Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2024, № 1 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.5
MSC 65C60

# EQUALITY OF LS AND AITKEN ESTIMATIONS OF THE HIGHER COEFFICIENT OF THE LINEAR REGRESSION MODEL IN THE CASE OF TRIDIAGONAL BISYMMETRIC COVARIANCE MATRIX

Marta Savkina
Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine,
E-mail: marta@imath.kiev.ua

# РІВНІСТЬ ОЦІНОК МНК ТА ЕЙТКЕНА СТАРШОГО КОЕФІЦІЄНТУ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ У ВИПАДКУ ТРИДІАГОНАЛЬНОЇ БІСИМЕТРИЧНОЇ КОВАРІАЦіЙНОЇ МАТРИЦІ

М. Ю. Савкіна
Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
E-mail: marta@imath.kiev.ua

Abstract. At the paper a linear regression model whose function has the form $f(x) = ax + b$, $a$ and $b$ — unknown parameters, is studied. Approximate values (observations) of functions $f(x)$ are registered at equidistant points of a line segment. It is also assumed that the covariance matrix of deviations is a tridiagonal bisymmetric matrix. In the theorem proved in the paper, in the case of an odd number of observation points, a necessary and sufficient condition for the elements of this covariance matrix is found, which ensures the equality of the LS estimate and the Aitken estimate of the $a$ parameter of this model. With this type of covariance matrix of deviations, the estimates of Aitken and LS of parameter $b$ will not coincide.
Keywords: least square method, regression model, Aitken estimation.

Анотація. В роботі вивчається регресійна модель, функція якої має вигляд $f(x) = ax+b$, де $a$ та $b$ — невідомі параметри. Наближені значення (спостереження) функції $f(x)$ реєструються у рівновіддалених точках відрізку $[0, 1]$. Також припускається, що коваріаційна матриця відхилень є тридіагональною бісиметричною матрицею. В теоремі, яку доведено в роботі, у випадку непарної кількості точок спостереження знайдено необхідну і достатню умову на елементи даної коваріаційної матриці, яка забезпечує рівність оцінки МНК та оцінки Ейткена параметра $a$ даної моделі. При такому вигляді коваріаційної матриці відхилень оцінки Ейткена та МНК параметра $b$ не будуть збігатися.

Ключові слова: метод найменших квадратів, регресійна модель, оцінка Ейткена.

## Вступ

Значну частину статистичних методів, що використовуються для аналізу та обробки даних у різних сферах людської діяльності, надають методи регресійного аналізу.

В схемі регресії, як лінійної, і нелінійної, досліджується якась кількісна характеристика даного об'єкта чи явища. Безліч факторів, від яких залежить значення цієї характеристики в певній точці, поділяють на суттєві та несуттєві. Щодо несуттєвих факторів, то вивчається лише їх сумарний вплив, який подається як випадкова величина.

У класичній теорії найменших квадратів передбачається, що значення цієї випадкової величини мають однакову дисперсію та не корелюють одне з одним. В цьому припущенні знаходять оцінки невідомих параметрів регресійної моделі, вивчають їх властивості, доводять ефективність оцінки метода найменших квадратів (МНК). Надалі статистичні процедури змінюються стосовно до довільно корельованих випадкових складових, коваріаційна матриця яких відома. В цьому випадку ефективною оцінкою невідомих параметрів лінійної регресійної моделі буде оцінка Ейткена [1], в її формулу входить коваріаційна матриця випадкових відхилень. Якщо така матриця буде одиничною, то формула для оцінки Ейткена перетворюється в формулу для звичайної оцінки МНК. Інколи і у випадку неодиничної коваріаційної матриці оцінка Ейткена буде збігатися з оцінкою МНК; такі випадки розглянуто в [2]. Там розглядаються також випадки, коли ці оцінки збігаються тільки для частини параметрів моделі.

В статтях [3, 4, 5] вивчається лінійна регресійна модель, функція якої має вигляд $f(x) = ax + b$. В статті [3] вона вивчається у випадку гетероскедастичних незалежних відхилень. Знайдено умови на дисперсії відхилень, при яких оцінка Ейткена збігається з оцінкою МНК окремо для кожного невідомого параметру моделі. При цих умовах оцінки Ейткена та МНК іншого параметра не будуть збігатися.

