^{-1}[FW_{11}(T,t) - W_{21}(T,t)]x(t)$. Отже, розв'язок $K(t)$ рівняння (3.6), що задовольняє початковим умовам (2.13), визначається формулою

$$K(T) = [W_{22}(T,t) + FW_{12}(T,t)]^{-1}[FW_{11}(T,t) + W_{21}(T,t)]. \tag{2.14}$$

Зауваження [3] *Загальний розв'язок рівняння* (2.1) *можна представити у вигляді*

$$X(t) = (Z(t)CU(t) + R(t))^{-1} + S(t)$$

Якщо в цьому розв'язку зробити незначні перетворення, то його можна привести до виду (2.14)

Розглянемо матричне диференціальне рівняння Ріккаті [6]

$$X^{'}(t) + A^{*}X(t) + X(t)A + X^{2}(t) = Q, \tag{2.15}$$

з початковою умовою

$$X(t_0) = X_0, \tag{2.16}$$

де A- дійсна матриця $n \times n$,а Q , X_0- дві дійсні симетричні , невід'ємно визначені матриці .

Теорема 2.5. *[6] Задача Коші* (2.15) *і* (2.16) *допускає особливий розв'язок* $X = X(t)$ *, визначений на піввісі* $[t_0, \infty)$ *.Більш того ,* $X(t)$ *є симетричним і невід'ємно визначеним для будь-якого* $t \geq t_0$.

Існування та особливість розв'язку цієї задачі Коші визначене на максимальному інтервалі $[t_0, T)$. Використовуючи той факт , що X_0 і Q -симетричні матриці , та беручи суміжність сторін (2.15) , одержимо ,що $X^{*}(t)$ також ж розв'язком задачі Коші . Це доводить , що $X(t) = X^{*}(t)$, тобто $X(t)$ симетрична для будь-якого $t \in [t_0, T)$. Тепер покажемо ,що матриця $X(t)$ також є невід'ємно визначеною для будь-якого $t \in [t_0, T)$ та $T = \infty$. Розглянемо два випадки [6].

1. **Матриця Q додатно визначена.**

   Пригадаємо , що $X(t_0) = X_0$ невід'ємно визначена . Ми встановили

   $$T' = sup\{\tau \in [t_0, T); X(t) \geq 0, \forall t \in [t_0, \tau)\}.$$

   Треба довести , що $T^{'} = T$. Якщо $T^{'} < T$, то $X(T^{'})$ є невід'ємно визначена і існують послідовності (t_k) у $(T^{'}, T)$ та (v_k) у R^n з такими властивостями [6]:

(а) $\lim_{k\to\infty} t_k = T^{'}$.

(б) $\| \upsilon_k \|_e = 1$, $(X(t_k)\upsilon_k, \upsilon_k) < 0, \forall k$

(в) $\exists \upsilon^* \in R^n, \upsilon^* = \lim_{k\to\infty} \upsilon_k$

Для кожного $\upsilon \in R^n$ визначимо функції

$$\phi_\upsilon, \psi_\upsilon : [t_0, T) \longrightarrow R, \phi_\upsilon = (X(t)\upsilon, \upsilon), \psi_\upsilon = (X(t)\upsilon, A\upsilon).$$

Оскільки $X(t)$ симетрична , з (2.15) бачимо , що $\phi_\upsilon(t)$ задовільняє

$$\phi_\upsilon(t)^{'} = -2\phi_\upsilon(t) - \| X(t)\upsilon \|_e^2 + (Q\upsilon, \upsilon). \tag{2.17}$$

Також , у нас є

$$\phi_{\upsilon^*}(T^{'}) = \psi_{\upsilon^*}(T^{'}) = 0, \tag{2.18}$$

та

$$\phi_{\upsilon^*}(T^{'})^{'} = (Q\upsilon^*, \upsilon^*) > 0. \tag{2.19}$$

Використовуючи теорему про середнє значення , ми робимо висновок , що для будь-якого k існує $s_k \in (T^{'}, t_k)$ таке , що

$$\phi_{\upsilon_k}(s_k)^{'} = \frac{\phi_{\upsilon_k}(t_k) - \phi_{\upsilon_k}(T^{'})}{t_k - T^{'}}$$

. Зазначимо , що за визначенням $T^{'}$, $\phi_{\upsilon_k}(T^{'}) \geq 0$. Оскількі $\phi_{\upsilon_k}(t_k) < 0$, ми виводимо , що $\phi^{'}_{\upsilon_k}(s_k) > 0$. Зважаючи на

$$\lim_{k\to\infty} \phi^{'}_{\upsilon_k}(s_k) = \lim_{k\to\infty}(X^{'}(s_k)\upsilon_k, \upsilon_k) = (X^{'}(T^{'})\upsilon^*, \upsilon^*) = \phi^{'}_{\upsilon^*}(T^{'}),$$

виводимо , що $\phi^{'}_{\upsilon^*}(T^{'}) \leq 0$.Це суперечить (2.19) і доводить , що $X(t) \geq 0, \forall t \in [t_0, T^{'})$. Щоб довести , що $T = \infty$, достатньо довести , що для будь-якого $\upsilon \in R^n$ існує неперервна функція $f_\upsilon : [t_0, \infty) \to R$ така , що

$$\phi_\upsilon(t) \leq f(t), \forall t \in [t_0, T).$$

Зафіксуємо $\upsilon \in R^n$. Використаємо нерівність Коші -Шварца ,

$$|\psi_\upsilon(t)| = |(X(t)\upsilon, A\upsilon)| \leq \|X(t)\upsilon\|_e \cdot \|A\upsilon\|_e$$

Використаємо це в (2.17) , отримаємо

$$\phi^{'}_\upsilon(t) \leq 2C_\upsilon g_\upsilon(t) - (g_\upsilon(t))^2 + (Q\upsilon, \upsilon)$$

і таким чином ,

$$\phi_\upsilon(t) \leq f_\upsilon(t) = \phi_\upsilon(t_0) + (t - t_0)(Q\upsilon, \upsilon) + \int_{t_0}^{t} (2C_\upsilon g_\upsilon(s) - (g_\upsilon(s))^2) ds, \tag{2.20}$$

$\forall t \in [t_0, T)$. Це доводить , що $T = \infty$.

