

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**

**Міністерство освіти і науки України**

*Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису*

**ІГНАТЮК ВІТАЛІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ**

УДК 336.76

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ПРОГНОЗУВАННЯ ТРАНСАКЦІЙНИХ ВИТРАТ РИНКОВОГО  
ВПЛИВУ ТОРГІВЛІ АКЦІЯМИ НА БІРЖОВИХ РИНКАХ**

072 - Фінанси, банківська справа та страхування

07 – Управління та адміністрування

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело  
\_\_\_\_\_ Ігнатюк В.В.

Науковий керівник  
Любкіна Олена Вікторівна,  
доктор економічних наук

Київ - 2023

## АНОТАЦІЯ

**Ігнатюк В.В. Прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу торгівлі акціями на біржових ринках.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктор філософії за спеціальністю 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» - Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2023.

У дисертації дослідженні теоретичні засади трансакційних витрат ринкового впливу, причини їх виникнення, та вплив який вони справляють на взаємодію різних категорій інвесторів на фондовому ринку. Проведено критичний аналіз наявного модельного інструментарію прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу та запропоновані шляхи удосконалення наявних методів моделювання з метою покращення їх прогностичних якостей. Надані практичні рекомендації та приклади застосування моделей трансакційних витрат ринкового впливу для прийняття більш ефективних рішень економічними суб'єктами в процесі їх інвестиційної діяльності на вторинному ринку фінансових активів.

Виокремлено три основні підходи до визначення джерел трансакційних витрат на ринках акцій: 1) як плата за швидкість та визначеність у процесі операцій купівлі-продажу; 2) як премія за ліквідність потенційним контрагентам; 3) як компенсація за можливу інформаційну асиметрію між покупцем і продавцем фінансового активу.

На основі дослідження ринкової мікроструктури, організації та правил функціонування торгових майданчиків на фондових ринках; було встановлено, що їх різноманіття обумовлено потребою надати інвестору інструменти, за допомогою яких він здатний управляти своїми трансакційними витратами та поліпшити сам процес обміну фінансових активів.

Встановлено, що трансакційні витрати ринкового впливу – це витрати, що є результатом самого процесу здійснення торгівлі інвестором, які

спричинені несприятливим рухом ціни на актив внаслідок зворотнього впливу операцій купівлі-продажу на баланс попиту і пропозиції та на очікування ринкових агентів. Виявлено, що ці витрати є найбільш складними для прогнозування серед усіх складових загальних трансакційних витрат інвестора на фондовому ринку акцій.

На основі аналізу сучасних моделей прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу, встановлено, що на даний момент не існує загальної, консистентної та несуперечливої моделі трансакційних витрат ринкового впливу. Всі існуючі методи прогнозування базуються на певних припущеннях і здатні відображати лише певні властивості цієї категорії трансакційних витрат.

Було виявлено, що існуючі методи побудови і калібрування моделей трансакційних витрат ринкового впливу використовують емпіричні дані неефективно для оцінки своїх параметрів. Натомість для цього було запропоновано застосувати метод максимальної правдоподібності. Це підвищило точність прогнозів трансакційних витрат ринкового впливу здійснених за допомогою цих моделей.

Було запропоновано використовувати моделі трансакційних витрат для підвищення ефективності здійснення наступних інвестиційних рішень: 1) вибору брокера з послугами найкращої якості; 2) знаходження оптимального плану виконання замовлення на купівлю-продаж акцій; 3) формування оптимального портфелю акцій за умови наявності трансакційних витрат.

Оскільки інвестор прагне наймати брокера, чиї послуги призводять до найменших трансакційних витрат, було запропоновано нормалізувати їх величину на розмір прогнозованих трансакційних витрат ринкового впливу здійснених відповідною моделлю. Це дозволяє зменшити вплив невизначеності, трансакційних витрат ринкового впливу на отриманий результат і зменшує необхідний період збору емпіричних даних щодо діяльності відповідного брокера для формування висновку про якість його послуг.

Встановлено, що формування оптимального плану виконання замовлення на купівлю-продаж акції має на меті зменшення трансакційних витрат ринкового впливу, а отже є результатом мінімізації значень, прогнозованих відповідною моделлю. Вирішення відповідних оптимізаційних задач призводять до якісно схожих планів виконання замовлення. Вони полягають у реалізації блоків на початку і в кінці запланованого періоду виконання замовлення та рівномірній торгівлі у середині.

У роботі було запропоновано розширити модель сучасної портфельної теорії шляхом включення до неї прогнозованих значень трансакційних витрат. Було доведено, що ігнорування цієї компоненти призводить до якісно інших складових портфелю, і отримані розв'язки не максимізують корисність інвестора. На відміну від цього, врахування ефектів трансакційних витрат поліпшує кінцевий інвестиційний результат.

Не зважаючи на те, що рекомендації, надані у роботі мають на меті покращити ефективність прийняття рішень інвестором на індивідуальному рівні, за умови широкої імплементації запропонованих методів, можна очікувати й більш оптимального розподілу інвестиційних ресурсів у всій економіці в цілому. А в умовах обмеженого обсягу інвестиційного капіталу, в якому наша країна перебуває на даний момент, розподіл наявних фінансових ресурсів з максимальною ефективністю є однією з першочергових задач у підтримці економіки України.

У роботі також досліджено процеси торгівлі на вторинних фондових ринках та визначено яким чином їх мікроструктура впливає на трансакційні витрати та ефективність ринку. А розвинутий організований ринок акцій, в свою чергу, полегшує доступ для капіталу підприємствам, стимулює заощадження та покращує інвестиційну привабливість країни, що є особливо важливим у відновленні економічного і фінансового становища України після Перемоги.

*Ключові слова: фондовий ринок, торговий майданчик, транзакційні витрати, ринковий вплив, ринкова мікроструктура, метаордери, моделі поширення, ліквідність, метод максимальної правдоподібності, інвестиційна діяльність, інтенсивність торгівлі, книга ордерів.*

## ANNOTATION

**Ihnatiuk V.V. Forecasting market impact transaction costs in equities trading on stock exchanges.** Qualifying research, manuscript. Thesis for a PhD in Economics degree in the specialty 072 “Finance, banking and insurance” - Taras Shevchenko National University of Kyiv, - Kyiv, 2023.

This thesis studies the theory behind transaction costs of market impact, the reasons for their occurrence and the effect they have on different investor classes on the stock market. Author conducts critical analysis of methods for modeling and forecasting market impact costs and suggests ways to improve prediction accuracy of existing models. This research provides practical recommendations and examples on how to use market impact cost models to enhance the decision-making process of investors who operate on secondary financial markets.

Three approaches to define transaction costs on equity markets are outlined in this work. Transaction costs could be viewed as 1) the payment for the speed and certainty in trading operations; 2) the liquidity premium demanded by a potential counterparty; 3) compensation for the perceived information asymmetry between buyer and seller of financial asset.

After studying market microstructure, rules and regulations which govern exchanges and trading venues, the author concluded that their multitude and variety is a result of them catering to investor's need for the means and instruments which help market participants manage their transaction costs.

In this research, market impact transaction costs were defined as costs which occur as a result of investor's trading activity, and which are caused by the adverse effect that an investor's trading operations have on the supply-demand balance and expectations of market agents. These costs are the most difficult element to predict of all the other components of transaction costs which arise when equities are being traded on stock markets.

Based on this study's analysis of the modern methods to forecast the size of market impact costs, it was found that currently there is no general, consistent and

non-contradictory model available for that purpose. All of the existent models are based on relatively restrictive assumptions and are able to reflect only a limited set of market impact cost properties.

In addition, current methods of fitting market impact costs models leave much to be desired as they do not use the empirical data efficiently. To remedy this inefficiency, the author has suggested using the maximum likelihood method to enhance the statistical properties of estimated parameters in these models. It was proven in this thesis that this approach improves the accuracy of market impact costs predictions as well.

This study proposed using market impact models in the following applications: 1) selecting the broker with services of the highest quality; 2) finding an optimal schedule of executing a trading order; 3) constructing a portfolio of stocks and accounting for transaction costs associated with it.

Since an investor is interested in brokerage services which provide the lowest transaction costs, it was suggested in this thesis to normalize observed costs of brokers executing orders on behalf of an investor by predicted market impact costs provided by the appropriate model. This technique reduced the noise of observed transaction cost values and reduced the time during which the sample has to be collected, so that the investor could faster conclude whether the given broker provides services of better or worse quality than its peers with enough statistical significance.

A trader constructs an order execution schedule in order to reduce the cost associated with this transaction. It is built so that the forecasted market impact costs are minimized. This thesis examined different market impact models and showed that solutions to this optimization problem are qualitatively similar across models examined. The resulting schedules consist of trading a block of stocks at the start and at the end of the planned execution period and trading with a constant rate throughout the rest of the order.

This research suggested extending the model of modern portfolio theory by including the expected transaction costs into its formulation. It proved that

ignoring this component in portfolio construction results in a solution which fails to maximize investor's utility. On the contrary, if transaction costs are accounted for, it leads to a better result for the investor.

Even though the recommendations provided by this thesis are aimed to improve the decision-making of a single investor individually, if accepted widely, they should lead to more optimal allocation of capital in aggregate. Considering the limited financial resources our country currently possesses, maximizing the effectiveness of their usage is paramount in supporting Ukraine's economy.

In addition, this thesis also researches the trading processes on the secondary markets and studies how the microstructure affects transaction costs and market efficiency. In turn, a developed and efficient stock market facilitates capital access for companies, stimulates savings and enhances the country's investment attractiveness. All these factors would play a pivotal role in Ukraine's economic and financial recovery after the Victory.

*Key words: stock market, trading venue, transaction costs, market microstructure, metaorders, propagator models, liquidity, maximum likelihood method, investment process, trading rate, limit order book.*

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*У наукових фахових виданнях:*

1. Ігнатюк А.І., Ігнатюк В.В. Моделі мережевих ефектів та їх практичне застосування // *Вісник Чернівецького торговельно-економічного інституту*. – Чернівці: ЧТЕІ КНТЕУ, 2012. – Вип. I (45). Економічні науки. – С.405-418. (стаття належить до міжнародних наукометричних баз даних *Google Scholar*) (0,87 друк. арк., із яких особисто автору належать 0,6 друк. арк. Внесок автора: досліджено моделі мережевих ефектів та надано приклад їх практичного застосування для ринку мобільного зв'язку України).

2. Bazylevych V., Ihnatiuk V. Metaorder limit prices in evaluating expected market impact and assessing execution service quality // *Investment management and financial innovations*. - 2019. - Vol. 16. т.2. - р. 355-369 (стаття належить до міжнародних наукометричних баз даних *Scopus*) (0,91 друк. арк., з яких особисто автору належать 0.65 друк. арк. Внесок автора: Розробка стимуляційної моделі торгівлі метаордеру, дослідження впливу лімітуючої ціни на транзакційні витрати виконання замовлення).

3. Любка О., Ігнатюк В. Методичні підходи до оцінювання та прогнозування транзакційних витрат біржової торгівлі на фондовому ринку // *Актуальні проблеми економіки*. – 2023. – №1 (259). – С. 64 – 75. ( 1 друк. арк., із яких особисто автору належать 0,8 друк. арк. Внесок автора: наведена класифікація транзакційних витрат біржової торгівлі, визначені основні види транзакційних витрат та дана їх характеристика з точки зору вимірюваності та можливості прогнозування; виведено формулу для розрахунку транзакційних витрат).

4. Любка О., Ігнатюк В. Застосування функції витрат ринкового впливу для оцінки якості брокерських послуг на ринку акцій // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. Економіка, 2022, №4(221) с. 27-36. (стаття належить до міжнародних

наукометричних баз даних *Index Copernicus, Goodle Scholar*) (1,05 друк. арк., з яких особисто автору належать 0.7 друк. арк. Внесок автора: запропоновано нормалізувати витрати що виникають при користуванні послугами брокера на прогнозовані значення трансакційних витрат ринкового впливу, наданих відповідною моделлю; проведено симуляції які довели що це дозволяє зменшити необхідний розмір вибірки для оцінки якості послуг наданих відповідним брокером).

5. Любка О., Ігнатюк В. Трансакційні витрати торгівлі на організованих фондових ринках: структура та наслідки для ефективності ринку // *Вісник Хмельницького національного університету: Економічні науки.* – 2023. – № 4. – С. 31 – 42 (1,02 друк. арк., із яких особисто автору належать 0,9 друк. арк. Внесок автора: обґрунтовано походження трансакційних витрат фондової торгівлі з точки зору мікроструктури фондового ринку; систематизовано підходи до класифікації трансакційних витрат операцій на організованих фондових ринках та визначено сутність основних складових явних та неявних трансакційних витрат; аргументовано вплив трансакційних витрат на інформаційну ефективність фондових ринків).

*Публікації апробаційного характеру:*

1. Ihnatiuk V. The effect of stock exchange trading mechanism on market efficiency // *International Scientific Conference Modern Global Trends in the Development of Innovative Scientific Researches: Conference Proceedings,* March 20th, 2020. Riga, Latvia: Baltija Publishing. – p. 151-154 (0.2 друк. арк.).

2. Ігнатюк В.В. Складові трансакційних витрат на фінансових ринках та їх функціональна залежність від обсягу трансакцій // *The 5 th International scientific and practical conference - Actual trends of modern scientific research* November 8-10, 2020. Munich, Germany: MDPC Publishing. - p. 474-479. (0.2 друк. арк.).

3. Ігнатюк В.В. Теоретико-методологічні підходи до аналізу джерел трансакційних витрат ринкового впливу на фінансових ринках акцій // *Світові тенденції та перспективи розвитку фінансової системи України: Матеріали XVI Міжнародної науково-практичної конференції, 25-26 травня 2023*. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – с. 108-110. (0.2 друк. арк.).

## ЗМІСТ

<b>Вступ .....</b>	<b>14</b>
<b>Розділ 1. Теоретичні засади дослідження трансакційних витрат ринкового впливу на ринках акцій.....</b>	<b>24</b>
1.1. Генезис підходів до дослідження сутності та джерел трансакційних витрат операцій з акціями .....	24
1.2. Мікроструктура організованих ринків акцій.....	38
1.3. Сутність та джерела трансакційних витрат ринкового впливу торгівлі акціями.....	54
Висновки до Розділу 1 .....	68
<b>Розділ 2. Модельний інструментарій прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу на біржових ринках акцій .....</b>	<b>71</b>
2.1. Методичні підходи до оцінювання та прогнозування трансакційних витрат біржових операцій з акціями .....	71
2.2. Моделювання ринкового впливу торгівельних операцій на організованих ринках акцій .....	99
2.3. Прогнозування динаміки витрат ринкового впливу на біржовому ринку.....	126
Висновки до Розділу 2 .....	154
<b>Розділ 3. Прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу як чинник підвищення ефективності прийняття інвестиційних рішень на ринках акцій.....</b>	<b>156</b>
3.1. Оцінка якості брокерських послуг на основі функції витрат ринкового впливу операцій з акціями.....	156
3.2. Вибір оптимального плану виконання метаордеру на фондовому ринку акцій.....	175
3.3. Формування оптимального портфелю акцій з урахуванням трансакційних витрат ринкового впливу.....	198
Висновки до Розділу 3 .....	218
<b>Висновки .....</b>	<b>220</b>

<b>Список використаної літератури.....</b>	<b>224</b>
<b>Додатки.....</b>	<b>244</b>
Додаток А.....	244
Додаток Б.....	248
Додаток В.....	250
Додаток Г.....	252
Додаток Д.....	254
Додаток Е.....	258
Додаток Є.....	263
Додаток Ж.....	265
Додаток З.....	268

## ВСТУП

**Актуальність проблеми.** На сучасних фінансових ринках неможливо уявити здійснення процесу інвестування, що не включав би проведення вторинних операцій купівлі-продажу. Значна частина діяльності, пов'язана з обміном інвестиційних інструментів, відбувається за рахунок торгівлі контрактами та укладанням угод на біржових майданчиках.

У XIX та XX століттях це здійснювалося шляхом фізичної присутності довірених осіб інвесторів у визначених місцях торгівлі та обміном майнових прав та зобов'язань, укладених у паперовому вигляді. Стрімкий розвиток мережі Інтернет призвів до переходу до більш сучасних форм організації цього процесу.

Дійсно, реальність сучасного інвестування полягає в тому, що нова інформація щодо вартості того чи іншого фінансового інструменту розповсюджується майже миттєво. Для того, щоб вчасно реагувати на ці сигнали, інвестори потребували засоби для швидкого корегування власних інвестиційних портфелів. Очевидно, що за таких умов фізичний обмін не відповідав викликам, до яких призвела інформатизація суспільства та вільний потік інформації мережею Інтернет.

Через це на межі XXI століття більша частина операцій купівлі-продажу перемістилися в електронну площину. Велика кількість сучасних фондових бірж не має фізичного торговельного майданчика, а операції відбуваються виключно в електронних системах.

В свою чергу, розвиток засобів електронної торгівлі суттєво прискорив процес обміну та здійснення трансакцій на організованих фондових ринках. Дійсно, час, що проходить від моменту прийняття інвестором рішення щодо необхідності здійснити певну інвестицію до моменту виконання відповідної трансакції, вимірюється мілісекундах і знаходиться на відстані натискання однієї кнопки у відповідному додатку. Більше того, такий розвиток у інфраструктурі фондових ринків спричинив появу нового класу інвесторів –

високачастотних торговців, які в процесі своєї діяльності здійснюють до тисячі трансакцій у секунду.

За умов, коли технічні засоби та інформаційні технології забезпечують миттєве проведення трансакцій будь-яких обсягів, особливого значення набувають витрати інвестора, що пов'язані з організацією купівлі-продажу фінансових інструментів. Вони виникають через необхідність забезпечення діяльності бірж, як платформи для пошуку контрагентів та інформаційної асиметрії між учасниками торгівлі. Оскільки ці витрати знаходяться поза межами контролю окремого інвестора, для нього постає необхідність не лише оцінювати доцільність конкретного фінансового інструмента з позиції його інвестиційної привабливості, але й враховувати трансакційні витрати пов'язані з його придбанням.

Таким чином, оцінка цих витрат, визначення ліквідності та кон'юнктури ринку має відбуватися з такою самою швидкістю, як і зміна вартості активу що обумовлена надходженням нової інформації у сучасному суспільстві; тобто – миттєво. Це обумовлює актуальність цієї теми дослідження.

Економічну сутність трансакційних витрат та їх вплив на процеси ринкового обміну розглядали у своїх працях Р. Коуз, О. Вільямсон, Д. Норд та Л. Міллер. Більш детально зв'язок трансакційних витрат з організацією діяльності торгів фінансовими інструментами досліджували Г. Деместз, А. Краусс та Г. Столл. Питання того, яким чином трансакційні витрати впливають на ефективність ринкового механізму, розглядалися у статтях Б. Гу, Л. Хітта, Е. Давіла, С. Парлаторе, Ч.-А. Лехалла, Браєра М., Р. Дженнінгса, Д. Ізлі, А. Бріс. Моделюванню процесів обміну на фондовому ринку, за умови наявності трансакційних витрат, присвятили свої роботи А. Кайл, Л. Глостен та П. Мілгром, А. Адматі та П. Плайдер, Й. Аміхуд та Г. Мендельсон. Питання оптимальної діяльності інвестора за умови наявності трансакційних витрат досліджували А. Грінольд та Р. Канн, Т. Лоеб, А. Алмгрен, Кріс Н., Д. Лог, К. Лінк, Дж. Вілкокс, Дж. Курато. Дослідження присвячені наслідкам використання методів штучного інтелекту наявні у

роботах Ж. Жанга, С. Робертса, С. Вітренко, М. Ванга, А. Ло, Р. Конта. Підходи до класифікації трансакційних витрат наводять у своїх дослідженнях Б. Коллінс, Ф. Фабоззі, Д. Кейм та А. Мадхаван.

Окремо можна виділити дослідження, що фокусуються на витратах ринкового пливу як найбільшій частині загальних трансакційних витрат інвестора. Аналізу цієї категорії присвятили свої роботи А. Обіжаєва, Дж. Ванг, А. Альфонсі, Дж. Газерал, В. Тоз, Ж.-Ф. Бушад., Д. Таранто, Ф. Лілло, Н. Рахлін та Д. Бершова, А. Шід.

Проте, не зважаючи на значний академічний інтерес до проблематики трансакційних витрат фондової торгівлі на розвинутих ринках капіталу, існуючі методологічні підходи неефективно використовують емпіричні дані фінансових операцій для прогнозування трансакційних витрат у процесі прийняття інвестиційних рішень. На даний момент не існує загальної, консистентної та несуперечливої моделі трансакційних витрат ринкового впливу, якою міг би керуватися інвестор у своїй практичній діяльності на фондовому ринку.

Дослідження трансакційних витрат є актуальним і для країн, фондові ринки яких лише починають розвиватися, до складу яких можна віднести і Україну. Хоча дана проблематика не є предметом активного дискурсу в Україні внаслідок того, що капіталізація та ліквідність вітчизняного фондового ринку залишаються незначними. Слід виділити роботи таких науковців як: А.Б. Камінський, Г.А. Черноус, А. Шинкаренко, О. Юркевич, Ю. Невмивака, О.В. Любка, В.Д. Базилевич, у яких розглядається широкий спектр наукових проблем пов'язаних з трансакційними витратами і їх впливу на прийняття інвестиційних рішень на фондовому ринку.

Саме у контексті фінансового ринку України дослідження трансакційних витрат, визначення джерел та причин їх існування дозволить обрати таку модель розвитку ринків цінних паперів, за яких розмір та вплив трансакційних витрат на ефективність ринку є мінімальною. Визначення яким чином мікроструктура фінансових ринків впливає на виникнення

трансакційних витрат дозволить формувати політику та організаційні засади розвитку бірж та регулювання позабіржової діяльності обміну фінансовими інструментами. Виокремлення різних складових трансакційних витрат і яким чином вони впливають на поведінку індивідуальних інвесторів висвітлить засоби, якими можна підвищити інвестиційну привабливість ринку України для внутрішнього та зовнішнього капіталу, полегшити сам процес здійснення інвестування.

Дослідження й рекомендації покращення самого процесу прийняття рішення інвестором, з огляду на трансакційні витрати, призведе до більш ефективного розподілу інвестиційних ресурсів у економіці України.

Розвинутий вторинний ринок обміну фінансових інструментів полегшує доступ до капіталу підприємствам, заохочує роздрібних інвесторів здійснювати заощадження (тим самим потенційно знімаючи частину навантаження пенсійного фонду на бюджет країни), та і в цілому покращує інвестиційну привабливість фінансового ринку для іноземного капіталу.

Всі ці фактори можуть стати ключовими у відновленні економічного і фінансового становища України після Перемоги.

*Метою* даної роботи є поглиблення теоретичних засад, удосконалення модельного інструментарію прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу та надання практичних рекомендацій щодо підвищення ефективності прийняття інвестиційних рішень на організованих ринках акцій.

Досягнення поставленої мети передбачає вирішення наступних завдань:

- дослідити генезис підходів до джерел виникнення та сутності трансакційних витрат на ринках акцій;
- здійснити аналіз мікроструктури організованих фондових ринків;
- визначити сутність та джерела трансакційних витрат ринкового впливу торгівлі акціями.
- проаналізувати методичні підходи до оцінювання і прогнозування неявних трансакційних витрат біржових операцій з акціями;

- систематизувати моделі трансакційних витрат ринкового впливу торгівлі акціями;
- обґрунтувати методику прогнозування динаміки витрат ринкового впливу на ринку акцій;
- розробити методику оцінки якості брокерських послуг на основі прогнозу трансакційних витрат ринкового впливу;
- надати рекомендації щодо удосконалення торгових стратегій на біржовому ринку акцій на основі врахування прогнозу трансакційних витрат ринкового впливу;
- удосконалити процес формування оптимального портфелю акцій на основі врахування результатів моделювання трансакційних витрат ринкового впливу

*Об'єктом дослідження* є трансакційні витрати ринкового впливу у процесі торгівлі акціями на біржових фондових ринках.

*Предметом дослідження* є теоретичні та практичні засади прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу в процесі прийняття інвестиційних рішень на біржових ринках акцій.

Для вирішення поставлених завдань були використані наступні методи дослідження: *діалектичний метод* – для визначення сутності та причин виникнення трансакційних витрат; *метод сходження від абстрактного до конкретного* – для окреслення специфіки трансакційних витрат на фондових ринках акцій; *системний* – для з'ясування зв'язку між мікроструктурою фондових ринків та трансакційними витратами, що виникають під час здійснені торгівельних операцій; *історичний* – для дослідження розвитку становлення фондових ринків, як відповідь на наявність трансакційних витрат; *структурний метод* – для виділення складових трансакційних витрат на фондовому ринку акцій; *абстракції* – для фокусуванні на найбільш важливих компонентах трансакційних витрат, а саме витратах ринкового впливу; *індукції та дедукції* – з метою вивчення впливу трансакційних витрат на діяльність окремого інвестора; *метод моделювання* – для розробки та

вдосконалення моделей, що описують: динаміку зміни у ціні на акцію внаслідок ринкового впливу, вибір інвестором стратегії торгівлі акціями, формування оптимального портфелю інвестицій; *метод максимальної правдоподібності* – для оцінки параметрів запропонованих моделей на основі емпіричних даних; *метод формулювання та перевірки статистичної гіпотези* – для встановлення критеріїв, за якими інвестор обирає брокера, який надає свої посередницькі послуги у здійсненні операцій на фондовому ринку; *метод математичної оптимізації* – для визначення плану проведення торгових операцій інвестором, що максимізує його корисність; *методи функціонального аналізу та інтегрального числення* – для узагальнення отриманих результатів на широкий клас моделей трансакційних витрат ринкового впливу. Також були застосовані *графічний та табличні* методи з метою відображення отриманих результатів.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає у комплексному вирішенні наукового завдання прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу на основі поглиблення теоретичних засад та удосконалення модельного інструментарію, наданні практичних рекомендацій щодо підвищення ефективності прийняття інвестиційних рішень на організованих ринках акцій. Зокрема, наступні пункти виступають ключовими результатами дослідження та виносяться на захист:

*вперше:*

- запропоновано методику калібрування моделей ринкового впливу, зокрема моделей А. Алмгрена та Обіжаєвої-Ванга, шляхом визначення параметрів моделі, на основі застосування методу максимальної правдоподібності, що на відміну від оцінки на основі емпіричних даних та підходу А. Алмгрена (на основі симуляцій) можна використовувати у випадку, коли план виконання мета ордеру передбачає зміни у інтенсивності торгівлі, що покращує точність прогнозів моделей, а також потенційно може бути застосований для метаордерів з лімітами ціни;

- включено у математичне формулювання моделі оптимального портфелю фінансових активів Г. Марковіца функції витрат ринкового впливу, які оцінені на основі підходу Алмгрена-Кріса, та на цій основі запропоновано алгоритм практичного застосування модифікованої функції Г. Марковіца в процесі формування портфелю фінансових активів, що дозволяє підвищити дохідність портфелю (при фіксованому рівню ризику) за умови застосування методу максимальної правдоподібності лише внаслідок більш ефективного використання наявної інформації;

*удосконалено:*

- тлумачення природи трансакційних витрат торгівлі фінансовими активами у контексті мікроструктури біржового ринку, а саме, як плати за економію часу учасника угоди, яка залежить від нагальності здійснення купівлі-продажу; як премії для стимулювати потенційних контрагентів взяти участь у трансакції, що дозволяє підвищити ліквідність фінансового активу; як компенсації за втрачену вигоду чи за потенційний ризик здійснення угоди на гірших умовах через інформаційні переваги контрагентів, що розширює існуючі підходи до визначення трансакційних витрат: на макро- і мезорівнях; як результату інституційної недосконалості ринкових інститутів; інформаційної неефективності фондового ринку; низької ліквідності фінансового активу; дозволяє конкретизувати види трансакційних витрат на рівні окремої угоди, дослідити їх вплив на формування торгівельної стратегії та ефективності прийняття інвестиційних рішень на ринку акцій;

- функцію прогнозованих трансакційних витрат торгівлі акціями, стандартна форма якої містить чотири стохастичні елементи – розмір витрат спреду, ринкового впливу, своєчасності і втрачених можливостей, на основі симуляцій потенційного розміру неявних витрат втрачених можливостей і своєчасності, що спрощує проблему прогнозування трансакційних витрат торгівлі метаордером на акції до передбачення лише двох складових: очікуваних витрат спреду і очікуваних витрат ринкового впливу, і є більш зручним для практичного застосування;

- застосування моделі ринкового впливу для визначення трансакційних витрат у процесі оцінки якості брокерських послуг за рахунок виділення «несподіваних витрат» - частини витрат, викликаних факторами, які модель не здатна передбачити або врахувати (характер ринкової кон'юнктури у момент здійснення ордера, якість надання послуг брокером та просто ринковий шум частини, на яку емпіричні значення витрат відхиляються від очікуваних), що надало можливість порівняння витрат ринкового впливу не за абсолютними значеннями, а як різниць між їх розміром та прогнозованими значеннями, які мають меншу дисперсію, що зменшує необхідний обсяг і період збору емпіричних даних для перевірки статистичної гіпотези якості брокерських послуг;

*набули подальшого розвитку:*

- класифікація трансакційних витрат торгівлі на організованих ринках за рахунок введення нової класифікаційної ознаки - чіткість визначення та оцінювання витрат, що дозволило виокремити категорію неявних трансакційних витрат, які включають витрати ринкового впливу, спричинені несприятливим рухом цін внаслідок самого процесу здійснення торгівлі, і які за природою є витратами внаслідок зворотного (кількісного і інформаційного) впливу купівлі-продажу акцій на баланс попиту і пропозиції та на очікування ринкових агентів (поведінку); їх розмір не визначений заздалегідь та вимагає розробки спеціалізованого предикативного інструментарію для квантифікації;

- обґрунтування детермінантів, що визначають характер ринкового впливу трансакції на ринку акцій, що базуються на систематизації та узагальненні моделей ринкового впливу, які запропоновано поділяти на ендогенні і екзогенні моделі (відповідно до того, чи здійснюється їх аналіз з позиції інвестора чи ринку загалом) та моделі першого і другого покоління (у залежності від того, чи моделюється вплив на подальшу поведінку учасників обміну (що підвищує точність прогнозу). Обґрунтовано, що ключовими детермінантами ринкового впливу на ринках акцій виступають як об'єктивні

параметри торгівлі – обсяг ордеру (модель Кайла, модель квадратного кореня), інтенсивність торгівлі (модель Алмгрена-Кріса), характер інформаційного розсіювання тимчасової складової ринкового впливу (моделі Дж. Газерала, Обіжаєвої - Ванга), так і зміни у поведінці ринкових учасників, в залежності від характеру та послідовностей ринкових подій (моделі «історично залежного ринкового впливу»), коли учасники ринку коректують свої очікування і плани в залежності від дій виконавця метаордеру;

- розв'язання задачі обґрунтування стратегії виконання метаордера, який визначає з якою інтенсивністю мають бути проведені ринкові операції у вигляді оптимізаційної задачі, що полягає у знаходженні такого розподілу торгівлі метаордерами, який призводить до мінімізації функції витрат, спричинених тимчасовою частиною ринкового впливу та ризиком. Такий підхід дозволяє визначити розв'язки задач оптимального плану виконання замовлення для інвесторів з різною схильністю до ризику.

**Практичне значення отриманих результатів.** У практиці установ, що здійснюють інвестиційну діяльність або торгову діяльність на фондовому ринку акцій, були застосовані такі наукові результати: отриманий оптимальний план виконання замовлення на купівлю-продаж акцій був використаний для формування нових автоматичних алгоритмів, що здійснюють торгівлю на фондовому ринку акцій США; запропонований метод оцінки невідомих параметрів у моделях ринкового впливу був використаний для покращення прогнозів щодо розміру очікуваних трансакційних витрат інвесторів, яких вони зазнають при користуванні брокерськими послугами проведення операцій на біржах акцій; метод (техніка) виділення неочікуваної частини трансакційних витрат ринкового впливу був використаний для зменшення розміру вибірки яку необхідно було задіяти у тестуванні модифікацій торгівельних стратегій на фондовому ринку акцій.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення дисертаційної роботи були представлені до розгляду та були презентовані на трьох

міжнародних науково-практичних конференціях, а саме: International Scientific Conference «Modern Global Trends in the Development of Innovative Scientific Researches» (Riga, Latvia, 20<sup>th</sup> March 2020), V International Scientific and Practical Conference «Actual Trends of Modern Scientific Research» (Munich, Germany, 8-10 November 2020), XVI Міжнародна науково-практична конференція «Світові тенденції та перспективи розвитку фінансової системи України» (Київ, 25-26 травня 2023р.).

**Публікації.** Основні результати дисертаційного дослідження було опубліковано у 8 наукових роботах, загальним обсягом 5,45 (особистий внесок автора 4,25 друк. арк.), серед яких: 5 статті у вітчизняних фахових журналах (4,85 друк. арк., з яких внесок автора - 3,65 друк. арк.) та 3 публікацій в матеріалах міжнародних практичних конференцій (0.6 друк. арк.).

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, дев'яти підрозділів та висновків до роботи, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дослідження становить 256 сторінки. Праця включає 9 додатків, що займають 26 сторінок. Окрім того, в роботу включено 46 рисунків та 13 таблиць. Список використаних джерел містить 199 пунктів на 20 сторінках.

## РОЗДІЛ 1.

### ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТРАНСАКЦІЙНИХ ВИТРАТ РИНКОВОГО ВПЛИВУ НА РИНКАХ АКЦІЙ

#### 1.1. Генезис підходів до дослідження сутності та джерел трансакційних витрат операцій з акціями

Значна частина сучасних теоретичних моделей, які розглядають діяльність інвестора на фондовому ринку, здійснюють припущення про відсутність жодних додаткових перешкод щодо здійснення процесу інвестування. Яскравими прикладами виступають класичні моделі знаходження оптимального портфеля Г. Марковіца [1], розрахунку очікуваної дохідності ринку за моделями CAPM [2] та три-факторної моделі Є. Фама та К. Френча [3]. Більше того, вся галузь фінансів, що пов'язана з оцінкою вартості більш складних фінансових інструментів (опціонів та конвертованих цінних паперів [4], [5]) базується на принципі, що інвестор може завжди обміняти фінансовий інструмент без будь-якої додаткових витрат.

Так, у першому наближенні, це дійсно має сенс: сучасні розвинуті фондові ринки характеризуються високим рівнем ліквідності та ефективності. Внаслідок цього, у переважній більшості випадків, витрати, що пов'язані з процесом обміну фінансового активу, є незначними відносно його вартості.

Разом з цим, існує й зворотна частина тієї легкості, з якою інвестор може здійснювати операції на цих ринках. Сучасний інвестиційний процес нечасто обмежується лише середньо- та довгостроковими горизонтами планування. Існують окремі категорії фінансових агентів, які оперують на набагато менших часових інтервалах – деякі з них можуть вимірюватися мілі- та мікросекундами. Через це, кількість трансакцій, які вони здійснюють за день по одному фінансовому інструменті, можуть перевищувати чотиризначні числа.

Більше того, обсяги інвестиційних ресурсів, якими оперують традиційні, великі інституційні учасники ринку, також виросли у рази порівняно з минулим сторіччям.

Ці фактори, а саме збільшення кількості та обсягів трансакцій, призводять до того, що відносно незначні витрати зростають у рази та починають суттєво впливати на фінансовий результат.

Інвестори-практики знають, що неможливо здійснювати торгівлю на фондовому ринку без жодних додаткових витрат. Окрім того, існування цих додаткових витрат може унеможливити арбітраж між певними ринками чи активами. Це порушує саму концепцію єдиної точки рівноваги на ринках фінансових активів.

Звісно, наскільки суттєвим є збурення, що спричинені трансакційними витратами, прямим чином залежить від розміру останніх. Через це, для того, щоб оцінити вплив трансакційних витрат на інвестиційний процес, необхідно знати їх сутність, складові та вміти правильно виміряти та передбачити ефект, який вони справляють.