В статтях [4, 5] така модель вивчається, коли коваріаційна матриця відхилень є симетричною матрицею Тепліца, певна кількість побічних діагоналей якої є нульовими. У випадку непарної кількості точок спостереження знайдено достатню умову [4] та необхідну умову [5] на елементи коваріаційної матриці, яка забезпечує рівність оцінки МНК та оцінки Ейткена параметра $a$ даної моделі.

## 1. Оцінка МНК та оцінка Ейткена лінійної регресійної моделі у випадку відхилень з тридіагональною коваріаційною матрицею

Розглянемо модель регресії

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i, \quad i = 0, 1, ..., n, \tag{1}$$

де $\epsilon_0, ..., \epsilon_n$ — випадкові величини з $E\epsilon_i = 0$ та коваріаційною матрицею $\sigma^2\Omega_{B3}$, $n$ — парне, а $\Omega_{B3}$ — додатно визначена матриця, що має вигляд

$$\Omega_{B3} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \lambda_1 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \lambda_2 & \gamma_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{k-1} & \lambda_{k-1} & \gamma_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_k & \lambda_k & \gamma_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_k & \lambda_{k-1} & \gamma_{k-1} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_1 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

де $\lambda_i > 0$, $i = 0, 1, ..., k$, $k = \frac{n}{2}$.

В [1] знайдено формули для оцінки МНК та оцінки Ейткена невідомих параметрів моделі лінійної регресії загального вигляду. З цих формул у випадку моделі (1) та $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$, маємо такі оцінки МНК та Ейткена параметрів $a$ та $b$:

$$\hat{a}_{MNK} = \frac{12n}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2}\right) y_i, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{AIT} \\ \hat{b}_{AIT} \end{pmatrix} = (X'\Omega_{B3}^{-1}X)^{-1} X'\Omega_{B3}^{-1}\vec{y},$$

де

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}\,' = (y_0, y_1, ..., y_n).$$

## 2. Умови на коваріаційну матрицю відхилень для збігу оцінок МНК та Ейткена параметру $a$ лінійної моделі

Має місце

**Теорема 1.** *Оцінки МНК та Ейткена параметра $a$ моделі (1) збігаються тоді та тільки тоді, коли елементи коваріаційної матриці відхилень $\gamma_1, ..., \gamma_{k-1}$ мають вигляд*

$$\gamma_1 = \frac{2(-1)^{k-1}}{k^2-1}\Big(\Lambda_{k-1} - 2^2\Lambda_{k-2} + ... + (-1)^{k-3}(k-2)^2\Lambda_2 + $$
$$+ (-1)^{k-2}(k-1)^2\Lambda_1\Big), \tag{3}$$

$$\gamma_{k-i} = \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} + \frac{(-1)^i}{i(i+1)}\right)\left(\Lambda_{k-1} - 2^2\Lambda_{k-2} + ... + (-1)^{i+1}i^2\Lambda_{k-i}\right) +$$
$$+ \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}\Big((-1)^{i+2}(i+1)^2\Lambda_{k-i-1} + ... + (-1)^k(k-1)^2\Lambda_1\Big), \tag{4}$$

$$i = 1, 2, ..., k-2,$$

*де*

$$\Lambda_i = \lambda_i - \lambda_0,$$

*а* $\lambda_i,\ i = 0, 1, ..., k,$ *та* $\gamma_k$ *— будь-які.*

*Доведення.* Достатність. Нехай виконується умови (3)–(4). Матриця $X'\Omega_{B3}^{-1}$ має розмір $2 \times (n+1)$, позначимо $i-$й елемент першого та другого рядка через $a_i$ та $b_i,\ i = 0, 1, ..., n$, відповідно. Помітимо, що

$$b_i = b_{n-i},\ i = 0, 1, ..., k-1.$$

В цих позначеннях маємо

$$X'\Omega_{B3}^{-1}X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{2k} ia_i & \sum_{i=0}^{2k} a_i \\ \sum_{i=0}^{k-1} b_i + \frac{1}{2}b_k & 2\sum_{i=0}^{k-1} b_i + b_k \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\Delta_{B3}$ визначник матриці $X'\Omega_{B3}^{-1}X$. Отримуємо

$$\Delta_{B3} = \left(2\sum_{i=0}^{k-1} b_i + b_k\right)\left(-\frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)a_i + \frac{1}{2k}\sum_{i=k+1}^{2k}(i-k)a_i\right).$$