2. **Матриця Q є лише невід'ємно визначеною.** [6] Для будь-якого $\epsilon > 0$ встановимо

$$Q_\epsilon = Q + \epsilon I,$$

де I позначає одиничну $n \times n$ - матрицю. Позначимо через $X_{\epsilon(t)}$ правосторонній розв'язок задачі Коші

$$X^{'}(t) + A^{*}X(t) + X(t)A + X(t)^2 = Q_\epsilon, X_\epsilon(t_0) = X_0.$$

Відповідно до попередніх міркувань, $X_{\epsilon(t)}$ визначено на $[t_0, \infty)$ і воно не є від'ємно визначене на цьому інтервалі. Більш того, для будь-якого $\upsilon \in R^n$, будь-якого $\epsilon > 0$ та будь-якого $t \geq t_0$, ми маємо

$$(X_\epsilon(t)\upsilon, \upsilon) \leq f_\upsilon^\epsilon(t) = (X_0\upsilon, \upsilon) + (t - t_0)(Q\upsilon, \upsilon) + \int_{t_0}^{t} (2C_\upsilon g_\upsilon^\epsilon(s) - g_\upsilon(s)^2)ds \tag{2.21}$$

$$g_\upsilon^\epsilon = \|X_\epsilon(t)\upsilon\|_e.$$

Маємо , що

$$\lim_{\epsilon \to 0} X_\epsilon(t) = X(t), \forall \in [t_0, T)$$

Якщо тепер спрямувати $\epsilon \to 0$ у (2.21), ми виведемо що

$$(X_\epsilon(t)\upsilon, \upsilon) \leq f_\upsilon(t) \forall t \in [t_0, T)$$

де $f_\upsilon(t)$ визначено у (2.20). Звідси випливає, що $T = \infty$.

Розділ 3

Другий метод Ляпунова для матричних диференціальних рівнянь

3.1 Автономний випадок

Розглянемо автономний випадок для матричного диференціального рівняння вигляду [4]

$$\frac{dX}{dt} = F(X), t \geq t_0, \tag{3.1}$$

де X – матриця розміра $n \times n$, та $F(0) = 0$.

$$D_H = \{X \in R^{n \times n} : \|X\| < H\}.$$

Важливу роль в теоремах Ляпунова відіграє таке означення , як повна похідна в силу системи.

Припустимо, що $V(X)$ є неперервно диференційованою функцією,$X \in D_H$,$t \geq t_0$.

Означення 3.1. *[4] Повною похідною за змінною t від функції $V(X)$ в силу системи (3.1) називається функція вигляду*

$$\Big(\frac{dV(X)}{dt}\Big)_{(3.1)} = tr\Big(\frac{\partial V^T}{\partial X} F(X)\Big), \tag{3.2}$$

де $tr(\frac{\partial V^T}{\partial X} F(X)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial V(X)}{\partial X_{ij}} \times F_{ij}(X)$.

Розглянемо теорему Ляпунова про стійкість.

Теорема 3.1. *[4] Якщо для системи (3.1) знайдеться неперервно диференційована додатновизначена функція $V(X)$,$X \in D_H$,$t \geq t_0$,повна похідна від якої за змінною t в силу системи (3.1) є функцією відємнопостійною, то незбурений розвязок $X(t) = 0$, системи (3.1) є стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Ми повинні показати, ща виконуються умови стійкості за Ляпуновим.Для цього виберемо $\epsilon > 0, \epsilon < H$.Розглянемо

$$S_\epsilon = \{X \in R^{n\times n} : \|X\| = \epsilon\}.$$

За умовами теореми функція $V(X)$ є неперервною. Оскільки сфера S_ϵ компакт,замкнена,обмежена множина ,за теоремою Вейерштрасса, існує $X_* \in S_\epsilon$, для якої

$$min_{X\in S_\epsilon} V(X) = V(X_*) = C. \tag{3.3}$$

Оскільки $V(X)$ є додатновизначеною $V(x) > 0$,а множина S_ϵ не містить точку ноль, то $C > 0$. З неперервності функції $V(X)$ та з умови $V(0) = 0$, слідує, що знайдеться $\delta \in (0, \epsilon)$ таке, що $V(X) < C$ як тільки $\|X\| < \delta$. Це означає, що множина

$$U_\delta = \{X \in R^{n\times n} : \|X\| < \delta\},$$

лежить в множині

$$\{X \in D_H : V(X) < C\}.$$

Виберемо довільне $X_0 \in U_\delta$. Покажемо, що траєкторія системи (3.1), яка починається з X_0, не дійде до сфери S_ϵ.

Від супротивного. Припустимо, що знайдеться $t_1 > t_0$ таке, що

$$\|X(t) < \epsilon\|, t \in [t_0, t_1),$$

$$X(t_1) = \epsilon.$$

Повна похідна за змінною t від функції $V(X)$ в силу системи (3.1) є відємнопостійною, тому

$$V(X(t_1)) - V(X_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dV(X(s), s)}{ds} ds \leq 0.$$

З $X_0 \in U_\delta$ слідує $V(X_0) < C$.Але $X(t_1) \in S_\epsilon$.Маємо,що

$$min_{X\in S_\epsilon} V(X) = C,$$

$$V(X(t_1)) \geq C.$$

Остаточно маємо

$$C \leq V(X(t_1)) \leq V(X_0) < C. \tag{3.4}$$

Одержали протиріччя, яке показує, що будь-який розв'язок $X(t)$ який в момент t_0 належить U_δ,залишається у внутрішності кулі $K_\epsilon(0)$. Це означає, що нульовий розвязок системи (3.1) є стійким за Ляпуновим. □

Тепер сформулюємо наступну теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість.