Загалом проблематика трансакційних витрат не є новою, як для економічної, так і для фінансової науки. Перша представлена працями інституціоналістів, які розглядали причини існування трансакційних витрат як результат:

- побічних ефектів, які виникають внаслідок споживання суспільного блага (Р.Коуз) [6]; вони зникають тоді, коли всі інституційні причини їх існування врегульовані (М.Олсон, Д.Норт) [7], [8];

- невизначеності у правах власності між економічними агентами, які вступають у трансакцію, та загалом контрактного права, як засобу проведення угод (О.Уільмсон, С.Гроссман та О. Харт, Б.Холстром та П.Мілгром) [9], [10], [11];

- нерівності в інформації щодо якості товару та предмету угоди між учасниками трансакції (Дж. Акерлоф, Дж. Стіглер, М.Спенсе) [12], [13], [14].

Вперше термін трансакційні витрати був сформульований Р. Коузом. Ще у дослідженні 1937 року «Природа фірми» він вказав на те, що існують витрати за користування ринковим механізмом ціноутворення [15] (с.390). Він навів такі приклади, як організації факторів виробництва і ведення переговорів щодо контрактної ціни трансакції. Власне, у цій статті він висловив думку, що існування витрат подібного роду і визначає необхідність існування фірми: головна мета діяльності підприємця - це зменшити саме трансакційні витрати для фірми, якою він керує за допомогою власних здібностей.

У своїй іншій праці, «Проблемі соціального блага», Р. Коуз розглядає проблему трансакційних витрат з іншого боку. Трансакційні витрати, на його думку, – це додаткові витрати, яких зазнають інші агенти, що не беруть участь у трансакції. Він навів звукову та повітряну забруднення, як приклади таких витрат [6]. У цій праці він сформулював теорему Р. Коуза, яка мала значний вплив на подальші дослідження у сфері соціальних благ, трансакційних витрат та економіки добробуту. Вона стверджує, що якщо права на власність економічних агентів є чітко визначеними, якщо ними можна торгувати, та якщо витрати на обмін цих прав є низькими, то економічна система буде здатна інтерналізувати ці витрати та досягнути Парето-ефективної рівноваги, незалежно від початкового розподілу прав [6].

З цієї позиції Р. Коуз вказував на те, що, теоретично, приватна фірма здатна правильно розподілити права на власність всіх учасників ринку (як він вказував у попередній праці), таким саме чином, як вона обирає поєднання ресурсів для виробництва. Проте, через значну кількість зацікавлених учасників і необхідних економічно-правових зав'язків, з практичної точки зору, розв'язати це питання на рівні однієї фірми є майже неможливим. Тому, задля розв'язку цієї потреби і необхідно застосувати ринковий механізм.

Визначенню сутності трансакційних витрат багато уваги приділив О.Уільямсон у праці «Економіка трансакційних витрат» [9]. У ній він підійшов до аналізу цієї проблеми з позиції контрактної економіки. Він

вказав, що трансакційні витрати виникають у разі будь-яких контрактних відносин. Певні організаційні форми здатні зменшувати ефект трансакційних витрат краще, в залежності від характеру цих витрат.

О.Уільямсон стверджував, що будь-яка трансакція має розглядатися у наступних вимірах: а) наскільки невизначеним є результат трансакції; б) частота з якою трансакція здійснюється; в) рівень довгострокових інвестицій [9] (с.239). Він переконаний, що у випадку, якщо трансакція є типовою, ринковий механізм має бути здатним ефективно регулювати трансакційні витрати самостійно. У той же час, якщо контракт регулює економічні відносини щодо нестандартизованого предмету обміну чи інвестицій, контракт потребує додатково нагляду і управління від учасників трансакції. Більше того, у випадку, коли подібна трансакція повторюється періодично, найкращим способом контролю за трансакційними витратами є вертикальна інтеграція цієї трансакції у процес виробництва.

Наприклад, якщо для виробництва певної комп'ютерної системи необхідний спеціально запрограмований для цієї задачі чіп, то спроби купити його на ринку можуть бути невдалими, тому що ініціативи виробників чіпів відводити окрему продуктову лінію задля випуску цього товару можуть бути недостатніми, адже якщо попит на цей чіп представлений одним клієнтом, то це створює суттєві ризики. В цьому випадку для компанії – виробника комп'ютерної системи найкращим виходом з ситуації буде розвинути таку продуктову лінію (або частину її) на власному виробництві.

В свою чергу, Д. Норд у статті «Трансакційні витрати, інституції та економічний результат» стверджував що існують три джерела трансакційних витрат [8] (с.7-8).

Перше джерело – оцінка. Так, значна кількість трансакційних витрат виникає внаслідок інформаційної асиметрії. Якщо певні властивості товару є невизначеними для однієї з сторін обміну, то це може призвести до того, що трансакція не відбудеться. В такому випадку додаткові витрати необхідні для

того, щоб покупець та продавець отримали додаткову інформацію щодо предмету обміну і зменшили інформаційну нерівність між собою.

Наступне джерело – розмір ринку. На великому ринку, в якому існує значна кількість агентів, індивідуальний учасник страждає більше від ризику контрагента за відсутності регулювання: на такому ринку, де учасники є майже анонімними, кожен з них буде зацікавлений лише у тому, щоб максимізувати власну вигоду, і ніщо не перешкоджає отримати її за рахунок протилежної сторони у трансакції. В той же час, на менших ринках, де учасники знають всіх своїх можливих контрагентів, значну роль відіграє інститут репутації який регулює поведінку учасників.

Третє джерело трансакційних витрат – це регулювання. На ринках, де здійснюється активний контроль за дотриманням правил контрактів, існують неупереджені арбітри для вирішення торгових диспутів, що суттєво зменшує стимули учасників до шахрайства та неетичної поведінки. Таким чином, економічні суб'єкти менше стурбовані тим, що їх можуть ошукати під час трансакції і витрачають менше ресурсів на уникнення таких випадків.

У фокус фінансової науки трансакційні витрати потрапляють у контексті дослідження впливу податків на трансакції. Так, Дж. Тобіна [16] пропонував збільшення оподаткування валютних трансакцій, як засіб боротьби з надмірною волатильністю у цінах валют після відміни золотовалютного стандарту. Подальші дослідження, проте, доволі суперечливі у поглядах на цю ідею: так, деякі статті вказують, що ефект трансакційних витрат на рівень коливань цін на активи є доволі обмеженим (Р. Ролл) [17], у той час як інші стверджують, що між ними існує зв'язок (Р. Алібер, Б. Чоудри, С.Ян) [18].

У подальшому фінансова наука розширила тематику дослідження трансакційних витрат і сфокусувала свої дослідження на таких характеристиках фондового ринку як ліквідність і яким чином ця категорія співвідноситься з трансакційними витратами [19], [20], [21]. Сама концепція того, що певні фінансові активи мають вищу ліквідність, та те, що це є однією з їх ключових та бажаних характеристик для інвестора, відносять ще

до праць Дж. М. Кейнса [22]. Дж. Хікс [23] стверджував, що завдяки «Трактату про гроші» термін «ліквідність» набув свого поширення у економічній термінології.

Дж. Кейнс визначав ліквідність як премію яку прагне отримати власник за те, що капітал знаходиться у формі, що має більшу привабливість [24]. Так, наприклад, готівка становитиме більшу привабливість для звичайного інвестора, ніж актив-нерухомість, оскільки готівку легше конвертувати у інший актив. З іншого боку, компанія-будівельник буде більш зацікавлена у тому, щоб її інвестиційних портфель складався з об'єктів нерухомості, тому для неї відносна вартість капіталу, що інвестована у нерухомість, є більшою.

Проте, концепція ліквідності у сучасному трактуванні фокусується на легкості обміну активів, ніж на внутрішній суб'єктивній вартості у очах власника капіталу.

Відповідно до загальноприйнятих визначень, *ліквідність* – це здатність активу бути купленим або проданим з мінімальним часовим лагом, без значної зміни у ціні та з мінімальними втратами цінності [25], [26]. Очевидно, що втрата вартості активом є одним з прямих наслідків наявності трансакційних витрат. А, отже, останні можна пов'язати з ліквідністю активу. Через цю призму трансакційні витрати розглядали у дослідженнях (Х. Демзец, Х. Столл, А. Краус, Л. Міллер) [27], [28], [29]. В Україні питаннями трансакційних витрат та ринкової ліквідності займалися вчені А. Камінський [30] [31], Г. Чорноус [32], Г. Калач [33], О. Любкіна [34] [35]. Також, питання ринкової мікроструктури були висвітлені у працях О. Юркевич [36], О. Солодкого [37], П. Дзюби [38], І. Школьник [39], Л. Алексеєнко [40] та О. Любкіної [41].

Премія за ліквідність – є одною з загальновідомих аномалій фінансового ринку. Дослідження стверджують, що фінансові активи, торгівля якими є менш активною, в середньому мають вищу необхідну доходність відносно свого рівня ризику, ніж схожі за характеристиками альтернативні активи, які обмінюються частіше [42], [20], [43].

Проте останні праці у цій сфері вказують, що “аномалія” пов’язана більшою мірою з тим, що при розрахунку доходності досліджуваних активів не беруться до уваги трансакційні витрати. Тобто, менш ліквідні інструменти – ті, що втрачають більше вартості при обміні, виглядають більш прибутковими, ніж вони є насправді. Після врахування цих витрат аномалія сходить майже нанівець [44], [45]. Проте, погляди щодо правильної оцінки трансакційних витрат у контексті ринкових аномалій все ще різняться, причому, результати значним чином залежать від методології оцінки трансакційних витрат [46].

У той же час, існують й інші погляди на джерела трансакційних витрат у фінансах. Так, наприклад, інформаційна теорія пропонує використовувати для пояснення джерел трансакційних витрат асиметрію інформації між покупцем та продавцем товару. Відповідно до цієї позиції, трансакційні витрати – це винагорода яку вимагає або сплачує покупець/продавець для того щоб компенсувати нерівність у інформації між учасниками угоди (Ф.Фабоззі, Б.Коллінс, Ф.Блек, П.Мілгром, Л.Глостен, А.Киле, Д.Вайанос, Дж.Уянг) [47], [48], [49], [50], [21].

Узагальнено підходи до визначення джерел та сутності трансакційних витрат представлено у табл. 1.1.

Трансакційні витрати, звичайно, не є специфічним наслідком обміну лише фінансових активів. Проте, на відміну від більшості інших товарів, інвестиційні товари мають характеристику ризиковості. Так, у концепції «ринку лимонів», продавець завжди володіє більш повною інформацією щодо об’єкту, який обмінюється. У той же час, це не завжди буде вірним при обміні фінансових активів – цілком можливо, що покупець здатний більш точно оцінити майбутню вартість доходу. У такому випадку, продавець буде зацікавлений вимагати премію за те, щоб компенсувати потенційні втрачені можливості від володіння активом. Тому, економіка зазвичай розглядає питання нерівності інформації лише з позиції покупця; у той час, як фінансова – обох сторін обміну [51].

Таблиця 1.1

## Підходи до визначення джерел та сутності трансакційних витрат

Підходи	Джерела та сутність	Представники
Інституційний	<ul style="list-style-type: none"> <li>- результат побічних ефектів, які виникають внаслідок споживання суспільного блага (Р.Коуз); зникають у випадку коли всі інституційні причини їх існування врегульовані;</li> <li>- результат невизначеності у правах власності між економічними агентами, які вступають у трансакцію; та загалом контрактного права як засобу проведення угод;</li> <li>- результат нерівності у інформації щодо якості товару та предмету угоди між учасниками трансакції.</li> </ul>	<p>М.Олсон, Д.Норт</p> <p>О.Уільмсон, С.Гроссман та О.Харт, Б.Холстром та П.Мілгром Дж.Акерлоф, Дж.Стіглер, М.Спенсе</p>
Фінансовий	<ul style="list-style-type: none"> <li>- податок на угоди обміну з фінансовими активами;</li> <li>- як плата за забезпечення ліквідності активів: втрата вартості активом є одним з прямих наслідків наявності трансакційних витрат</li> </ul>	<p>Дж.Тобін, Х.Демзед, Х.Столл, А.Краус, Л.Міллер</p>
Інформаційний	<ul style="list-style-type: none"> <li>- винагорода, яку вимагає або сплачує покупець/продавець, для того, щоб компенсувати нерівність у інформації між учасниками угоди</li> </ul>	<p>Ф.Фабоззі, Б.Коллінс, Ф.Блек, П.Мілгром, Л.Глостен, А.Киле, Д.Вайанос, Дж.Уянг</p>

*Джерело: складено автором*

Фінансовий ринок у розвинутих країнах є доволі великим, тому, дійсно, з одного боку, розмір ринку та анонімність агентів теоретично має значно збільшувати розмір трансакційних витрат. Проте, з іншого, такі ринки дуже активно регулюються на багатьох рівнях. Так, ринок США контролюється на рівні відповідних державних органів (Комісія з цінних паперів), об'єднань самих учасників (Орган регулювання фінансової галузі) та й самими майданчиками, на яких здійснюються операції (кліринговий дім).

Ці регулятори контролюють дотримання законів торгівлі на фінансовому ринку акцій та перевіряють учасників ринку на платоспроможність щодо укладених контрактами обміну. У свою чергу, вони регулюють і те, щоб учасники не могли отримати інформаційної переваги щодо вартості та якостей акції, використовуючи незаконні способи (інсайдерська торгівля, незаконне розпорядження інформацією компанії, тощо).

Проте вони не регулюють випадки, коли один з учасників ринку здатний краще оцінити вартість акції, використовуючи лише публічну інформацію. У такому випадку, при здійсненні трансакції у учасників ринку виникає питання, чим керується економічний суб'єкт по інший бік обміну. Так, якщо покупець купує певну акцію тому, що у нього є інформація або прогноз, що вартість компанії недооцінена ринком, то для покупця найкращим шляхом буде не продавати її, бо інакше він зазнає економічних втрат. Якщо ж ініціативи покупця повністю суб'єктивні, то ця трансакція є сприятливою для продавця.

Як буде пояснено далі у цій роботі, більшість витрат на ринку акцій пов'язані саме з тим, що учасники обміну прагнуть не здійснювати трансакцій з учасниками ринку, які мають кращу інформацію щодо вартості активу.

Варто зазначити, що інформаційна асиметрія – це невід'ємна частина фінансових ринків, адже вона тісно пов'язана з ціноутворюючою функцією ринку та з агрегуванням очікувань його учасників щодо майбутнього вартості активів. Тому, з певного боку, подолання інформаційної асиметрії не є головною метою досліджень у цій сфері – сам ринковий механізм спрямований на подолання цієї нерівності. Скоріше, фінансова наука намагається дати відповідь на такі питання:

- як швидко нова інформація знаходить своє відображення у цінах фінансових активів [52], [53] [54];
- за яких умов ринок зберігає свою ефективність, якщо на ньому діють як більш, так і менш інформовані агенти [55], [49], [56];

- якими чином трансакційні витрати, що виникають внаслідок нерівності інформації в процесі її розповсюдження, впливають на цю взаємодію [57], [58], [59].

Дослідження трансакційних витрат спричинили численні дискусії відносно того, чи подібні ефекти сумісні з ефективним ринком. Так у неокласичній економічній теорії існує твердження, що ринок призводить до ефективного розподілу ресурсів лише за умови відсутності трансакційних витрат [60]. З цієї позиції вже сам факт існування брокерської комісії може ставити під сумнів ефективність ринку фінансових активів.

Сучасна фінансова теорія також трактує поняття ефективного ринку дещо ширше. Гіпотеза ефективного ринку, сформульована Є. Фама, стверджує що насправді можна виділити декілька форм ефективності ринку [61]:

- слабка форма – стверджує, що ринок відображає всю інформацію щодо минулих цін на ринку та обсягу торгів; таким чином неможливо спрогнозувати майбутню ціну на ринку, використовуючи лише публічні дані здійснених трансакцій на біржах;

- напівсильна форма – визначає, що ринок відображає всю наявну публічну інформацію щодо акції та компанії-емітента акцій;

- сильна форма – постулює, що торги на ринку відображають абсолютно всю інформацію щодо реальної внутрішньої вартості акції, і приватну, і публічну. Таким чином, жоден з агентів ринку фінансових активів не може отримати надлишковий прибуток внаслідок більш якісного дослідження компанії та її акцій. Вся інформація, яку він може отримати, вже врахована у поточній ринковій ціні активу.

Низка досліджень була здійснена з метою консолідувати переважаючі переконання академічних дослідників в тому, що ринок фінансових активів є ефективним хоча б у слабкій формі, з фактом існування трансакційних витрат. Більшість праць у цьому напрямі були зосереджені на моделюванні поведінки та трансакцій окремих класів раціональних економічних агентів та

перевірки чи їх діяльність в сукупності призводить до ефективного використання інформації та стійкої рівноваги на ринку.

Так, Л. Глостен та П. Мілгром запропонували модель ринку, у якій торговці виходять на ринок у випадкові моменти часу, а маркет-мейкери виступають посередником, який допомагає здійснити трансакцію навіть тим учасникам, які прийшли на ринок у несприятливий для цього момент [49]. На цьому прикладі автори показали, що нерівність інформації між учасниками ринку дійсно може призвести до існування спреду купівлі-продажу та кореляції між цінам угод.

Проте, в той же час, вони довели, що спред, спричинений іншими джерелами (не інформаційною нерівністю), буде зменшуватися зі збільшенням обсягу торгів. Таким чином, на ліквідному ринку різниця ціни купівлі-продажі обумовлена лише інформаційними чинниками. Це, в свою чергу, не суперечить гіпотезі про ефективний ринок, оскільки ціна змінюється лише внаслідок надходження нової інформації до системи, і цей процес відображає ціноутворюючу функцію ринку у дії.

Дослідження Л. Глостена та П. Мілгрорма розвинув А. Кайл у своєму варіанті моделі ринку фінансових активів. Він розробив модель поведінки торговців на ринку, в якій один з агентів має повнішу інформацію щодо внутрішньої вартості акції, і взаємодіє з набором дилерів на ринку для купівлі/продажі [50].

Внаслідок подібної ситуації ціна дійсно відхилялася від рівноважної у перших періодах, проте з плином часу все одно починала поводити себе як процес випадкового блукання (який неможливо прогнозувати). Таким чином він довів, що наявність нерівності інформації на ринку не порушує умову слабкої ефективності ринку та що на ньому швидко встановлюється сильна рівновага попиту та пропозиції

Модель торгів на ринку акцій була розвинута у праці А. Адматі та П. Плайдерера [62]. Їх метою було знайти теоретичні пояснення емпіричним спостереженням певних властивостей динаміки торгів на фондовому ринку.

Так на той час було відомо, що періоди затишшя на ринку чергуються з періодами концентрованої торгівлі, проте не було визначено, чи подібні дані є сумісними з гіпотезою про ефективний ринок .

А. Адматі та П. Плайдерер постулювали, що весь обсяг купівлі-продажу на ринку акцій здійснюється завдяки двом причинам: суб'єкти на ринку перебувають у пошуку ліквідності або мають додаткову інформацію щодо вартості акції [62].

Трансакції, що засновані на новій інформації, є дуже чутливими до того, в який момент часу вони будуть проведені: якщо інвестор використав публічно доступну інформацію, здійснив дослідження та дійшов до висновку, що вартість акції більша, ніж поточна ринкова ціна, то він не може зволікати з придбанням акції, адже це лише питання часу, коли інші інвестори прийдуть до схожих висновків.

Проте, якщо основою до трансакції стала потреба у ліквідності чи вільні фінансові ресурси, то в такому випадку у агента є певна свобода щодо того, коли саме її здійснювати. Для цих випадків цілком раціональним є купити або продати акцію на ринку у період, коли ліквідність є високою, тобто у періоди торгової активності.

Цей підхід здатний пояснити емпіричний феномен того, що інвестори можуть спостерігати більш активну торгівлю акціями на початку та в кінці дня. Окрім того, автори довели, що внаслідок подібної поведінки ринок все ж таки рухається до стану сильної рівноваги.

Цікавим є підхід Б. Гу та Л. Хітта, які розглянули обернене питання: чи стає ринок більш або менш ефективним при зменшенні трансакційних витрат? Таке дискусійне твердження автори обґрунтували тим, що ринок, на якому трансакційні витрати будуть малими, буде насичений неінформованими роздрібними агентами, що призведе до підвищення рівня торгівлі без збільшення інформаційного змісту проведених операцій [63].

Внаслідок цього можна очікувати збільшення волатильності та невизначеності у ціні на акції, в той час як якість виконання ціноутворюючої функції ринку не поліпшиться.

Авторам вдалося довести, що при виконанні певних умов така ситуація теоретично може статися, проте вони не були здатні перевірити свої гіпотези емпірично внаслідок відсутності необхідних даних у відкритому доступі.

Ці два погляди щодо впливу трансакційних витрат на ефективність ринку були поєднані у єдину модель у відносно недавній праці Е. Давіла та С. Парлаторе. Результатом їх дослідження став висновок, що залежність між якістю виконання ринком ціноутворюючої функції та трансакційними витратами визначається структурою ринку [64].

Так ефективність ринку, на якому торгують схожі за своєю схильністю до ризику та інформованістю інвестори, не залежить від трансакційних витрат. Прикладом такого ринку можуть бути позабіржові майданчики та брокерські мережі, тобто місця, де професійні торговці здійснюють угоди між собою.

У той же час ринки, на яких економічні агенти є більш гетерогенними, та які поєднують роздрібних та інституційних інвесторів, показують обернену залежність між трансакційними витратами та інформативністю цін щодо відображення внутрішньої вартості акції. Прикладами таких ринків можуть бути сучасні електронні торговельні майданчики, на яких здійснюють торгівлю великі інституційні інвестори, брокери-дилери та на яких можуть торгувати і звичайні фізичні особи.

Таким чином, не зважаючи на те, що з теоретичної точки зору трансакційні витрати принципово несумісні з ефективним виконанням фондовим ринком ціноутворюючої функції, дослідження доводять, що характер і сила деформацій, яких зазнає ціновий механізм фондового ринку внаслідок існування трансакційних витрат залежить від операційних, організаційних, правових, технологічних, інституційних параметрів ринкового середовища. Іншими словами, механізм укладання угод визначає

як формується ціна активу та які фактори стимулюють обмін фінансовим активом, навіть за умови асиметрії інформації.

У наступному підрозділі буде розглянуто більш детально механізм функціонування ринку акцій, та природа трансакційних витрат у контексті взаємодії ринкових суб'єктів на етапі укладання окремих угод.

## 1.2. Мікроструктура організованих ринків акцій

Процесам торгівлі фінансовими активами на рівні окремої угоди в залежності від встановлених правил обміну на торгівельному майданчику присвячуються дослідження, які розглядають ринок за допомогою так званого «мікроструктурного підходу» [65]. Даний напрямок теорії фінансових ринків розглядає процеси ціноутворення на фінансові активи як результат сукупності одиничних трансакцій, акцентуючи увагу на мотивах, витратах, процедурах, формальних обмеженнях при укладанні окремих угод.

Термін «ринкова мікроструктура» визначають як:

- 1) процес та результат обміну активів на основі визначених правил обміну [66];
- 2) процес, за яким приховані потреби інвесторів перетворюються у ціни та об'єми торгів [67];
- 3) торговий механізм та засіб регулювання трансакцій [68].

Національне бюро економічних досліджень США визначає ринкову мікроструктуру як «теоретичні, емпіричні та експериментальні дослідження економіки фінансових ринків, включаючи роль інформації у процес ціноутворення; визначення, вимір та контроль ліквідності та трансакційних витрат; наслідки для ефективності, добробуту та управління альтернативними механізмами та ринковими структурами» [69].

Ключові відмінності, які відрізняють цю сферу досліджень від більш загальної проблематики фінансової науки, полягають у наступному [70]:

- мікроструктура ринку намагається зрозуміти причини торгівлі, джерела вартості та діяльність ринкових агентів на основі нерівності у інформації якою вони володіють;
- механізми для здійснення торгівлі є різноманітними, при цьому вони постійно змінюються та розвиваються
- мікроструктура ринку розглядає можливість існування різних цін на один і той самий актив – в залежності від того, який обсяг та з якою

швидкістю інвестор прагне отримати; у якій ролі він виступає – покупець або продавець, та які його відносини з потенційними контрагентами.

Враховуючи зазначене вище, трансакційні витрати також включені до сфери дослідження ринковою мікроструктури. Дійсно, за визначенням, вони виникають у процесі купівлі-продажу фінансового активу, отже, правила обміну будуть безпосередньо впливати на їх якості та розмір. Так само як і причини утворення трансакційних витрат нерозривно пов'язані з дослідженням мікроструктури фондового ринку.

Разом з цим, сучасний фондовий ринок не є однорідним утворенням, а складається з багатьох сегментів, кожен з яких має суттєві відмінності в механізмі укладання угод.

Перш за все, розподіл можна здійснити відповідно до класу фінансового активу, що обмінюється. Відповідно, існують ринки облігацій, акцій, деривативів, тощо. Серед зазначених саме ринки акцій мають одну з найдавніших історію функціонування, історію інформаційного супроводу (базу даних про ціни, обсяги угод) та найбільшу однорідність (акції становлять собою один з найбільш стандартизованих класів фінансових активів)

Окрім цього, майже кожна держава має власний внутрішній ринок для обміну інструментів вищезазначених класів. Тобто, торгівля інвестиційними активами може відбуватися за різними правилами, в залежності від країни, у регуляторному полі якої здійснюється обмін. Більше того, економічний аспект обміну також може відрізнятися – діяльність обміну фінансових активів може потребувати витрат на ліцензування, членських внесків для отримання доступу до ринку, впливає також розмір податків, комісії за здійснення трансакцій, тощо. Так, наприклад, у Китаї обмін акціями серед громадян та іноземних інвесторів відбувається на двох розділених частинах фондового ринку [71]. У цій країні повністю заборонені короткі продажі [72], у той час у США вони вважаються запорукою ефективного функціонування ринку [73]. У країнах Європи торгівля акціями здійснюється безперервно

протягом відведених для цього годин [74], у той час як у Японії вся активність припиняється посередині дня на обід [75]. Нарешті, і дні функціонування можуть відрізнитися: так, у країнах Близького Сходу п'ятниця – це вихідний день і замість нього торгівля відбувається у неділю. Звісно, існують і інші, більш тонкі відмінності між ринками різних країн. Так, наприклад, більш поглиблене порівняння фондових ринків США та Китаю наведено у [76], [77].

Суттєві відмінності має також процес укладання угод на первинному і вторинному ринках фінансових активів.

На первинному ринку компанія - емітент виходить і обмінює майнові права майбутнього прибутку та права управління компанією на фінансові ресурси. Цей процес називається первинним розміщенням акцій. За характером того, хто може взяти участь у цьому обміні, а саме будь-який кваліфікований інвестор, або визначена група інвесторів, виділяють публічне та приватне розміщення відповідно. На первинному ринку виникають відносини між:

а) емітентами акцій – юридичними особами, державою або відповідними державними органами як випускають цінні папери (акції) і беруть на себе відповідальність щодо обов'язків які створюють ці фінансові інструменти;

б) інвесторами – фізичними та юридичними особами що мають вільні фінансові ресурси та прагнуть вкласти їх у цінні папери задля отримання майбутнього прибутку.

Після первинного розміщення, інвестори можуть обмінювати акції на грошові ресурси або інші фінансові активи між собою на вторинному ринку. Цей процес відбувається без участі самої компанії. Емітент бере участь у відносинах вторинного ринку у дуже рідкісних випадках – не зважаючи на те, що інструменти, які виступають об'єктом відносин виражають права на власність та майбутній прибуток емітента.

Перевагою вторинного ринку є те, що він дозволяє учасникам ринку придбати акції компанії у будь-який момент часу, а не чекати наступного

разу, коли компанії здійснить розміщення акцій через первинний ринок. Крім того, він дозволяє швидко закрити позицію, якщо фінансовий агент вважає, що акції компанії втратили свою інвестиційну привабливість або йому необхідні грошові кошти задля забезпечення інших потреб. Таким чином, вторинний ринок надає ліквідність.

Вторинний ринок фінансових активів, у свою чергу, може передбачати укладання угод на основі індивідуальних домовленостей – подібний обмін називається не організованим.

Проте, такі ринки не однорідні за типом учасників угод, обсяги і умови розрахунку за угодами можуть суттєво різнитись, інформація по індивідуальним угодам також не має достатнього ступеня агрегації, що ускладнює дослідження у межах такого об'єкту.

Натомість організовані вторинні ринки, представлені біржами, багатосторонніми / альтернативними торгівельними системами та іншими інституційними утвореннями, за допомогою яких можна здійснювати обмін, представляють собою ринки, де на систематичній основі укладаються угоди згідно уніфікованих протоколів, інформація по яким оприлюднюється на інформаційних ресурсах майданчика.

Торгівля на таких ринках, головним чином, здійснюється між інвесторами таких типів:

- інституційними інвесторами – великими компаніями, які спеціалізуються у активному або пасивному управлінні портфелем фінансових активів і зазвичай здійснюють довгострокове інвестування від імені клієнтів що користуються послугами цих компанії (інвестиційні фонди, хедж фонди, пенсійні фонди, тощо).

- роздрібними інвесторами – непрофесійними учасниками ринку акцій, які здійснюють інвестування власних коштів.

Також на ринку працюють компанії-посередники:

- брокери – компаній які здійснюють трансакції на вторинному фондовому ринку від імені інвесторів.

- маркет-мейкери або дилери – компаній які завжди згодні купити або продати акції за певною ціною.

Різниця між ціною купівлі і продажу (спред купівлі-продажу) складає маржу маркет-мейкера з якої він отримує прибуток.

Саме організовані фондові ринки визначають ліквідність і справедливу ціну фінансових активів.

Існують певні нюанси у поняттях “ліквідність фінансового активу” і “ліквідність ринку”. Якщо перше – це здатність активу бути швидко обміненим по справедливій ціні, то ліквідний ринок – це ринок, на якому учасники можуть укладати угоди великого обсягу без істотного впливу на ціну [36].

Ліквідність ринку розглядають з позиції того, наскільки в’язким є ринок, наскільки глибоким та як швидко він відновлюється [36]:

- в’язкість ринку визначається як вартість, на яку відхиляється реальна ціна, яку отримав інвестор на свою транзакцію від середньо ринкової ціни. Фактично в’язкість вказує на премію, яку маркет-мейкер (учасник ринку який завжди готовий купити або продати акцію) прагне отримати за ризик утримання товару, оскільки, зазвичай, саме цей учасник виступає контрагентом для більшості транзакцій на фінансовому ринку акцій;

- глибина ринку вказує, який обсяг торгівлі фінансовий ринок здатний поглинути, не змінюючи рівноважної ціни. Цей показник можна розглядати як щільність обсягу попиту і пропозиції навколо рівноважної ціни; або, наскільки велика кількість ордерів зосереджена на крайніх рівнях книги ордерів;

- здатність до відновлення ринку виражає, як швидко ринок повертається до стану рівноваги після короткострокового шоку з боку попиту або пропозиції.

В свою чергу, на практиці, надання інвесторам доступу до ліквідності та нормальне функціонування вторинного ринку загалом досягається за допомогою ринкової інфраструктури. Інфраструктура ринку – комплекс

інститутів, служб, підприємств, організацій, які надають юридичний, фінансовий і інформаційний супровід укладання угод на фондовому ринку [78] (с.201). У багатьох працях відмічається нерозривність швидкості розповсюдження інформації та ліквідності ринку [79], [56].

Враховуючи зазначені відмінності у процесі укладання угод на рівні організованих і неорганізованих фондових ринків, у процедурі торгівлі різними видами фінансових активів, дане дослідження буде сфокусовано на біржовому вторинному ринку акцій, як досить однорідному середовищі з операційної, інституційної точки зору, і як на найбільшому за капіталізацією сегменті фондового ринку що має найвищий ступінь транспарентності щодо укладання угод.

На сучасному ринку акцій існують спеціалізовані торгівельні майданчики, які організують здійснення вторинного обміну акцій: стандартизують правила торгівлі, гарантують виконання угод, розповсюджують інформацію щодо здійснених угод та наявного попиту та пропозиції – це біржі [80], [81].

Більша частина сучасних бірж забезпечують безперебійну торгівлю акціями (у відведений часовий проміжок), завдяки веденню книги ліміт ордерів (книги заявок). Книга ліміт ордерів представляє собою набір заявок з різними цінами, що були відправлені учасниками біржі [82]. Найкраща ціна продажу виражає найнижчу ціну, за якою власники акції згодні продати її, а ціна купівлі – найвищу ціну, за якою акцію згодні купити. Таким чином, якщо два ордери з протилежними намірами (купівлі-продажу) мають однакову ціну, здійснюється співставлення покупця і продавця акцій і здійснюється трансакція. Таким чином, найкраща ціна продажу завжди залишається вищою за найкращу ціну купівлі.

Крім того, існують певні торгові майданчики, що, не зважаючи на те, що мають певний набір правил для торгівлі акціями, є менш регульованими, ніж формальні торгові біржі акцій, та не надають інформацію щодо книги заявок у вільний доступ. Такі майданчики підтримують інфраструктуру для

торгівлі та пошуку контрагентів у обміну акціями, але не встановлюють правила обміну. У північноамериканських країнах такі майданчики мають назву альтернативні торгові системи, а в Європі – багатосторонні торгові платформи [83].

Таким чином, у багатьох розвинутих країнах ринок акцій не являє собою монолітний механізм, а складається з багатьох локальних бірж, позабіржових майданчиків та інших засобів здійснити купівлю-продаж акцій.

Так, наприклад, у США існує близько 10 локальних бірж та значна кількість позабіржових торгових майданчиків. Крім того, великий обсяг торгів (близько 15%) здійснюється у альтернативних торгових системах і напряду через основних дилерів [84].

У Китаї існує чотири торгові біржі акцій, три з яких знаходяться у материковому Китаї та які торгують акціями для місцевих інвесторів (А-акції); і біржа Гонконгу, яка торгує акціями для іноземних інвесторів (Н-акції) [85]; крім того, існує і позабіржовий дилерський ринок («Третій відділ») [86].

У Канаді існує 6 торгових бірж, та більше 10 позабіржових торгових майданчиків. В свою чергу, існують і окремі дилерські мережі [87].

В Україні функціонують три основні фондові біржі: ПФТС, Українська біржа і Перспектива. В Україні також здійснюється купівля-продаж акцій між дилерами та існує декілька позабіржових торгових майданчиків. Проте, їх частка у загальному обсязі торгівлі акціями в країні є незначною [88].

Ринок акцій можна класифікувати на основі відмінностей у кон'юнктурі та методах здійснення операцій купівлі-продажу, а саме на основі того, як саме проходить співставлення покупця та продавця; чи має інвестор повну інформацію щодо цін та наявних об'ємів купівлі-продажу; які види ордерів інвестор може відправляти на дану фінансову біржу, тощо.

Ринок акцій можна класифікувати:

- за наявністю інформації щодо книги лімітних ордерів:

- світлі – торговельні майданчики, де інформація щодо книги ордерів є доступною для всіх учасників;

- сірі (приховані) – такі, в яких інформація щодо наявних ордерів є закритою, але ці ордери можуть взаємодіяти з «світлою» частиною біржі;

- темні – інформація щодо ордерів є повністю закритою, ціна трансакції визначається на основі цін на інших майданчиках; [89].

➤ за видами ордерів, які може відправляти інвестор:

- постійної торгівлі – співставлення покупця і продавця відбувається безперервно;

- аукціони – торгівля здійснюється у певний фіксований та заздалегідь відомий момент часу;

- дилерська торгівля – торгівля здійснюється безперервно на основі індивідуальних угод між дилерами [90];

➤ за тим, як здійснюється співставлення покупця та продавця:

- набір критеріїв, які визначають який саме ліміт ордер з книги буде виконаний за наявності ордеру протилежної сторони. Наприклад: ціна-час - першим буде здійснюватися торгівля з ордером який має кращу ціну, та який прийшов раніше; або ціна-обсяг – ордер з найбільш сприятливою ціною з найбільшим обсягом заявлених акцій;

➤ за обов'язковістю виконання:

- тверді – ордери, відправлення яких до ринку означає те, що покупець або продавець бере на себе обов'язок здійснити обмін за умови, якщо знайдеться інвестор на протилежній стороні трансакції;

- умовні ордери – якщо торговий майданчик здатний знайти контрагенту інвестору, він отримує повідомлення і може (але не повинен) підтвердити свій ордер [91];

➤ за видами ордерів:

- маркет ордер – ордер щодо купівлі або продажу акції за найкращої ринковою ціною що наявна у даний момент;

- ліміт ордер – ордер на купівлі або продаж акції за ціну, не гіршу за ту, що встановлена у заявці (ліміт ціна);
- стоп ордер – ордер на купівлю / продаж акції, за умови, що ринкова ціна досягає певного рівня (стоп ціни);
- прив'язаний ордер – ліміт ордер, ціна на який коливається відповідно до наявної ціни купівлі-продажу на офіційній біржі; даний тип ордерів поширений у прихований та темних біржах.