Далі,

$$(X'\Omega_{B3}^{-1}X)^{-1}X'\Omega_{B3}^{-1} =$$
$$= \Delta_{B3}^{-1}\begin{pmatrix} 2\sum_{i=0}^{k-1} b_i + b_k & -\sum_{i=0}^{k-1} b_i - \frac{1}{2}b_k \\ -\sum_{i=0}^{2k} a_i & \frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{2k} ia_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{2k} \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{2k} \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\hat{a}_{AIT}^{(j)},\ j = 0, 1, ..., n,\ j-$й елемент першого рядка матриці $(X'\Omega_{B3}^{-1}X)^{-1}X'\Omega_{B3}^{-1}$. Маємо

$$\hat{a}_{AIT}^{(j)} = \Delta_{B3}^{-1}\left[\left(2\sum_{i=0}^{k-1} b_i + b_k\right)a_j - \left(\sum_{i=0}^{k-1} b_i + \frac{1}{2}b_k\right)b_j\right] =$$
$$= \frac{Z_j}{Z},\ j = 0, 1, ..., 2k, \tag{5}$$

де

$$Z_j = 2a_j - b_j,$$
$$Z = -\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)a_i + \frac{1}{k}\sum_{i=k+1}^{2k}(i-k)a_i.$$

Зауважимо, що користуючись $\hat{a}_{AIT}^{(j)},\ j = 0, 1, ..., n$, оцінку Ейткена можна подати в вигляді

$$\hat{a}_{AIT} = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_{AIT}^{(i)} y_j. \tag{6}$$

Доведемо, що якщо виконуються умови (3)–(4), то $\hat{a}_{AIT}^{(j)}$ збігається з відповідним коефіцієнтом при $y_j$ в лінійній комбінації (2).

Помітимо, що $a_j$ та $b_j$, $j = 0, 1, ..., n$, є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею $\Omega_{B3}$ та стовпцями вільних членів

$$\vec{x}_a\ ' = \big(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\big)$$

та

$$\vec{x}_b\ ' = (1, 1, 1, \ldots, 1, 1)'$$

відповідно. Отже,

$$Z_j = 2\frac{||\Omega^{(a)}_{B3,j}||}{||\Omega_{B3}||} - \frac{||\Omega^{(b)}_{B3,j}||}{||\Omega_{B3}||} = \frac{||\Omega^{(0)}_{B3,j}||}{||\Omega_{B3}||}, \tag{7}$$

де $||\Omega_{B3}||$ — визначник матриці $\Omega_{B3}$; $||\Omega^{(a)}_{B3,j}||$, $||\Omega^{(b)}_{B3,j}||$ та $||\Omega^{(0)}_{B3,j}||$ $(j = 0, 1, ..., n)$ — визначники матриць, які отримані з матриці $\Omega_{B3}$ заміною $j$-го стовпця на стовпці $\vec{x}_a\ '$, $\vec{x}_b\ '$ та $\vec{x}_0\ ' = \big(-1, -\frac{k-1}{k}, \ldots, -\frac{1}{k}, 0, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1\big)$ відповідно.

Доведемо, що якщо виконуються умови (3)–(4), то

$$Z_j = -\frac{k-j}{k^2}\left(\frac{k-1}{k^2}\gamma_1 + \frac{1}{k}\lambda_0\right)^{-1}, \tag{8}$$

Зауважимо, що (4) можна представити у виглялі

$$\gamma_{k-i} = \frac{k-1}{2k}\gamma_1 + \frac{(-1)^i}{i(i+1)}\big(\Lambda_{k-1} - 2^2\Lambda_{k-2} + ... + (-1)^{i-1}i^2\Lambda_{k-i}\big), \tag{4$'$}$$

$$i = 1, 2, ..., k-2.$$

Розглянемо добуток $P^{(B3)}_i$, $i = 0, 1, ..., k-1$, $i$-го рядка матриці $\Omega_{B3}$ на $\vec{x}_0$. Враховуючи (4′) маємо

$$P^{(B3)}_{k-1} = -\frac{2}{k}\gamma_{k-1} - \frac{1}{k}\lambda_{k-1} = -\frac{2}{k}\left(\frac{k-1}{2k}\gamma_1 - \frac{1}{2}\Lambda_{k-1}\right) - \frac{1}{k}\lambda_{k-1} =$$