Теорема 3.2. *[4] Якщо для системи (3.1) знайдеться неперевно диференційована додатновизначена функція $V(X)$, повна похідна від $V(X)$ за змінною t в силу системи (3.1) є функцією відємновизначеною, то незбурений розвязок $X(t) = 0$,$t \geq t_0$ системи (3.1) є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Ми бачимо,що умови теореми (3.2) є сильнішими за умови теореми (3.1), тому нульовий розвязок системи (3.1) є стійким за Ляпуновим. Це означає, що для довільного $\epsilon \in (0, H)$ знайдеться $\delta_0 \in (0, \epsilon)$ таке, що розвязок системи (3.1) задовольняє умову $\|X(t)\| < \epsilon$ для всіх $t \geq t_0$ як тільки $\|X_0\| < \delta_0$, де $X_0 = X(t_0)$.Залишилось показати ,що виконуються умови асимптотичної стійкості. Покажемо, що для такого розвязку

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Від супротивного. Припустимо, що знайдеться послідовність $\{t_k\} \subset [t_0, +\infty)$ така, що $t_k \to +\infty$ і $\|X(t_k)\| \geq a$,$k = 1, 2, \dots$, де $a > 0$. Оскільки функція $V(X)$ є неперервною і додатновизначеною, то знайдеться таке b таке, що

$$V(X) \geq b, a \leq \|X\| \leq \epsilon.$$

Тому $V(X(t_k)) \geq b, k = 1, 2 \dots$.

І як було показано при доведенні теореми (3.1).Оскількі повна похідна функції $V(X)$ в силу системи (3.1) є відємновизначеною неперервною функцією, позначимо її

$$W(x) = \left(\frac{dV(X)}{dt}\right)_{(3.1)},$$

$V(X(t))$ є монотонно незростаючою функцією і $V(X(t)) \geq b$ для всіх $t \geq t_0$. Дійсно, якщо $V(X(t)) < b$ при деякому $t \geq t_0$, то для всіх членів $\{t_k\}$ послідовності , які більші за t, виконується умова $V(X(t_k)) < b$. Це протирічить припущенню. Оскільки $V(0) = 0$,$t \geq t_0$, $V(x) > 0$, використовуючи неперервність функції в нулі , то знайдеться $\delta > 0$ таке, що $V(X) < b$ при $\|X\| < \delta$ для всіх $t \geq t_0$. Тому розвязок $X(t)$ системи (3.1) не задовольняє умову $\|X(t)\| < \delta$,$t \geq t_0$. Отже,

$$X(t) \in D = \{X \in D_H, \delta \leq \|X\| < \epsilon\}, t \geq t_0.$$

Оскільки повна похідна в силу системи

$$W(X, t) = \left(\frac{dV(X, t)}{dt}\right)_{(3.1)}$$

є функцією відємновизначеною, то знайдеться $p > 0$, таке, що

$$W(X) \leq -p, X \in D.$$

Далі підставимо
$$\Big(\frac{dV(X(t))}{dt}\Big)_{(3.1)} = \frac{dV(X(t))}{dt} \leq -p,$$
і
$$V(X(t)) = V(X_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV(X(s))}{ds} ds \leq V(X_0) - p(t - t_0),$$
$t \geq t_0$. Якщо ми t спрямуємо до безмежності,то вираз
$$V(X_0) - p(t - t_0),$$
як завгодно великий і від'ємний, але фунція $V(X)$ додатновизначена , тобто ми отримали протиріччя. Звідси випливає, що існує $t \geq t_0$ при якому $V(X(t)) < 0$. Для цього
$$V(X_0) - p(t - t_0) < 0,$$
і
$$t > t_0 + \frac{V(X_0)}{p}.$$
Одержали протиріччя з додатною визначеністю функції $V(X)$. Протиріччя показує, що
$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0.$$
□

Далі сформулюємо першу теорему Ляпунова про нестійкість.

Теорема 3.3. *[4] Якщо для системи (3.1) знайдеться неперевно диференційована в області D функція $V(X)$, $V(0) = 0$, повна похідна від $V(X)$ за змінною t в силу системи (3.1) є функцією знаковизначеною, але в будь-якому околі $U_h(0)$ нуля знайдеться $X_0 \in U_h(0)$ таке, що*
$$\Big(\frac{dV(X_0)}{dt}\Big)_{(3.1)} V(X_0) > 0,$$
незбурений розвязок $X(t) = 0$,$t \geq t_0$ є нестійким.

Доведення. Виберемо $(\frac{dV(X)}{dt})_{(3.1)}$ додатновизначеною.Тоді теорема говорить про те, що в довільному околі початку координат, знайдуться такі X, в яких функція $V(X)$ є додатною.

Виберемо $\epsilon > 0$ так, щоб $U_\epsilon(0) \subset D$.В цьому околі виконуються умови теореми.Далі виберемо $\delta \in (0, \epsilon)$. Треба показати ,що в цьому околі існує таке X_0,що відповідний йому розв'язок вийде за межі околу $U_\epsilon(0)$.Тоді це буде означати нестійкість розв'язку. З умови теореми випливає , що в околі U_δ існує таке X_0, що
$$V(X_0) = V_0 > 0.$$

Оскільки виконується непервність функції $V(X)$, то за означенням неперервності існує $\sigma > 0$,що $|V(X)| < V_0$ як тільки $\|X\| < \sigma$.Ця умова означає,що

$$U_\sigma(0) \subseteq \{X \in U_\epsilon(0) : |V(X)| < V_0\}.$$

Оскільки $(\frac{dV(X)}{dt})_{(3.1)}$ є додатновизначеною, то

$$V(X(t, X_0)) \geq V_0, t \geq 0.$$

Звідси робимо висновок, що цей розвязок не буде належати $U_\sigma(0), t \geq 0$.