Таке різноманіття торгових майданчиків, правил торгів, типів ордерів обумовлено різними потребами інвесторів у характері здійснення торгів. З економічної точки зору кожен з цих локальних ринків пропонує різну комбінацію з того, яка інформація надається учаснику процесу купівлі-продажу до та після здійснення трансакції, чи є обмеження на ціну або мінімальний обсяг, за яким інвестор прагне здійснити купити-продати акцію; якою є структура трансакційних витрат.

Різне поєднання цих факторів дозволяє інвестору обирати торговий майданчик, який найкраще підходить для його цілей, та надає інструменти для торгів, які робить процес обміну акціями більш зручним.

У той же час, акції, що торгуються на кожному з ринків, є повністю взаємозамінними. Наприклад, акції, що були придбані на біржі NYSE, можуть бути продані у темному торгівельному майданчику банку UBS або - іншому дилеру у приватному порядку.

Таким чином, попит і пропозиція у на акції сегментовані серед багатьох торгівельних майданчиків у короткостроковій перспективі. Проте, на довшому проміжку часу, в разі суттєвого відхилення рівноважної ціни на одному майданчику відносно іншого, утворюється можливість до арбітражу між обома місцями обміну акцій. Таким чином, процес арбітражу забезпечує те, що відхилення цін між різними майданчиками є незначним або короткостроковим.

Крім того, на деяких фондових ринках існують додаткові регуляторні механізми, що спрямовані на утримання одного рівня цін на різних

майданчиках. Так, наприклад, у США Regulation NMS прямо забороняє учасникам ринку здійснювати трансакцію на біржі, якщо на іншій світлій біржі можна знайти замовлення з кращою ціною [92].

Отже, на наш погляд, агрегована функція попиту-пропозиції ринку акцій – це об'єднання локальних функцій для кожної з інфраструктурних одиниць ринку акцій.

Чим більш розвинутим є ринок, тим меншою є межа, яка відділяє короткостроковий сегментований ринок від довгострокового, агрегованого. Так, наприклад, у ринку акцій США збільшення швидкості передачі інформації між біржами та вчасне відправлення ордерів дозволяє швидко реагувати на зміну ринкової кон'юнктури і є дуже прибутковим для спеціалізованих дилерів на цих торгових майданчика – високочастотних маркетмейкерів-торговців. Компанії, що займаються маркетмейкінгом, інвестують значні кошти у створення приватної електронної інфраструктури, яка передає сигнали між біржами з максимально можливою швидкістю, причому конкуренція здійснюється на рівні мікросекунд [93] [94].

Внаслідок подібного ефекту, торгівля на ринку акцій набуває додаткового виміру: час здійснення трансакції. Таким чином, стає недоцільно розглядати попит і пропозицію на ринку у статичному вимірі.

Дійсно, якщо інвестор прагне придбати велику кількість акцій, і він спробує відправити замовлення на весь бажаний обсяг лише до одного торгового майданчика, він повністю охопить пропозицію акцій на цьому торговому майданчику. Великий маркет ордер може призвести до того, що наявної пропозиції у книзі ордерів буде недостатньо, щоб його задовольнити, що призведе до стрімкого зростання цін і може спричинити так званий «миттєвий провал» ринку.

Миттєвий провал ринку – дуже швидке, глибоке і волатильне зменшення ціни у фінансовому інструменті, що відбувається у дуже короткий проміжок часу [95].

Деякі історичні приклади подібного явища можна знайти у фінансовій літературі, наприклад: [96], [97], [98].

Для того, щоб запобігти миттєвим провалам ринку, та взагалі отримати кращу ціну трансакції, інвестори розбивають своє замовлення на певну кількість менших ордерів. Це дозволяє здійснювати торгівлю частинами, протягом довшого періоду – годин або днів. Крім того, оскільки менші ордери не прив'язані до одного торговельного майданчика, це надає інвестору доступ до більшого обсягу пропозиції, оскільки інвестор вільний відправляти замовлення на той майданчик, де на даний момент пропозиція є більш сприятливою.

Ці великі замовлення, що складені з декількох менших ордерів, називаються метаордерами. Основний ордер називається «батьківським ордером», а малі частини, на які він розбивається у процесі виконання – «ордерами-нащадкам».

Торгівля метаордерів може здійснюватися як інвестором – власником замовлення, так може і бути делегованою до брокера.

На даний момент існує два способи виконання метаордерів:

- ручний (high-touch) – коли брокер або інвестор використовує найманого працівника, який завдяки спеціалізованим знанням і досвіду оцінки ринкової мікроструктури здатний розбити батьківський ордер на менші і виконати їх у найбільш ефективний спосіб;

- електронний (або алгоритмічний) – коли розбиття метаордеру на частини здійснюється завдяки набору правил та алгоритмів, що оснований на статистичних розрахунках та математичних моделях.

Кожен з цих способів має свої переваги та недоліки. Так, для багатьох акцій, у яких торгівля відбувається дуже швидко, а ліквідність яких є відносно високою, електронні методи торгівлі є більш ефективними, тому що вони здатні більш оперативно обробляти інформацію та реагувати на швидкі зміни у ринковій кон'юнктурі і характеру торгівлі. Крім того, вони вільні від емоцій і поведінкових упереджень, що притаманні людям-торговцям.

Разом з цим, ручний метод показує себе краще у випадку, коли акція має низьку ліквідність, тобто у випадках, коли важко знайти контрагента, з яким можна здійснити трансакцію за прийнятною ціною. Як показує практика, в таких випадках людина-професіонал на основі свого досвіду визначає що таке «прийнятна ціна» зазвичай точніше за математичну модель. Проте, такий спосіб торгівлі є набагато дорожчим за електронний.

Тобто, інвестор, який здійснює торгівлю на ринку акцій, володіє великим інструментарієм. Доступні для нього способи здійснити обмін на фондовому ринку різняться відповідно до того, яким саме чином він буде шукати контрагента та здійснювати трансакцію. Отже, інвестор має вибрати найкращу комбінацію ринків та типів замовлень, який би мінімізував його трансакційні витрати що виникли у процесі обміну.

Схематично, набір рішень які інвестор має здійснити для досягнення цієї мети зображено на рис. 1.1.



**Рис. 1.1. Набір рішень які має прийняти інвестор у процесі здійснення трансакції.**

*Джерело: складено автором*

Таким чином, різноманітність структури та організації торгових майданчиків для здійснення торгівлі акціями, різні види ордерів, різні

категорії учасників торгівлі на фондових ринках та різні характерів взаємодії між ними – все це обумовлено потребою надати інвестору інструменти, якими він здатний оперувати для зменшення своїх трансакційних витрат та поліпшити свій процес інвестування.

Одним з перших, хто застосував теорію трансакційних витрат до фондових бірж, був Г. Демсетз у статті «Витрати здійснення трансакції» [27]. Він одразу означив, що трансакційні витрати на біржі можуть розглядатися як у вузькому сенсі, як витрати здійснення обміну акцій на готівку, так і в широкому сенсі, включаючи витрати для того, щоб бути проінформованим щодо фінансового стану компаній, акції яких торгуються на біржах.

Він обмежив своє дослідження вартості торгів на Нью-Йоркській фондовій біржі вузьким означенням трансакційних витрат. Г. Демсетз стверджував, що витрати, які виникають у процесі торгівлі, обумовлені проблемою «негайності» попиту і пропозиції, яка на той час не була достатньо досліджена економічною наукою. Він пояснював, що неможливо прогнозувати випадки, в яких економічному агенту (а тим паче – людині) необхідно здійснити певну дію невідкладно.

Проте, якщо у певних учасників ринку існує потреба здійснити трансакцію негайно, то має з'явитися економічний агент, який буде готовий надати подібну послугу за винагороду. У контексті фінансових ринків, такий учасник має або завжди мати відкриті заявки на купівлю і продаж акцій, або він має бути готовий стати контрагентом для інших учасників ринку миттєво, а плата за його послуги буде становити певну частину трансакційних витрат.

Дослідження Г. Демсетза показало, що, дійсно, чим меншим є обсяг торгівлі певною акцією, тим більшими є трансакційні витрати, а якщо значна кількість акцій торгується постійно, то відносна вартість «негайності» є значно нижчою, що відповідає цим твердженням. Немає потреби користуватися послугами агенту, який завжди готовий купити або продати акцію, якщо існує велика кількість інших ринкових учасників, які бажають здійснити те саме, але безкоштовно.

Згодом А. Краус та Г. Столл розширили дослідження трансакційних витрат, досліджуючи емпіричні дані великих (блокових) трансакцій на Нью-Йоркській фондовій біржі [28]. Вони стверджували, що «негайність» відіграє певну роль у формуванні трансакційних витрат на фондовому ринку. Проте вони вказували, що на ринку, де всі учасники купують більш-менше однакову кількість акцій, подібні міркування не будуть відігравати значної ролі, адже вся наявна інформація щодо ціни на акцію повністю має відобразитися у поточній ринковій рівновазі, і тому для раціональних агентів не має сенсу прагнути «негайності» у своїх угодах.

Натомість на ринках, де існує певна кількість великих інституційних агентів (компанії з управління активами, хедж-фонди, тощо), які торгують великими обсягами акцій, ціна у короткостроковій перспективі може відрізнятись від рівноважної, але це пов'язане не з «негайністю», а радше з тим, що великий інвестор не може задовольнити свій попит на акції за рахунок природнього рівня торгової активності. В такому випадку, якщо він здійснює купівлю або продаж, він здійснює «набіг на ліквідність». Його трансакція не несе додаткової інформації щодо внутрішньої вартості активу, проте ціна буде зростати, оскільки певний проміжок часу буде існувати дефіцит на цю акцію.

В таких випадках на допомогу ринковому механізму приходять дилер – учасник ринку, який не прагне інвестувати у акцію, проте завжди готовий виступити контрагентом. За свої послуги підтримки рівноваги на ринку він прагне отримати винагороду. Він стягує її у двох видах: комісії напряму, шляхом оплати великим інвестором за послугу здійснення угоди, та непрямим способом, продаючи акцію за більш високою ціною від рівноважної, або купуючи її за більш низькою.

Таким чином автори вказали, що не зважаючи на подібні ефекти, рівновага на ринку акцій є стійкою: чим більше ціна відрізняється від рівноважної, тим більше прибутку може отримати дилер, і тим активнішу він буде прагнути усунути дисбаланс між попитом і пропозицією. Більш того,

вказуючи на те, що трансакційні витрати не обмежуються комісією, вони дали поштовх для створення концепції трансакційних витрат ринкового впливу.

Отже, розгляд трансакційних витрат на рівні мікроструктури біржових ринків акцій дозволяє розширити розуміння природи і джерел цих витрат, що доповнюють зазначені у підрозділі 1.1.

По-перше, це визначення трансакційних витрат як відповідної плати за нагальність та визначеність у здійсненні купівлі-продажу. Тобто, чим швидше інвестор прагне здійснити обмін, тим більшу плату він має здійснити за його виконання [27] [99] [100]. Причиною цього є як певні правила обміну на ринках обміну фінансових активів, так і переоцінка контрагентами відносної вартості активу за умови різкого зростання попиту.

По-друге, як премія за участь у ринковій торгівлі та проведення обміну для стимулювання потенційних контрагентів. Трансакційні витрати можна розглядати не лише у розрізі часу, протягом якого має відбутися обмін, але й відносно запланованого обсягу активу, який підлягає обміну. Додаткові витрати, які несе інвестор за купівлю-продаж активу, спричинені тим, що звичайний рівень ринкової активності не здатний задовольнити його потреби у ліквідності фінансового інструменту. Внаслідок цього, він має сплатити премію, щоб стимулювати потенційних контрагентів взяти участь у ринковій торгівлі та провести з ним обмін [28], [101], [42].

По-третє, трансакційні витрати можна розглядати як результат потенційної нерівності у інформації, яка може існувати між учасниками обміну. Так, кожен з агентів, що здійснюють обмін, допускає ймовірність того, що одна зі сторін володіє більш повними даними щодо інвестиційної привабливості фінансового активу, та, як наслідок, здатна сформулювати точнішу оцінку його вартості. Через це, на основі того, де та яким чином здійснюється обмін, покупець або продавець може прагнути компенсації за участь у обміні, в якому його контрагент може мати інформаційну перевагу [47], [102], [103].

Наприкінці слід відзначити, що вивчення характеру функціонування фондових ринків розвинених країн є особливо важливим для України, в якій власна екосистема фондового інвестування лише починає розвиватися. Дослідження світового досвіду у цьому питанні, виокремлення переваг та недоліків функціонування цих систем у інших державах, надає можливість зробити висновки: яким саме чином необхідно формувати політику розвитку фондових ринків всередині України; яким має бути регулятивне і нормативно-правове забезпечення для здійснення біржової і позабіржової діяльності торгівлі фінансовими інструментами; який юридичний статус і яку форму власності повинні мати торговельні майданчики.

### **1.3. Сутність та джерела трансакційних витрат ринкового впливу торгівлі акціями**

Дослідження трансакційних витрат на фондовому ринку, наведене у попередніх підрозділах, було сфокусоване на генезисі теоретичних підходів до природи та джерел трансакційних витрат, які розглядалися як узагальнена категорія, тобто, втрати, які інвестор у цінні папери зазнає загалом. Проте, трансакційні витрати не є однорідними як за джерелом виникнення, так і за значущістю для різних типів учасників ринку.

Так, зокрема, пересічний роздрібний інвестор буде брати до уваги, перш за все, комісію брокера; у той час як компанії, які управляють багатством великих приватних індивідуумів, будуть опікуватися податковим наслідком здійснених трансакцій. Спекулянти, які торгують на біржі протягом дня, приділятимуть значну увагу спреду купівлі-продажу. Інституційні інвестори також не будуть винятком. Так, маркет-мейкери і дилери будуть прагнути отримати премію у вигляді поступок біржі та спреду. Хедж фонди оцінюватимуть свої витрати втрачених можливостей та своєчасності.

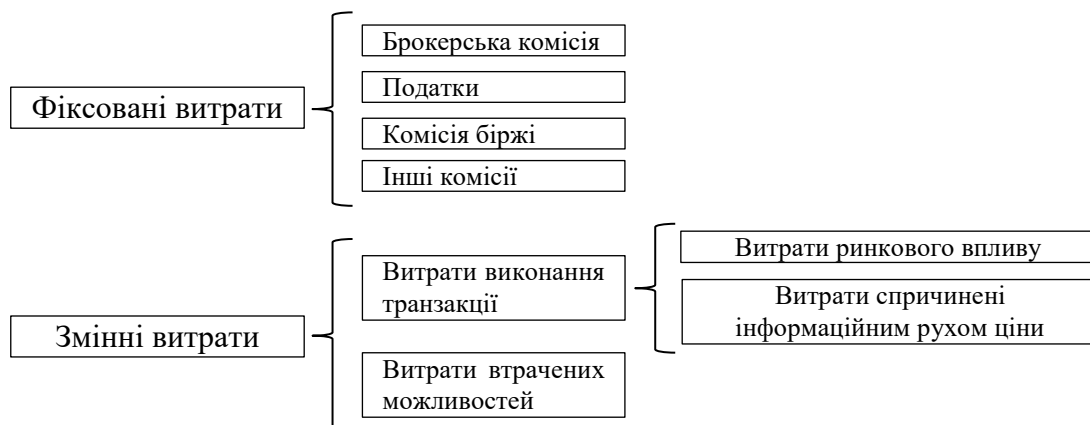
Через це різноманіття, дослідження трансакційних витрат, які зазнають інвестори на ринках акцій, фокусуються на окремих їх складових, а робіт присвячених проблемі таксономії трансакційних витрат не багато. Проте, саме категоризація трансакційних витрат за певними критеріями дає можливість комплексно розуміти їх природу, джерела виникнення та дає можливості для більш ефективного управління.

Відповідно до їхніх джерел, якостей та механізмів утворення, трансакційні витрати можна класифікувати за різними ознаками.

Так, Колінс Б. та Фабоззі Ф. запропонували розподілити усі трансакційні витрати на дві категорії:

- фіксовані витрати – витрати які легко виміряти і які відомі заздалегідь;

- змінні витрати – витрати які не є наперед визначеними та виникають уже в процесі взаємодії інвестора з ринком [47] (рис.1.2).



**Рис. 1.2. Складові трансакційних витрат на фінансовому ринку акцій за Б. Колінсом та Ф. Фабоззі**

*Джерело: [47]*

Прикладами фіксованих витрат є брокерська комісія, податки та інші комісії, які стягуються під час торгівлі акціями. Таким чином, якщо інвестор прагне здійснити трансакцію, він може просто звернутися до свого брокера, до податкового кодексу або знайти рівень встановлених біржою зборів, щоб розрахувати їх розмір. Плата за трансакцію, правила обміну, набір інформації, який надається учасникам щодо поточного попиту на актив, буде відрізнятися і в залежності від правил встановлених відповідним органом управління біржового ринку.

Змінні витрати можна далі поділити на витрати виконання трансакції та витрати втрачених можливостей. Витрати втрачених можливостей - це витрати, які зазнає інвестор внаслідок нездійснення торгівлі у повному запланованому обсязі.

Якщо інвестор фокусується лише на зменшенні фіксованих витрат і змінних витрат виконання, він прийде до парадоксального розв'язку подібної оптимізаційної задачі: для того, що не зазнавати трансакційних витрат потрібно не здійснювати трансакцію взагалі. Очевидно, що це не є задовільною відповіддю, адже існує причина, чому інвестор власне вирішив

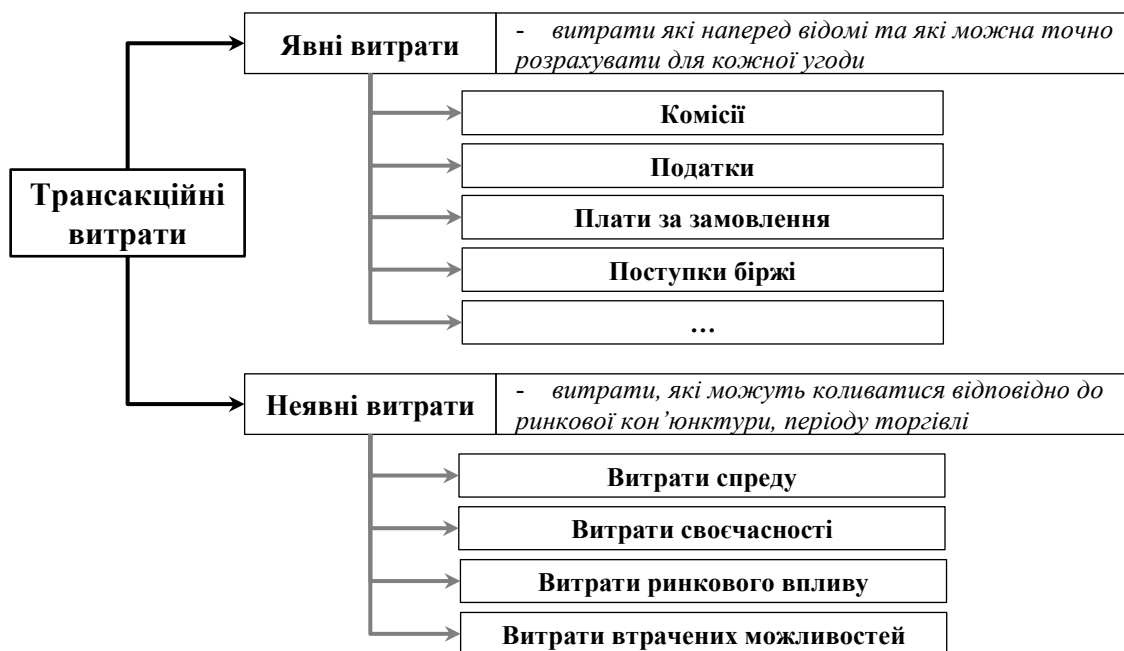
придбати акції. З цієї позиції, якщо трансакція буде проведена не повністю, певні інвестиційні можливості будуть втрачені. Таким чином, цей компонент трансакційних витрат відповідає саме за цей ефект: який прибуток недоотримає інвестор, якщо знехтує своїм рішенням щодо торгівлі цією акцією.

В свою чергу, витрати виконання розподіляються далі на витрати ринкового впливу та витрати, пов'язані з незалежним від інвестора інформаційним рухом ціни на ринку. Якщо інвестор вирішив придбати певний обсяг акцій, сам факт того, що він почав купувати ці акції на ринку, спричинить зміну у ціні. Проте, поки він торгує, інформація продовжує поступати до торговців на ринку з зовнішніх джерел. Таким чином, якщо інвестор вирішив придбати акції у момент, коли нова інформація поступає на ринок і схиляє інших агентів також придбати ті самі акції, він, ймовірно за все, опиниться у ситуації, коли значна частина торговців конкурують за обмежену пропозицію (або ліквідність) на цю акцію. Внаслідок цього, ціна зростатиме, а інвестор, ймовірно за все, отримає ціну гіршу за ту, на яку він очікував. Ця різниця і буде становити витрати, спричинені інформаційним рухом ціни.

Д. Кейма та А. Мадхавана [104] виділяють явні та неявні витрати:

- явні витрати – витрати які наперед відомі та які можна точно розрахувати для кожної угоди. Більш того, вони залежать лише від власної діяльності агента на фондовому ринку.

- неявні витрати – витрати, які можуть коливатися відповідно до ринкової кон'юнктури, періоду торгівлі, тощо. Такі витрати неможливо точно оцінити, вони завжди несуть з собою певний елемент невизначеності.



**Рис 1.3. Види трансакційних витрат за [104]**

*Джерело: Побудовано на основі [104].*

Явні витрати мають багато спільного з фіксованими витратами у концепції Б. Коллінса та Ф. Фабоззі [47]. Вони складаються з комісій, податків, плати за замовлення на біржі, поступок біржі, тощо.

Отже, ключовими критеріями для класифікації трансакційних витрат виступають:

- джерело, яке слугує основою стягування відповідної частини трансакційних витрат [47]. Відповідно до цього можна виокремити податки, комісію брокера, витрати спреду та ринкового впливу, тощо. Такий поділ є корисний тим, що різні категорії інвесторів будуть приділяти більше уваги різним компонентам, в залежності від питомої ваги цієї частини у загальній величині їх витрат;

- чіткість визначення та оцінювання [104]. Так, відповідно до цієї ознаки, існують трансакційні витрати, які інвестор може визначити та розрахувати, перш ніж здійснювати трансакцію; вони мають чітке відображення у грошовому еквіваленті, і такі, що виражають «втрачені можливості», відхилення отриманої ціни від справедливої, тощо.

З точки зору проблеми мінімізації трансакційних витрат саме витрати, що не піддаються точній оцінці до моменту виконання угоди з акцією становлять найбільший інтерес як предмет дослідження через ту невизначеність, яку вони приносять у прогнозування кінцевого результату інвестиційного процесу.

Тому зрозумілим є те, що наукові праці, перш за все, фокусуються на вивченні ефектів, спричинених спредом купівлі-продажу, втраченими можливостями та ринковим впливом.

Одне з перших досліджень, здійснених у сфері ринкової мікроструктури, розглядало проблеми визначення ціни фінансового активу за умови наявності ринкового спреда [43]. Ця тема була розширена у подальших роботах інших вчених [105], [106], [107]. Поглибленню знань щодо формування спреда купівлі-продажу приділяють значну увагу й на практиці, адже він визначає не лише витрати, які понесе інвестор при обміні активу на готівку, але становить і премію, яку можуть стягнути маркет-мейкер в якості плати за надання ліквідності [108]. Проте, враховуючи значну конкуренцію між останніми, в його динаміці можна визначити відносно стійкі залежності, а його значення відносно легко вимірювати та прогнозувати.

Дослідження проблеми *витрат втрачених можливостей* у наукових працях, зазвичай, відбувався з позиції моделювання ймовірності того, що замовлення, відправлене інвестором на торговий майданчик, не буде виконане [109], [110], [111]. Ці дослідження спрямовані на те, щоб допомогти учаснику торгів обрати найкращий тип ордеру та майданчик для торгівлі, протиставляючи витратам спреда і комісій шанс того, що обмін може не відбутися [112], [113]. Ця проблема є складною та особливо критичною для хедж фондів та інших інвесторів, які здійснюють глибокий аналіз вартості акції на основі фундаментальних та економетричних характеристик зміни її ринкової ціни. Для них важливо здійснити трансакцію, перш ніж інші учасники ринку встигнуть відреагувати на наявну інформацію. Останніми роками для моделювання ймовірності виконання замовлення на різних

майданчиках та за різних цін почали все більше залучати методи штучного інтелекту [114], [115], [116].

Але не зважаючи на значущість витрат ринкового спреду і втрачених можливостей, великі інституційні інвестори будуть фокусуватися на залежності між трансакційними витратами та обсягом торгівлі, тому що для них саме цей зв'язок є причиною до найбільшого зменшення прибутку [117] [104].

Емпірично можна спостерігати, що при виконанні інвестором замовлень значних обсягів, ринкова ціна на фінансовий актив схильна рухатися у протилежний бік від сторони трансакції (зростати при купівлі та спадати при продажу). Внаслідок цього, якщо інвестор здійснює кілька послідовних трансакцій, кожна наступна буде відбуватися за все менш сприятливою ціною. Ця зміна справлятиме негативний ефект на інвестиційний прибуток ринкових агентів, які в результаті своєї діяльності мають обертати великі обсяги фінансових інструментів, тобто, для великих інституційних інвесторів: пайових та пенсійних фондів, компаній управління активами, ендаументів, ін.

Через суттєві обсяги торгівлі та розміри цих учасників ринку, вони не можуть здійснювати свої трансакції одним замовленням, оскільки таке збільшення обсягу попиту на ліквідність призведе до шоку у ціні на фінансовий актив. Так, у певний момент часу на ринку просто може бути недостатньо агентів, які б хотіли виступити протилежною стороною для даного обміну.

Тому такі великі ордера розбиваються на більш малі частини та виконуються послідовно (докладніше цей спосіб виконання та концепція «метаордерів» розкривається у наступному розділі). Це приводить до акумулювання ринкового впливу і погіршення ціни, за якою здійснюється купівля-продаж кожної наступної частини початкового замовлення.

Внаслідок цього, з'явилося теоретичне обґрунтування того, що професійні трейдери знали з практичного досвіду: у випадку, якщо вони

здійснюють трансакцію, то основне джерело витрат – це не спред купівлі-продажі або комісія за доступ до біржі. Найбільша частина витрат для великих інвесторів виникає внаслідок того, що коли вони починають купувати або продавати акцію, то ціна починає змінюватися у протилежному напрямку. Г. Демсетз, А. Краус та Г. Столл (див. табл. 1.2) вказали на цей ефект, що є загальновідомим серед портфельних менеджерів.

Бібовер Г. та Пріст В. у 1980 році [118] окреслили найбільшу проблему з виміром даного виду трансакційних витрат: для того щоб правильно оцінити їх розмір, необхідно порівняти ціну, яку отримав інвестор за свою угоду, з тієї ціною, яку б отримав середній учасник ринку у випадку, якщо б інвестор не здійснив цю операцію. Проблема полягає у тому, що таку ціну вже неможливо однозначно виміряти, оскільки угода все ж таки відбулася, і ринкова ціна вже відхилилася від рівноважної, тож будь-які інші спостереження не будуть повністю емпіричними, і, можливо, призведуть до упереджених оцінок.

Через це існує значна кількість праць того часу, в яких автори намагалися апроксимувати ці витрати за допомогою співставлення ціни трансакції з цінами навколо періоду її здійснення [119], висотою ринкової свічки цін [120], та останньою ціною перед закриттям торгів на біржі [121].

Інший підхід запропонували у своїй праці С. Берковіц та ін. Вони вказали, що найбільш наближеною метрикою має бути оцінка того, наскільки ціна, яку отримав інвестор за трансакцію, відрізнятиметься від тієї, яку отримав середній агент ринку впродовж усього дня торгів [122]. Так, останнє значення відобразить ту ціну, яку міг би отримати «наївний інвестор». Вони зазначили, що подібний підхід схожий з тим, як оцінюється дохідність портфеля: він порівнюється з відповідним пасивним індексом, для того, щоб зробити висновок, чи правильно ним управляли.

Проте вони не лише запропонували додаткову метрику у своїй праці, автори стали одними з перших, хто зміг порівняти три частини трансакційних витрат: витрати спреду, витрати комісії та витрати ринкового

впливу, і довести, що вони тісно пов'язані. Було визначено, що трансакції, які зазнають менших витрат на комісію та спред, зазнають більших витрат ринкового впливу і навпаки. Це дозволило фінансовій науці здійснити більш повну класифікацію трансакційних витрат.

Б. Коллінс та Ф. Фабоззі сформулювали визначення витрат ринкового впливу через інформаційне наповнення трансакції [47]. Вони стверджували, що трансакційні витрати ринкового впливу виникають через можливість інформаційної нерівності між учасниками угоди. Так, інвестор може здійснювати купівлю акцій на ринку через те, що у нього в портфелі з'явилися вільні фінансові ресурси і він прагне вкласти більше капіталу у диверсифікований портфель з акцій, або в нього з'явилася нова інформація щодо діяльності компанії – емітента цих акцій. В першому випадку, його трансакція буде продиктована виключно операційними причинами. В іншому випадку, він володіє додатковою інформацією щодо інвестиційної привабливості компанії. Тому другий випадок називають *інформованою трансакцією*.

Власне, здійснювати інформовані трансакції і є основним завданням активного інвестора. Його спеціалізація - це збирати публічну інформацію щодо діяльності компанії, робити висновки щодо її інвестиційної привабливості та більш точно прогнозувати майбутній рух цін на акцію.

Проте звичайний учасник ринку не є великим активним інституційним інвестором. Більшість трансакцій здійснюється між дилерами, маркет-мейкерами та іншими агентами, які підтримують ліквідність акції. Їх спеціалізація – це не досліджувати саму компанію-емітента, а лише бути готовим придбати та продати її акцію у будь-який момент часу.

Таким чином, коли вони здійснюють трансакцію, вони мають врахувати, що по той бік угоди може бути поінформований інвестор, який має кращий прогноз на майбутню ціну акції. Очевидно, що поінформований інвестор буде продавати акцію, коли він очікуватиме падіння у її ціні і купуватиме, коли він очікує її зростання. Таким чином, якщо контрагентом для нього

виступає маркет-мейкер, то така угода буде збитковою для останнього: він продаватиме акцію якраз перед тим, як її вартість підвищиться, і навпаки.

Отже, учасники торгів, які підтримують ліквідність акції, мають брати на себе додатковий ризик того, що вони можуть здійснювати трансакцію з поінформованим інвестором. Очевидно, що вони будуть вимагати додаткову премію за цей ризик.

Згідно поглядів Б. Коллінса та Ф. Фабоззі, *витрати ринкового впливу* – це і є та плата, яку стягує маркет-мейкер за те, що він у своїй трансакції може натрапити на поінформованого інвестора, який володіє кращою оцінкою вартості компанії [47].

Такий підхід до визначення сутності витрат ринкового впливу на той час не був повністю новим. Ще у 1971 році В. Бейджхот почав аналізувати поведінку учасників ринку відповідно до типів торговців, присутніх на ринку, та теоретично обґрунтував існування спреду купівлі-продажу як наслідок інформаційної нерівності між ними [123]. Згодом, Коупланд та Галай запропонували модель, яка формалізувала це твердження [124]. Проте ці дослідження були обмежені дослідженням лише ринкового спреду, на той час витратам ринкового впливу приділялося менше уваги у академічному колі.

Існують різні погляди на те, що саме є причиною витрат ринкового впливу. Розглянути вище теорії узагальнено у табл. 1.2.

Підсумовуючи огляд досліджень, присвячених трансакційним витратам ринкового впливу торгівлі акціями на біржових ринках, можемо сформулювати власну дефініцію. Витрати ринкового впливу – це витрати, що виникають в процесі виконання угод купівлі-продажу фінансових активів на організованих ринках, спричинені несприятливим рухом цін внаслідок самого процесу здійснення торгівлі, і які за природою є витратами внаслідок зворотного (кількісного і інформаційного) впливу купівлі-продажу акцій на баланс попиту і пропозиції та на очікування ринкових агентів (поведінку); їх

розмір не визначений заздалегідь та вимагає розробки спеціалізованого предикативного інструментарію для квантифікації.

**Таблиця 1.2**

**Підходи до визначення сутності трансакційних витрат ринкового впливу**

<b>Автор</b>	<b>Підхід</b>	<b>Сутність</b>
Демсетз Г. [27]	Проблема «негайності»	Витрати ринкового впливу спричинені тим, що певні агенти прагнуть здійснити трансакцію негайно; трансакційні витрати є засобом, за допомогою якого дилер стягує свою премію за негайність.
Краус А., Столл Г. [28]	«Набіг на ліквідність»	Трансакційні витрати ринкового впливу виникають тому, що великі інституційні інвестори не здатні задовольнити обсяг свого попиту/пропозиції на акцію за допомогою звичайного рівня торгів.
Коллінс Б., Фабоззі Ф. [47]	Нерівність інформації	Трансакційні витрати ринкового впливу – це премія, яку стягує дилер / маркет-мейкер за ризик того, що контрагент може бути більше проінформований за нього щодо внутрішньої вартості акції.

*Джерело: складено автором на основі [27] [28] [47]*

Витрати ринкового впливу, якщо вони спричинені кількома великими інституційними інвесторами або як наслідок інформаційної нерівності на ринку, є повністю несумісними з припущеннями класичної економіки.

Проблема у тому, що наявність таких витрат заперечує навіть слабку форму ринкової ефективності. Так, якщо ринкова ціна відхиляється від рівноважної на певний короткий проміжок часу після здійснення великої трансакції, на основі цих даних можливо прогнозувати рух ціни на акцію в майбутньому, адже після короткострокового відхилення ціна має повернутися до рівноважного стану. Таким чином, превалююча ціна на такому ринку буде відображати певну кореляцію з ціною угод у минулому, а також з обсягом здійснених трансакцій.

Якщо витрати ринкового впливу спричинені «набігом на ліквідність», то відповідно до цієї теорії витікає, що на ринку торгівлі акціями існують агенти, які здатні впливати на ціну, тобто не є лише отримувачами ціни. Якщо ж причиною цих витрат є інформаційна нерівність, то має місце «проблема лимонів», окреслена Дж. Акерлофом [12]. З цієї точки зору, витрати ринкового впливу – це є плата за суспільне благо послуг маркет-мейкера, яку сплачує кожен агент ринку.

В обох випадках класична економічна теорія не може стверджувати напевне, що такий ринок здатен досягти стійкої економічною рівноваги в загальному розумінні.

Для подолання цієї суперечності, можна звернутися до праць С. Гросмана та Дж. Стіглітца, які стверджували, що ефективний ринок – це лише теоретична модель. Дійсно, якщо ринок є повністю ефективним, то на ньому не може існувати інформаційна нерівність, адже в такому випадку у агентів не буде жодних ініціатив для того, щоб здійснювати купівлю-продаж акцій. Оскільки в такому випадку вся інформація вже відображена у ринкових цінах, то обмін не створюватиме додаткової вартості для сторін угоди, а, отже, не матиме сенсу [125].

Низка досліджень вказує на те, що для інституційних інвесторів наслідки *ринкового впливу*, зазвичай, приносять найбільшу частину трансакційних витрат [104], [126], [127]. З іншого боку, це один з найважчих їх компонентів у вимірюванні та прогнозуванні. Тому, не дивно, що наслідкам ринкового впливу приділяють особливу увагу у дослідженнях ринкової мікроструктури.

Так, на кінець 20-го століття практики користувалися емпіричним «правилом квадратного кореня» [128], який стверджував, що при лінійному зростанні розміру метаордеру, витрати ринкового впливу збільшуються відповідно до даної функціональної залежності. Проте, очевидно, що ця закономірність є доволі приблизною: чим більший обсяг здійснюваної трансакції, тим більш значною є похибка. Окрім того, це правило не дає

жодних рекомендацій щодо того, яким саме чином потрібно здійснювати великі трансакції для мінімізації витрат ринкового впливу.