$$= -\frac{k-1}{k^2}\gamma_1 - \frac{1}{k}\lambda_0, \tag{9}$$

$$P^{(B3)}_{k-i} = -\frac{i+1}{k}\gamma_{k-i} - \frac{i}{k}\lambda_{k-i} - \frac{i-1}{k}\gamma_{k-i+1} =$$

$$= -\frac{i+1}{k}\left(\frac{k-1}{2k}\gamma_1 + \frac{(-1)^i}{i(i+1)}\big(\Lambda_{k-1} - 2^2\Lambda_{k-2} + ... + (-1)^{i-1}i^2\Lambda_{k-i}\big)\right) -$$

$$-\frac{i}{k}\lambda_{k-i} - \frac{i-1}{k}\left(\frac{k-1}{2k}\gamma_1 + \frac{(-1)^i}{i(i+1)}\big(\Lambda_{k-1} - 2^2\Lambda_{k-2} + ... +\right.$$

$$\left. +(-1)^{i-2}(i-1)^2\Lambda_{k-i+1}\big)\right) = -i\frac{k-1}{k^2}\gamma_1 + \frac{i}{k}\Lambda_{k-i} - \frac{i}{k}\lambda_{k-i} = iP^{(B3)}_{k-1}, \tag{10}$$

$$i = 2, 3, ..., k-2;$$

$$P^{(B3)}_1 = -\gamma_1 - \frac{k-1}{k}\lambda_1 - \frac{k-2}{k}\gamma_2 = \left(-\frac{k}{2}\frac{k-1}{k^2}\gamma_1 + \right.$$

$$+\frac{2(-1)^{k-1}(k+1)}{2k(k^2-1)}\big(\Lambda_{k-1} - 2^2\Lambda_{k-2} + ... + (-1)^{k-3}(k-2)^2\Lambda_2 +$$

$$+(-1)^{k-2}(k-1)^2\Lambda_1\Big)\Big)-\frac{k-1}{k}\lambda_1-$$

$$-\frac{k-2}{k}\left(\frac{k-1}{2k}\gamma_1+\frac{(-1)^i}{i(i+1)}\big(\Lambda_{k-1}-2^2\Lambda_{k-2}+...+(-1)^{k-1}(k-2)^2\Lambda_2\big)\right)=$$

$$=-(k-1)\frac{k-1}{k^2}\gamma_1+\frac{k-1}{k}\Lambda_1-\frac{k-1}{k}\lambda_1=(k-1)P_{k-1}, \tag{11}$$

$$P_0^{(B3)}=-\lambda_0-\frac{k-1}{k}\gamma_1=kP_{k-1}^{(B3)}. \tag{12}$$

Далі, розглянемо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею $\Omega^{+}_{B3,j}$, яка утворена з матриці $\Omega_{B3}$ додаванням до $i$-го елемента $j$-го стовпця доданку $\frac{(k-i)k}{k-j}P_{k-1}^{(B3)}$, $i=0,1,...,2k$. З (9), (10), (11) та (12) випливає, що при умовах (3)–(4) ця система має ненульовий розв'язок, а це значить, що

$$||\Omega^{+}_{B3,j}||=0, \tag{13}$$

де $||\Omega^{+}_{B3,j}||$ — визначник матриці $\Omega^{+}_{B3,j}$.

Далі, оскільки

$$||\Omega^{+}_{B3,j}||=||\Omega_{B3}||-\frac{k^2}{k-j}P_{k-1}^{(B3)}||\Omega^{(0)}_{B3,j}||, \tag{14}$$

з (13) та (14) отримуємо

$$||\Omega^{(0)}_{B3,j}||=\frac{k-j}{k^2}\big(P_{k-1}^{(B3)}\big)^{-1}||\Omega_{B3}||. \tag{15}$$

Співвідношення (7) має місце для будь-яких $\gamma_1,...,\gamma_{k-1}$ значить, і для тих, які визначаються формулами (3)–(4).

Підставимо (9) в (15), а (15) в (7). Отримуємо (8).