Тепер нам треба показати,що в деякий момент часу розв'язок покидає ϵ-окіл.Припустимо,від супротивного, $X(t, X_0) \in U_\epsilon(0), t \geq 0$. Тоді

$$X(t, X_0) \in C, t \geq 0,$$

де $C = K_\epsilon(0) \backslash U_\sigma(0)$. Оскільки C-компакт,замкнена,обмежена множина,функція $V(X)$-неперервна,то вона є обмеженою на компакті C,за властивостями неперервних функцій.Тому $V(X(t, X_0))$ є обмеженою зверху при $t \geq 0$.Тобто, виконується наступне,що існує константа $d > 0$ така,що

$$V(X(t, X_0)) \neq d,$$

для всіх $t \geq 0$.

З іншого боку, ноль не лежить в компакті C, функція $\left(\frac{dV(X)}{dt}\right)_{(3.1)}$ є додатновизначеною і неперервною, тоді за теоремою Вейєрштраса

$$min_{X \in C}\left(\frac{dV(X)}{dt}\right)_{(3.1)} = l > 0.$$

Далі робимо такий висновок,що

$$\left(\frac{dV(X(t, X_0))}{dt}\right)_{(3.1)} \geq l, t \geq 0.$$

Далі проінтегруємо отриману нерівність від 0 до t,використовуючи властивість повної похідної в силу системи, одержуємо

$$V(X(t, X_0)) \geq V_0 + lt, t \geq 0.$$

Це означає, що існує $t \geq 0$,для якого

$$V_0 + lt > d,$$

звідси отримуємо

$$t > \frac{d - V_0}{l}.$$

Ми отримали протиріччя,що показує, що існує такий момент часу при якому розвязок покине відкритий ϵ-окіл

$$X(t, X_0) \notin U_\epsilon(0).$$

Це буде означати,що буде порушуватися означення стійкості нульового розвязку за Ляпуновим,тобто розвязок буде нестійким. $\square$

3.2 Неавтономний випадок.

Знову ж таки розглядаємо початок нуля,який задається областю

$$D_H = \{X \in R^{n\times n} : \|X\| < H\},$$

$$\frac{dX}{dt} = F(X,t), t \geq t_0, \tag{3.5}$$

де X- матриця розміра $n \times n$, та $F(0,t) = 0$ [4]. Припустимо, що $V(X,t)$ є неперервно диференційованою функцією,$X \in D_H$,$t \geq t_0$.

Згадаємо ось таке означення.

Означення 3.2. *[4] Неперервна функція $V(X,t)$ називається додатновизначеною,$X \in D_H$,$t \geq t_0$,якщо знайдеться така неперервна додатновизначена функція $W(X)$,для якої*

$$V(X,t) \geq W(X), V(0,t) = 0, X \in D_H, t \geq t_0.$$

Означення 3.3. *[4] Повною похідною за змінною t від функції $V(X,t)$ в силу системи (3.5) називається функція вигляду*

$$\Big(\frac{dV(X,t)}{dt}\Big)_{(3.5)} = \frac{\partial V(X,t)}{\partial t} + tr\Big(\frac{\partial V^T}{\partial X}F(X,t)\Big), \tag{3.6}$$

де $tr(\frac{\partial V^T}{\partial X}F(X,t)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial V(X,t)}{\partial X_{ij}} \times F_{ij}(X,t)$.

Теорема 3.4. *[4] Якщо для системи (3.5) знайдеться неперевно диференційована додатновизначена функція $V(X,t)$,$X \in D_H$,$t \geq t_0$,повна похідна від якої за змінною t в силу системи (3.5) є функцією відемнопостійною, то незбурений розвязок $X(t) = 0$, системи (3.5) є стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Виберемо $\epsilon \in (0,H)$.Розглянемо

$$S_\epsilon = \{X \in R^{n\times n} : \|X\| = \epsilon\}.$$

Функція $V(X,t)$ є додатновизначеною,$X \in D_H$,$t \geq t_0$.Тому знайдеться неперервна додатновизначена функція така, що

$$V(X,t) \geq W(X), X \in D_H, t \geq t_0. \tag{3.7}$$

За теоремою Вейєрштрасса існує $X_* \in S_\epsilon$, для якої

$$min_{X\in S_\epsilon} W(X) = W(X_*) = C > 0. \tag{3.8}$$

З (3.7), (3.8) випливає

$$V(X,t) \geq W(X) \geq W(X_*) = C > 0, X \in S_\epsilon, t \geq t_0. \tag{3.9}$$

З неперервності функції $V(X,t)$ та з умови $V(0,t) = 0, t \geq t_0$, слідує, що знайдеться $\delta \in (0,\epsilon)$ таке, що $V(X,t_0) < C$ як тільки $\|X\| < \delta$. Це означає, що множина

$$U_\delta = \{X \in R^{n\times n} : \|X\| < \delta\}$$

лежить в множині

$$\{X \in D_H : V(X,t_0) < C\}.$$

Виберемо довільну $X_0 \in U_\delta$. Покажемо, що траєкторія системи (3.5), яка починається з X_0, не дійде до сфери S_ϵ і залишиться в множині

$$U_\epsilon = \{X \in R^{n\times n} : \|X\| < \epsilon\}.$$

Від супротивного. Припустимо, що знайдеться $t_1 > t_0$ таке, що $X(t_1) \in S_\epsilon$, при цьому $X(t) \in U_\epsilon, t \in [t_0,t_1)$, де $X(t) = X(t,X_0,t_0)$– розвязок задачі Коші (3.5). Тоді з (3.9) випливає $V(X(t_1),t_1) \geq C$. Але з $X_0 \in U_\delta$ слідує $V(X_0,t_0) < C$. Повна похідна за змінною t від функції $V(X,t)$ в силу системи (3.5) є відємнопостійною, тому

$$V(X(t_1),t_1) - V(X_0,t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dV(X(s),s)}{ds} ds \leq 0.$$