Тому, враховуючи розвиток електронної торгівлі, значне збільшення обсягу трансакцій на фондових ринках на початку XXI сторіччя [129], [130], і, як наслідок, збільшення розмірів великих інституційних фондів, ця закономірність перестала відповідати викликам часу.

Класичною роботою, присвяченою формалізації *витрат ринкового впливу*, вважають працю Р. Алмгрема та Н. Кріса [131]. Вона першою продемонструвала визначальну роль ринкового впливу у здійсненні портфельних трансакцій та запропонувала модель, яка надавала практичні рекомендації щодо того, якою має бути динаміка виконання метаордеру для зменшення загальних витрат ринкового впливу. Майже усі подальші роботи у цій сфері, у тому чи іншому аспекті, ґрунтуються на цьому дослідженні.

Разом з цим, серед недоліків цієї праці можна визначити той факт, що надана характеристика витрат ринкового впливу була лише спрощеною теоретичною конструкцією, функціональна форма якої не відповідала практичній дійсності. Тому з цього періоду часу академічна спільнота перебувала у пошуку моделі, яка б більш точно описувала динаміку руху ціни на акції у часі при здійсненні великих трансакцій.

Так, моделі першого покоління - так звані «моделі поширення» - ґрунтувалися на загальному підході Р. Алмгрема та Н. Кріса, проте прагнули підібрати формулу, яка б краще відповідала емпіричним даним щодо розміру та динаміці ринкового впливу, в залежності від торгової активності інвестора [132], [133], [134]. Вони використовували припущення, що ця залежність, перш за все, визначається структурою замовлень на фондовому ринку у кожний момент часу і обсягом попиту, яку становить досліджуваний метаордер.

Моделі наступного покоління визнають, що вплив торгівлі інвестором не обмежується лише його впливом на структуру ордерів на біржі. Визнається, що ринкові агенти також аналізують обсяг здійснених трансакцій

та корегують свої очікування [135], [136], [135]. В такому випадку, здійснення метаордеру призводить до змін у ціні не лише через поглинання наявної ліквідності у даний момент, але й тим, що зменшує бажання контрагентів надавати ліквідність у майбутньому. Це спостереження суттєво впливає на планування інтенсивності торгівлі мета ордеру, оскільки воно постулює, що виконання дочірніх замовлень зараз матиме довготривалий наслідки, а, отже, визначатиме за якою ціною будуть проведені трансакцій для тієї частини метаордеру, що залишилася.

Разом з цим, такі моделі зазвичай набагато важче побудувати та використовувати, оскільки вони потребують припущення щодо того, як саме ринкові агенти змінюють свою поведінку на основі ринкової інформації.

Тому, не зважаючи на суттєвий прогрес у дослідженні витрат ринкового впливу, на даний момент не існує реалістичної, консистентної моделі, яку можна було б застосувати на практиці [137].

Однією з проблем, що стримує академічні дослідження у цій сфері, є складність у отриманні емпіричних даних, адже вони майже відсутні у відкритому доступі. У той же час, приватні дані щодо торгівлі метаордерів охороняються конфіденційністю, яку надають клієнту інвестиційні фонди та брокери. Окрім того, останні мають більш серйозні стимули до покращення своїх моделей трансакційних витрат, адже більш точні прогнози очікуваних результатів трансакцій надають реальні конкурентні переваги: вони дозволяють краще планувати стратегії виконання ордеру, консультувати клієнтів щодо оптимальної торгівлі та загалом зменшувати витрати виконання замовлень. Але, через ці самі причини, прогрес у цій сфері здійснений приватними компаніями, залишається в їх інтелектуальній власності і зберігається у таємниці. І тому, кожна компанія обмежена лише набором власних замовлень, які вона може використати для розрахунку залежності ринкового впливу від обсягу торгів.

В свою чергу, академічні дослідники здійснюють спроби апроксимування торгівлі великих інституційних інвесторів за допомогою

публічно доступних даних щодо торгів на великих біржах [138], [139], [135]. Така методика збільшує обсяг даних, якими вчений може оперувати, але й у той же час, відкриває питання щодо того, наскільки такий підхід є репрезентативним щодо реальної торгівлі великих інвесторів. Так, певні роботи вказували на суттєві відмінності у реакції ціни фінансового активу на звичайний ринковий обмін у порівнянні з трансакціями, що являли собою лише одну з частин більш великого замовлення [140], [141].

Отже, на жаль, ця проблема залишається не вирішеною і на цей день. Розмір вибірки та обсяги емпіричних даних становлять один з факторів конкурентної переваги у цій сфері. При цьому, стимули та ініціативи потенційних дослідників стримують співпрацю та обмін інформації.

За таких умов стає важливим ефективне використання наявної вибірки замовлень для розробки моделей ринкового впливу. Нажаль, у попередніх академічних роботах більша частина уваги приділялася саме структурі та динаміці ринкового впливу, у той же час, як тема статистичного розрахунку параметрів залишалася дещо осторонь.

Проте для пересічного інвестора трансакційні витрати залишаються витратами, які він має враховувати у своїй діяльності. Дійсно, якщо інвестор здатний передбачити рух ринкової ціни на певну акцію і хоче отримати прибуток від цього знання, то трансакційні витрати, це той фактор, без врахування якого він не здатний вирішити, чи купівля/продаж акції матиме економічний сенс. Так, якщо трансакційні витрати перевищують очікуваний дохід від купівлі акції, то це означає, що інвестор не буде здатний реалізувати прибуток торгуючи відповідно до своїх прогнозів.

В такому контексті, вимір і передбачення витрат на торгівлю стають у один ряд з прогнозуванням вартості і майбутніх цін на акції.

Ця проблема буде детально розглянута у наступному розділі.

## Висновки до Розділу 1

Проаналізувавши теоретичні засади дослідження трансакційних витрат ринкового впливу на ринках акцій, а саме генезис підходів до дослідження сутності та джерел трансакційних витрат операцій з акціями, теоретичні засади та практичне функціонування фінансового ринку акцій, сутність та джерела трансакційних витрат ринкового впливу торгівлі акціями, були зроблені наступні висновки:

1. Встановлено, що дослідження трансакційних витрат представлені у роботах науковців економічного та фінансового напрямку. Перші розглядали причини існування трансакційних витрат як результат: побічних ефектів, які виникають внаслідок споживання суспільного блага (Р.Коуз), та зникають тоді, коли всі інституційні причини їх існування врегульовані (М.Олсон, Д.Норт); невизначеності у правах власності між економічними агентами, які вступають у трансакцію, та загалом контрактного права, як засобу проведення угод (О.Уільмсон, С.Гроссман та О. Харт, Б.Холстром та П.Мілгром); нерівності в інформації щодо якості товару та предмету угоди між учасниками трансакції (Дж. Акерлоф, Дж. Стіглер, М.Спенсе); а також як винагороду, яку вимагає або сплачує покупець/продавець для того, щоб компенсувати нерівність у інформації між учасниками угоди. Науковці, що досліджували фінанси, визначали трансакційні витрати як винагороду, яку вимагає або сплачує покупець/продавець, для того, щоб компенсувати нерівність у інформації між учасниками угоди.

2. Виокремлено три підходи до визначення трансакційних витрат на фондових ринках: як відповідної плати за нагальність та визначеність у здійсненні купівлі-продажу; як премія за участь у ринковій торгівлі та проведення обміну для стимулювання потенційних контрагентів; як результат потенційної нерівності у інформації, яка може існувати між учасниками обміну. Систематизовано класифікацію трансакційних витрат за різними ознаками: чіткістю визначення та оцінювання – явні та неявні;

джерелом, яке слугує основою стягування відповідної частини трансакційних витрат - податки, комісію брокера, витрати спреду та ринкового впливу, тощо. Доведено, що наукові праці, перш за все, фокусуються на вивченні ефектів, спричинених спредом купівлі-продажу, ринковим впливом та втраченими можливостями.

3. За допомогою мікроструктурного підходу до аналізу ринку акцій здійснено аналіз головних суб'єктів вторинного ринку акцій: інституційних, роздрібних інвесторів, брокерів, маркет-мейкерів, дилерів. Систематизовано класифікацію ринку акцій на основі різних критеріїв: за наявністю інформації щодо книги лімітних ордерів – світлі, сірі, темні; за видами ордерів, які може відправляти інвестор – постійної торгівлі, аукціони, дилерська торгівля; за тим, як здійснюється співставлення покупця та продавця; за обов'язковістю виконання – тверді, умовні ордери; за видами ордерів – маркет, ліміт, стоп ордери, прив'язаний ордер.

4. Доведено, що агрегована функція попиту-пропозиції ринку акцій – це об'єднання локальних функцій для кожної з інфраструктурних одиниць фінансового ринку акцій. Визначено, що різноманітність структури та організації торгових майданчиків для здійснення торгівлі акціями, різні види ордерів, різні категорії учасників торгівлі на фондових ринках та різні види характеристик взаємодії між ними, обумовлені потребою надати інвестору інструменти, якими він здатний оперувати для зменшення своїх трансакційних витрат та поліпшити свій процес інвестування.

5. Аналіз існуючих підходів до визначення сутності трансакційних витрат ринкового впливу дозволив виокремити три головні підходи, а саме: як проблема «негайності», тобто як засіб стягнення премії за негайність здійснення трансакції; «набіг на ліквідність» - нездатність великих інституційних інвесторів задовольнити обсяг свого попиту/пропозиції на акцію за допомогою звичайного рівня торгів; нерівність інформації, як премія, яку стягує дилер / маркет-мейкер за ризик того, що контрагент може бути більше проінформований за нього щодо внутрішньої вартості акції. На

основі чого було сформульовано власне визначення трансакційних витрат ринкового впливу.

6. Запропоновано розглядати два види трансакційних витрат: явні витрати – розмір яких встановлюється та фіксується договорами з біржою, брокерами та іншими юридично встановленими нормативно-правовими актами; та неявні витрати – ті, що є наслідком реакції інших учасників обміну на здійснення трансакції інвестором, та які не можна визначити наперед. Встановлено, що неявні витрати додають значного рівня невизначеності до процесу прийняття інвестиційних рішень, а тому їх оцінка та контроль є пріоритетним питанням для суб'єкта інвестування.

## РОЗДІЛ 2.

### МОДЕЛЬНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ ПРОГНОЗУВАННЯ ТРАНСАКЦІЙНИХ ВИТРАТ РИНКОВОГО ВПЛИВУ НА БІРЖОВИХ РИНКАХ АКЦІЙ

#### **2.1. Методичні підходи до оцінювання та прогнозування трансакційних витрат біржових операцій з акціями**

Прогнозування трансакційних витрат – це важливий елемент інвестиційного процесу для кожного суб'єкта фінансового ринку. Для активних інвесторів трансакційні витрати визначають, наскільки ефективними та точними мають бути їх дослідження вартості акцій, щоб у підсумку вони принесли прибуток. Якщо дослідження вказує, що очікувана різниця у ціні менша за вартість трансакції, то позиція у такої акції буде збитковою.

Для пасивних інвесторів трансакційні витрати визначають, на скільки в середньому дохідність портфелю акцій буде відхилятися від їх цільового індексу, оскільки, для того, щоб зважити вагу кожної акції у індексі, їм доводиться здійснювати купівлю і продаж акцій та зазнавати витрат, які не включені у значення індексу.

Для брокера трансакційні витрати визначають, наскільки краще або гірше за конкурентів вони здатні виконувати замовлення своїх клієнтів на купівлю-продаж акцій.

Для дилерів та маркет-мейкерів певна частина загальних трансакційних витрат всього ринку визначає дохід, який вони очікують отримати за те, що надають ліквідність ринку (спред). З іншого боку, трансакційні витрати також визначають плату, яку вони мають здійснити за вихід з надто великих або ризикових позицій (витрати впливу).

Особливу увагу фінансова наука приділяє передбаченню трансакційних витрат метаордерів. Так розробка точного прогнозу у цій проблемі спрямована на розв'язок наступних завдань:

- визначення величини очікуваних трансакційних витрат: цією величиною керуються інвестори для прийняття рішення про зміну позиції у певній акції;

- визначення ефективної стратегії виконання метаордеру: при отриманні заявки на купівлі/продаж акції у вигляді метаордеру від інвестора, брокер має визначити, за який часовий горизонт він зможе його виконати, та яким чином він розподілить метаордер на дочірні ордера. Розв'язок цієї задачі полягає у знаходженні стратегії виконання ордеру, що б мінімізувала очікувані витрати;

- вимірювання якості виконання метордеру: оскільки розподіл метаордеру на дочірні ордери та здійснення торгівлі можливо багатьма способами, часто постає завдання визначити, наскільки ефективно виконавець приймає ці рішення. У такому випадку, порівняння реальних з очікуваними витратами дозволяє оцінити, чи торгівля метаордером була виконана на належному рівні. Особливо часто ця проблема постає перед інвестором, коли він обирає брокера, адже плата та рівень послуг, які надають брокери не є однорідними.

Тобто, для кожного учасника ринку необхідно передбачати, скільки витрат вони зазнають, якщо будуть купляти або продавати певну кількість акції у вигляді метордеру. Проте, перед тим, як вони здатні здійснити подібне прогнозування, необхідно визначити, яку саме величину потрібно оцінити. Іншими словами, треба визначити, як вимірюються трансакційні витрати метаордеру.

З цією метою доцільно розділити витрати на категорії та розглянути оцінку та вимірювання кожного елементу. Для цього доречно використати розподіл трансакційних витрат на складові на основі праці Д. Кейма та А. Мадхавана [104].

У процесі торгівлі акціями на фондовому ринку стягується комісія брокером або дилером за надання послуги інвестору щодо проведення угоди купівлі-продажу від його імені. Інвестор може оминати цю плату, якщо він вирішить сам здійснювати свою транзакцію напряду через відповідний торговий майданчик. Проте, зазвичай, брокери та дилери є більш обізнаними та спеціалізованими саме у виконанні замовлень.

Ринок брокерських послуг характеризується високим рівнем конкуренції: зміна брокера є доволі простою процедурою на сучасному фондовому ринку, адже всі вони використовують один стандарт щодо формату замовлень від клієнта (протокол FIX). Тому для інвестора витрати щодо переключення між постачальниками брокерських послуг майже відсутні.

Внаслідок сильної конкуренції брокери змагаються і у встановленні цін на свої послуги, і в поліпшенні якості за свої продукти. В свою чергу, поліпшення якості продуктів характеризується, перш за все, здатністю запропонувати виконання клієнтських ордерів з меншими транзакційними витратами, ніж у конкурента. Тому для брокерів існують сильні стимули пропонувати найкращий продукт за найкращою ціною. Більше того, у США подібні ініціативи ще й підкріплюються законодавчо. Так, згідно правила 5310 встановленого Асоціацією Регулювання Фінансової Галузі (FINRA), брокер мусить проявляти «розумну старанність» у забезпеченні найкращого рівня виконання замовлення для свого клієнта [142].

Внаслідок цього, брокери постійно поліпшують свої продукти за допомогою наукомістких досліджень щодо того, який спосіб виконання ордеру є найкращим з огляду на ринкову мікроструктуру, та постійно шукають додаткові джерела ліквідності (тіньові біржі, дилерські мережі, тощо). Тому для великої кількості інвесторів плата певної комісії брокеру за надання послуг, які полягають у зменшенні всіх транзакційних витрат загалом, є раціональним компромісом [143].

Отже, це доволі розповсюджена практика для інвесторів – замість спроб реалізувати торгівлю відповідно до потреб управління активами власними силами, звертатися до брокерів, що спеціалізуються у цьому. Тому частина трансакційних витрат, що становить комісію брокера, визначається вартістю відповідних послуг і регулюється двосторонніми угодами між брокером та інвестором.

Інформація щодо того, яку платню стягує брокер, є закритою. Це обумовлене тим, що брокери намагаються здійснювати цінову дискримінацію другого і третього типу відповідно до класифікації за А. Пігу [144]. Так, компанії з управління активами різних типів будуть отримувати різну ціну, яка буде визначатися відповідно до того, якими видами акцій вони торгують і якими є їх потреби до ліквідності. Крім того, компанії будуть отримувати різну ціну в залежності від обсягу трансакцій, які вони зазвичай проводять: для брокерських послуг очевидною є економія від масштабу, вигоду з якої вони перекладають на клієнта, як один із інструментів цінової конкуренції з іншими брокерами.

Таким чином, не зважаючи, що сторонній спостерігач не знає точного обсягу брокерської комісії, яка була стягнена для здійснення трансакції, сам інвестор завжди знає точно суму, яку він має сплатити у вигляді комісії за здійснення купівлі або продажу акцій – тому брокерська комісія і є складовою саме явної частини трансакційних витрат.

Іншою частиною явних трансакційних витрат є плата біржі або торговому майданчику за здійснення трансакції. Дійсно, функціонування інфраструктури фінансового ринку є цінною послугою для учасників цього ринку, а отже, можливість торгувати на торгових майданчиках повинна мати певну вартість. В свою чергу, діяльність торгового майданчика пов'язана і з операційними витратами: необхідно утримувати інфраструктуру, яка б дозволяла отримувати замовлення від багатьох інвесторів на велику кількість різних акцій та яка б ставила у відповідність ордерам на купівлю акцій – ордери на продаж та навпаки.

В цілому, більшість бірж у світі є приватними компаніями що мають на меті отримати прибуток. Так, найбільші світові біржі, такі як NYSE, NASDAQ, LSE, TSE, знаходяться у володінні відповідними акціонерними товариствами. Незважаючи на те, що це є популярною моделлю організації діяльності біржі, наскільки ефективною є така форма – є доволі дискусійними питанням.

Так, біржі стягують плату за свої послуги у двох видах: плата за здійснення трансакції (так звана «вартість квитка»), а також – плата за дані. Перший вид плати є доволі зрозумілим – біржа допомагає виконати замовлення, а отже прагне отримати платіж за ці послуги. Інший вид виплат є менш прозорим: біржа прагне від інвестора додаткову платню за інформацію щодо поточного обсягу, пропозиції та рівня цін на цих біржах. Існують певні замітники (наприклад, «консолідована стрічка» у США), але їх якість є гіршою, оскільки швидкість обробки і передачі даних у них є недостатньою для спостереженням за швидкою зміною рівня цін і кон'юнктури на фондових ринках акцій [145].

Незважаючи на те, що ринок діяльності бірж є доволі конкурентним, на ньому існують певні особливості, внаслідок чого ця галузь набуває монополістичних якостей. Так, наприклад, в США закон NMS вимагає здійснювати операцію через визначену біржу, якщо ціна на ній є кращою, ніж на інших [146]. Внаслідок цього, брокер зобов'язаний користуватися послугами всіх бірж, адже якщо він оминає одну з них, це може призвести до порушення цього закону. В свою чергу, у Великобританії, MiFID II (директива 2014/65/EU) визначає, що якщо обсяг позабіржової торгівлі перевищує певний відсоток за день, брокери зобов'язані здійснювати всі наступні трансакції лише через біржі [147]. Тобто, наприклад, у Великобританії, це фактично змушує їх користуватися послугами біржі LSE.

Через ці обмеження ринок біржових послуг стає сегментованим, і в кожному сегменті відповідна біржа починає займати майже монопольне становище. Внаслідок цього, вони володіють певною монопольною владою у

встановленні цін на послуги виконання ордерів та на дані щодо обсягу та цін торгів. Це, в свою чергу, призводить до критики бірж та додаткової уваги регуляторів щодо процесу встановлення цін на їх послуги у певних країнах [148].

Біржі також знаходяться у державній власності в таких країнах як Китай, Катар та Алжир. Існують змішані моделі: так, в Туреччині, 49% Стамбульської біржі перебуває у власності держави; держава володіє 80% Дубайської фондової біржі, тощо [149].

Окрім форми власності виокремлюють біржі за моделлю стягування платежу. Так, на біржах з високим рівнем ліквідності, відносна корисність торгівлі для інвестора буде вищою. В свою чергу, ліквідність буде вищою для бірж, на яких здійснює свою діяльність більша кількість економічних суб'єктів, оскільки в такому випадку легше знайти контрагента для здійснення трансакції, та, і взагалі, процес ціноутворення на таких біржах має бути більш ефективним.

Отже, очевидним є те, що біржі утворюють позитивні екстерналії – мережеві ефекти - в залежності від кількості клієнтів та їх активності у наданні ліквідності. У такому випадку інвестори надаватимуть перевагу біржам з більшим обсягом торгів, за умови відсутності інших обмежень. Компанії, що управляють біржами, розуміють, що збільшення ліквідності дозволяє їм збільшувати свої конкурентні переваги, а отже вони зацікавлені у стимулюванні інвесторів надавати ліквідність – в тому числі, монетарно.

Дійсно, низка наукових досліджень вказує, що цей фактор становить ще один напрям у якому біржі (мережі) можуть успішно конкурувати між собою [150], [151], [152]. Так, внаслідок конкурування декількох мереж, може утворитися ситуація, коли їх компанії-власники субсидують купівлю свого товару, оскільки це розширяє їх мережу і робить їх продукцію більш привабливою для майбутніх споживачі.

Така ситуація виникає і на біржах, на них було введено концепцію «поступок» (rebates). Сутність полягає в тому, що за трансакцію, в якій

інвестор шукав ліквідність (транзакція була результатом виконання агресивного замовлення), з нього стягуватимуть плату за користування послугами біржі. Але, в свою чергу, якщо він пропонував ліквідність і транзакція відбулася за допомогою пасивного ордеру, він отримає компенсацію від біржі – «поступку біржі». Такий розподіл сплати за суспільне благо являє собою стандартну модель ціноутворення на біржах. Це призводить до того, що, певні окремі транзакції, які надають ліквідність учасникам бірж, можуть утворити транзакційні доходи для інвестора.

Серед більш ніж десяти фондових бірж акцій США, лише три не підтримують стандартну модель оплати. Ці три біржі називають «оберненими біржами» [153]. Філософія їх операційної діяльності полягає у зворотному твердженні: для інвесторів є більш важливим виконати замовлення швидко. Ця ідея прямо перетинається з концепцією «негайності» Г. Демсетза [27]. Отже, ці біржі будуть стягувати плату за пасивний ордер і надавати компенсацію за агресивне замовлення. Таким чином, вони спонукають інвесторів виступати контрагентам для існуючих замовлень.

У будь-якому випадку, незалежно від форми власності чи моделі стягування плати за послуги біржі, ці транзакційні витрати є відомими для інвестора. Біржі встановлюють прозорі тарифи, що визначають правила оплати за їх послуги. Тому, якщо інвестор має на меті придбати чи продати акції, він може однозначно визначити, який обсяг комісії він заплатить відповідно до того, яку біржу він обирає для замовлення та який тип ордеру (пасивний чи агресивний) він відправить.

Наступною формою явних витрат є податки. До складових транзакційних витрат відносять лише ті види податки, які не залежать від результату інвестування. Розрізняють декілька видів оподаткування, які застосовуються до торгівлі на фондовому ринку акцій. Відповідно до того, як окреслені транзакції – об'єкти оподаткування, розрізняють:

- податок на здійснення транзакцій – податок на здійснення купівлі та продажу будь-якого фінансового контракту;

- податок на цінні папери – податок що стягується за здійснення операцій з фінансовими інструментами що торгуються на біржі;

- гербовий збір – податок на реєстрацію трансакцій з фінансовими активами юридично.

За економічною сутністю їх можна розглядати у тому самому значенні, що й комісії біржі, з тією лише відмінністю, що виплати здійснюються не власнику торгового майданчика, а державі.

Відповідно, обсяги та пропорції, у яких поєднуються вищенаведені види оподаткування будуть відрізнятися для різних регуляторних та податкових режимів. Так у Китаї, при здійсненні торгівлі акціями, стягується гербовий збір у обсязі 0.1% від розміру трансакції; у Німеччині – 0.2% у вигляді податку на здійснення трансакції; у Індії – 0.001% за операції з акціями на фондових біржах.

Подібні податки, окрім звичної цілі перерозподілу доходів, також мають на меті обмежити діяльність дилерів та маркет-мейкерів, які здійснюють високочастотну торгівлю. Високочастотна торгівля – це автоматизована торгівля на фінансовому ринку акцій, яка спрямована на використання переваги у швидкості реакції автоматизованих систем до зміни цін. Такий вид маркет-мейкінгу часто розцінюють як використання несправедливих переваг, оскільки вони доступні не всім учасникам ринку.

У той же час, у США, наприклад, податки за здійснення діяльності на фондовій біржі становить лише 0.0042\$ за купівлю-продаж акцій, що є схожим за розміром і характером до плат, які стягують біржі за свої послуги. Таким чином, регуляторна функція податків у цій країні мінімальна.

Отже, спільною рисою для премій брокера, компенсацій за користування послугами біржі та податків є те, що інвестор може завчасно дізнатися величину цих витрат просто переглянувши відповідний контракт з брокером та біржею або відповідний нормативно-правовий щодо оподаткування.

В свою чергу, існують витрати які не є відомими наперед – неявні витрати – серед яких: спред, витрати через екзогенну зміну рівноважної ціни

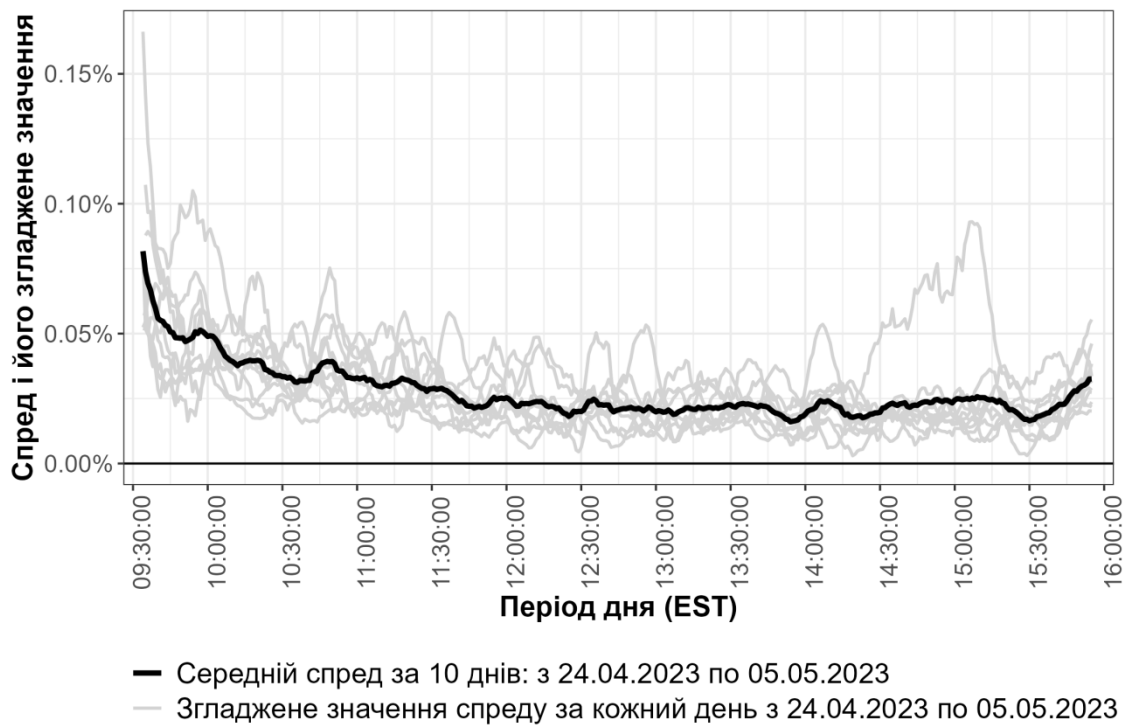
(витрати своєчасності), витрати втрачених можливостей та витрати ринкового впливу.

Спред визначає витрати, які зазнає інвестор через те, що він може купувати акції миттєво лише за ціною купівлі, і продавати акцію – за ціною продажу, обидві з яких є менш сприятливими для інвестора за рівноважну ціну.

Основна відмінність спреда від явних витрат полягає в тому, що різниця цін купівлі-продажу несе в собі певний елемент невизначеності. Так, спред відрізняється не лише відповідно до особливостей акції компанії-емітента, а й змінюється впродовж дня. Його значення залежить від бажання маркет-мейкерів торгувати даною акцією – що, в свою чергу, залежить від багатьох чинників. Внаслідок, для стороннього спостерігача, величина спреда у кожний момент часу виступає майже випадковою величиною.

Проте, існують певні закономірності. Так відомо, що чим меншою є невизначеність щодо ціни на акцію та більшим обсяг угод, тим меншу премію маркет-мейкери стягують за свої послуги, а отже, тим меншим є спред. Внаслідок цього, спред, зазвичай, є вищим на початку дня, коли ринок ще перебуває у процесі засвоєння акумульованої впродовж ночі інформації щодо компанії-емітента акції.

На рис. 2.1 зображена щоденна динаміка згладженого спреда акції компанії IBM на фондовому ринку США у період з 24 квітня по 5 травня 2023 року.



**Рис. 2.1. Згладжене значення спреду для акції компанії IBM  
розраховане на основі методу [154]**

*Джерело: Розраховане автором за допомогою методу описаному у [154] на основі даних <https://www.alphavantage.co/>*

Зазначимо, що історичні дані щодо власне спреду у кожний момент часу не доступні у вільному доступі, тому величини на графіку – це лише наближені значення, розраховані на основі свічки ціни акції (максимальна, мінімальна ціна, ціна відкриття та ціна закриття) на хвилинному інтервалі за допомогою методу наведеного у праці Ф. Абді та Ф. Раналдо [154]:

$$s_t = 2\sqrt{(c_t - \eta_t)(c_t - \eta_{t+1})} \quad (2.1)$$

де  $s_t$  – відносне значення спреду купівлі-продажу (% від ціни);

$c_t$  – логарифм останньої ціни на момент закінчення хвилини  $t$ ;

$\eta_t$  – логарифм середньої ціни (половина від суми максимальної і мінімальної ціни) на момент закінчення хвилини  $t$ .

Крім того, відносні значення спреду, наведені на рис. 2.1 згладжені 10-хвилинним плинним середнім для того, щоб характер залежності між його значенням та годиною дня був явно виражений.

Таким чином, цей рисунок доводить, що спред купівлі-продажу змінюється відповідно до часу дня та інших випадкових факторів.

У середньому вплив інвестора на величину спреда є доволі обмеженим, оскільки якщо торговець не займає значну частину обсягу торгівлі на ринку акцій (що становить переважну частину випадків), він не може його змінити. Таким чином, інвестори можуть лише вибирати моменти часу для здійснення трансакцій, коли значення спреда є найсприятливішим.

Для вимірювання витрат спреда у одному метаордері використовують наступну формулу:

$$\text{Витрати спреда} = \text{sideSign} \cdot \sum_{t=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} - 1 \right) \quad (2.2)$$

$\text{sideSign}$  – знак, який нормалізує сторону ордеру:  $\text{sideSign} = 1$  для метаордера купівлі та  $\text{sideSign} = -1$  для ордера продажу;

$Q$  – обсяг всього метаордеру;

$q_t$  – кількість куплених/проданих акцій у момент часу  $t$ ;

$p_t^{exec}$  – ціна за якою акції були куплені/продані (ціна виконання) у момент часу  $t$ ;

$p_t^{mid}$  – середина між ціною купівлі та ціною продажу на ринку в момент часу  $t$ .

Отже, якщо результат формули (2.2) є більшим від нуля, то це означає, що інвестор здійснив купівлю/продаж акції у кожному дочірньому ордері за ціною, яка в цілому була гіршою (тобто вищою/нижчою відповідно) за середню на ринку. Значення витрат у формулі, в свою чергу, визначають, на який відсоток отримана ціна відхиляється від тієї, за якою в середньому торгував ринок впродовж всього часу виконання метаордеру.

Задля ілюстрації розрахунку цієї і інших компонент неявних витрат розглянемо метаордер на купівлю  $Q = 1000$  акцій що виконується протягом 50 хвилин. Припустимо, що брокер здійснює торгівлю цим мета ордером у доволі простій спосіб: кожні 5 хвилин він відправляє дочірній ліміт-ордер на купівлю 100 акцій за найвищою ціною купівлі. Внаслідок цього, брокер буде

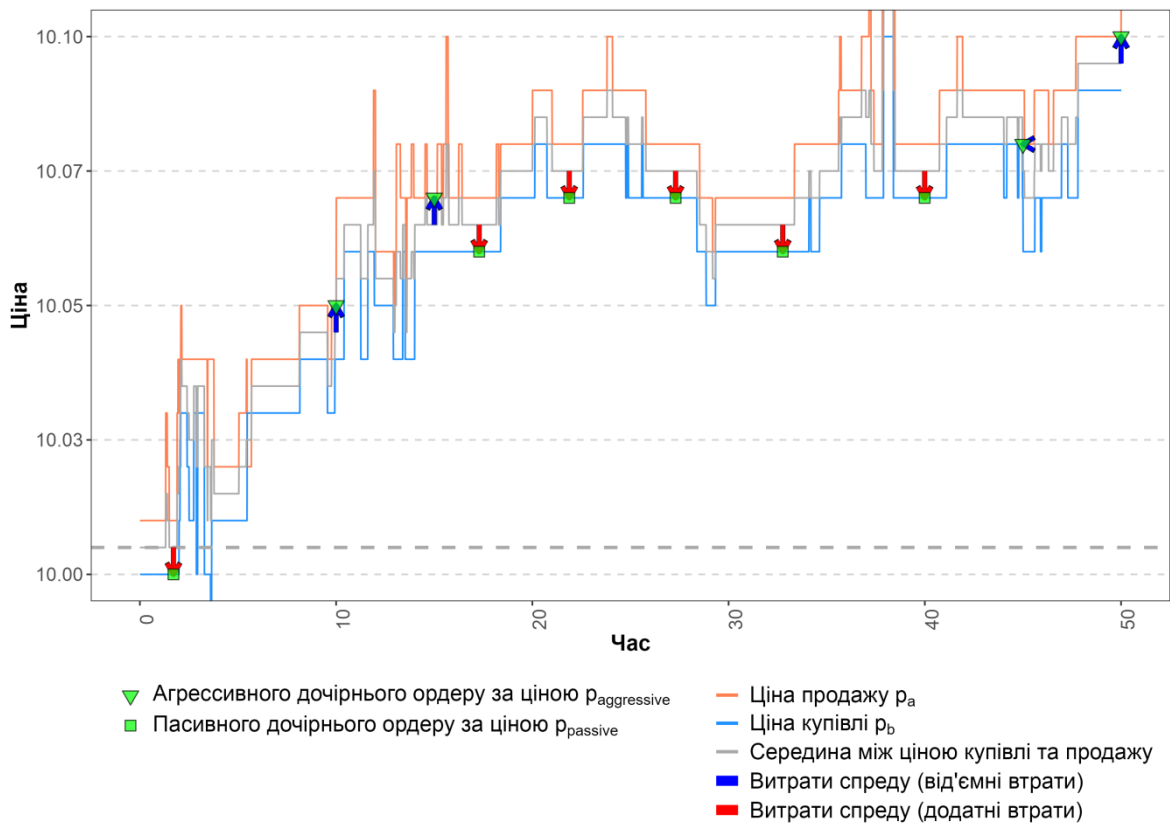
готовий купити акцію за найкращою ціною купівлі, яка існує на той момент. Проте існує шанс, що за 5 хвилин покупець так і не знайдеться. В такому випадку, після цього часового інтервалу, брокер скасовує дочірній ордер та відправляє ринковий ордер за найменшою ціною продажу, що гарантовано призведе до здійснення трансакції. Моделювання динаміки книги ліміт ордерів здійснюється методом, що був запропонований у [155] та був доповнений для симуляції виконання метаордеру у [156]. Детально процес описаний у Додатку А.

Результат однієї з симуляцій подібної торгової стратегії зображений на рис. 2.2. Власне витрати спреду розраховані у Додатку Б та зображені червоним та синіми стрілками на рис 2.2. У даному прикладі витрати обернулися збереженнями, тому що запропонована торгова стратегія не часто перетинала спред. Тобто, у переважній частині випадків вона спромоглася здійснити операції за ціною купівлі через те, що чекала слушної нагоди для проведення трансакції.

Проте витрати спреду – це лише один з компонентів неявних витрат. Як бачимо з прикладу на рис. 2.2, у цілому, у весь період виконання метаордеру, ціна зростала. Це примушувало інвестора купувати акції за все вищою і вищою ціною (хоч він і здійснював трансакції за кращою ціною відносно середньої ціни купівлі-продажу в середньому).