Далі, доведемо, що $Z$ при умовах (3)–(4) можна представити в вигляді

$$Z=-\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}\left(\frac{k-1}{k^2}\gamma_1+\frac{1}{k}\lambda_0\right)^{-1}. \tag{16}$$

Помітимо, що $Z$ можна переписати у вигляді

$$Z=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)(a_{2k-i}-a_i). \tag{17}$$

Матриця $\Omega_{B3}$ симетрична і бісиметрична; в роботі [4] доведено, що для таких матриць де

$$a_{2k-i}-a_i=-||\Omega_{B3}||^{-1}||\Omega^{(0)}_{B3,i}||. \tag{18}$$

Якщо $\gamma_j$, $j=1,2,...,k-1$, визначаються формулами (3)–(4), то з (18) з урахуванням (15) маємо

$$a_{2k-i}-a_i=-\frac{k-i}{k^2}\left(\frac{k-1}{k^2}\gamma_1+\frac{1}{k}\lambda_0\right)^{-1}. \tag{19}$$

Підставимо (19) в (17). Отримуємо

$$Z = -\left(\frac{k-1}{k^2}\gamma_1 + \frac{1}{k}\lambda_0\right)^{-1} \frac{1}{k^3}\sum_{i=1}^{k} i^2,$$

звідки випливає (16).

З (5), (8) та (16) отримуємо

$$\hat{a}_{AIT}^{(j)} = -\frac{6(k-j)}{(k+1)(2k+1)},\ j = 0, 1, ..., 2k. \tag{20}$$

Таким чином, бачимо, що оцінка $\hat{a}_{AIT}$ подана у вигляді (6) з урахуванням (20) збігається з (2), тобто при умовах (3)–(4)

$$\hat{a}_{AIT} = \hat{a}_{MNK}. \tag{21}$$

Достатню умову доведено.

Необхідність. Нехай виконується умова (21). Враховуючи (2) отримуємо

$$\frac{\hat{a}_{MNK}^{(i)}}{\hat{a}_{MNK}^{(k-1)}} = k - i,\ i = 0, 1, ..., k-2. \tag{22}$$

З умови (21) та рівності (22) випливає, що має бути

$$\frac{\hat{a}_{AIT}^{(i)}}{\hat{a}_{AIT}^{(k-1)}} = k - i,\ i = 0, 1, ..., k-2. \tag{23}$$

Враховуючи (5) та (23), маємо

$$Z_i = (k-i)Z_{k-1},\ i = 0, 1, ..., k-2. \tag{24}$$

З (7) випливає, що $Z_i,\ i = 0, 1, ..., k-1$, є розв'язком системи рівнянь

$$\Omega_{B3}\vec{z} = \vec{x}_0, \tag{25}$$

де $\vec{z}' = (Z_0, Z_1, ..., Z_{k-1}, 0, -Z_{k-1}, ..., -Z_1, -Z_0)$.

Якщо $Z_i,\ i = 0, 1, ..., k-1$, задовільняють властивість (24) та $k \geq 5$, то останні $k$ рівнянь системи (25) можна переписати наступним чином

$$kZ_{k-1}\lambda_0 + (k-1)Z_{k-1}\gamma_1 = -1,$$

$$(k-i+1)Z_{k-1}\gamma_i + (k-i)Z_{k-1}\lambda_i + (k-i-1)Z_{k-1}\gamma_{i+1} = -\frac{k-i}{k},$$
$$i = 1, 2, ..., k-2;$$

$$2Z_{k-1}\gamma_{k-1} + \lambda_{k-1}Z_{k-1} = -\frac{1}{k}.$$

Оскільки $Z_{k-1} \neq 0$, обидві частини всіх рівнянь можна поділити на $Z_{k-1}$. Отримуємо

$$k\lambda_0 + (k-1)\gamma_1 = -Z_{k-1}^{-1}, \tag{26}$$

$$(k-i+1)\gamma_i + (k-i)\lambda_i + (k-i-1)\gamma_{i+1} = -\frac{k-i}{k}Z_{k-1}^{-1}, i = 1, 2, ..., k-2; \tag{27}$$

$$2\gamma_{k-1} + \lambda_{k-1} = -\frac{1}{k}Z_{k-1}^{-1}. \tag{28}$$

Помножимо рівняння (28) на $k$; помножимо рівняння (27) на $\frac{k}{i}$, $i = 2, 3, ..., k-1$, та прирівняємо ліві частини отриманих рівнянь до лівої частини рівняння (26). Отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\gamma_1, ..., \gamma_{k-1}$ :

$$-\frac{2k-1}{k-1}\gamma_1 - \frac{k(k-2)}{k-1}\gamma_2 = k\Lambda_1,$$
$$(k-1)\gamma_1 - \frac{(k-i-1)k}{k-i}\gamma_{i+1} - \frac{(k-i+1)k}{k-i}\gamma_i = k\Lambda_i, \ i = 2, 3, ..., k-2; \quad (29)$$
$$(k-1)\gamma_1 - 2k\gamma_{k-1} = k\Lambda_{k-1}.$$