Остаточно маємо

$$C \leq V(X(t_1),t_1) \leq V(X_0,t_0) < C. \tag{3.10}$$

Одержали протиріччя, яке показує, що з умови $X_0 \in U_\epsilon$ випливає $,X(t) \in U_\epsilon$. Це означає, що нульовий розвязок системи (3.5) є стійким за Ляпуновим. □

Далі розглянемо теорему про асимптотичну стійкість.Для доведення цієї теореми розглянемо таке означення.

Означення 3.4. *[4] Функція $V(X,t)$ допускає нескінченно малу вищу границю в $X = 0$, якщо для довільного $\epsilon > 0$ існує $\delta > 0$,що*

$$V(X,t) < \epsilon,$$

для всіх $\|X\| < \delta, t \geq t_0$.

Теорема 3.5. *[4] Якщо для системи (3.5) знайдеться неперевно диференційована додатновизначена функція $V(X,t)$, яка в $X = 0$ допускає нескінченно малу вищу границю, а повна похідна від $V(X,t)$ за змінною t в силу системи (3.5) є функцією відємновизначеною, то незбурений розвязок $X(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (3.5) є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Умови теореми (3.5) є сильнішими за умови теореми (3.4). Тому нульовий розвязок системи (3.5) є стійким за Ляпуновим. Це означає, що для $\epsilon \in (0, H)$ знайдеться $\delta_0 \in (0, \epsilon)$ таке, що розвязок $X(t) = X(t, X_0, t_0)$ системи (3.5) задовольняє умову $\|X(t)\| < \epsilon$ для всіх $t \geq t_0$ як тільки $\|X_0\| < \delta_0$, де $X_0 = X(t_0)$. Покажемо, що для такого розвязку

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Від супротивного. Припустимо, що знайдеться послідовність $\{t_k\} \subset [t_0, +\infty)$ така, що $t_k \to +\infty$ і $\|X(t_k)\| \geq a$,$k = 1, 2, \dots$, де $a > 0$. Оскільки функція $V(X, t)$ є неперервною і додатновизначеною,$X \in D_H$,$t \geq t_0$, то знайдеться додатновизначена неперервна функція $V_0(X)$,$X \in D_H$ така, що

$$V(X, t) \geq V_0(X) \geq b, a \leq \|X\| \leq \epsilon,$$

де $b > 0$ – деяка константа. Тому $V(X(t_k), t_k) \geq b, k = 1, 2 \dots$. Повна похідна функції $V(X, t)$ в силу системи (3.5) є відємновизначеною неперервною функцією. Тому $V(X, t)$ є спадною і $V(X(t), t) \geq b$ для всіх $t \geq t_0$. Дійсно, якщо $V(X(t), t) < b$ при деякому $t \geq t_0$, то для всіх членів $\{t_k\}$ послідовності , які більші за t, виконується умова $V(X(t_k), t_k) < b$. Це протирічить припущенню. Оскільки $V(0, t) = 0$,$t \geq t_0$, функція $V(X, t)$ допускає нескінченно малу вищу границю в $X = 0$ та є додатновизначеною, то знайдеться $\delta > 0$ таке, що $V(X, t) < b$ при $\|X\| < \delta$ для всіх $t \geq t_0$. Тому розвязок $X(t)$ системи (3.5) не задовольняє умову $\|X(t)\| < \delta$,$t \geq t_0$. Отже,

$$X(t) \in D = \{X \in D_H, \delta \leq \|X\| < \epsilon\}, t \geq t_0.$$

Оскільки повна похідна в силу системи

$$W(X, t) = \Big(\frac{dV(X, t)}{dt}\Big)_{(3.5)}$$

є функцією відємновизначеною, то знайдеться додатновизначена функція $W_0(X)$,$X \in D_H$ така, що

$$-W(X, t) \geq W_0(X) > p, X \in D,$$

де $p > 0$– деяка константа. Тому

$$W(X, t) \leq -p, X \in D, t \geq t_0.$$

Так як $X(t) \in D$ при $t \geq t_0$, то

$$\Big(\frac{dV(X(t), t)}{dt}\Big)_{(3.5)} = \frac{dV(X(t), t)}{dt} \leq -p$$

і

$$V(X(t), t) = V(X_0(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV(X(s), s)}{ds} ds \leq V(X_0, t_0) - p(t - t_0),$$

$t \geq t_0$. Звідси випливає, що існує $t \geq t_0$ при якому $V(X(t), t) < 0$. Для цього $V(X_0, t_0) - p(t - t_0) < 0$ і $t > t_0 + \frac{V(X_0,t_0)}{p}$ Одержали протиріччя з додатною визначеністю функції $V(X, t)$. Протиріччя показує, що $\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0$. ☐

Сформулюємо теорему Ляпунова про нестійкість.

Теорема 3.6. *[4] Якщо для системи (3.5) знайдеться неперевно диференційована в області D функція $V(X, t)$, $V(t, 0) = 0$,яка допускає нескінченно малу вищу границю при $X \to 0$, повна похідна від $V(X, t)$ за змінною t в силу системи (3.5) є функцією знаковизначеною, але в будь-якому околі $U(0)$ нуля знайдеться $X_0 \in U(0)$ таке, що*

$$\left(\frac{dV(t_0, X_0)}{dt}\right)_{(3.5)} V(t_0, X_0) > 0,$$

незбурений розвязок $X(t) = 0$,$t \geq t_0$ є нестійким.