Так, дійсно, проведення трансакції інвестором у середньому призводить до руху ціни у напрямку здійснення торгівлі: зростання у ціні при купівлі акцій та падіння у ціні при продажу акцій.

Така залежність є наслідком двох функцій ринкового механізму: ціноутворення та агрегування інформації щодо справедливої вартості компанії.



**Рис 2.2. Витрати спреду**

*Джерело: Симульоване виконання метаордеру за допомогою метода описаного у Додатку А та [156]*

У загальному значенні, активна купівля акції ринковим агентом може бути мотивована однією з двох причин: або цей агент здійснює балансування свого портфелю, або він вважає, що поточна ціна є нижчою за справедливу.

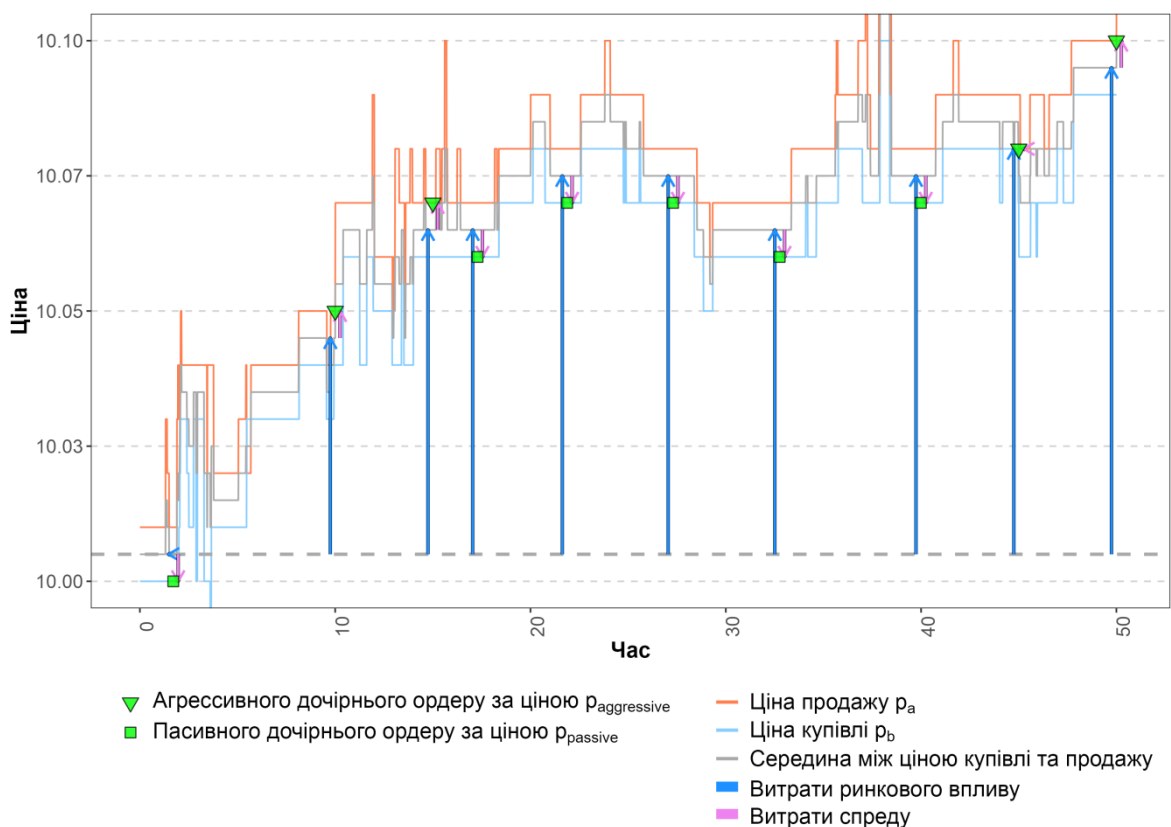
У першому випадку, прагнення інвестора збільшити частку акції у своєму портфелі призводить до збільшення обсягу попиту, і, як наслідок, збільшення рівноважної ціни.

У другому випадку, його інвестиція вказує на те, що він має (або принаймні вважає, що має) додаткову інформацію щодо реальною вартості активів компанії. Купуючи акцію він сигналізує про свої сподівання іншим учасникам ринку, які поєднують власні очікування з цією інформацією.

В обох випадках, зміна у ціні є результатом ефективного функціонування ринку: сторони взаємовідносин обміну слідкують за ринковою кон'юнктурою та при інтенсивній купівлі або продажу акцій

агрегують свої очікування вартості активу, що виражається у зростанні або падінні рівноважної ціни, відповідно.

Очевидно, що виконання метаордеру призведе до зростання інтенсивності торгівлі акцією, що спричинить зміни у рівноважній ринковій ціні. При цьому ціна завжди рухається у менш сприятливий бік для інвестора: якщо метаордер спрямований на купівлю акції, то він призводить до збільшення попиту на акцію і зростання ціни. Як наслідок, інвестор платить більшу ціну за акцію, ніж та, яка була на момент здійснення рішення про купівлю акції (тобто, в момент відправки заявки на виконання метаордеру). Якщо ж метаордер спрямований на продаж, то інвестор збільшує обсяг пропозиції акції, що призводить до зменшення ціни, і, як наслідок – інвестор отримує меншу ціну за продаж активу.



**Рис. 2.3. Витрати ринкового впливу**

*Джерело: Симульоване виконання метаордеру за допомогою метода описаного у Додатку А та [156]*

Такі витрати, спричинені несприятливим рухом цін внаслідок самого процесу здійснення торгівлі, мають назву витрат ринкового впливу. Вони відображають вплив на значення ціни, спричинений власними діями інвестора.

Такі витрати можна розрахувати за формулою:

$$\text{Витрати ринкового впливу} = \text{sideSign} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} - 1 \right) \quad (2.3)$$

де  $p_t^{ref}$  – рівноважна (референтна) ціна, яка б переважала на ринку у момент часу  $t$ , якби інвестор не почав виконання метаордеру.

Звісно, в загальному випадку,  $p_t^{ref}$  – невідома. Проте, цілком можливо припустити, що якби інвестор не почав купувати/продавати акцію, то ціна залишалася б незмінною. Тому дуже часто для розрахунків формули замість  $p_t^{ref}$  використовують  $p_{arrival}$  - середину між цінами купівлі-продажу на момент, коли почалося виконання метаордеру.

Відповідно, числові значення витрат ринкового впливу відносно  $p_{arrival}$  розраховані у Додатку В.

Проте, існують випадки коли доцільно розглядати і зміни у вартості акції, що спричинені незалежними від виконавця метаордера факторами. Внаслідок цього виділяють «витрати своєчасності»: витрати, спричинені екзогенними змінними відносно діяльності інвестора або брокера. Прикладами таких змін можуть бути швидкі зміни у ціні активу через нову інформацію щодо економічної діяльності фірми-емітента акції.

Так інвестори та торгові стратегії, які прагнуть придбати акції компанії, ціна якої стрімко зростає внаслідок оптимізму інших ринкових агентів щодо її вартості, зможуть задовольнити свій попит лише за ціною, що буде набагато більше за очікувану.

Необхідно розмежувати зростання у ціні, що є наслідком успішного прогнозування інвестиційної привабливості компанії, та трансакційних витрат. Ключова відмінність полягає в тому, якою ціною керувався інвестор,

коли здійснював рішення щодо купівлі акції. Так, якщо рішення було прийняте через те, що ринковий агент сподівався на стрімке збільшення ціни акції, то подальше зростання у ціні становить інвестиційний прибуток для інвестора. Якщо ж інвестор прагнув купити акцію за початковою ціною і будував свою інвестиційну стратегію відповідно, то несподіване зростання у ціні у момент здійснення трансакції перетворюється у витрати: це означає що тепер він має платити більше за той самий обсяг акцій.

Іншими словами, ця частина витрат визначає, наскільки своєчасно інвестор вирішив купити або продати акції: якщо рішення відбулося у момент несприятливої ринкової кон'юнктури, то інвестор понесе додаткові збитки.

Для кожного метаордеру ці витрати можна розрахувати за формулою:

$$\text{Витрати своєчасності} = \text{sideSign} \cdot \sum_{t=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \frac{p_t^{\text{ref}}}{p_{\text{arrival}}} - 1 \right) \quad (2.4)$$

$p_{\text{arrival}}$  – початкова ціна – середня ціну купівлі-продажу яка превалювала на ринку на момент початку виконання ордеру.

У середньому такі «витрати своєчасності» мають бути повністю випадковими: зростання та падіння ціни за умови відсутності додаткової інформації є однаково ймовірним. Внаслідок цього можна стверджувати, що, якщо всі зміни у ціні внаслідок зовнішніх факторів у момент виконання різних метаордерів є незалежними випадковими величинами, то при великому обсягу цієї вибірки сума цих величин прямуватиме до нуля згідно центральної граничної теореми. Отже, на довгому проміжку часу (та значній кількості рішень щодо купівлі або продажу акцій) цими витратами можна знехтувати.

Виключеннями будуть випадки, коли інвестор приймає рішення щодо купівлі акцій на основі зовнішніх ринкових чинників (наприклад, внаслідок реакції на нову інформацію щодо економічного становища відповідної компанії). У такому випадку, збільшення або зменшення ціни у процесі

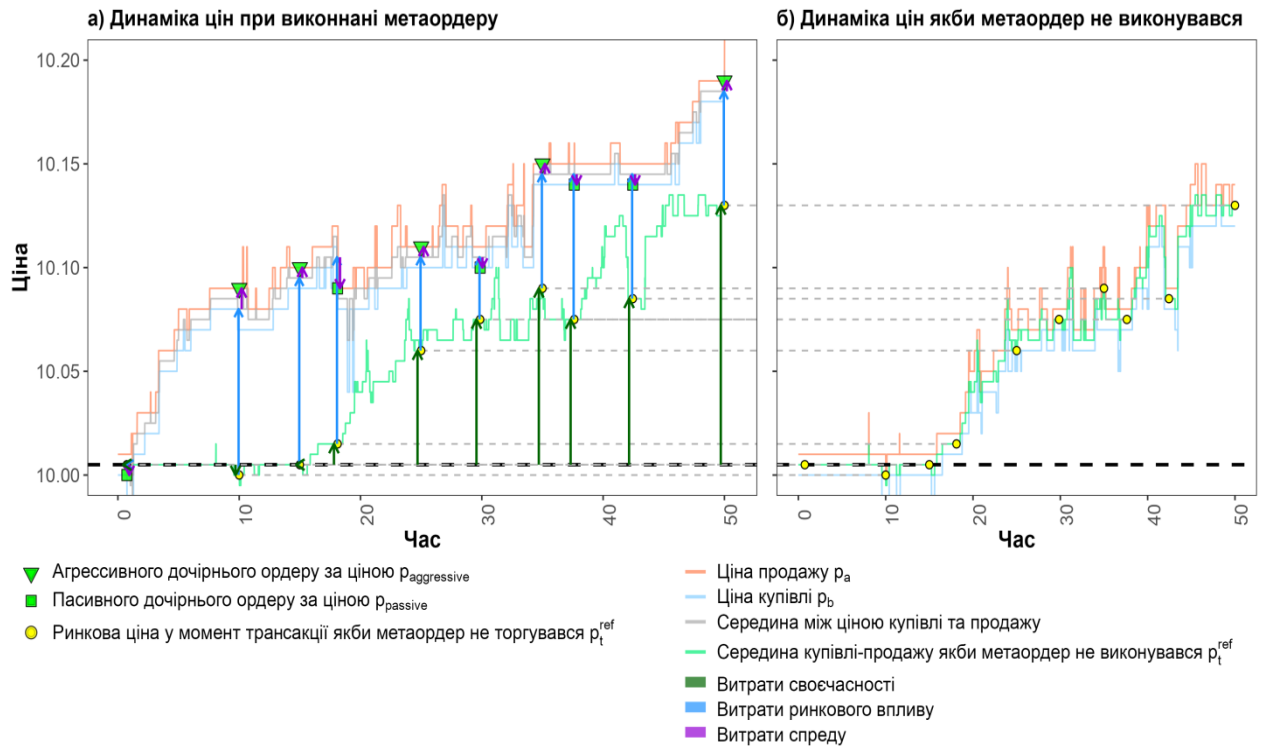
здійснення трансакції не буде незалежною величиною, і попередній висновок про те, що ці витрати прямуватимуть до нуля, не буде відповідати дійсності.

Щоб проілюструвати ефект трансакційних витрат своєчасності, змодельюємо наступну ситуацію. Нехай на ринок надійшла певна інформація, яка покращила інвестиційну привабливість досліджуваної акції. Як наслідок, багато ринкових агентів почали прагнути придбати акцію за поточною ринковою ціною. Це, в свою чергу, спричинило збільшення інтенсивності відправлення інвесторами ринкових ордерів на купівлю акції на 50%. У контексті моделі, наведеної у Додатку А, це буде означати, що параметр  $\mu$  для ордерів купівлі зріс з 0.94 до 1.41.

Через це, можна очікувати що ринкова ціна зростатиме впродовж певного часу незалежно від того, чи інвестор виконує метаордер. Одна з можливих динамік цього росту наведена на рис. 2.4 б).

Якщо ж інвестор у цей час ще й почне виконувати метаордер, то це спричинить ще швидше збільшення ціни, яке зображено на рис. 2.4 а).

Звісно, неможливо спостерігати траєкторії ціни у обох випадках одночасно, тому що інвестор або відправив метаордер і тоді рис. 2.4 а) відобразить рух ціни, або інвестор відмовився від здійснення купівлі і тоді реалізується динаміка ціни на рис. 2.4 б).



**Рис. 2.4. Витрати своєчасності**

*Джерело: Симульоване виконання метаордеру за допомогою метода описаного у Додатку А та [156] при  $\mu = 1.41$  для ринкових ордерів на купівлю акції*

У гіпотетичному сценарії, в якому виконавець знав би траєкторію ціни в обох випадках, він міг би відокремити рух ціни, що не є наслідком ринкового впливу. Ця частина і відповідатиме витратам своєчасності. Вони відображені на рис. 2.4 зеленими стрілками та розраховані у Додатку Г.

Проте у реальному сценарії можливість виокремити витрати своєчасності є обмеженою і потребує додаткових припущень та припущень. Тому їх величину намагаються оцінити лише у випадках, коли це є дійсно обґрунтованим.

Таким чином, витрати своєчасності відіграють суттєву роль лише для певної категорії інвесторів – тих, хто керується економічною інформацією реального сектору у своїй діяльності. Такі ринкові агенти мають очікувати на більші трансакційні витрати у здійсненні своєї діяльності на ринку акцій. Проте важко оцінити, наскільки такі витрати будуть вищими через те, що їх величина залежить від того, які саме дані реального сектору

використовуються, та яким чином вони інтегровані у інвестиційний процес, а, отже, цей зв'язок значним чином залежить від самого інвестора.

Нарешті, варто зазначити, що з позиції брокера - виконавця ордеру, завжди існує простий спосіб зменшити трансакційні витрати: просто відмовитися від виконання метаордеру. Очевидно, що трансакційні витрати дорівнюватимуть нулю для трансакції, що не відбулася. Проте, в загальній більшості випадків це не задовольнить інвестора.

Причиною цього є те, що, перш ніж здійснити рішення щодо зменшенні або збільшенні позиції певної акції в своєму портфелі, раціональний інвестор порівнює очікуваний дохід від володіння акцією та витрати, пов'язані з її купівлею або продажем. Очевидно, що трансакція має сенс лише коли очікуваний прибуток від її здійснення переважатиме за потенційні витрати.

Тобто, коли інвестор вже відправив заявку щодо купівлі-продажу акції, припускається, що він вже здійснив подібну оцінку і дійшов до висновку, що трансакція матиме позитивний вплив на його інвестиційний портфель.

Відповідно, якщо ж у підсумку метаордер не буде виконано, то він втратить можливість отримати інвестиційний прибуток.

Існують певні причини того, чому у певних випадках ордер може бути невиконаний, наприклад:

1) інвестор скасував виконання ордеру – такі ситуації виникають коли інвестор в процесі його виконання отримав певну додаткову інформацію щодо вартості на акцію або поточна ринкова кон'юнктура викликала його занепокоєння;

2) метаордер мав лімітуючу ціну – тобто інвестор дав вказівку, що забороняє купувати або продавати акцію за ціною, яка є менш сприятливою за лімітуючу. Якщо внаслідок ринкових коливань поточна ціна стала гірша за лімітуючу ціну, то брокер не може завершити виконання ордеру.

В обох випадках відповідальність за невиконання заявки часткового лежить на інструкціях, які інвестор надав виконавцю. Внаслідок цього може виникнути спокуса виключити ці витрати зі складових трансакційних витрат

торгівлі акціями. Проте варто пам'ятати, що якість виконання мета ордеру впливає на ймовірність таких подій: так, якщо торгівля акціями здійснюється не оптимально та спричиняє несприятливих рух у ціні на акцію, то зростає ймовірність того, що буде досягнута лімітуюча ціна, після чого виконання метаордеру буде неможливим. В свою чергу, якщо в процесі виконання метаордеру інвестор спостерігає, що витрати впливу зростають швидше, ніж очікувалося, це може поставити під його загрозу інвестиційний прибуток та спонукає інвестора скасувати заявку.

Тобто, оптимальне виконання метаордеру зменшує шанси того, що він не буде виконаний повністю, і, як наслідок, зменшує витрати втрачених можливостей для інвестора.

Проте в багатьох випадках, поведінку інвестора важко передбачити, крім того, зазвичай, виконавець не знає який інвестиційний прибуток прагне отримати інвестор від цієї транзакції. Внаслідок цього цю складову не виділяють окремо у прогнозуванні витрат.

Тобто, розглянувши складові транзакційних витрат, можна записати наступну формулу для їх розрахунку:

$$\begin{aligned}
 \text{Транзакційні витрати} &= \text{Явні витрати} + \text{Неявні витрати} \\
 &= \text{Явні витрати} + \text{Витрати спреду} \\
 &+ \text{Витрати своєчасності} + \text{Витрати ринкового впливу} \\
 &+ \text{Витрати втрачених можливостей}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Підставляючи формули (2.2), (2.3), (2.4) у (2.5), отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \text{Транзакційні витрати} &= C_e + \text{sideSign} \\
 &\cdot \sum_{t=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \left( \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} - 1 \right) + \left( \frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} - 1 \right) + \left( \frac{p_t^{ref}}{p_{arrival}} - 1 \right) \right) \\
 &+ C_o
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Де  $C_e$  – явні витрати; а  $C_o$  – витрати втрачених можливостей.

Враховуючи, що зазвичай зміни у ціні є відносно невеликими, можна використати логарифмічну функцію щоб апроксимувати вирази:

$$\begin{aligned} \left( \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} - 1 \right) &\sim \log \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} \\ \left( \frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} - 1 \right) &\sim \log \frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} \\ \left( \frac{p_t^{ref}}{p_{arrival}} - 1 \right) &\sim \log \frac{p_t^{ref}}{p_{arrival}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

якщо вирази  $(p_t^{exec}/p_t^{mid})$ ,  $(p_t^{mid}/p_t^{ref})$ ,  $(p_t^{ref}/p_{arrival})$  близькі до 1 за своїми значеннями.

В такому випадку, формула (2.6) перетворюється у:

Трансакційні витрати

$$\begin{aligned} &= C_e + C_o + sideSign \\ &\cdot \sum_{t=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \log \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} + \log \frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} + \log \frac{p_t^{ref}}{p_{arrival}} \right) \\ &= C_e + C_o + sideSign \cdot \sum_{t=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \log \frac{p_t^{exec}}{p_{arrival}} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тобто, всю величину трансакційних витрат можна виразити як суму явних витрат, витрат втрачених можливостей та зважене середнє відношення між ціною трансакції та ціни на початок ордеру.

В такому випадку, можна виділити очікувані трансакційні витрати, за умови певного плану здійснення торгівлі  $\Pi[q_t]$ . Нехай план становить множину запланованих трансакцій дочірніх ордерів та їх час (що може бути і ймовірнісним інтервалом у загальному випадку):  $\Pi[q_t] := \{q_{t_1}, q_{t_2}, \dots, q_{t_N}\}$ .

Тоді очікувані трансакційні витрати:

$$\begin{aligned}
& E[\text{Трансакційні витрати} | \Pi[q_t]] \\
&= E[C_e | \Pi[q_t]] + E[C_o | \Pi[q_t]] + \text{sideSign} \\
&\cdot \sum_{t=1}^N \frac{\Pi[q_t]}{Q} \left( E \left[ \log \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} \middle| \Pi[q_t] \right] + E \left[ \log \frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} \middle| \Pi[q_t] \right] \right. \\
&\quad \left. + E \left[ \log \frac{p_t^{ref}}{p_{arrival}} \middle| \Pi[q_t] \right] \right) \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Явні витрати відомі наперед за визначенням, а отже є константою, що не залежить від плану здійснення торгівлі:  $E[C_e | \Pi[q_t]] = C_e$ .

Крім того, припускається, що інвестор детально проаналізував акцію та визначив обсяг купівлі/продажу, що найкраще підходить до його портфеля. А отже, виконавець метаордеру не має права планувати лише часткове здійснення замовлення: таким чином, у очікуванні витрати втрачених можливостей дорівнюють нулю:  $E[C_o | \Pi[q_t]] = 0$ .

Також раніше зазначалося, що для більшої частини інвесторів витрати своєчасності є повністю випадковими, розподіленими навколо нуля величинами.

$$E \left[ \log \frac{p_t^{ref}}{p_{arrival}} \right] = 0 \quad (2.10)$$

Більше того, з означення витрат своєчасності та з означення витрат ринкового впливу випливає ще й те, що вони є незалежними відносно одне одного випадковими величинами, оскільки витрати ринкового впливу залежать лише від виконавця метордеру; у той час як витрати своєчасності обумовлені ринковою кон'юнктурою. Тобто, якщо виконавець метаордеру буде свій план торгівлі незалежно від інших учасників ринку, можна стверджувати що:

$$\frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} \perp \frac{p_t^{ref}}{p_{arrival}} \Rightarrow E \left[ \log \frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} \right] + E \left[ \log \frac{p_t^{ref}}{p_{arrival}} \right] = E \left[ \log \frac{p_t^{mid}}{p_{arrival}} \right] \quad (2.11)$$

Отже, враховуючи вищенаведені міркування та підставляючи формули (2.10) та (2.11) в (2.9), отримаємо вираз для очікуваних трансакційних витрат:

$$\begin{aligned}
 & E[\text{Трансакційні витрати} | \Pi[q_t]] \\
 &= C_e + \text{sideSign} \\
 & \cdot \sum_{t=1}^N \frac{\Pi[q_t]}{Q} \left( E \left[ \log \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} \middle| \Pi[q_t] \right] \right. \\
 & \left. + E \left[ \log \frac{p_t^{mid}}{p_{arrival}} \middle| \Pi[q_t] \right] \right)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

З рівняння (2.12) випливає, що у завданні прогнозу трансакційних витрат у загальному випадку існують лише дві стохастичні величини. Це дозволяє спростити проблему передбачення всіх витрат у торгівлі метаордером до прогнозування лише двох їх складових:

- 1) очікуваних витрат спреду:  $\sum_{t=1}^N \frac{\Pi[q_t]}{Q} E \left[ \log \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} \middle| \Pi[q_t] \right]$ ;
- 2) очікуваних витрат ринкового впливу:  $\sum_{t=1}^N \frac{\Pi[q_t]}{Q} E \left[ \log \frac{p_t^{mid}}{p_{arrival}} \middle| \Pi[q_t] \right]$ .

До цього часу план виконання ордеру та набір запланованих трансакцій  $\Pi[q_t]$  розглядався як певний набір дискретних фіксованих величин. І дійсно, якби виконавець метаордеру повністю контролював, коли і як кожен з дочірніх ордерів знаходить контрагента, ця умовність було б цілком наближеною до реальності. Проте в торгівлі на фінансових ринках значна частина процесу обміну залежить від ринкової кон'юнктури.

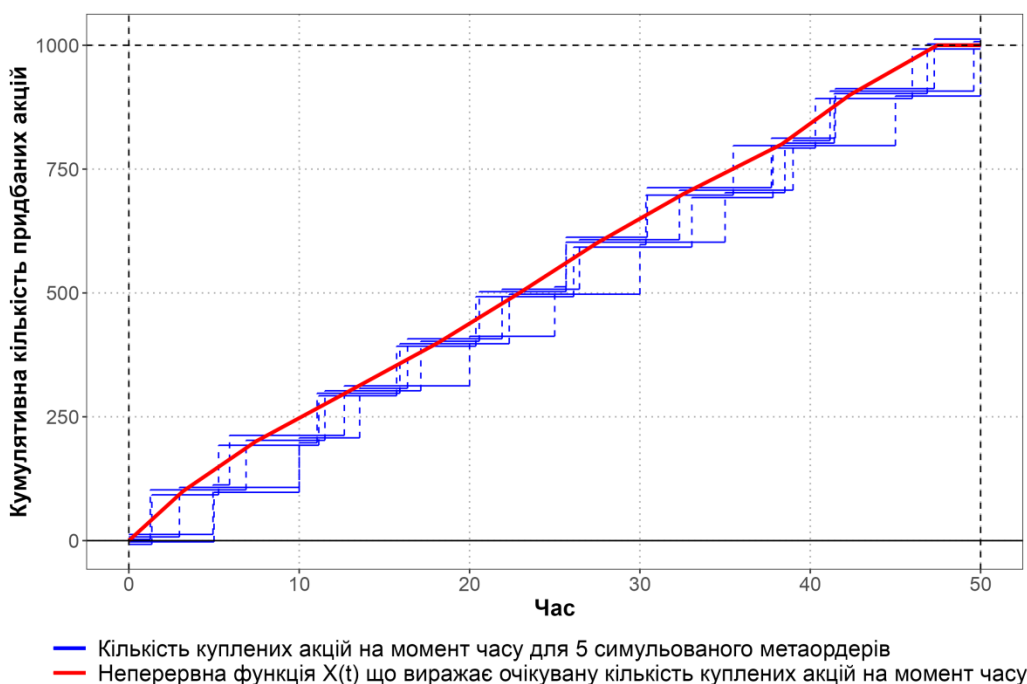
Тому, замість цього,  $\Pi[q_t]$  моделюють як неперервну величину  $q(t)$ , яка виражає інтенсивність виконання метаордера. Тобто значення функції відображають очікувану ймовірність того, що дії виконавця мета ордеру призведуть до того, що нескінченно мала одиниця акції ( $\Delta q$ ) буде куплена/продана у нескінченно малий проміжок часу  $\Delta t$ .

У такому формулюванні функція  $X(t)$ :

$$X(t) = \int_0^t q(t)dt \quad (2.13)$$

відобразитиме очікувану кількість акцій, що буде придбана від початку виконання ордеру до часу  $t$ . В цьому контексті, якщо запланований горизонт здійснення торгівлі становить певну величину  $T$ , то до цього часу виконавець має очікувати що метаордер буде задоволений у повному обсязі:  $X(T) = Q$ .

Функція  $X(t)$  називається запланованою траєкторією виконання ордеру. Цю концепцію яскраво ілюструє рис. 2.5. Для окремого взятого метаордеру графік обсягу акцій, що вже куплені/продані на певний момент часу, буде являти собою ступінчасту функцію (що зображені на рис. 2.5 як блакитні лінії). Передбачити, коли один з метаордерів здійснить трансакцію (графік перейде на наступну «сходишку») – важке завдання, оскільки, в більшості випадків, це буде залежати від ринкової кон'юнктури та від власне запланованої стратегії його виконання.



**Рис. 2.5** Індивідуальні та усереднена траєкторії виконання метаордерів

*Джерело: Симульоване виконання метаордеру за допомогою методу описаного у Додатку А*

Якщо ж взяти вибірку із багатьох метаордерів та усереднити їхні траєкторії торгівлі, це призведе до диверсифікації індивідуальних ефектів ринкової кон'юнктури для кожного ордеру, і, в результаті, буде отримана «гладка» функція. Вона виражатиме очікування того, яка частина ордеру має бути виконана на даний момент часу (червона лінія на рис. 2.5).

Відповідно, для запланованої інтенсивності виконання метаордеру  $q(t)$  та очікуваної траєкторії  $X(t)$  вирази для витрат спреду і витрат ринкового впливу перетворюються у свої неперервні аналоги:

$$1) \text{ очікувані витрати спреду: } \int_0^T q(t) E \left[ \log \frac{p_{exec}(t)}{p_{mid}(t)} \middle| \Pi[q(t)] \right] dt;$$

$$2) \text{ очікувані витрати ринкового впливу: } \int_0^T q(t) E \left[ \log \frac{p_{mid}(t)}{p_{arrival}} \middle| \Pi[q(t)] \right] dt.$$

В свою чергу, для того, щоб здійснити прогнозування витрат спреду, аналітику достатньо знати очікувану динаміку зміну спреду впродовж періоду торгівлі метаордеру  $s(t)$ , план інтенсивності його виконання  $q(t)$  та мультиплікатор  $m$  який відображає як часто алгоритм або торговець здійснює трансакцію за ціною купівлі та продажу:

$$E[\text{Витрати спреду}] = sideSign \cdot \int_0^T m \frac{q(t)}{Q} s(t) dt \quad (2.14)$$

Тобто, множник  $m$  – це величина від -0.5 до 0.5, яка вказує, чи отримана ціна буде ближчою до ціни продажу ( $m = 0.5$ ), чи купівлі ( $m = -0.5$ ). Таким чином, якщо інвестор планує здійснювати половину трансакцій з  $q(t)$  за ціною продажу, а половину – за серединою між цінами купівлі-продажу, то  $m = 50\% \cdot 0.5 + 50\% \cdot 0 = 0.25$ .

В найбільш загальному та спрощеному випадку  $s(t)$  у формулі (2.14) може бути отримана як згладжене середнє значення спреду протягом попередніх днів, подібно до того, як це було здійснено на рис. 2.1. Адже, не зважаючи на стохастичний характер величини спреду, його розподіл для однієї і тієї самої акції у один і той самий період торгового дня, за умови

нормального функціонування ринку та високих рівнів ліквідності, є доволі стабільним, що дозволяє використовувати прості оцінки математичного сподівання. Задля більш точних передбачень можна застосувати низку економетричних моделей, що розглядають часовий ряд спреду як процес умовної авторегресії з довгою пам'яттю: [157] [158] [159], тощо. Майже всі дослідження у цій сфері сходяться на думці, що основний фактор який має відобразити модель спреду – це зменшення середніх значень спреду впродовж дня.

З цього слідує, що найкращою стратегією для проведення трансакцій і перебалансування портфелю активів – це здійснювати купівлю-продаж акцій в кінці дня. Проте, це в свою чергу, зробить такі трансакції менш інвестиційно привабливими, оскільки більша частина фундаментальної інформації щодо вартості акції надходить вночі. А, отже, чим більше інвестор зволікає у своїх діях, тим більша вірогідність що ця інформація знайде відображення у ринкових цінах до того часу, як він наважиться здійснити трансакцію, і тому потенційний прибуток від використання цієї інформації буде меншим.

Проте, не зважаючи на особливості наведені вище, передбачення спреду – відносно не складне завдання, оскільки інвестор зазвичай рідко може суттєво впливати на його розмір своїми діями. Тому в більшості випадків, в прогнозуванні спреду власна торгівля інвестора не вважається фактором що змінює значення  $s(t)$ .

Яскравими прикладами випадків, у яких це припущення не справджується будуть: а) ринки з низькою кількістю учасників; б) під час несприятливих подій, які порушують ефективну діяльність ринку (кризи, катастрофи, геополітичні події), тощо; в) коли існують певні бар'єри, пов'язані з торгівлею (наприклад, складність у позичанні акцій для коротких позицій). Проте у таких ситуаціях порушується загальний порядок функціонування ринку і коректування потребують усі моделі, що здійснюють прогнозування на фондовому ринку. Тому дана робота зосереджена на

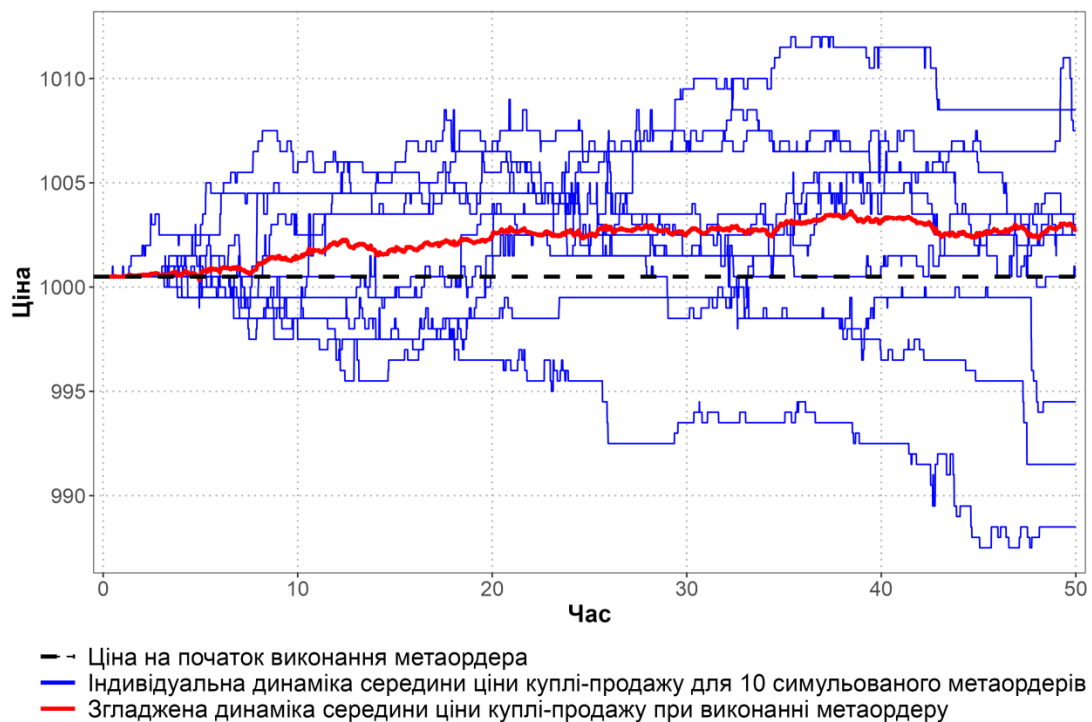
моделюванні ринку за звичайних умов, у яких розмір спреда зазвичай є доволі стабільною величиною, а, отже, легкою для прогнозування.

Ситуація є прямо протилежною у передбаченні витрат ринкового впливу. Так, величина:

$$P(t) = E \left[ \log \frac{p_{mid}(t)}{p_{arrival}} \middle| \Pi[q(t)] \right] \quad (2.15)$$

прямо визначає несприятливий рух ціни на акцію, що був спричинений діями інвестора, тобто, виконанням метаордеру. Приклади симульованих змін в ціні  $p_{mid}(t)$  та динаміка її очікуваних значень як результат виконання метаордеру наведені на рис. 2.6.

Через це неможливо розглядати витрати ринкового впливу у відриві від планування стратегії виконання ордеру, оскільки це дві взаємопов'язані величини.



**Рис. 2.6. Індивідуальні на усереднена динаміка зміни ціни при виконанні мета ордерів**

*Джерело: Симульоване виконання метаордеру за допомогою методу описаного у Додатку А*

Дослідження цього зв'язку та прогнозування витрат ринкового впливу загалом є одним із ґрунтовних питань, яке прагне розв'язати фінансова наука на фінансовому ринку акцій.

Це обумовлене не тільки складністю проблеми, але й тим що витрати ринкового впливу – це одна з найбільших частин трансакційних витрат на фінансовому ринку акцій [160] [161].

Впродовж останніх років були запропоновані різноманітні підходи для моделювання та передбачення змін у ціні  $P(t)$ , що спричинені виконанням метаордеру на фінансовому ринку акцій. Вони будуть розглянуті докладно у наступному розділу.

## **2.2. Моделювання ринкового впливу торгівельних операцій на організованих ринках акцій**

Як зазначалося у попередньому розділі, витрати ринкового впливу виникають внаслідок несприятливого руху цін акцій, спричиненого виконанням метаордеру на ринку. Тобто прогнозування витрат на торгівлю стають у один ряд з передбаченням цін на акції після виконання метаордеру.