Нехай $A$ — матриця системи (29), $||A||$ — визначник $A$. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2k-1}{k-1} & -\frac{k(k-2)}{k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k-1 & -\frac{k(k-1)}{k-2} & -\frac{k(k-3)}{k-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & -\frac{k(k-2)}{k-3} & -\frac{k(k-4)}{k-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & \\ k-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{4k}{3} & -\frac{2k}{3} & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{3k}{2} & -\frac{k}{2} \\ k-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2k \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що $||A|| \neq 0$. Для цього останній рядок ($(k-1)$-й) визначника, помножений на $\frac{1}{4}$, віднімемо від попереднього ($(k-2)$-го,) потім перетворений $(k-2)$-й рядок, помножений на $\frac{4}{9}$, віднімемо від $(k-3)$-го рядка і так далі; перетворений другий рядок, помножений на $\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2$, віднімемо від першого. Отримуємо трикутний визначник, значення якого дорівнює $||A||$. Таким чином

$$||A|| = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2(k-1)} \cdot \frac{k(k-1)}{k-2} \cdot \frac{k(k-2)}{k-3} \cdot ... \cdot \frac{3k}{2} \cdot 2k \neq 0.$$

Далі, з останнього рівняння ($(k-1)$-го) виразимо $\gamma_{k-1}$ через $\gamma_1$. В $(k-2)$-ге рівняння підставимо отриманий з $(k-1)$-го рівняння вираз для $\gamma_{k-1}$ та виразимо $\gamma_{k-2}$ через $\gamma_1$ і так далі до другого рівняння. Маємо

$$\gamma_{k-i} = \frac{k-1}{2k}\gamma_1 + \frac{(-1)^i}{i(i+1)}\left(\Lambda_{k-1} - 2^2\Lambda_{k-2} + ... + (-1)^{i+1}i^2\Lambda_{k-i}\right), \quad (30)$$
$$i = 1, 2, ..., k-2.$$

В перше рівняння системи (29) підставимо вираз для $\gamma_2$ з (30); отримуємо рівняння відносно однієї змінної $\gamma_1$. Розв'язуємо його та отримуємо (3); підставляємо (2) в (30) та отримуємо (4).

Випадки $k = 2, 3, 4$ розглянуто в [6]. □

## Заключні зауваження

В статті розглянуто регресійну модель, функція якої має вигляд $f(x) = ax + b$, де $a$ та $b$ — невідомі параметри. Наближені значення (спостереження) функції $f(x)$ реєструються у рівновіддалених точках відрізку $[0, 1]$. Припускається, що коваріаційна матриця відхилень є тридіагональною бісиметричною матрицею. Доведено, що у випадку непарної кількості точок спостереження знайдено необхідну і достатню умову на елементи даної коваріаційної матриці, яка забезпечує рівність оцінки МНК та оцінки Ейткена параметра $a$ даної моделі.

## Література


1. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. Москва: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. Москва: Мир, 1976. 756 с.
3. Савкіна М.Ю. Умови збігу оцінок МНК та Ейткена параметрів моделі лінійної регресії. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2018. № 3. С. 36–44.
4. Савкіна М.Ю. Рівність оцінок МНК та Ейткена старшого коефіцієнту лінійної моделі регресії у випадку корельованих відхилень. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2021. № 2. С. 64–72.
5. Савкіна М.Ю. Необхідна умова збігу оцінок МНК та Ейткена старшого коефіцієнту лінійної моделі регресії у випадку корельованих відхилень. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2022. № 2. С. 116–125.
6. Савкіна М.Ю. Необхідна умова збігу оцінок МНК та Ейткена у випадку, коли коваріаційна матриця відхилень є тридіагональною бісиметричною матрицею. Збірник наукових праць XXVII Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук», Львів, 7–9 листопада 2023 р. С. 194–196.


Надійшла: 18.12.2023 / Прийнята: 24.02.2024