Доведення. Виберемо $\left(\frac{dV(t,X)}{dt}\right)_{(3.5)}$ додатновизначеною.Запишемо означення додатновизначеності

$$\left(\frac{dV(t, X)}{dt}\right)_{(3.5)} \geq W(X)$$

при $t_0 \neq t < \infty$,де $W(X)$-неперервна додатновизначена функція. За умовами теореми функція $V(t, X)$ допускає нескінченно малу вищу границю при $X \to 0$.Тоді для $d > 0$ знайдеться $h \in (0, H)$ таке,що

$$|V(t, X)| < d$$

при $t_0 \neq t < \infty$,$\|X\| < h$. Це означає,що функція $V(t, X)$ є обмеженою на множині $t_0 \neq t < \infty$. Виберемо $\epsilon > 0$ так, щоб $\epsilon \in (0, h)$. Далі виберемо $\delta \in (0, \epsilon)$. Треба показати ,що в цьому околі існує таке X_0,що відповідний йому розв'язок вийде за межі околу $U_\epsilon(0)$.Тоді це буде означати нестійкість розв'язку. З умови теореми випливає , що в околі U_δ існує таке X_0, що

$$V(t_0, X_0) = V_0 > 0.$$

Функція $V(t, X)$ допускає нескінченно малу вищу границю при $X \to 0$, то існує $\sigma \in (0, H)$,що $|V(t, X)| < V_0$,при $t_0 \neq t < \infty$, як тільки $\|X\| < \sigma$. Ця умова означає,що

$$U_\sigma(0) \subseteq \{X \in U_\epsilon(0) : |V(t, X)| < V_0, t_0 \neq t < \infty\}.$$

Оскільки $\left(\frac{dV(t,X)}{dt}\right)_{(3.5)}$ є додатновизначеною, то

$$V(t, X(t, X_0, t_0)) \geq V_0, t \geq t_0.$$

Звідси робимо висновок, що цей розвязок не буде належати $U_\sigma(0), t \geq 0$.

Тепер нам треба показати,що в деякий момент часу розв'язок покидає ϵ-окіл.Припустимо,від супротивного, $X(t, X_0, t_0) \in U_\epsilon(0), t \geq 0$. Тоді

$$X(t, X_0, t_0) \in C, t \geq 0,$$

де $C = K_\epsilon(0) \setminus U_\sigma(0)$. Оскільки $C \subseteq U_h(0)$,то виконується наступне,що існує константа $d > 0$ така,що

$$|V(t, X)| \neq d,$$

при $t_0 \neq t < \infty$.Тобто,

$$|V(t, X(t, X_0, t_0)) \neq d,$$

для всіх $t \geq t_0$.

Так як C- компакт, функція $W(X)$ є неперервною, тоді за теоремою Вейєрштраса

$$min_{X \in C} W(X) = l > 0.$$

Оскільки

$$X(t, X_0, t_0) \in C,$$

то

$$\Big(\frac{dV(t, X(t, X_0, t_0))}{dt}\Big)_{(3.5)} \geq W(X(t, X_0, t_0)) \geq l, t \geq t_0.$$

Далі проінтегруємо отриману нерівність від t_0 до t,використовуючи властивість повної похідної в силу системи, одержуємо

$$V(X(t, X_0, t_0)) \geq V_0 + l(t - t_0), t \geq 0.$$

Це означає, що існує $t \geq t_0$,для якого

$$V_0 + l(t - t_0) \geq d,$$

звідси отримуємо

$$t \geq t_0 + \frac{d - V_0}{l}.$$

Ми отримали протиріччя,що показує, що існує такий момент часу при якому розвязок покине відкритий ϵ-окіл

$$X(t, X_0, t_0) \notin U_\epsilon(0).$$

Це буде означати,що буде порушуватися означення стійкості нульового розвязку за Ляпуновим,тобто розвязок буде нестійким. $\square$

3.3 Побудова функції Ляпунова для матричного диференціального рівняння Ляпунова

Розглянемо матричне рівняння Ляпунова

$$\frac{dX}{dt} = AX + XA^T, X(0) = X_0, \tag{3.11}$$

де A-постійна матриця, (3.11)-автономна система. Припустимо , що нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Якщо матриця X_0-симетрична , то матриця X теж симетрична. Отже , функцію Ляпунова $V(X)$ шукаємо у вигляді квадратичної форми

$$V(X) = tr(X^T BX) = tr(XBX^T), \tag{3.12}$$

де B-симетрична матриця, розмірності $n \times n$,матрицю B треба визначити.

Далі ми повинні записати умову про асимптотичну стійкість , яку повинна забезпечувати матриця B.

Для цього ми записуємо повну похідну в силу системи , для цього беремо систему (3.11) і беремо функцію $V(X)$ і записуємо повну похідну. Пригадаємо , що в загальному випадку повна похідна в силу системи має вигляд

$$\Big(\frac{dV(X)}{dt}\Big)_{(3.1)} = \frac{\partial V(X)}{\partial t} + tr\Big(\frac{\partial V^T}{\partial X}F(X)\Big). \tag{3.13}$$

В нашим випадку будемо мати , що

$$\frac{\partial V(X)}{\partial t} = 0,$$

тоді повна похідна має вигляд

$$\Big(\frac{dV(X)}{dt}\Big)_{(3.11)} = tr\Big(\frac{\partial V^T}{\partial X}(AX + XA^T)\Big), \tag{3.14}$$

де $\frac{\partial V^T}{\partial X} = (B + B^T)X = X(B + B^T)$.