Дуже часто саме витрати ринкового впливу складають найбільшу частину всіх трансакційних витрат для інвестора. Як наслідок, величина цієї частини витрат є одним з найважливіших чинників, які визначають, чи інвестиція принесе прибуток. Здатність передбачати величину витрат значним чином залежить від якості моделі ринкового впливу на ціну акції: чим точніші будуть її прогнози, тим більш ефективні рішення буде приймати менеджер інвестиційного портфелю у процесі своєї діяльності.

Але цим не обмежується всі способи застосування моделі ринкового впливу: вона також є одним з основних елементів для розв'язку цілої низки проблем, що постають під час інвестиційного процесу.

По-перше, це власне прогнозування трансакційних витрат. Як вже раніше зазначалося, це є одним з найбільш актуальних способів застосування моделі трансакційних витрат ринкового впливу, оскільки майже всі учасники фінансового ринку постають перед проблемою оцінки того, скільки коштуватиме для них та чи інша трансакція.

По-друге, якщо це вибір плану виконання метаордеру. Як було продемонстровано у попередньому розділі, в більшій частині випадків, лише дві частини явних трансакційних витрат залежать від способу виконання мета ордеру (тобто від очікуваного розподілу часу трансакцій дочірніх ордерів): витрати спреду та витрати ринкового впливу.

У витратах спреду інвестор має дуже обмежений контроль щодо розміру спреду, крім того, на практиці ця величина становить відносно меншу частину загальних витрат.

Внаслідок цього, розподіл метаордера на дочірні ордери та інтенсивність виконання цього замовлення, в значній мірі розглядаються через призму витрат ринкового впливу. Так, якщо виконавцю ордера відома залежність між розміром несприятливого руху ціни та часом, обсягом дочірніх трансакцій і загальною метою ордеру (що власне і є моделлю ринкового впливу), то його ціллю стає пошук найкращого плану виконання метаордера, що зводиться до звичайної математичної оптимізації: необхідно просто визначити розподіл трансакцій у часі так, що б він призводив до найменших витрат.

Таким чином, модель ринкового впливу дозволить знайти ефективний спосіб розбиття метаордера на дочірні ордери та вибрати оптимальну інтенсивності торгівлі.

По-третє, оцінка якості виконання метаордера. Так, достатньо нечастими є випадки, коли виконавцем метаордера є портфельний менеджер, тому що його функції полягають, перш за все, у пошуку прибуткових інвестицій та управлінні ризиками. У більшості випадків він делегує це завдання агентам, що спеціалізуються у торгівлі на фондовому ринку, щодо виконання заявок на купівлю-продаж акцій: брокерам та трейдерам.

Ці агенти конкурують один з одним за ціною, відповідно, вимагаючи різні розміри брокерської комісії за свої послуги. Проте вони можуть відрізнитися і за якістю наданих послуг.

Дійсно, сучасний фондовий ринок акцій, особливо у розвинутих країнах, це складна система, що складається зі значної кількості компонент. Для того, щоб ефективно оперувати у цьому середовищі, необхідні значні інтелектуальні та управлінські ресурси. Сам процес виконання метаордера складається з великої кількості рішень як на мікро- та макро- рівні. Відповідно, вправність, з якою брокери розв'язують цю проблему та надають послуги, не буде однорідною. Проте, оскільки ця величина невідома наперед, перед портфельним менеджером постає проблема «ринку лимонів» [12].

Одним із способів того, як інвестор зменшує інформаційну асиметрію, є так звані «колеса брокерів». Ідея полягає в тому, щоб відправити певну кількість метаордерів брокеру А і брокеру Б та оцінити середні витрати, які зазнав інвестор через ринковий вплив. Якщо ця величина у брокера А є вищою від витрат брокера Б з достатньою статистичною значущістю, то можна зробити висновок, що якість виконання ордерів брокером А є гіршою від брокера Б.

Проте на практиці мета ордери не є гомогенними. Через це цілком можливо, що брокер Б просто отримав «більш легкий» набір ордерів, ніж брокер А.

Щоб вирівняти шанси, в таких випадках витрати ринкового впливу нормалізують на очікувані витрати ринкового впливу та порівнюють вже їх. Внаслідок нормалізації, величина витрат з абсолютної (грошові одиниці відсотки від вартості трансакції) перетворюється у відносну (на скільки % витрати є кращими чи гіршими від очікуваних).

Більш детально ці застосування будуть розглянуті у розділі 3.

Отже, модель ринкового впливу є інструментом для розв'язку широкого спектру практичних завдань у інвестиційному процесі..

Через це, моделювання і точне прогнозування витрат ринкового впливу є однією з актуальних проблем для інвесторів та фінансових менеджерів. Відповідно, вона займає дуже важливе місце і в академічних дослідженнях фінансової мікроструктури.

Нажаль, в академічних та практичних колах не існує консенсусу щодо єдиної вірної моделі для всього фінансового ринку. Вони відрізняються за наборами припущень, що були здійсненні у процесі їх розробки, і, як наслідок, мають різні якості та застосовуються для різних завдань.

Фінансова наука розділяє два види моделей в залежності від того, з чиєї позиції розглядається ринковий вплив: екзогенні та ендогенні моделі [162] [163].

Ендогенні моделі досліджують ринкові трансакції та їхній вплив на ціни. Вони досліджують взаємодію контрагентів на біржі та аналізують зміну у рівноважній ціні, що спричинена їх діяльністю. Даний тип моделей вивчає трансакції пересічного ринкового торговця, їх інформаційну наповненість та вплив на діяльність інших агентів.

Відповідно, ендогенні моделі формуються на основі спостережень за наявною публічною інформацією щодо торгівлі на біржах: який обсяг акцій наявний для купівлі/продажу у кожний момент, які трансакції були здійснені та якою була подальша динаміка ціни на акцію. Ці моделі намагаються апроксимувати взаємодію між маркет-мейкерами, торговцями та інвесторами за допомогою математичних методів.

Внаслідок того, що розробка ендогенних моделей потребує лише дані, що надаються біржами у їх звітності (і є відносно доступними), академічні дослідження історично приділяли їм більше уваги, особливо в останні десятиліття. Основоположниками цього типу моделей є роботи Л. Глостена [49] та Кайла А. [50], які досліджували ініціативи і дії брокерів, маркетмейкерів та інвесторів на ринку і динаміку встановлення ринкової рівноваги. Сучасні версії вивчають динаміку торгівлі та руху цін за допомогою інструментарію аналізу часових рядів та їх статистичних якостей, наприклад: [138], [139], [164].

Екзогенні моделі аналізують ринковий вплив з позиції конкретного інвестора. Вони розглядають метаордер як зовнішній шок, який зазначений інвестор спричиняє впорядкованій системі ринкового обміну. Наслідком від цього збурення є тимчасове зміщення ринкової рівноваги і, як наслідок, несприятливий рух ціни для власника метаордеру.

Відповідно динаміка зміни ціни у даному випадку моделюється як функція від дій виконавця метаордеру. Очевидно, що для того, щоб досліджувати цю залежність, необхідно мати доступ до даних щодо виконаних мета ордерів інвестор, які не знаходяться у публічному доступі, за виключенням певних поодиноких випадків (як, наприклад, ANcerno database

[165]). Внаслідок цього, більшість досліджень у цій сфері здійснюється у приватному секторі – брокерами та інвестиційними компаніями.

Розробка ендогенних моделей займає важливе місце у діяльності цих компаній. Дійсно, для того щоб брокер міг пропонувати послуги з виконання метаордерів, він має пропонувати клієнту і засоби для оцінки того, яким буде ринковий вплив від торгівлі метаордеру. Крім того, форма моделі витрат ринкового впливу прямо впливатиме на план оптимальної торгівлі метаордера і, як наслідок, на процес його виконання.

В загальному випадку, ендогенна модель ринкового впливу може також бути використана для того, що оцінити ефект від екзогенного впливу, який метаордер здійснив на ринкову динаміку торгівлі. Проте, як вказує дослідження Б. Тоза та ін. [140], характер впливу на ціну, спричинений метаордером, що виконує конкретний брокер, може відрізнятися від впливу пересічного ринкового агента. Це обумовлено особливостями формування плану торгівлі метаордеру та особливостями у формуванні дочірніх ордерів.

Таким чином, не зважаючи на те, що обидва типи моделей перетинаються за своїми завданнями: спрогнозувати розмір впливу транзакції на ринкову ціну; але, через суттєві відмінності у суб'єкті здійснення транзакції, ці моделі застосовуються у різних випадках.

Дана робота в основному зосереджена на ендогенних моделях ринкового впливу, адже саме вони націлені на прогнозування витрат ринкового впливу ціни з позиції конкретного інвестора, що здійснює транзакцію на фінансовому ринку акцій. Далі ми розглянемо моделі витрат ринкового впливу та яким чином розвивалися наукові і практичні погляди на щодо цієї проблематики.

На початковому етапі у дослідженні моделей витрат ринкового впливу завданням було виявити характер функціональної залежності між обсягом метордера та ринковим впливом. Модель А. Кайла є однією з перших, у якій здійснений аналіз поведінки брокерів і маркет-мейкерів на фондовому ринку акцій. Внаслідок аналізу їх ініціатив та моделювання поведінки на рівні

агентів фінансового ринку, вона вказала на лінійну залежність між ринковим впливом та обсягом куплених/проданих акцій:

$$\Delta P \sim c \cdot Q \quad (2.16)$$

$Q$  – розмір метаордеру;  $c$  – певна константа, що виражає рух у ринковій ціні спричинений купівлею або продажем однієї акції.

Проте очевидно, що така форма залежності – це лише наслідок спрощень та припущень, які відбулися у процесі аналізу поведінку учасників фінансового ринку.

На практиці же, протягом довгого часу, портфельні менеджери для розрахунку своїх трансакційних витрат використовували модель квадратного кореня, яка виражає очікувану зміну в ціні на акцію відповідно до того, наскільки великою за розміром є угода порівняно з загальним об'ємом торгів. Цю залежність можна представити у вигляді формули, яка була наведена у [128]:

$$\Delta P \sim \alpha \sigma \sqrt{Q/V} \quad (2.17)$$

де  $\sigma$  – денна волатильність акції;  $V$  – очікуваний денний обсяг торгів на акцію.

Дана модель використовується і сьогодні у деякому програмному забезпеченні для інституційних інвесторів: [166], [167].

Незважаючи на відносну простоту цієї формули, подальші дослідження довели, що хоча зв'язок між інтенсивністю торгівлі метаордера та його ринковим впливом має дещо складніший характер [168], квадратний корінь доволі точно апроксимує цю залежність [169], [170].

Незважаючи на те, що ця формула дозволяла портфельним інвесторам оцінювати власні трансакційні витрати, її використання у плануванні процесу виконання мета ордеру було доволі обмеженим, оскільки вона не враховує ні швидкість торгівлі, ні яким чином трансакції дочірніх ордерів розподілені у часі.

Відома робота А. Алмгрена та Н. Кріса [131] здійснила два внески у теоретичні основи того, як академіки та практики розглядали моделі ринкового впливу.

По-перше, А. Алмгрен та Н. Кріс розділили ринковий вплив на дві частини. Вони стверджували, що доцільно розглядати:

1) Постійний ринковий вплив – зміни у ціні, що спричинені зміною у ринковій рівновазі між попитом та пропозицією на акцію, внаслідок торгівлі інвестора. Очевидно, що метаордер на купівлю (на продаж) створює додатковий обсяг попиту (пропозиції) на акцію, а, отже, ціна має змінитися відповідно. Тобто, ця частина впливу спричинена здійсненням ринку своєї ціноутворюючою функції;

2) тимчасовий ринковий вплив – це зміни ціни внаслідок шоку до функцій попиту і пропозиції, спричинені екзогенним метаордером. Так, короточасні суттєві зміни у обсязі торгівлі внаслідок купівлі/продажу акцій метаордером змусить інших учасників ринку переоцінити свою стратегії торгівлі і спричинить зміну їх поведінки на короткому проміжку часу.

Якщо за основу взяти теорію Г. Демсетза [27] щодо проблеми «негайності» (яка була наведена у Розділі 1.3), то кожен з ринкових агентів буде розуміти, що десь на ринку оперує інвестор, який прагне придбати/продати певний обсяг акцій у короткі строки. В такому випадку вони будуть бажати стягнути плату за «негайність», і тому в процесі торгівлі метаордеру на купівлю (продаж), пропозиція (попит) будуть меншими за звичайні.

Альтернативне пояснення надає концепція Б. Коллінса та Ф. Фабоззі [47]. Незвичайна активність у торгівлі акцією може бути обумовлена тим, що частина інвесторів володіє кращою або новішою інформацією щодо внутрішньою вартості акцій і прагнуть купити/продати акцію, поки ця інформація ще не встигла відобразитися у рівноважній ціні. Інші ж учасники ринку усвідомлюють, що вони можуть оперувати на основі застарілої інформації. Для них це представляє ризик інформаційною асиметрії, за який

вони будуть прагнути отримати компенсацію. Це відобразиться у зменшенні попиту або пропозиції (в залежності від сторони обміну, яку вони представляють).

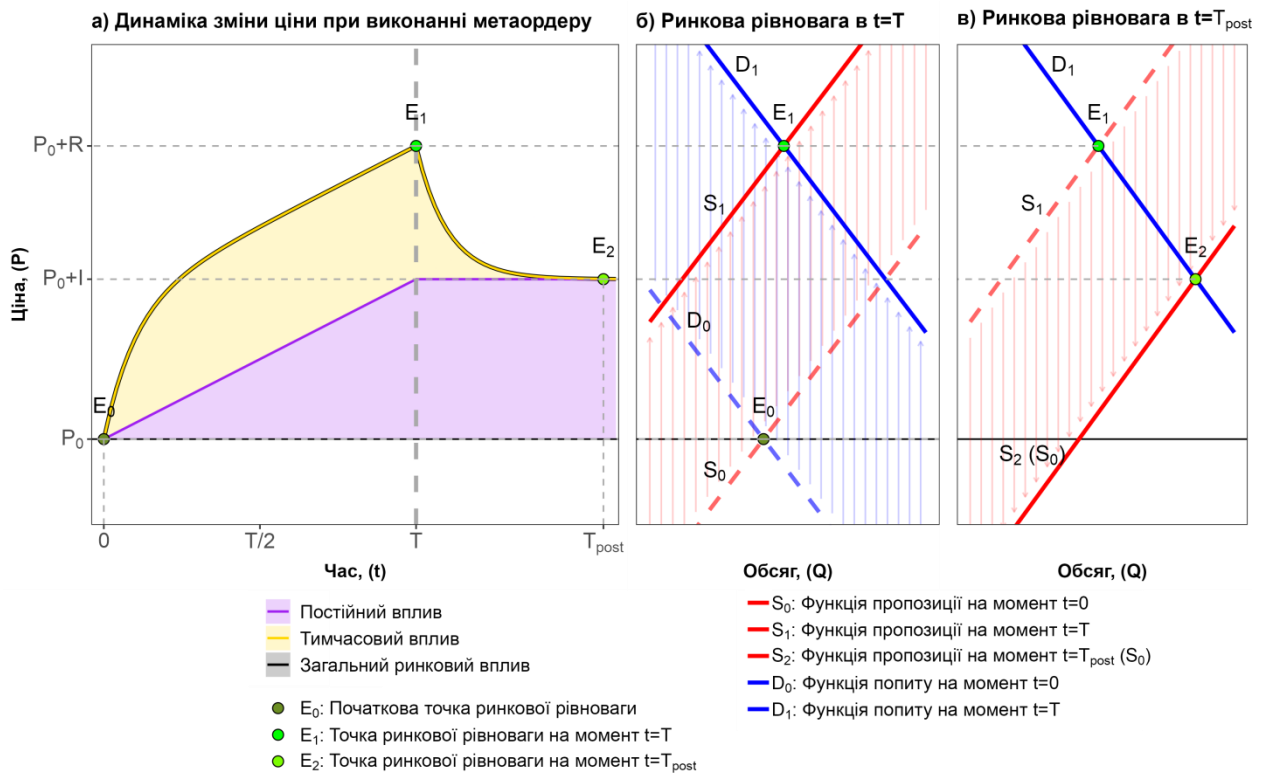
Отже, і проблема «негайності», і інформаційна асиметрія надають пояснення одного і того ж феномену: якщо власник метаордеру купує (продає) акції, пропозиція (попит) на акції зменшиться у короткостроковому періоді. В цей період інвестор буде здійснювати трансакції за ціною, що є гіршою за «справедливу» вартість фінансового активу. Відповідно, різниця між «справедливою» ціною – тою, що основана на рівновазі попиту і пропозиції, коли ринок оперує у звичайному режимі, – та цінами, що встановилася внаслідок тимчасових зрушень обумовленими вищенаведеними ринковими ефектами і є джерелом тимчасових витрат ринкового впливу.

Відповідно, після того, як інвестор припиняє виконання метаордеру, ринкові збурення вщухають і ринок повертається до «справедливої» рівноваги.

Більш докладно цей механізм розглянуто на рис. 2.7. На ньому схематично зображена динаміка очікуваної (згладженої) ринкової ціни при виконанні з фіксованою інтенсивністю метаордеру у часовому інтервалі  $[0, T]$ .

Тут і далі буде використовуватися приклад метордеру на купівлю акцій. Очевидно, що у випадку продажу акцій, всі наведені твердження будуть виконуватися з точністю до знаку.

Так, точка початкової ринкової рівноваги на фінансовому ринку акцій  $E_0$  і відповідна ціна  $P_0$  задані перетином кривих попиту  $D_0$  і пропозиції  $S_0$ . Оскільки інвестор також є учасником ринку, купівля акцій в процесі виконання ним метаордеру буде поступово збільшувати ринковий попит. Отже, по мірі того, як трансакції здійснюються у дочірніх ордерах, функція  $D_0$  буде зміщуватися вгору – до свого максимального значення  $D_1$  на момент завершення торгівлі метаордера.



**Рис. 2.7 Тимчасовий і постійний ринковий вплив як результат зміни рівноваги попиту і пропозиції на акцію**

*Джерело: Побудоване автором на основі визначень у [131]*

В свою чергу, всі інші учасники ринку помітять відносне збільшення ринкової активності. Це викличе занепокоєння агентів, які складають ринкову пропозицію: вони будуть стурбовані причинами, що призвели до різкої зміни обсягу торгів. Деяка частина з них перестане пропонувати акції на продаж, певна частина – підніме ціну власної пропозиції для того, щоб отримати компенсацію за цю невизначеність. Як наслідок, загальна ринкова пропозиція зменшиться та крива  $S_0$  почне зміщатися вгору. Чим сильніші та довші збурення спричинені метаордером – тим меншою буде пропозиція – аж до свого мінімального значення  $S_1$ .

Тобто, на момент завершення виконання метордеру ринкова ціна буде визначена перетином функцій  $D_1$  та  $S_1$  - точкою  $E_1$ . Ціна у цій точці буде вищою від початкової  $P_0$  на величину загального ринкового впливу  $R$ .

Проте, зміщення кривої пропозиція з  $S_0$  до  $S_1$  обумовлено не власне зменшенням пропозиції, а лише тимчасовими ринковими ефектами. Як

тільки збурення спричинені торгівлею метордеру припиняться (починаючи з часу  $T$ ), ринок почне повертатися до свого звичайного функціонування. Спостерігаючи повернення ринкової активності до свого нормального рівня, ринкові агенти будуть менше стурбовані ризиком інформаційної асиметрії. Як наслідок, все більше агентів будуть готові продати акцію за наявною ціною. Це призведе до збільшення пропозиції та зміщенню кривої  $S_1$  до свого початкового положення  $S_0$  ( $S_2$ ). В результаті, ціна встановиться на рівні  $P_0 + I$ , у позиції нової рівноваги у точці  $E_2$ . Відповідно, на цей час  $T_{post}$  всі тимчасові ефекти розсіюються, і величина  $I$  становитиме величину постійного ринкового впливу.

Таким чином, якщо  $R(t)$  та  $I(t)$  – функції, які описують динаміку загального та постійного ринкового впливу (залежність жовтої і фіалкової лінії на рис. 2.7 від часу), то загальна очікувана грошова сума яку заплатив інвестор за виконання метаордеру буде становити:

$$Ex. Value = \int_0^T q(t)(P_0 + R(t))dt \quad (2.18)$$

а витрати ринкового впливу, відповідно:

$$C_{total} = \int_0^T q(t) \cdot R(t)dt \quad (2.19)$$

які, в свою чергу, складаються з постійних витрат:

$$C_{perm} = \int_0^T q(t)I(t)dt \quad (2.20)$$

та тимчасових:

$$C_{temp} = \int_0^T q(t)(R(t) - I(t))dt \quad (2.21)$$

З визначення  $J(t)$  та  $I(t)$  та економічного змісту величин, які вони представляють, випливає що ці функції є неспадними на проміжку  $[0, T]$  та досягають свого максимуму у мить завершення метаордеру  $T$ :  $R(T) = R$  та  $I(T) = I$  (також, у подальшому будуть використовуватися позначення  $I_T$  та  $R_T$ ). Після часу  $T$ ,  $I(t)$  залишається незмінною, в той час як  $R(t)$  починає

спадати, аж доки весь тимчасовий вплив не зникне у певний момент  $T_{post}$ .  
Відповідно,  $R(t) \approx I(t)$  для  $t > T_{post}$ .

Спадання ціни на акцію який відбувається відразу після завершення виконання ордеру – називається реверсією, а часовий проміжок на якому це відбувається  $[T, T_{post}]$  – періодом реверсії.

Крім запровадження концепцій тимчасового і постійного ринкового впливу, А. Алмгрен і Н. Кріс також запропонували один із варіантів моделі для опису функціональних залежностей  $I(t)$  та  $R(t)$ .

Перш за все, вони розмежували значення обсягів та інтенсивності торгів. Так, оскільки довгострокова зміна у попиті на акцію обумовлена лише додатковим обсягом, який прагне купити інвестор, здійснивши метаордер, то цілком закономірним є те, що ця величина буде залежати лише від розміру заявки. У той же час, ефекти, які обумовлюють зменшення пропозиції, виникають внаслідок того, що продавці екстраполюють поточні зміни у ринковій кон'юнктури на майбутні періоди. Відповідно, чим більш помітні зміни у динаміці торгівлі, тим більше агентів і тим активніше будуть реагувати на ринкові збурення. Отже, чим інтенсивніше виконується метаордер, тим сильніше це відображається на поведінці інших ринкових агентів.

Фактично подібні міркування дозволяють здійснити висновок, що постійний вплив змінюється відповідно до обсягу куплених акцій, але не залежить від швидкості з якою ця транзакція відбулася. У той же час, тимчасовий вплив – це функція від інтенсивності торгівлі мета ордеру, яка не залежить від того який об'єм акцій був придбаний в результаті.

Тому, для розгляду подальшої еволюції поглядів на величину ринкового впливу, доцільно виокремити величину інтенсивності здійснення транзакції, яка відображає наскільки вона є великою відносно всього об'єму торгів на ринку і її швидкість на певний момент:

$$v(t) = \frac{\partial Q(t)/\partial t}{\partial V(t)/\partial t} \quad (2.22)$$

де  $Q(t)$  - обсяг придбаних інвестором акцій на момент  $t$  з початку торгівлі;

$V(t)$  – загальний обсяг торгівлі, що був здійснений на ринку на момент  $t$ .

У своїй першій роботі А. Алмгрен та Н. Кріс [131] розробили модель, у якій постійний та тимчасовий вплив змінюється від обсягу та інтенсивності торгів лінійно, вказуючи на те, що математична простота моделі дозволить легше проаналізувати її характеристики. Ще одне спрощення, яке запропонували автори, це вважати, що тимчасовий вплив розсіюється настільки швидко відносно виконання, що цю зміну можна вважати миттєвою.

Таким чином, постійний вплив визначається наступним рівнянням:

$$I(t) = g(v)t = \gamma \cdot v \cdot t = \gamma \cdot Q(t) \quad (2.23)$$

де  $v$  – середня інтенсивність торгівлі мета ордеру ( $v = \int_0^T v(t)dt$ );

$\gamma$  – лінійний параметр.

Відповідно, допоки здійснюється виконання мета ордеру ( $t \leq T$ ), тимчасовий вплив становить:

$$R(t) - I(t) = h(v) = \eta \cdot v \quad (2.24)$$

де  $\eta$  – ще один лінійний параметр.

Після ж завершення метаордеру, тимчасовий вплив відразу зникає:  $J(t) - I(t) \sim 0$  для  $t > T$ .

Очікувана динаміка зміни ринкового впливу за умови постійної інтенсивності торгівлі мета ордеру зображена на рис. 2.8.

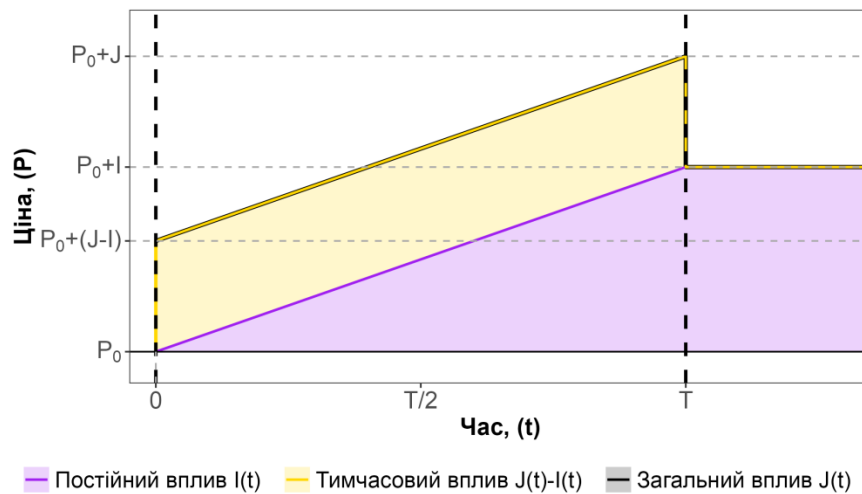
Відповідно, модель пропонує наступний процес зміни ціни на акцію:

$$\begin{cases} S_t = S_0 + (g(v)t + h(v)) + \sigma \int_0^t dW_s, & \text{коли } t \leq T \\ S_t = S_0 + g(v)t + \sigma \int_0^t dW_s, & \text{коли } t > T \end{cases} \quad (2.25)$$

де  $W_s$  – процес випадкового блукання,

$\sigma$  – волатильність ціни на акцію,

$S_t$  – ціна на фінансовий актив у момент часу  $t$ .



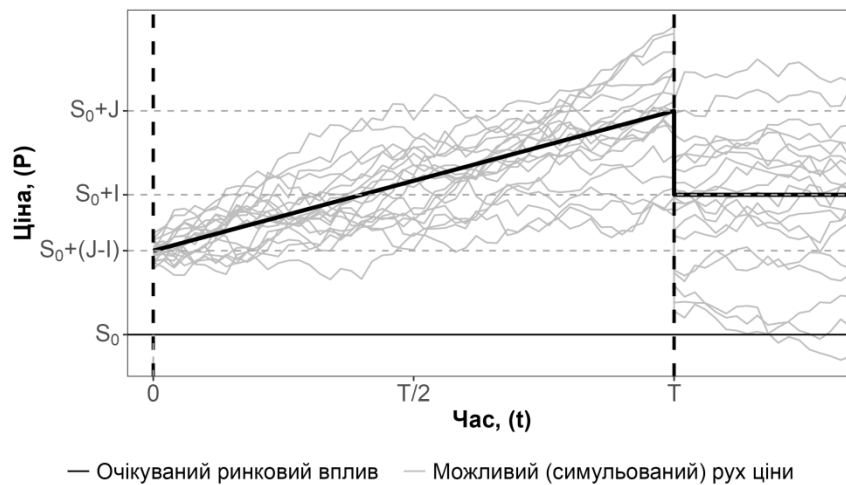
**Рис. 2.8 Динаміка ринкового впливу у моделі Алмгрена і Кріса**

*Джерело: Побудоване автором на основі моделі описаної у [131]*

Позначення  $S$  як ціни на акцію є більш загальноприйнятим у науковій літературі, присвяченій динаміці ринкового впливу (на відміну від  $P$ , яке розповсюджене у мікроекономіці та дослідженнях ринкової рівноваги). Оскільки ця робота переходить у цю площину фінансової науки, у подальшому буде використовуватися  $S$ .

Варто підмітити, що згідно моделі (2.25),  $S_t$ , за умови відсутності ринкового впливу, представляє собою процес арифметичного броунівського руху. У той же час, переважна більшість моделей у фінансовій науці використовує геометричний броунівський рух для опису траєкторії ціни. Проте, оскільки часові проміжки часу, на яких досліджується ринковий вплив вимірюються, є відносно малими (вимірюються у хвилинах та годинах), вважається, що це спрощення не впливає на якість моделі. Більш детально ця тема була досліджена у [171].

Приклади реалізації процесу, наведеному у (2.25) зображені на рис. 2.9. Можна помітити, що процес  $S_t$  «стрибає» у моменти часу  $t = 0$  та  $t = T$ . Так, ця поведінка не є сумісною з емпіричними даними і є наслідком спрощень здійснених у процесі розробки моделі.



**Рис. 2.9 Приклади динаміки руху ціни на акцію за умови ринкового впливу**

*Джерело: Побудоване автором на основі моделі описаної у [131]*

Дійсно, на практиці тимчасовий вплив не зникає відразу. У одній з подальших своїх робіт, А. Алмгрен та ін. [172] вказали, що на ринку акцій США цей часовий проміжок складає дещо менше за пів години. Ця величина згодом була досліджена у роботі [19], в якій автори розраховали, що тимчасовий ринковий вплив повністю розсіюється за 10-60 хвилин, в залежності від тривалості виконання мета ордеру.

Ще одним недоліком вищенаведеної моделі є те, що вона суперечить емпіричним спостереженням щодо еволюції ціни при торгівлі мета ордеру: так, Е. Заріnellі [168] та ін. вказали, що динаміка ринкового впливу є опуклою вгору кривою. Тобто, здійснені трансакції на початку метаордеру мають більший вплив на ціну, ніж у кінці. Ця якість траєкторії ринкового впливу відіграє важливу роль у розрахунку оптимального плану торгівлі. Тому припущення про лінійність тимчасового і постійного впливу у моделі Алмгрена-Кріса суттєво знижує точність моделі та значно обмежує можливості її застосування. Ця проблема особливо виражена, коли дослідникам необхідно спрогнозувати всю динаміку ціни на протязі виконання метаордеру, а не лише агреговані метрики (наприклад, загальні витрати ринкового впливу).

Тому наступний етап у дослідженні ринкового впливу був зосереджений саме на моделях, які здатні врахувати ці особливості реверсії та опуклої вгору траєкторії зміни ціни. В результаті була запропонована низка моделей «поширювача» (також відомі як моделі «перехідного впливу»), які отримали свою назву внаслідок характеру здійснених припущень.

Дж. Газерал [173] навів загальний вид цього класу моделей. У них процес руху ціни (тимчасового ринкового впливу) під час виконання метаордеру задається наступним рівнянням:

$$S_t = S_0 + \int_0^t f(v_s)G(t-s)ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.26)$$

де  $v_s$  – інтенсивність торгівлі метаордеру у момент  $s$ ;

$f(v_s)$  – функція миттєвого ринкового впливу від транзакцій здійснених у момент часу  $s$ ;

$G(t-s)$  – функція розпаду, яка відображає як миттєвий ринковий вплив вщухає з часом.

Таким чином, вважається, що кожна транзакція здійснена інвестором при торгівлі акцією, представляє собою несподівану зміну у попиту на акцію та спричиняє миттєве зростання у ціні, яка залежить від розміру угоди (або, у неперервному формульованні – інтенсивності торгівлі). Цю залежність відображає функція  $f(v_s)$ . Відразу ж після здійсненого обміну, ринок починає корегувати свої очікування. Як наслідок, шок від раптової зміни попиту на акцію починає затихати, що представлено функцією розпаду  $G(t-s)$  у моделі. Зміна у ціні фінансового активу є результатом суперпозиції впливів кожної окремої транзакції, а у випадку неперервної залежності, інтегралом від процесу обраної інтенсивності торгівлі  $v_s$ .

Таке формулювання задає цілий ряд можливих моделей в залежності від обраних функцій  $f$  та  $G$ . Власне, якщо  $f(v_s) \sim g(v_s) = \gamma \cdot v_s$  та  $G(t-s) \sim 1$ , то вираз (2.26) буде еквівалентний моделі Алмгрена-Кріса. Головною вимогою до рівняння (2.26) з математичної точки зору є існування означеного інтегралу, тобто:

$$\forall t > 0: \int_0^t f(v_s)G(t-s)ds < \infty \quad (2.27)$$

Проте існують додаткові обмеження на  $f$  та  $G$ , що обумовлені економічними міркуваннями.

Перш за все, потрібно відмітити, що рівняння (2.26) розглядає метаордер не як якийсь певний окремий об'єкт, а як «потік трансакцій». Відповідно, ці потоки можна довільно поєднувати та розділяти, як у часі, так і інтенсивності. Тобто, два метаордера, що виконуються послідовно, можна представити як єдиний метаордер, що торгується з інтенсивністю, яка є об'єднанням інтенсивності індивідуальних його частин.

Наприклад, якщо перший ордер торгується зі швидкістю  $v_s^{(1)}$  протягом періоду  $[0, T_1]$ , а наступний – з інтенсивністю  $v_s^{(2)}$  упродовж часу  $[T_1, T_2]$ , то процес зміни ціни для першого ордеру задається:

$$t \in [0, T_1]: S_t = S_0 + \int_0^t f(v_s^{(1)})G(t-s)ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.28)$$

а другого:

$$t \in [T_1, +\infty): S_t = S_{T_1} + \int_0^t f(v_s^{(2)})G(t-s)ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.29)$$

і внаслідок цього, об'єднаний процес можна представити як один метаордер з спеціальною функцією інтенсивності торгівлі:

$$v_s = \begin{cases} v_s^{(1)}, & t \in [0, T_1] \\ v_s^{(2)}, & t \in [T_1, T_2] \\ 0, & t > T_2 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$S_t = S_0 + \int_0^t f(v_s)G(t-s)ds + \sigma \int_0^t dW_s$$

Ця характеристика моделі поширювача дозволяє стверджувати, що цей клас моделей є консистентним відносно розподілу дочірніх трансакцій на метаордери. Іншими словами, однаковий набір дочірніх трансакцій завжди призведе до однакової очікуваної траєкторії руху ціни (і однакових очікуваних витрат), незалежно від того, як ці трансакції розподілені між різними метаордерами.

По-друге, оскільки моделі поширювача відображають ринковий вплив для метаордерів як на продаж акцій, так і на їх купівлю, то постає питання,

якими будуть очікувані витрати у випадку, коли одна і та ж кількість акцій купується і відразу продається. Очевидним є те, що внаслідок цих двох трансакцій витрати не можуть бути від'ємними, оскільки це створюватиме умови для арбітражу. Дійсно, в протилежному випадку інвестор може отримувати постійний безризиковий дохід просто купуючи і продаючи одну й ту саму кількість акцій, незалежно від інвестиційної привабливості цього фінансового активу.

На відміну від умови консистентності (яка справджується до будь-якої моделі поширення), чи буде обмеження щодо відсутності арбітражу виконуватися, буде залежати від характеру функцій  $f$  та  $G$ .

Дж. Газерал [173] у своїй праці дослідив декілька розповсюджених варіантів цих функцій на предмет відсутності арбітражу.

Так, першу модель перехідного впливу запропонував Дж. П. Бушад та ін. [132]. У цій роботі було вперше використано термін «модель поширення».

У їх формулюванні,  $f(v_t) \propto \log(v_t)$  та

$$G(t-s) \propto \frac{l_0}{(l_0+t-s)^\gamma} \quad (2.31)$$

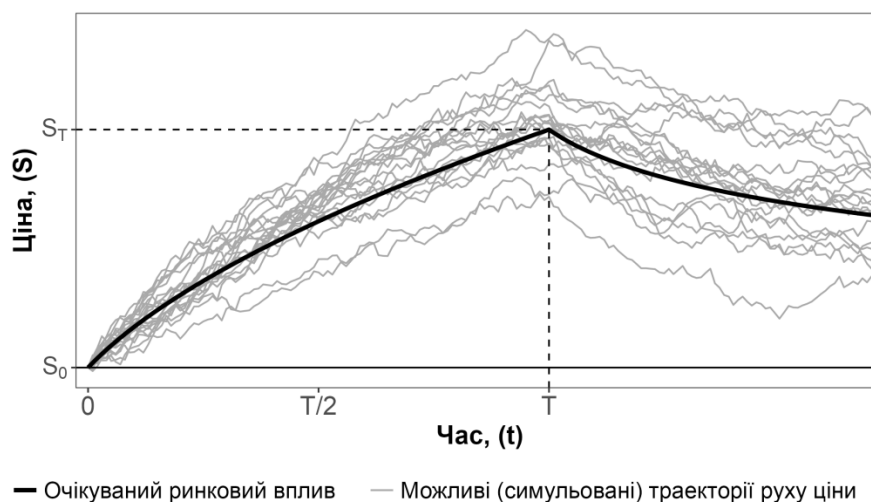
де  $l_0$  та  $\gamma$  – параметри моделі, причому  $\gamma$  визначається через функцію автокореляції доходу акції.

Таким чином, процес зміни ціни на акцію внаслідок ринкового впливу заданий наступним виразом:

$$S_t = S_0 + S_0 + \int_0^t \log(v_s) \frac{l_0}{(l_0+t-s)^\gamma} ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.32)$$

Приклад динаміки  $S_t$  представленої у рівнянні (2.32) зображено на рис. 2.10.

У цієї моделі набір переваг. Вона прямо враховує низку емпірично доведених особливостей у траєкторії руху ціни при виконанні метаордеру: опуклу вгору динаміку функції ринкового впливу та автокореляцію у дохідності акції.



**Рис. 2.10 Приклади динаміки руху ціни згідно моделі ринкового впливу Дж.П. Бушада**

*Джерело: Побудоване автором на основі моделі описаної у [132]*

Проте вона не задовольняє обмеження щодо відсутності арбітражу. Це значно обмежує можливості її використання у задачах оптимізації інвестиційного портфеля.

Інша відома модель поширення була запропонована А. Обіжаєвою та Дж. Вангом [133]. У ній функція миттєвого впливу є лінійною  $f(v_t) \propto v_t$ , а процес розпаду виражає експоненціальну залежність:  $G(t - s) \propto e^{-\rho(t-s)}$ .

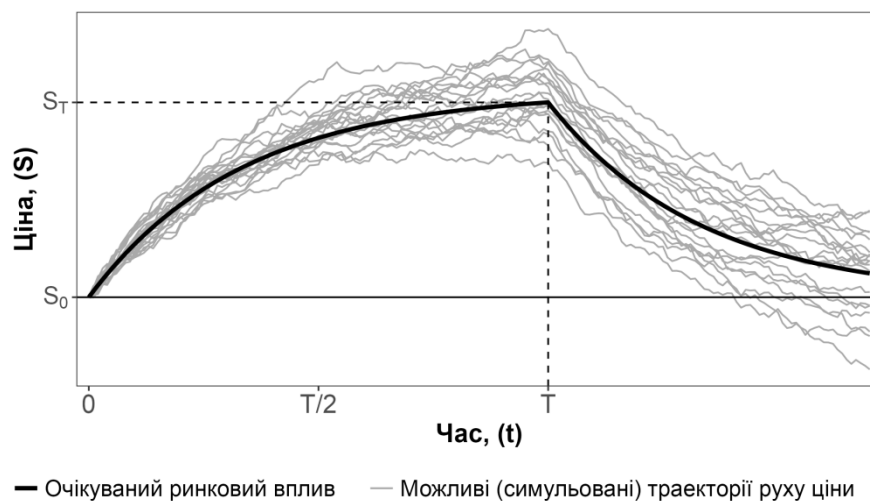
Відповідно, процес зміни ціни являє собою:

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t v_s e^{-\rho(t-s)} ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.33)$$

де  $\mu$  – параметр масштабування який перетворює пропорційну залежність  $f(v_t)G(t - s) \propto v_t e^{-\rho(t-s)}$  у рівність:  $f(v_t)G(t - s) = \mu v_t e^{-\rho(t-s)}$ . Приклад динаміки ціни відповідно цього рівняння наведено на рис. 2.11.

У процесі розробки цієї моделі також було здійснено низку компромісів. Так, Дж. Газерал довів, що у ній відсутні можливості для арбітражу [173]. В свою чергу, експоненціальна функція  $G(t - s)$  легко інтерпретується як процес розсіювання з постійною відносною швидкістю і має період напіврозпаду, що не залежить від інтенсивності торгівлі, що підтверджується

емпіричними даними. Крім того, така форма значно спрощує операції з математичними виразами у цій моделі.



**Рис. 2.11 Приклади динаміки руху ціни згідно моделі ринкового впливу Обіжаєвої-Ванга**

*Джерело: Побудоване автором на основі моделі описаної у [133]*

Проте серед недоліків цієї моделі варто відмітити, що реверсія у рівнянні (2.33) також зменшується відповідно до експоненціальної функції, що не відповідає практичним спостереженням [168].

Крім того, як очевидно слідує з рівняння (2.33), ринковий вплив, здійснений в процесі торгівлі метаордера, зменшується до нуля (оскільки  $e^{-\rho(t-s)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ ). Тому модель Обіжаєвої-Ванга на практиці часто доповнюють ще лінійною частиною, яка відповідає лінійному постійному впливу в залежності від придбаного обсягу акцій (а отже, і від кумулятивній інтенсивності виконання мета ордеру):

$$S_t = S_0 + c \int_0^t v_s ds + \mu \int_0^t v_s e^{-\rho(t-s)} ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.34)$$

Існує ще безліч інших моделей які відрізняються функціями  $f$  та  $G$ . Так, у роботі [174] були надані приклади  $G(t) \sim \frac{1}{1+t^2}$  та  $G(t) \sim \frac{1}{(1+t)^2}$ . В свою чергу, у [175] були розглянуті  $G(t) \sim t^{-\gamma}$  та  $f(v) = \alpha |v|^\delta$ . Загалом, моделі поширення є доволі розповсюдженими і широко використовуються на практиці та у інвестиційному програмному забезпеченні [164].

Моделі перехідного впливу нерозривно пов'язані з моделями книги ордерів. Останні базуються на припущенні, що динаміку ринкового впливу під час торгівлі можна повністю пояснити особливістю розміщення ордерів на фінансових біржах та загальною мікроструктурою ринку акцій.

Багато моделей поширення належать до класу моделей книги ордерів. Вперше це було продемонстровано у праці А. Альфонсі та ін. [134], де автори продемонстрували, як модель Обіжаєвої-Ванга впливає з певного набору припущень щодо структури книги заявок.

Так книгу ордерів можна розглядати як набір певних обсягів  $Q$  акцій, що доступні для здійснення трансакцій за відповідними цінами  $x$ .

А. Альфонсі та ін. запропонували розглянути форму цієї залежності:

$$Q = f(x) \quad (2.35)$$

де  $Q$  – кількість акцій, які ринкові агенти прагнуть продати / придбати за ціною  $x$ .

Нехай між цінами продажу  $A_0$  та  $A_0 + D$  заходяться замовлення, які виражають бажання інвесторів придбати  $x_0$  акцій за цінами у цьому інтервалі. Тоді очевидним є те, що, щоб зрушити ціну з точки  $A_0$  до  $A_0 + D$ , власнику метаордера необхідно придбати всі акції, розміщені у цьому проміжку. Це обумовлює наступну залежність між  $A_0 + D$  та  $x_0$ :

$$x_0 = \int_{A_0}^{A_0+D} f(x)dx \quad (2.36)$$

Проте, це виражатиме ефект, що матиме на ціну лише один дочірній ринковий ордер. Розглядаючи весь ринковий вплив метаордера, доцільно розглядати його як певний часовий процес. Нехай ціна на момент часу  $t$  становить  $D_t$ . У такому разі, пропозиція акцій у книзі ордерів буде меншою на величину:

$$E_t = \int_{A_0}^{A_0+D_t} f(x)dx \quad (2.37)$$

відносно початкового стану у  $t = 0$ .

Це дозволяє ввести функцію  $F$  яка визначена як:

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^z f(x)dx \quad (2.38)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} E_t &= F(D_t) \\ D_t &= F^{-1}(E_t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Відповідно, рівняння (2.39) відображає залежність між значеннями  $D_t$  та  $E_t$ .

Ці процеси будуть змінюватися внаслідок двох факторів.

Перш за все, в процесі торгівлі мета ордеру виконавець буде «поглинати» (прибирати з книги замовлень) певний обсяг акції:

$$E_{t+} = E_t + x_t \quad (2.40)$$

де  $x_t$  – кількість придбаних виконавцем метаордеру акцій у час  $t$ ;

$E_{t+}$  - значення  $E_t$  наступної миті після здійснення трансакції виконавцем метаордеру.

По-друге, оскільки торгівля акцією власником мета ордеру становить екзогенний шок для фінансового ринку акцій, зрушення у ціні стимулюють агентів створити нові замовлення на акції та повернути ринок у попередній стан рівноваги. Для ендогенного ринкового агента відхилення у ціні надає слушну інвестиційну можливість: він оцінює, що справедлива ціна становить  $A_0$ , тому відправлення замовлення за ціною на проміжку  $P_i \in [A_0, D_t]$  дозволить йому бути першим у черзі ордерів на продаж за ціною  $P_i$  і потенційно отримати дохід у розмірі  $P_i - A_0$ .

Відповідно, що чим більшим є відхиленням, тим сильнішим є стимул для ендогенного ринкового агента відправити замовлення. Тому, у випадку відсутності трансакцій що здійснюються виконавцем мета ордеру, процес  $E_t$  поступово відновлюється.

Якщо вважати, що за одиницю часу відновлюється певний фіксований відсоток  $\rho$  «поглинутих» мета ордером акцій:

$$dE_t = -\rho E_t, \quad (2.41)$$

то це визначатиме що процес  $E_t$  змінюється згідно експоненціальній залежності:

$$E_{t+s} = e^{-\rho s} E_t \quad (2.42)$$

Таким чином, залежність між обсягом здійснення трансакцій  $x_t$  та зміни у ціні, під час виконання метаордера, задає наступний процес:

$$D_t = F^{-1} \left( \int_0^t F(x_s) e^{-\rho(t-s)} ds \right) \quad (2.43)$$

Обсяг здійснених трансакцій буде повністю еквівалентним до інтенсивності торгівлі метаордеру ( $x_s \sim v_s$ ) у випадку, коли загальний обсяг ринкових трансакцій внаслідок діяльності всіх ендогенних агентів є відносно постійним.

Якщо ще додатково припустити, що еластичність пропозиції є постійною, то рівняння (2.43) повністю відповідатиме очікуваному ринковому впливу на ціну у моделі Обіжаєвої-Ванга.

Дійсно, в цьому випадку обсяг пропозиції на кожному ціновому рівні буде однаковий, а отже  $f(x) = const$ . Відповідно:

$$F(z) = \int_0^z a dx = az \quad (2.44)$$

де  $a$  – константа (яка, власне і буде дорівнювати еластичності попиту).

Оскільки  $F^{-1}$  визначена як обернена функція до  $F$ , то

$$F^{-1}(z) = \frac{1}{a} z \quad (2.45)$$

Підставивши вирази (2.44) та (2.45) у (2.43), при умові що ринковий об'єм торгів є відносно постійним ( $x_s \sim v_s$ ), отримаємо:

$$D_t = \int_0^t v_s e^{-\rho(t-s)} ds \quad (2.46)$$

Що, в свою чергу, повністю відповідає (2.33) оскільки з своїм економічним змістом  $D_t = E[S_t] - S_0$ .

Звісно, в результаті був отриманий процес, який є повністю еквівалентний попередньо дослідженій моделі Обіжаєвої-Ванга. Проте робота А. Альфонсі та ін. [134] змогла знайти відношення між формою книги замовлень, мікрорівнем фінансового ринку, та зміною ціни внаслідок

ринкового впливу, що попередньо розглядався лише на макрорівні на основі емпіричних спостережень.

Крім того, рівняння (2.43) не обмежується лише однією моделлю, воно пропонує цілий клас моделей, який дозволяє оперувати й з іншими процесами ринкового впливу, в залежності від функції  $F$ .

Проте, як раніше зазначалося, кожна з наведених моделей має свої обмеження, які не дозволяють беззастережно використовувати їх для всіх завдань, що постають перед брокерами та інвесторами. Відповідно, академіки і практики намагалися розв'язати цю проблему двома способами: або використовували різні моделі відповідно до завдання, що перед ними постають, або розробляли спеціалізовані моделі, що ґрунтуються повністю на емпіричних спостереженнях, без будь-якої прив'язки до умов відсутності арбітражу або консистентності.

Існує також значна кількість моделей, які належать до класу моделей поширення чи книги ордерів, і при цьому враховують додаткові фактори, які були залишені осторонь у попередніх дослідженнях, проте відіграють значну роль у практиці. Так, праця [176] розглядала модель поширення з урахуванням сигналів та інформації якою володіє інвестор щодо майбутньої очікуваної дохідності акції. У свою чергу, робота [177] запропонувала фокусуватися лише на ідіосинкратичних змінах ціни – тобто, прибирала частину ринкового впливу яка пояснюється денними коливаннями та мінливістю всього фінансового ринку.

Показовим є дослідження Б. Тоза та ін. [140]. У ньому автори побудували функцію  $G$  виключно на основі динаміки розсіювання для вибірки метаордерів, які виконав їх інвестиційний фонд, без будь-яких припущень щодо форми функції розпаду. Як наслідок, вони отримали певну ламану криву, яка є простим, і в той же час дієвим способом оцінити ринковий вплив для метаордерів, якими торгує цей фінансовий агент.

Проте коли ця сама операція була проведена для трансакцій, що були виконані іншими агентами на ринку, була отримана зовсім інша крива. Це

дозволило авторам дійти до висновку, що на динаміку цін впливає не лише обсяг або інтенсивність виконання метаордеру, але й інші ендогенні змінні, в тому числі, характер його виконання. Іншими словами, зміна плану торгівлі не просто механічно змінює ринковий вплив відповідно до того, скільки акцій було «поглинуто» з книги замовлень. Інші ринкові агенти також змінюють свою поведінку, в залежності від дій виконавця метаордера.

Цей факт створює суттєві виклики для дослідників, оскільки це означає, що на ринку не просто зміщуються криві попиту і пропозиції. Учасники ринку коректують свої очікування і плани, в залежності від дій виконавця метаордера. Тобто й майбутня реакція на торгівлю метаордера може змінитися відповідно до рішень, які його виконавець здійснив раніше. Оскільки ці зрушення неможливо прямо спостерігати сторонньому інвестору, достеменно невідомо, що саме спричиняє зміну у агрегованій поведінці ендогенних агентів.

Більше того, екзогенні моделі ринкового впливу недостатньо гнучкі для того щоб повністю врахувати ці «поведінкові» ефекти. Дійсно, якщо сторонні ринкові агенти активно спостерігають за трансакціями на ринку і враховують ці події у прийнятті майбутніх інвестиційних рішень, то не існує причин, чому вони мають розглядати торгівлю, яка виникає внаслідок виконання метаордера, роздільно від всіх інших ринкових трансакцій, адже вони не мають інформації щодо того, які з них належать метаордерам.

Тому більшість модифікацій існуючих моделей, направлених на врахування змін у поведінці ринкових учасників в залежності від характеру та послідовностей ринкових подій, відступають від концепції екзогенного метаордера і способів його виконання, а розглядають ефект, який справляє на ціну кожна з трансакцій здійснена на біржах.

Перші спроби моделювати ринковий вплив, як більш складний, залежний від власного шляху процес, були здійснені у моделі «історично залежного ринкового впливу» [136]. У цьому дослідженні автори пропонували розглядати ринковий вплив не як результат обміну певних

об'ємів акцій як у попередніх моделях, а розглядати динаміку цін як наслідок того, що у певні періоду часу ринковий дохід відхиляється від того, на який сподіваються учасники ринку. Очевидно, що у більшості випадків ця невідповідність у очікуваннях спричинена несподіваними трансакціями, що були здійснені у цей проміжок часу. Таким чином, ця модель дещо підміняє визначення ринкового впливу: на відміну від реакції ціни на здійснення процесів обміну, ця модель розглядає ринковий вплив як наслідок невиправданих очікувань учасників обміну. Такий підхід дозволяє повністю прибрати обсяг здійснених трансакцій з параметрів моделі. Звісно, ця величина все ще впливає на динаміку цін, але опосередковано, рівно в тій мірі, в якій торгівля акцією спричиняє відхиляє ринкову ціну від очікуваної.

Не зважаючи на те, що автори у наступних дослідженнях продемонстрували, що моделі історично залежного ринкового впливу здатні більш точно описати динаміку ціни на акцію [164], та однією з очевидних проблем цієї моделі є те, що вона дещо приховує причину руху ціни.

Дійсно, а що як зміни у ціни на ринковий актив спричинені не власне ринковим впливом внаслідок виконання метаордеру, а внаслідок інших екзогенних факторів, або навіть внаслідок певних специфічних дій маркет мейкерів? На жаль, модель історично залежного ринкового впливу не здатна розрізнити ці випадки між собою.

Тому наступна ітерація моделей полягала у розмежуванні подій, який спричиняли рух ціни. Так модель «подвійного поширення» та «подвійного історично залежного впливу» розділили функцію ринкового впливу та подальшу реверсію в залежності чи трансакція спричинила зміну у ціні чи лише змінила обсяг акцій на продаж у книзі ордерів [164]. Автори виходили з позиції що інформаційний зміст цих двох подій буде розрізнятися. І дійсно, не зважаючи, що у повністю ефективних фінансових ринках з раціональними агентами, обидва випадки вказують на зменшення обсягу пропозиції, а отже реакція учасників ринку має бути однорідною, на практиці це не так. Ціна є величиною, за якою слідкують більш прискіпливо: її рух призводить до зміни

очікуваної дохідності інвесторів, вартості похідних інструментів, активізації стоп-ордерів, тощо; в той час як інформація щодо обсягу продажу та купівлі на найкращих цінах купівлі-продажу цікавить, перш за все, маркет-мейкерів та брокерів з позиції визначення торгового майданчика на який вони прагнуть відправити замовлення.

Проте і ці моделі мають свої недоліки. Зокрема, дослідник обмежений певною кількістю подій, всі з яких впливають лише на ціну. Проте, оскільки ринкові учасники змінюють всю свою поведінку загалом, очевидно, що настання певних подій змінює не лише величину цін та обсягів купівлі-продажу, але й змінюють ймовірності настання майбутніх подій у моделі. Так, наприклад, якщо ціна зросла внаслідок того, що виконавець метаордеру здійснив трансакції у декількох дочірніх мета ордерах – учасники ринку будуть менш певні щодо того, чи нова ціна відповідає справжній вартості акції і будуть очікувати, що ціна повернеться до своїх попередніх значень. Це стимулюватиме їх відправити додаткові замовлення на продаж за теперішньою ціною, яку вони оцінюють як надто зависокою (а отже, сприятливою для продажу). Внаслідок цього, кількість пропозиції збільшиться і майбутнє зростання ціни на акцію стане менш ймовірним.

Задля того, щоб відобразити подібні приховані зв'язки між подіями, автори праці [135] пропонували моделювати їх як суміш розподілів переходу між наборами подій.

Це представляє собою представлення вектору випадкових величин  $X_t$  - ціни та ймовірності настання певних ринкових подій) як ланцюг Маркова, в якому ймовірнісний розподіл значень  $X_t$  є лінійною комбінацією лагів цього багатовимірного процесу  $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-g})$ . Подібний підхід дозволяє моделювати набагато складнішу динаміку ринкових процесів. Хоча у самій роботі дослідники навели приклад процесу, що складається лише з чотирьох можливих подій, що пов'язані з рухом ціни, запропонований підхід можна розширити до довільної скінченної кількості подій.

Вибір моделі – це зазвичай лише перший крок перед тим, як вона може бути застосуватися на практиці. Кожна з них містить певний набір параметрів, який (потенційно) відрізняється відповідно до якостей акцій, що торгуються, характеру ринку та подекуди і особливостей метаордерів.

Без знання цих параметрів модель неможливо застосувати для вирішення жодного з завдань, які вона покликана розв'язати. Тому знаходження цих параметрів постає наступним етапом у процесі використання моделі ринкового впливу для прогнозування витрат.

Наступний розділ буде присвячений способам знайти ці величини на основі емпіричних спостережень та підходам які були запропоновані у академічних дослідженнях.

### 2.3. Прогнозування динаміки витрат ринкового впливу на біржовому ринку

Проблема знаходження параметрів моделі ринкового впливу значною мірою залежить від власне характеру обраної моделі.

Розглянемо модель А. Алмгрена лінійного ринкового впливу, що була наведена у (2.25):

$$S_t = S_0 + g(v)t + \mathbb{1}_{t \in (0, T]} \cdot h(v) + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.47)$$

де  $\mathbb{1}_{t \in (0, T]}$  – індикаторна функція, що дорівнює одиниці, якщо умова виконується ( $t \in (0, T]$ ) та нуль у протилежному випадку.

Враховуючи рівняння (2.23) та (2.24) ця модель також може бути представлена у вигляді:

$$S_t = S_0 + \gamma \cdot v \cdot t + \mathbb{1}_{t \in (0, T]} \cdot \eta \cdot v + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.48)$$

У цій роботі вважається, що волатильність дохідності акції  $\sigma$  відома, тобто, перш ніж відправити мета ордер, інвестор застосував одну з низки моделей для розрахунку рівня ризику у ціні акції.

Таке припущення було здійснено, тому що рівень шуму у динаміці ціни акції  $\sigma$  є одним із стандартних факторів у моделях ринкового впливу. Проте, оскільки концепція волатильності більше пов'язана зі співвідношеннями дохідності і ризику акції (тобто, з інвестиційною привабливістю акції), то вона знаходиться поза темою транзакційних витрат. Витрати ринкового впливу впливають на рішення інвестора щодо того, чи варто інвестувати у дану акцію, але цей вибір є результатом балансування очікуваної дохідності з ризиком і транзакційними витратами, де остання величина є у певній мірі незалежною від попередніх. Тому у цьому дослідженні рівень ризику у акції вважається екзогенним і відомим фактором.

Проте, крім волатильності акції  $\sigma$ , у рівнянні (2.48) ще входять два параметри:  $\gamma$  та  $\eta$ .

У наступній ітерації моделі А. Алмгрена [172], у якій він дещо послабив припущення щодо лінійності функції ринкового впливу, цих параметрів стало чотири:

$$S_t = S_0 + \gamma v^\alpha t + \mathbb{1}_{t \in (0, T]} \cdot \eta v^\beta + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.49)$$

Оскільки тепер ринковий вплив – це степенева функція, то до коефіцієнтів  $\gamma$  та  $\eta$  додалися значення степенів  $\alpha$  та  $\beta$ , що виражають характер залежності між інтенсивністю торгівлі метаордера та величини постійного і тимчасового ринкового впливу відповідно. Очевидним є те, що рівняння (2.49) перетворюється у (2.48) за умови, що параметри  $\alpha$  та  $\beta$  дорівнюють одиниці.

У моделі Обіжаєвої-Ванга (2.34) (до якої входить додатковий доданок постійних ринкових витрат):

$$S_t = S_0 + c \int_0^t v_s ds + \mu \int_0^t v_s e^{-\rho(t-s)} ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.50)$$

таких параметрів три:  $c$ ,  $\mu$ , та  $\rho$ .

Значення величини  $c$  визначає лінійну залежність між обсягом виконаного мета ордеру та постійним впливом; коефіцієнт  $\mu$  відповідає рівню миттєвої зміни у тимчасовому ринковому впливу після здійснення трансакції; параметр  $\rho$  визначає швидкість затухання тимчасового впливу. Відповідно до визначень А. Альфонсі та ін. [134], від нього залежить також швидкість відновлення обсягу пропозиції.

Причому,  $\rho$  також становить константу занепаду у процесі експоненціального затухання  $e^{-\rho(t-s)}$ . Відповідно, період півжиття для реверсії метаордеру становитиме  $\ln(2)/\rho$ . Як буде показано у подальшому, цей факт може використаний для калібрування значень параметра  $\rho$  на основі емпіричних даних.

У той же час, у моделі Б. Тоз та ін. [140], в якій вони намагалися апроксимувати форму функцію розпаду  $G(t-s)$  за допомогою ламаної, кількість параметрів є набагато більшою та визначається точністю, з якою отримана крива має відповідати справжній формі  $G$ .

Тобто, якщо дослідник розглядає  $G(x)$  на проміжку  $x \in [0, b]$  з точністю  $\Delta t = \frac{b}{N}$ , то йому необхідно знайти  $N$  величин  $g_1, \dots, g_N$ , що визначені рівнянням:

$$\begin{cases} g_1 = G(\Delta t) \\ g_2 = G(2\Delta t) \\ \dots \\ g_N = G(N\Delta t) \end{cases} \quad (2.51)$$

Відповідно, чим меншою є зернистість  $\Delta t$ , тим точніше множина значень  $g_1, \dots, g_N$  описує функцію  $G(t-s)$ , але тим більше значень параметрів необхідно розрахувати.

Проблема розрахунку полягає не в математичній складності розрахунку параметрів, а в точності отриманих значень. Відомо, що фінансові ринки характеризуються високим рівнем невизначеності. У попередніх моделях це виражалось у частині, яку займає процес випадкового блукання  $\sigma \int_0^t dW_s$  у динаміці цін. Цей процес уособлює у собі всі невизначені фактори, які не враховує модель, і які можуть впливати на ціну фінансового активу на додачу до змін, спричинених діями виконавця метаордеру.

У попередніх розділах було продемонстровано (наприклад, на прикладі рис. 2.6), наскільки кожна окрема траєкторія ціни може відрізнитися від очікуваної динаміки внаслідок незалежних від інвестора причин.

Очевидно, що якщо дослідник візьме лише одну траєкторію ціни метаордеру та спробує розрахувати параметри моделі на основі лише цієї однієї реалізації траєкторії ціни, він отримає значення які, ймовірно, будуть суттєво відрізнитися від своїх «справжніх» значень. І, якщо ці коефіцієнти будуть використані для передбачення транзакційних витрат наступного ордеру, здійснені прогнози можуть повністю не відповідати тому результату, який отримає інвестор.

Проблема полягає в тому, що емпіричні дані, які спостерігає інвестор, завжди несуть в собі певний рівень інформаційного шуму. Коли вибірка метаордерів, які досліджує інвестор, є надто малою, вплив невизначених факторів на розраховані значення параметрів є надто високою. Задля

покращення точності отриманих значень, необхідно брати вибірки великого обсягу: оцінювати параметри на основі сотень та тисяч метаордерів.

Проблема ускладнюється тим, що ці коефіцієнти визначаються лише для окремого метаордеру. Переважна більшість досліджень залишає відкритим питання, чи ці параметри будуть різними для: а) різних акцій; б) інвесторів з різною інвестиційною філософією; в) додаткових інструкцій у заявці метаордеру.

Якщо, наприклад, значення параметрів відрізняється від акції до акції, то це збільшує необхідний розмір вибірки метаордерів майже пропорційно до кількості компаній, чий фінансові інструменти торгуються на ринку. У США - це майже 6000 компаній, акції яких можна обмінювати на фінансових біржах [178]. За таких умов, два параметри  $\gamma$  та  $\eta$  з моделі А. Алмгрена та Н. Кріса [131] перетворюються на 12000 (по дві величини на кожен акцію).

Проблемою оптимального використання інформації для розрахунку значень невизначених параметрів займається спеціальна галузь статистики - теорія оцінювання. Її завдання полягає у тому, щоб знайти спосіб обчислення невідомих величин на основі емпіричних даних, який мінімізував би вплив зовнішніх факторів на отримані значення – статистичну похибку. Проте розуміння того, що саме є джерелом різниці у витратах торгівлі метаордера відповідно до досліджуваних характеристик ринку і фінансового інструменту, також відіграє суттєву роль.

Якщо взяти приклад різних коефіцієнтів для різних тикерів акцій, можна використати статистичні прийоми зменшення розмірності проблеми. Наприклад, розглянемо задачу в якій треба оцінити значення  $\gamma_i$  та  $\eta_i$ ,  $i = 1 \dots N$  (де  $N$  – загальна кількість акцій) на основі фіксованої кількості спостережень. Ці величини разом з іншими відомими характеристиками метаордера  $a_1, a_2, \dots, a_M$  дозволяють розрахувати очікувані трансакційні витрати ринкового впливу на основі певної моделі-функції  $F$ :

$$E(C) = F(\gamma_1, \dots, \gamma_N, \eta_1, \dots, \eta_N, a_1, \dots, a_M) \quad (2.52)$$

де  $E(C)$  – очікувані витрати метаордеру

Нехай дослідник знає, що параметри  $\gamma_i$  та  $\eta_i$  також залежать від певного набору характеристик акцій, що можуть бути представлені у числовому виразі у вигляді множини  $b_1, b_2, \dots, b_L$  (наприклад,  $b_1$  може бути середньою кількістю обмінаних акцій у один день,  $b_2$  – середнім розміром спряду акції, тощо) та нової множини параметрів  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ , які виражають цей зв'язок:

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_N, \eta_1, \dots, \eta_N) = Z(b_1, \dots, b_L, \beta_1, \dots, \beta_K) \quad (2.53)$$

Тоді очікувані витрати можна виразити як функціонал від характеристик метаордеру, властивостей акції та параметрів  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K$ :

$$E[C] = F(Z(b_1, \dots, b_L, \beta_1, \dots, \beta_K), a_1, \dots, a_M) = Y(\beta_1, \dots, \beta_K, b_1, \dots, b_L, a_1, \dots, a_M) \quad (2.54)$$

Таким чином, додаткові знання у галузі фінансів про те, що параметри у моделі Алмгрена-Кріса визначаються через властивості акцій, дозволяють спросити задачу, якщо нова кількість параметрів  $K$  є меншою за початкову ( $2N$ ).

На жаль, у сучасному фінансовому ринку лише великі інвестори або брокерські компанії володіють вибірками ордерів, які дозволяють проводити дослідження щодо оцінки параметрів моделей трансакційних витрат ринкового впливу. Цим частково пояснюється і обмежена кількість праць, що присвячена цій проблемі.

А. Алмгрен та ін. [172] запропонував метод, щоб оцінити параметри у своїй розширеній моделі (2.49). Власне загальна форма цієї моделі була ще уточнена та приведена до наступного вигляду:

$$S_t = S_0 + \gamma \left( \frac{X}{VT} \right)^\alpha \left( \frac{\Theta}{V} \right)^\delta t + \mathbb{1}_{t < T} \cdot \eta \left( \frac{X}{VT} \right)^\beta + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.55)$$

де  $X$  – розмір мета ордеру,  $V$  – середній денний об'єм торгів на біржах для даної акції (або впродовж періоду виконання ордеру);  $T$  – тривалість виконання метаордеру;  $\Theta$  – загальний обсяг акцій компанії що знаходиться у обігу;  $\delta$  – ще один параметр.

Очевидним є те, що математично рівняння (2.55) є еквівалентною моделі (2.49). Дійсно, «інтенсивність торгівлі»  $\nu$  за визначенням розраховується як

$X/(VT)$ . В свою чергу, додатковий множник у доданку, що відповідає постійному ринковому впливу  $(\Theta/V)^\delta$ , покликаний нормалізувати параметри  $\gamma$  відносно властивостей окремих акцій, подібно до того, як це було продемонстровано у (2.54).

Іншими словами, замість того, щоб оцінювати параметри  $\gamma_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , де  $N$  – загальна кількість акцій у вибірці авторів статті, вони визначили наступне співвідношення:

$$\gamma_i = \gamma \cdot (\Theta_i/V_i)^\delta \quad (2.56)$$

де  $\gamma$  та  $\delta$  – два параметри, спільні для акцій всіх компаній; а параметри  $\Theta_i$  та  $V_i$  відображають загальний обсяг акцій компанії  $i$  що знаходиться у обігу та її середній денний об'єм торгів на біржах відповідно – тобто величини, які можна отримати з загальнодоступної інформації щодо ринкової торгової активності даної акції.

Таким чином, А. Алмгрен та ін. суттєво обмежили кількість параметрів, які необхідно оцінити, зменшивши їх кількість до двох:  $\gamma$  та  $\delta$ .

Отже, для того щоб відкалібрувати модель, автори статті [172] використали по дві величини з кожного метаордера: загальний обсяг витрат ринкового впливу  $C$  та зміну у ціні обумовлену постійною частиною ринкового впливу  $I$ .

Цей вибір обумовлений тим, що ці два значення можна прямо отримати зі спостережень динаміки ціни акції в процесі торгівлі мета ордеру. Так, зміна у ціні акції буде прямо дорівнювати постійному ринковому впливу, коли весь тимчасовий вплив встигне розсіятися. Тобто, якщо дослідник обирає певний момент  $T_{post}$ , після того, як мета ордер був виконаний ( $T$ ), то в цій точці очікуваний тимчасовий вплив дорівнюватиме нулю, за умови що між  $T$  та  $T_{post}$  пройшло достатньо часу, щоб  $G(T_{post} - T) \rightarrow 0$ . Як наслідок, очікувана ціна акції у  $T_{post}$  буде дорівнювати постійному ринковому впливу плюс вартість акції на початок виконання метаордеру:

$$E \left[ S_{T_{post}} \right] = S_0 + I \quad (2.57)$$

або, в іншому формулюванні, ціна на момент часу  $T_{post}$  буде дорівнювати сумі постійного впливу, початкової ціни та випадкового шуму:

$$S_{T_{post}} = I + S_0 + \varepsilon_{T_{post}} \quad (2.58)$$

де  $\varepsilon_{T_{post}}$  – шум у ціні акції (і, згідно моделі (2.55),  $\varepsilon_{T_{post}} \sim \sigma \int_0^{T_{post}} dW_s$ ).

У своєму дослідженні, А. Алмгрен та ін. [172] обрали  $T_{post} = 30$  хвилин.

У свою чергу, як було зазначено у попередніх розділах, загальні витрати ринкового впливу визначаються як відношення від початкової вартості активної та середньої ціни, за якої інвестор його придбав згідно (2.3) та (2.15). Оскільки, зазвичай, зміни у ціні є незначними у абсолютному сенсі, це відношення можна апроксимувати різницею цих значень. Тобто:

$$C = S_{exec}/S_0 - 1 \approx \log(S_{exec} - S_0) \approx S_{exec} - S_0 \quad (2.59)$$

де  $S_{exec}$  – середня ціна, за якою були придбані акції у процесі виконання метаордеру.

Внаслідок лінійності рівняння (2.55) та припущення про постійну інтенсивність виконання ордеру ( $v_t = v = const$ ), середня очікувана ціна, яку інвестор заплатить за одну акцію, буде дорівнювати середині між очікуваними цінами першої  $S_{0+}$  та останньої транзакції  $S_T$  дочірніх заявок метаордеру. Таким чином:

$$E[C] \approx E[S_{exec}] - S_0 = \frac{1}{2} E[S_T + S_{0+}] - S_0 \quad (2.60)$$

Як раніше зазначалося, одним з ключових припущень моделі А. Алмгрена є те, що тимчасовий вплив  $(J - I)$  є миттєвим і незмінним впродовж виконання метаордеру, а отже, він буде частиною ціни і у першій і у останній транзакції. На відміну від нього, постійний вплив  $I$  залежить від обсягу виконаного метаордера, а отже, у першій транзакції постійний вплив буде повністю відсутній і буде входити у повному обсязі до ціни останньої транзакції. Тобто:

$$\begin{aligned} E[S_{0+}] &= S_0 + (R - I) \\ E[S_T] &= S_0 + R \end{aligned} \quad (2.61)$$

Таким чином:

$$C \approx \frac{1}{2} E[S_T + S_{0+}] - S_0 = R - I/2 + \epsilon \quad (2.62)$$

де  $\epsilon$  – шум у вартості акції (розподіл  $\epsilon$  наведений на с.16 у [172]).