Розпишемо детальніше , будемо мати , що

$$\begin{aligned}\Big(\frac{dV(X)}{dt}\Big)_{(3.11)} &= tr\Big(\frac{\partial V^T}{\partial X}(AX + XA^T)\Big) = \\ &= tr\Big(\frac{\partial V^T}{\partial X}AX\Big) + tr\Big(\frac{\partial V^T}{\partial X}XA^T\Big) = \\ &= tr(X^T(B + B^T)AX) + tr((B + B^T)X^T XA^T).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Розпишемо детальніше перший і другий доданкі,тоді перший

$$\begin{aligned}tr(X^T(B + B^T)AX) &= tr(X^T BAX) + tr(X^T B^T AX) = \\ = tr(X^T BAX) + tr((BX)^T AX) &= tr(X^T BAX) + tr((AX)^T BX) = \\ = tr(X^T BAX) + tr(X^T A^T BX) &= tr(X^T(BA + A^T B)X)\end{aligned} \tag{3.16}$$

а другий

$$\begin{gathered}tr((B+B^T)X^TXA^T)=tr(BX^TXA^T)+tr(B^TX^TXA^T)=\\=tr(A^TBX^TX)+tr(A^TB^TX^TX)=tr(A^TBX^TX)+tr((BA)^TX^TX)=\\=tr(A^TBX^TX)+tr(BA(X^TX)^T)=tr(A^TBX^TX)+tr(BAX^TX)=\\=tr(XA^TBX^T)+tr(XBAX^T)=tr(X^T(A^TB+BA)X) \qquad (3.17)\end{gathered}$$

Отже , повна похідна після перетворень буде мати такий вигляд

$$\left(\frac{dV(X)}{dt}\right)_{(3.11)}=tr(X^T(BA+A^TB)X)+tr(X^T(A^TB+BA)X)=\\=2tr(X^T(A^TB+BA)X). \qquad (3.18)$$

Повна похідна в силу системи повинна бути від'ємновизначена , тобто ми беремо додатньовизначену квадратичну форму з мінусом і прирівнюємо до повної похідної системи

$$\left(\frac{dV(X)}{dt}\right)_{(3.11)}=2tr(X^T(A^TB+BA)X)=-tr(X^THX). \qquad (3.19)$$

Звідси отримали матричне рівняння Ляпунова для знаходження матриці B

Тоді

$$B=\int_0^\infty e^{A^Tt}He^{At}dt.$$

3.3.1 Приклад

Нехай матриця A має наступний вигляд

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}.$$

де A має розмірність $n\times n$,не є діагональною і має від'ємні власні числа $\lambda=-1$.

Диференціальне рівняння Ляпунова ,буде мати наступний вигляд .

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)+\begin{pmatrix}-3 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}X+X\begin{pmatrix}-3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}. \qquad (3.20)$$

Треба знайти функцію Ляпунова .

Використовуючи попередні дослідження , щоб записати функцію Ляпунова , треба знайти матрицю B,яку ми отримаємо із матричного рівняння Ляпунова . В нашому випадку матричне рівняння буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix}-3 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}B+B\begin{pmatrix}-3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}. \qquad (3.21)$$

де $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{2}$-симетрична матриця.Побудуємо функцію Ляпунова.Прирівнявши елементи матриць праворуч і ліворуч , отримаємо

$$\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$$\begin{pmatrix}-6b_{11}-4b_{12} & -2b_{12}+2b_{11}-2b_{22}\\ -2b_{12}+2b_{11}-2b_{22} & 4b_{12}+2b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Тоді

$$-6b_{11}-4b_{12}=-1,$$
$$4b_{12}+2b_{22}=-1,$$
$$-2b_{12}+2b_{11}-2b_{22}=0.$$

Звідси $b_{11}=\frac{3}{2}$,$b_{12}=-2$,$b_{22}=\frac{7}{2}$. І матриця B буде мати вид

$$B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -2\\ -2 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

За критерієм Сильвестра , для того щоб квадратична форма була додатньо-визначеною необхідно , щоб всі головні мінори матриці B були додатні

$$\Delta_1=\frac{3}{2}>0,$$

$$\Delta_2=\frac{5}{4}>0.$$

З цього слідує , що нульовий розв'язок є асимптотично стійким. Запишемо функцію Ляпунова

$$V(X)=\frac{3}{2}x_{11}^2-2x_{21}x_{12}+\frac{7}{2}x_{22}^2. \tag{3.25}$$

Висновки

Робота присвячена дослідженню стійкості матричних диференціальних рівнянь. Вона висвітлює такі теми як лінійні матричні диференціальні рівняння, матричне диференціальне рівняння Ріккаті та другий метод Ляпунова для матричних диференціальних рівнянь. При розгляді лінійних матричних диференціальних рівнянь були розглянуті однорідні і неоднорідні рівняння. Для лінійних однорідних матричних диференціальних рівнянь висвітлюється формула для знаходження загального розв'язку. Описуються властивості матриці Коші. Розглядаються властивості розв'язків неоднорідного рівняння та висвітлюється формула Коші. На основі першого методу Ляпунова записані та обгрунтовані критерії стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості для матричного рівняння Ляпунова. Наведена теорема про інтегральну лійку, на її основі зроблений обчислювальний експеремент. Розглянуті властивості розв'язку матричного рівняння Ріккаті та наведено теорему про існування розв'язку. Обгрунтовані теореми другого методу Ляпунова, а саме теорема про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість для неаатономного та автономного випадку. Для матричного рівняння Ляпунова наведений метод побудови функції Ляпунова за допомогою матричного рівняння Ляпунова та з використанням метода розв'язано відповідний приклад для знаходження функції Ляпунова.

Перелік використаних джерел

[1] Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Прикладні задачі теорії стійкості. – К.: ВПЦ „Київський університет”, 2014. – 142 с.

[2] Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.

[3] Егоров А.И. Уравнения Риккати. -М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

[4] Капустян О.В., Пічкур В.В., Собчук В.В. Теорія динамічних систем. –Луцьк: Вежа-Друк, 2020. –348 с.

[5] Халил Хасан К. Нелинейные системы. –М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2009. – 829 с.

[6] Viorel Barbu. Differential Equations. -Springer, 2016. – 224 с.

[7] Vangipuram Lakshmikantham,Srinivasa Leela,Anatoly A.Martynyuk Stability Analysis of Nonlinear Systems. –Springer, 2015. – 329

[8] Xiaoxin Liao,Liqiu Wang ,Pei Yu Stability of Dynamical Systems. – Elsevier,2007. – 706.

ВІДГУК
наукового керівника
на випускну кваліфікаційну роботу
на здобуття ступеня бакалавра
„Дослідження стійкості матричних
диференціальних рівнянь”
студентки 4 курсу денної форми навчання
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Баньковскої Анни Олександрівни

Випускна кваліфікаційна робота на здобуття ступеня бакалавра висвітлює властивості і умови стійкості розв'язків матричних диференціальних рівнянь. Така задача є актуальною, оскільки матричні диференціальні рівняння з'являються при розв'язуванні задач теорії стійкості, зокрема практичної стійкості, оцінювання стану системи, оптимального керування і виникає проблема дослідження властивостей розв'язків таких рівнянь.

Структура роботи така: вступ, три розділи, висновки, список використаних джерел. В розділі 1 розглянуто лінійні матричні диференціальні рівняння, їх властивості, обгрунтовуються критерії стійкості на основі першого методу Ляпунова. Розглянуто метод знаходження перетину інтегральної лійки системи лінійних диференціальних рівнянь, який заснований на розв'язуванні матричного диференціального рівняння Ляпунова. В розділі 2 розглядаються властивості роз'язків матричного рівняння Ріккаті. В розділі 3 обгрунтовується другий метод Ляпунова для матричного диференціального рівняння. Для матричного диференціального рівняння Ляпунова наводиться метод побудови функції Ляпунова за допомогою матричного рівняння Ляпунова. Робота виконана самостійно, що підтверджується довідкою про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр. На джерела, які використовувались в роботі, в тексті роботи містяться посилання.

Вважаю, що випускна кваліфікаційна робота на здобуття ступеня бакалавра „Дослідження стійкості матричних диференціальних рівнянь” студентки 4 курсу Баньковскої Анни Олександрівни виконана на належному рівні, задовольняє всім вимогам до випускних кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня бакалавра і заслуговує оцінки „відмінно” (97 балів).

Доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри моделювання складних систем
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка Володимир ПІЧКУР

РЕЦЕНЗІЯ

на випускну кваліфікаційну роботу
на здобуття ступеня бакалавра
„Дослідження стійкості матричних диференціальних рівнянь"
студентки 4 курсу денної форми навчання
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Баньковскої Анни Олександрівни

Рецензована випускна кваліфікаційна робота на здобуття ступеня бакалавра присвячена властивостям і дослідженню стійкості розв'язків матричних диференціальних рівнянь. Матричні диференціальні рівняння виникають при дослідженні систем на стійкість, в задачах оптимального керування, в задачах оцінювання стану системи за вимірами. Як наслідок, виникає проблема стійкості розв'язків таких рівнянь відносно збурень, які наявні в початкових даних. Тому тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури. В розділі 1 розглянуто лінійні матричні диференціальні рівняння, їх властивості, обгрунтовуються критерії стійкості. Як приклад, наведена теорема про побудову інтегральної лійки системи лінійних рівнянь за допомогою матричного рівняння Ляпунова і проведено обчислювальний експеримент. В розділі 2 аналізуються властивості розв'язків матричного диференціального рівняння Ріккаті. В розділі 3 для матричних диференціальних рівнянь обгрунтовуються теореми другого методу Ляпунова, для матричного рівняння Ляпунова наводиться метод побудови функції Ляпунова за допомогою матричного рівняння Ляпунова.

Аналіз результатів кваліфікаційної роботи показує, що автор володіє сучасними методами дослідження розв'язків нелінійних систем, знає методи проведення обчислювального експерименту. Тому вважаю, що випускна кваліфікаційна робота на здобуття ступеня бакалавра студентки 4 курсу Баньковскої Анни Олександрівни „Дослідження стійкості матричних диференціальних рівнянь" виконана на належному рівні, задовольняє всім вимогам до випускних кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня бакалавра і заслуговує оцінки „відмінно".

Професор кафедри диференціальних
та інтегральних рівнянь
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка,
доктор технічних наук — Валентин СОБЧУК

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна * Ідентифікаційний код 02070944
Механіко-математичний факультет

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ

Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр

UNICHECK

Ім'я користувача:
Шатирко Андрій ФКомпНаук
ID перевірки:
1011547032
Дата перевірки:
11.06.2022 17:16:12 EEST
Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library
Дата звіту:
11.06.2022 17:30:26 EEST
ID користувача:
100007163

Назва документа: **Bankowska_Pichkur Prepare**

Кількість сторінок: **44** Кількість слів: **10467** Кількість символів: **55192** Розмір файлу: **527.50 KB** ID файлу: **1011418605**

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

2.41%

Схожість

Найбільша схожість: **0.24%** з Інтернет-джерелом (**https://core.ac.uk/download/pdf/153587024.pdf**)

.... Сторінка **46**

.... Сторінка **47**

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0%

Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи 1590

Підозріле форматування 38

Експертна оцінка роботи науковим керівником :

Кваліфікаційна робота виконана самостійно, на використані джерела в тексті зроблено посилання.

Науковий керівник: ____________________ ________Пічкур В.В.______________

(підпис) (ПІБ)

Оператор: __А.В.Шатирко__

(підпис) (ПІБ)