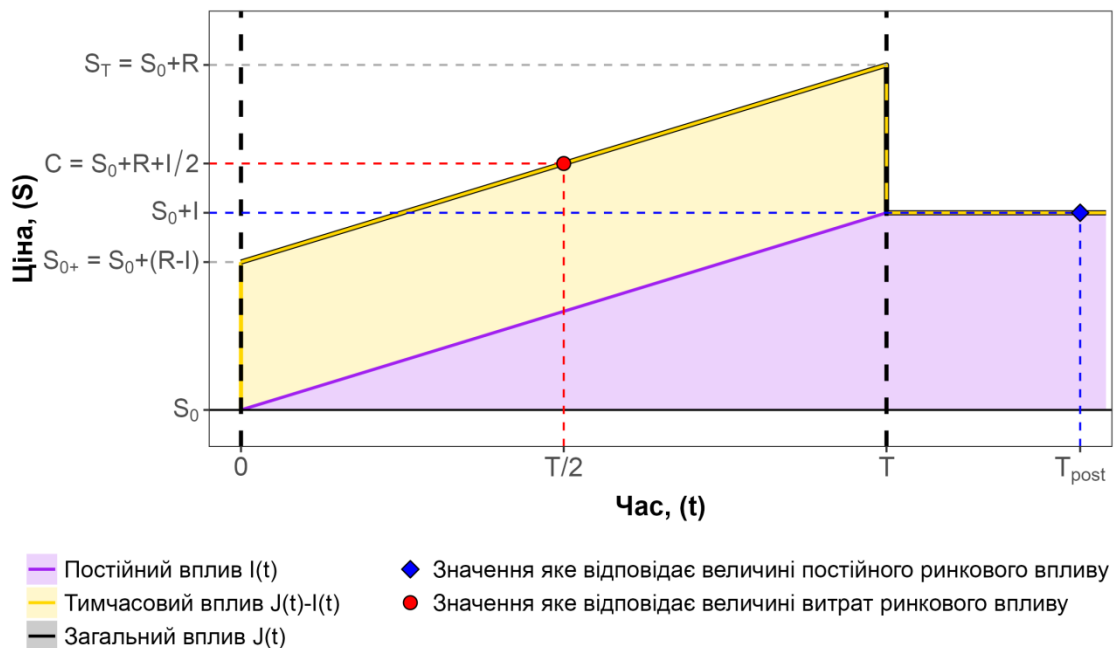
Вирази, що наведені у (2.58) та (2.62), можна зобразити на отримати графічно. На рис. 2.12 представлений очікуваний рух цін внаслідок ринкового впливу під час виконання метаордеру та точки на цій кривій які будуть використані для знаходження параметрів моделі.

Отже, підставляючи значення з (2.55) у (2.58) та (2.62) можна отримати:

$$S_{T_{post}} = I = S_0 + \gamma T \left( \frac{X}{VT} \right)^\alpha \left( \frac{\Theta}{V} \right)^\delta + \epsilon_{T_{post}} \quad (2.63)$$

$$C - I/2 = S_0 + \eta \left( \frac{X}{VT} \right)^\beta + \epsilon$$

Ці рівняння проводять залежність між двома величинами, як можна спостерігати на основі емпіричних даних та параметрами моделі. А. Алмгрен та ін. [172] на основі цих виразів побудували нелінійну регресію, яка дозволила розрахувати значення  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  та  $\eta$ .

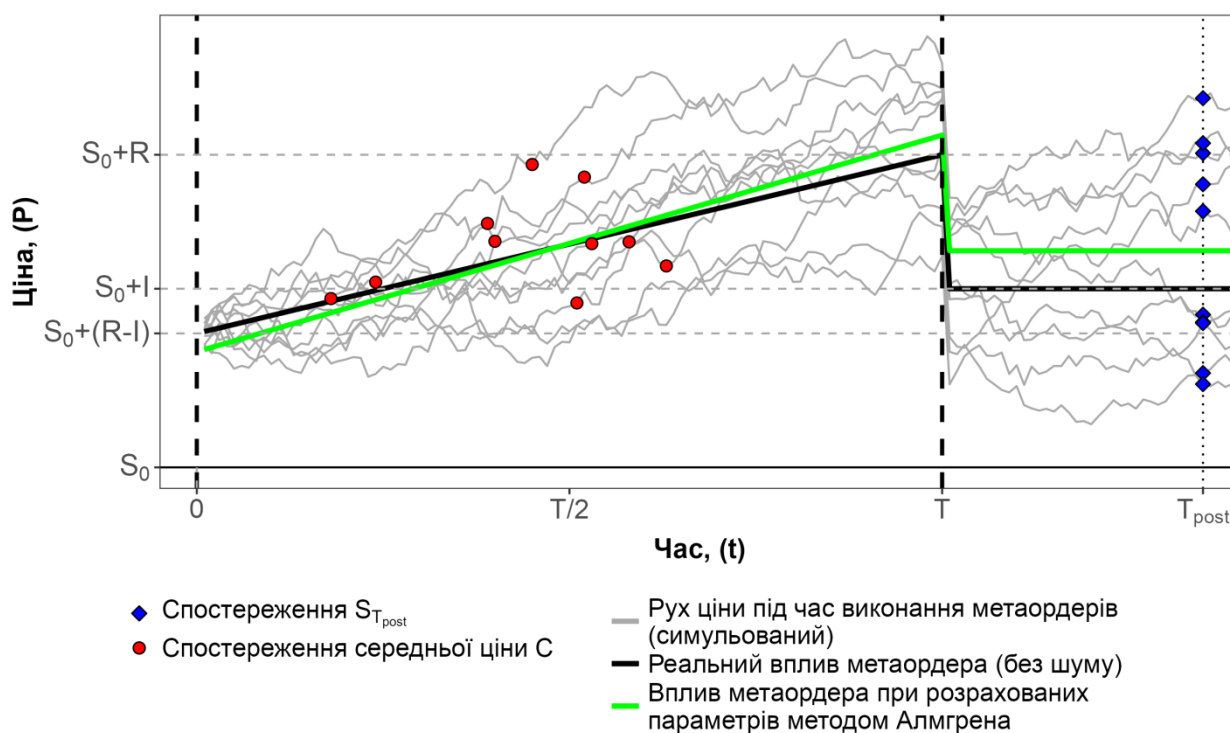


**Рис. 2.12 Точки, що будуть використані для знаходження параметрів моделі А. Алмгрена**

Джерело: Побудоване автором на основі моделі описаної у [131]

Рис. 2.13 наводить приклад оцінки параметрів  $\gamma$  та  $\eta$  на основі симульованих метаордерів (припускається що  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  відповідно до моделі лінійного ринкового впливу).

Чорна лінія зображає очікувану динаміку «справжнього» ринкового впливу. Тобто, якби інвестор мав всю інформацію щодо ринкової мікроструктури та поведінки агентів, то він би очікував би, що ціна на акцію буде змінюватися відповідно до цієї траєкторії. Проте це надто оптимістичне припущення, зазвичай обсяг інформації, яким він може оперувати, є обмеженим доступними спостереженнями. Так, нехай всі дані, якими володіє інвестор, це зміни у ціні під час торгівлі десяти подібних метаордерів на ту саму акцію, що виконувалися за схожих ринкових умов та з тією самою тривалістю. Вони зображені на рис. 2.13 сірими лініями.



**Рис. 2.13 Розрахунок параметрів  $\gamma$  та  $\eta$  на основі симульованих даних**

*Джерело: Розраховано автором на основі методу описаної у [172]*

Відповідно до метода А. Алмгрена та ін. [172], для розрахунку параметрів необхідно розглянути значення ціни на акцію через певний час після того, як його виконання завершилося (ціна  $S_{T_{post}}$ ) та загальну середню вартість однієї придбаної акції (С). Для кожного з 10 ордерів ці значення позначені синіми та червоними точками відповідно.

Вибірка із двох точок для кожного метаордеру дозволяє розв'язати задачу нелінійної регресії, яка полягає у мінімізації залишків [179]:

$$\min_{\gamma, \eta} \sum_{j=1}^M \left( \left( c_j - \frac{s_j}{2} \right) - \mu(\gamma, \eta) \right)^T \Sigma_j^{-1} \left( \left( c_j - \frac{s_j}{2} \right) - \mu(\gamma, \eta) \right) \quad (2.64)$$

де  $M$  – кількість метаордерів у вибірці;

$s_j$  – спостереження ціни  $S_{T_{post}}$  для ордеру  $j$  ( $j \in 1 \dots M$ )

$c_j$  – спостереження середньої ціни купівлі/продажу для ордеру  $j$

$\mu(\gamma, \eta)$  – очікувані значення  $S_{T_{post}}$  та  $C - \frac{S_{T_{post}}}{2}$  для ордеру  $j$ :  $\mu(\gamma, \eta) = (T\gamma v, \eta v)^T$ ;

$\Sigma$  – коваріаційна матриця похибок спостережень  $S_{T_{post}}$  та  $C - \frac{S_{T_{post}}}{2}$ .

$$\text{Тобто, } \Sigma = \text{Cov} \left( \varepsilon_{T_{post}}, \epsilon \right) = \begin{pmatrix} T_{post} & -\frac{T_{post}}{2} - \frac{T}{2} \\ -\frac{T_{post}}{2} - \frac{T}{2} & \frac{T_{post}}{4} - \frac{T}{6} \end{pmatrix}.$$

Ці розрахунки, застосовані до прикладу на рисунку 2.13, призвели до оцінок  $\hat{\gamma}$  та  $\hat{\eta}$ , що відрізнялися від своїх справжніх значень (які інвестор не знає) на 6% та 2% відповідно через похибку вибірки. Як наслідок, очікувана траєкторія (зелена крива на графіку) дещо відрізняється від реальної (чорна лінія). Ці дві лінії знаходяться поряд, а отже, прогнозування витрат здійснене на основі розрахованих параметрів не буде надто розрізнятися від реального результату і лише іноді може призвести до прийняття неоптимальних інвестиційних рішень.

Проте, нещодавнє дослідження Ф. Лі та ін. [179] вказало, що розрахунок параметрів за допомогою методу, описаного у праці А.Алмгрена

та ін. [172], не використовує оптимально всю наявну інформацію щодо руху ціни під час виконання метаордеру.

У цій роботі автори запропонували використати три спостереження для кожного метаордеру та застосувати метод максимальної правдоподібності, щоб у сукупності отримати оцінку параметрів моделі витрат ринкового впливу з меншою похибкою вибірки.

Метод максимальної правдоподібності застосовується у випадку, коли у дослідника є певна вибірка спостережень  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , що є реалізацією випадкової величини  $\xi$ . Відомо, що  $\xi$  розподілена з функції щільності  $f_\xi$ , проте остання має в своєму складі певну кількість невідомих параметрів  $\theta$  (тобто  $f_\xi(x; \theta)$ ). Для того, щоб отримати оцінку  $\hat{\theta}$  справжніх значень параметрів  $\theta$ , використовують метод максимальної правдоподібності.

Кожному спостереженню  $y_i$  ставлять у відповідність значення розподілу у цій точці  $f_\xi(y_i, \theta)$ . Це значення може трактуватися як «ймовірність» спостерігати значення  $y_i$  результатом випадкової величини  $\xi$  (це не є точним математичним формулюванням, проте передає інтуїтивний сенс). За таких міркувань, шанс побачити всі значення  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  як реалізацією величини  $\xi$  буде дорівнювати добутку всіх індивідуальних «ймовірностей». Цей добуток називають функцією правдоподібності:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_\xi(y_i; \theta) \quad (2.65)$$

Згідно методу максимальної правдоподібності, найімовірніше значення параметрів  $\theta$  – це те, за яких функція  $L(\theta)$  досягає свого максимуму. Відповідно, значення аргументів функції у цій точці  $\hat{\theta} = \operatorname{argmax} L(\theta)$  і буде становити найкращу оцінку параметрів  $\theta$ .

Відповідно до моделі А. Алмгрена (2.48), різниця між вартістю акції у будь-яких двох точках вздовж траєкторії зміни ціни буде дорівнювати:

$$S_{t_2} - S_{t_1} = \gamma v(t_2 - t_1) + (\mathbb{1}_{t_2 \in (0, T]} - \mathbb{1}_{t_1 \in (0, T]}) \eta v + \sigma \int_{t_1}^{t_2} dW_s \quad (2.66)$$

Що, відповідно до властивостей вінерівського процесу, є нормально розподіленою відповідною величиною з параметрами:

$$\begin{aligned} S_{t_2} - S_{t_1} &\sim N(a, b^2) \\ a_1 &= \gamma v(t_2 - t_1) + (\mathbb{1}_{t_2 \in (0, T]} - \mathbb{1}_{t_1 \in (0, T]}) \eta v \\ b_1 &= \sigma \sqrt{t_2 - t_1} \end{aligned} \quad (2.67)$$

А отже, для будь-якої множини послідовних спостережень, ціни на акцію  $y = \{y_0, y_{t_1}, \dots, y_{t_N}\}$  протягом виконання метаордеру (та після цього) функцією максимальною правдоподібності буде:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \phi(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}; a_i, b_i) \quad (2.68)$$

де  $\phi(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}; a_i, b_i)$  – функція щільності нормального розподілу з математичним сподіванням  $a$  та дисперсією  $b$ , формула яких надана у рівняннях (2.67).

В свою чергу,  $a$  та  $b$  є виразами, що залежать від параметрів  $\gamma$  та  $\eta$ :  $a_i = \alpha_i(\gamma, \eta)$ ,  $b_i = \beta_i(\gamma, \eta)$ . Отже, відповідно до методу максимальної правдоподібності, їх значення можна знайти, якщо максимізувати цю функцію:

$$(\hat{\gamma}, \hat{\eta}) = \underset{\gamma, \eta}{\operatorname{argmax}} \left\{ \prod_{i=1}^N \phi(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}; \alpha_i(\gamma, \eta), \beta_i(\gamma, \eta)) \right\} \quad (2.69)$$

За умови, що вибірка складається з  $M$  метаордерів, результуюча функція ММП для всіх спостережень представляє добуток індивідуальних функцій правдоподібності:

$$(\hat{\gamma}, \hat{\eta}) = \underset{\gamma, \eta}{\operatorname{argmax}} \left\{ \prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^N \phi(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}; \alpha_i(\gamma, \eta), \beta_i(\gamma, \eta)) \right\} \quad (2.70)$$

Цей вираз буде дійсний навіть якщо метаордери виконуються з різною інтенсивністю, та спостереження у кожному з метаордерів здійснюються нерівномірно. Проте у цій роботі ми розглянемо лише базовий випадок.

Як відомо, максимізація добутку еквівалентна мінімізації логарифму:

$$\max L(\theta) \sim \min\{-\log L(\theta)\} \quad (2.71)$$

Здійснивши перетворення та підставивши відому формулу щільності нормального розподілу у (2.71) отримаємо кінцевий вираз, що буде повністю еквівалентним до методу зважений найменших квадратів:

$$(\hat{\gamma}, \hat{\eta}) = \underset{\gamma, \eta}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N c_i + w_i (\Delta y_i - \mu_i(\gamma, \eta))^2 \right\} \quad (2.72)$$

Де:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{t_i} - y_{t_{i-1}} \\ c_i &= \log \sigma \sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})} \\ w_i &= \frac{1}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})} \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\mu_i(\gamma, \eta) = \gamma v(t_i - t_{i-1}) + (\mathbb{1}_{t_i \in (0, T]} - \mathbb{1}_{t_{i-1} \in (0, T]}) \eta v$$

Власне, Ф. Лі та ін. [179] довели, що спосіб отримати параметри у (2.72), є майже еквівалентним до того, що був застосований А. Алмгредом та ін. [172]. Проте основним їх здобутком є те, що вони змогли визначити, скільки і які саме точки необхідно вибрати на траєкторії зміни ціни при виконанні метаордера для того, щоб отримати найточніші оцінки параметрів  $\gamma$  та  $\eta$ .

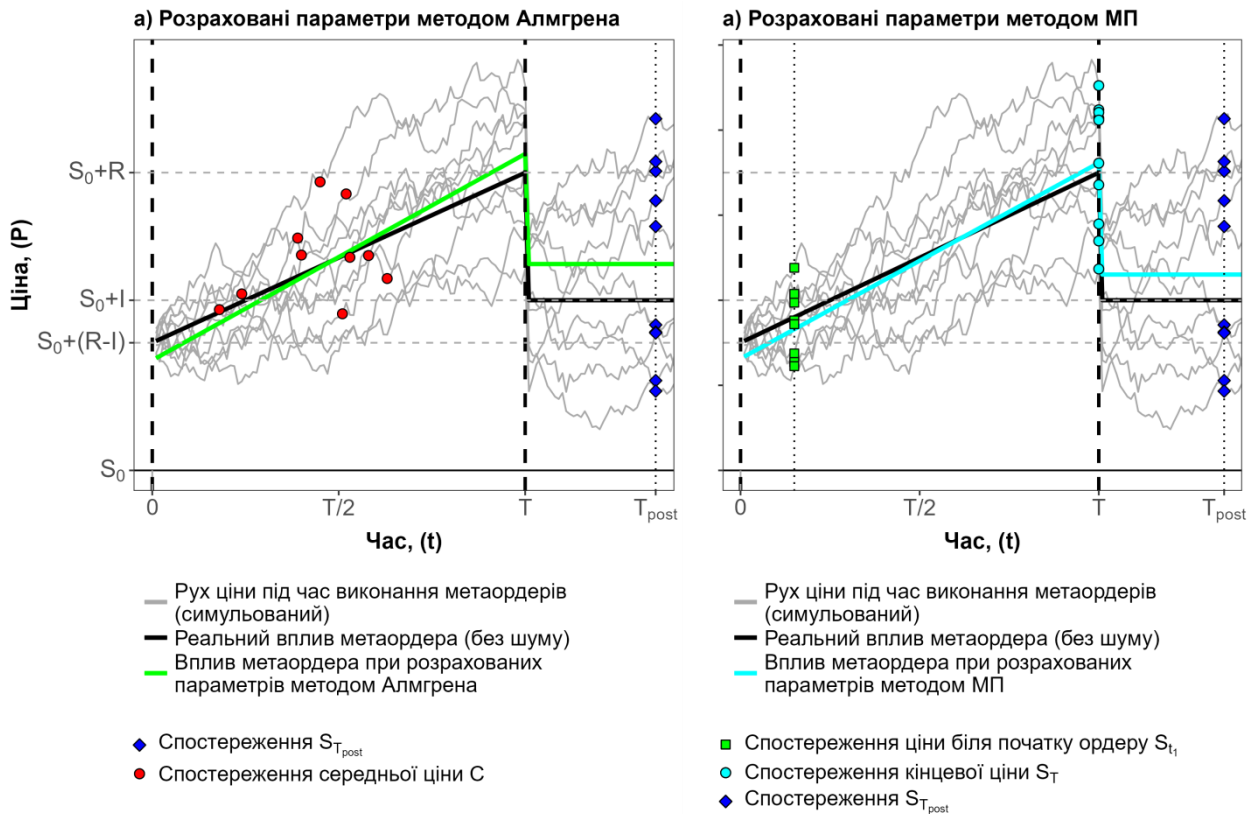
Вони довели, що найбільш точна оцінка параметрів у лінійній моделі витрат ринкового впливу, може бути отримана, якщо для кожного з метаордерів є принаймні три точки спостережень ціни:

- ціна на акцію після того, як виконання метаордеру завершилося (що відповідає спостереженням ціни  $S_{T_{post}}$  у методі Алмгрена);
- вартість акції на момент завершення виконання ордеру ( $S_T$ );
- ціна на акцію, що превалювала на ринку у будь-який момент у першій чверті тривалості ордеру  $S_{t_1}$  ( тобто  $t_1 < \frac{1}{4}T$ ).

Як показали автори, ці три точки є достатніми для того, щоб розрахувати значення параметрів з найменшою похибкою спостережень.

Порівняння очікуваного ринкового впливу за умови розрахунку параметрів методами Алмгрена та максимальної правдоподібності наведено

на рис. 2.14. Як бачимо, для цього прикладу (десяти симульованих заявок), крива, що є результатом розв'язку оптимізаційної задачі максимальної правдоподібності на основі трьох спостережень на кожний ордер (блакитна лінія), лежить ближче до свого «справжнього» значення (чорна лінія), ніж та яка отримана побудовою нелінійної регресії для двох спостережень (зелена лінія).



**Рис. 2.14 Порівняння результуючої функції ринкового впливу при розрахунку параметрів методом Алмгрера і методом максимальної правдоподібності Ф. Лі**

*Джерело: Розраховано автором на основі методів описаних у [172] та [179]*

Проте це лише один приклад, який може бути випадковим. Для повноцінного порівняння цих методів (та доведення, що спосіб, запропонований Ф. Лі є оптимальним), необхідно довести, що один із них є кращим у середньому, тобто розглянути точність розрахунку параметрів на основі багатьох симуляцій. Таке порівняння здійснене у Додатку Д. У ньому

продемонстровано, що метод максимальної правдоподібності призводить до меншої стандартної похибки параметрів, а отже, є точнішим.

Проблема оцінки параметрів є нагальною і для інших моделей ринкового впливу. Так, у процесі запропонованому А. Обіжаєвою та Дж. Вангом (2.33) [133] (розширеному для врахування ефекту постійного впливу), таких параметрів три:  $c$ ,  $\mu$  та  $\rho$ .

Нагадаємо, що згідно цієї моделі, динаміка ціни акції описується наступним рівнянням:

$$S_t = S_0 + c \int_0^t v_s ds + \mu \int_0^t v_s e^{-\rho(t-s)} ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.74)$$

У другій частині свого дослідження, Ф. Лі та ін. [179] довели, що метод максимальної правдоподібності можна застосувати і в цьому випадку. Так, за умови постійної інтенсивності виконання метаордеру, формула (2.74) перетворюється на:

$$\begin{aligned} t \leq T: \quad S_t &= S_0 + cvt + \mu v \frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho t}) + \sigma \int_{t_1}^{t_2} dW_s \\ t > T: \quad S_t &= S_0 + cvT + \mu v \frac{1}{\rho} e^{-\rho t} (1 - e^{-\rho T}) + \sigma \int_{t_1}^{t_2} dW_s \end{aligned} \quad (2.75)$$

Отже, зміна ціни між двома моментами у часі  $t_1$  та  $t_2$ , за умови, що вони відбулися до закінчення торгівлі метаордеру ( $t_1 \leq T, t_2 \leq T$ ), буде змінюватися відповідно до наступного рівняння

$$S_{t_2} - S_{t_1} = cv(t_2 - t_1) + \mu v \frac{1}{\rho} (e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}) + \sigma \int_{t_1}^{t_2} dW_s \quad (2.76)$$

Якщо ж вони відбулися після закінчення виконання заявки клієнта, то формула буде дещо інакшою:

$$S_{t_2} - S_{t_1} = \mu v \frac{1}{\rho} (e^{-\rho t_2} - e^{-\rho t_1}) (1 - e^{-\rho T}) + \sigma \int_{t_1}^{t_2} dW_s \quad (2.77)$$

Відповідно, зміна ціни між двома точками є нормально розподіленою величиною:

$$S_{t_2} - S_{t_1} \sim N(c_1, d_1^2) \quad (2.78)$$

$$c_1 = \begin{cases} cv(t_2 - t_1) + \mu v \frac{1}{\rho} (e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}), & \text{для } t_1 \leq T, t_2 \leq T \\ \mu v \frac{1}{\rho} (e^{-\rho t_2} - e^{-\rho t_1})(1 - e^{-\rho T}), & \text{для } t_1 > T, t_2 > T \end{cases}$$

$$d_1 = \sigma \sqrt{t_2 - t_1}$$

Отже, до формули (2.78) можна застосувати ті самі міркування, що були використані для моделі А.Алмгрена. Якщо вибірка складається з послідовних спостережень ціни акції  $y = \{y_0, y_{t_1}, \dots, y_{t_N}\}$  при виконанні мета ордеру, то функція максимальної правдоподібності виглядає майже ідентично до (2.68):

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \phi(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}; c_i, d_i) \quad (2.79)$$

Проте у цьому випадку вирази  $c_i$  та  $d_i$  визначаються як функція від невідомих параметрів уже в моделі Обіжаєвої-Ванга:  $c_i = \gamma_i(\mu, \rho, c)$ ,  $d_i = \delta_i(\mu, \rho, c)$ .

Крім того, задача ускладнюється: оптимізація функції правдоподібності відбувається з трьома змінними замість двох:

$$(\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c}) = \underset{\mu, \rho, c}{\operatorname{argmax}} \left\{ \prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^N \phi(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}; \gamma_i(\mu, \rho, c), \delta_i(\mu, \rho, c)) \right\} \quad (2.80)$$

Ця задача також зводиться до задачі мінімізації зважених найменших квадратів, де від'ємником є нелінійна функція. Тобто:

$$(\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c}) = \underset{\mu, \rho, c}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N c_i + w_i (\Delta y_i - \theta_i(\mu, \rho, c))^2 \right\} \quad (2.81)$$

де, як і раніше  $\Delta y_i = y_{t_i} - y_{t_{i-1}}$ , і інші вирази, відповідно:

$$c_i = \log \sigma \sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}$$

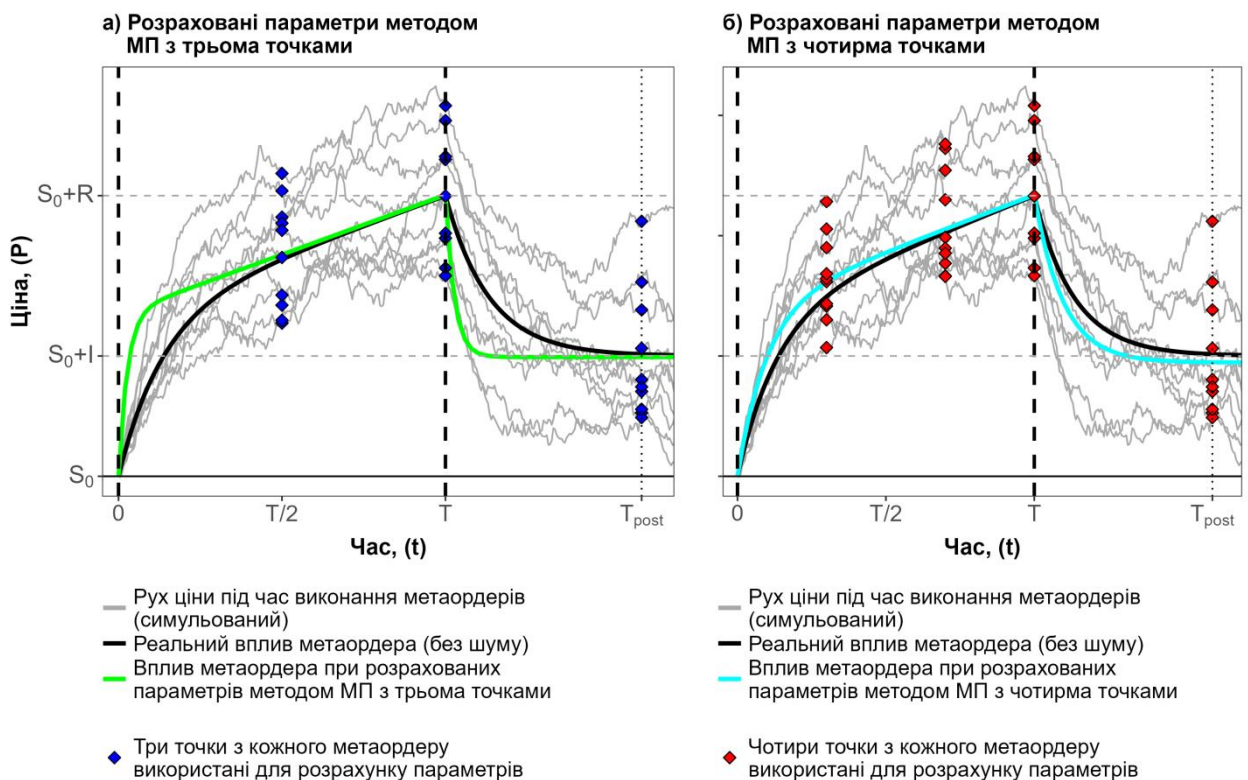
$$w_i = \frac{1}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})} \quad (2.82)$$

$$\theta_i(\mu, \rho, c) = \begin{cases} cv(t_i - t_{i-1}) + v \frac{\mu}{\rho} (e^{-\rho t_{i-1}} - e^{-\rho t_i}), & \text{для } t_1 \leq T, t_2 \leq T \\ v \frac{\mu}{\rho} (e^{-\rho t_2} - e^{-\rho t_1})(1 - e^{-\rho T}), & \text{для } t_1 > T, t_2 > T \end{cases}$$

Приклади застосування цього методу наведені на рис. 2.15. На ньому зображена очікувана динаміка ринкового впливу, отримана при розрахунку параметрів процесу (2.74) методом максимальної правдоподібності.

Різниця між рис. 2.15 а) та рис. 2.15 б) полягає в кількості спостережень у вибірці, взятих з кожного метаордера: по три та чотири, відповідно. Ф. Лі та ін. [179] довели, що на відміну від моделі А. Алмгрена (у якій використання більше ніж трьох точок не призводить до меншої похибки у оцінці ринкового впливу), у моделі Обіжаєвої-Ванга чим більше спостережень використано для оцінки параметрів, тим точнішими є отримані значення.

Знову ж таки, рис. 2.15 пропонує лише один ізольований приклад цього ефекту. У Додатку Е надано набір симуляції, які доводить це твердження у середньому, для великої кількості випадків.



**Рис. 2.15** Результуюча функції ринкового впливу при розрахунку параметрів методом максимальної правдоподібності для трьох та чотирьох точок

Джерело: Розраховано автором на основі методу описаного у [179]

Внаслідок цього, інвестор або брокер, який прагне оцінити параметри у моделі витрат ринкового впливу, може дійти до висновку, що чим щільніше у часі здійснюються спостереження, тим меншим буде похибка оцінки та тим точнішими будуть його прогнози трансакційних витрат ринкового впливу.

Разом з цим, варто пам'ятати, що будь-яка модель є лише абстрактним відображенням реальності. На дуже малих інтервалах рух ціни представляє собою серію «стрибків», що обумовлені динамікою ордерів у книзі заявок, тобто щось схоже на динаміку представлену на рис. 2.3. У такому випадку представляти зміну у ціні як процес з броунівським рухом (що постулюється моделями поширювача) призведе до того, що модель не буде відображати реальність. У свою чергу, метод максимальної правдоподібності дуже сильно базується на розподілі, який припускається моделлю. Якщо процес не відповідає дійсності, то і отримані параметри методом максимальної правдоподібності не будуть відповідати дійсності.

На великих же часових інтервалах процес випадкового блукання з рис. 2.3 дуже точно апроксимується броунівським рухом, що обумовлене центральною граничною теоремою, а отже модель точніше відображає дійсність, і тому метод максимальної правдоподібності дозволяє отримати адекватні оцінки параметрів.

Таким чином, при виборі кількості спостережень відповідно до методу максимальної правдоподібності має бути враховані два протилежні ефекти:

- з одного боку, чим більше спостережень з кожного метаордеру використані для розрахунку параметрів, тим меншою буде похибка вибірки і точнішими оцінки цих значень;

- з іншого боку, більше точок з кожного метордеру означає, що ці точки будуть щільно прилягати одна до одної. Це може призвести до того, що розподіли, використані у моделі Обіжаєвої-Ванга, будуть дуже грубим відображенням реальної зміни ціни акції, а отже, і оцінки, отримані на основі цих припущень, матимуть високу похибку моделі.

На жаль, знаходження оптимального балансу, який би призвів до найменшої похибки, не є тривіальною проблемою, і на даний момент має бути обраний на основі досвіду та суб'єктивних рішень дослідника, який здійснює оцінку цих параметрів.

Ф. Лі та ін. підкреслили цю проблему і вказали, що за умови обмеженої кількості спостережень, які може здійснити інвестор, найкраще обирати ці точки трохи ближче до початку ордеру. На жаль, вони не надали точне значення моментів у часі, у які треба здійснити ці спостереження, вказавши що вони залежать від значень досліджуваних параметрів, які, в свою чергу, є невідомими.

Не зважаючи на це, ще однією перевагою методу максимальної правдоподібності є те, що його можна використовувати у випадку, коли план виконання мета ордеру передбачає зміни у інтенсивності торгівлі (проте ці зміни мають бути заплановані наперед, а не бути результатом реакції на зміни у ціні).

На даний момент більша частина досліджень функції ринкового впливу та відповідних моделей рекомендувала усереднити весь план інтенсивності торгівлі метаордеру однією величиною та використовувати її в подальшому для розрахунку параметрів моделі і здійснені прогнозу витрат ринкового впливу. Звісно, це має призводити до суттєвої похибки у знайдених значень параметрів та прогнозах моделі загалом. Метод максимальної правдоподібності надає зручний альтернативних шлях розв'язку цієї проблеми.

Нехай виконавець здійснює метаордер відповідно до певного плану (що не залежить від траєкторії зміни ціни), що описується функцією  $v_t = f(t)$ . Будь-яка диференційована функція, в такому випадку, може бути апроксимована  $N$ -ною кількістю малих інтервалів:

$$v_t \approx a_i, \forall t \in (t_{i-1}, t_i], \text{ для } i = 1, \dots, N \quad (2.83)$$

де значення  $a_i = v(t_i)$  за умови що  $t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$  або сама функція  $f$  є стрибкоподібним процесом.

Очевидно, що виконавець володіє інформацією щодо функції  $v_t$ , адже він сам її обирає, а отже може легко розбити її на частини з точністю, яку він прагне отримати. Нехай ці точки складають множину  $\tau = \{\tau_1, \tau_2 \dots \tau_N\}$ .

У такому формулюванні, час кінця ордеру ( $T \in \tau$ ) також належить цій множині, адже він представляє собою ніщо інше як момент зміни інтенсивності торгівлі: після  $T$ , інтенсивність виконання метаордеру дорівнює нулю.

Проте дослідник ринкового впливу все ще має визначитися з тим, які саме точки будуть обрані для формування вибірки зі спостережень у зміні в ціні акції. Нехай ці точки складають іншу множину:  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_K\}$ . Між будь-якими двома обраними моментами здійснення спостережень  $s$  може існувати жодна, одна або й більше точок у які інтенсивність торгівлі метаордера змінювалася ( $\tau$ )

Проте кожний елемент з множини  $s$  можна розглядати як і елемент з множини  $\tau$ , в якому один з інтервалів постійної інтенсивності торгівлі закінчився, і почався наступний, з тією самою інтенсивністю. Іншими словами, можна розглядати множину  $t = \tau \cup s$ , в якій:

$$\begin{cases} v_t \approx a_i \neq a_{i-1}, \forall t \in (t_{i-1}, t_i], \text{ якщо } t_i \in \tau \\ v_t \approx a_i = a_{i-1}, \forall t \in (t_{i-1}, t_i], \text{ якщо } t_i \in s \end{cases} \text{ для } i = 2, \dots, K + N \quad (2.84)$$

За таких умов, ціна у точках  $t = \{t_1, \dots, t_{K+N}\}$  буде слідувати наступному процесу:

$$S_t = S_{t_k} = \sum_{i=1}^k a_i \left( cv(t_i - t_{i-1}) + \frac{\mu}{\rho} e^{-\rho t_k} (e^{\rho t_i} - e^{\rho t_{i-1}}) \right) \quad (2.85)$$

Проте зміна між будь-якими двома моментами здійснення спостережень буде становити:

$$\begin{aligned} S_{t_{k+n}} - S_{t_k} &= cv \sum_{i=1}^{k+n} a_i (t_i - t_{i-1}) + e^{-\rho t_{k+n}} \sum_{i=1}^{k+n} a_i \frac{\mu}{\rho} (e^{\rho t_i} - e^{\rho t_{i-1}}) \\ &\quad - e^{-\rho t_k} \sum_{i=1}^k a_i \frac{\mu}{\rho} (e^{\rho t_i} - e^{\rho t_{i-1}}) \end{aligned} \quad (2.86)$$

де  $t_{k+n}$  та  $t_k$  – це дві точки з множини  $t$ , які є послідовними елементами у множині  $s$ .

Відповідно, легко визначити, що різниця у (2.86) буде матиме розподіл:

$$\begin{aligned}
 S_{t_{k+n}} - S_{t_k} &\sim N(\theta, \sigma\sqrt{t_{k+n} - t_k}) \\
 \theta &= cv \sum_{i=1}^{k+n} a_i(t_i - t_{i-1}) + e^{-\rho t_{k+n}} \sum_{i=1}^{k+n} a_i \frac{\mu}{\rho} (e^{\rho t_i} - e^{\rho t_{i-1}}) \\
 &\quad - e^{-\rho t_k} \sum_{i=1}^k a_i \frac{\mu}{\rho} (e^{\rho t_i} - e^{\rho t_{i-1}})
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Оскільки цей результат є подібним до випадку торгівлі з постійною інтенсивністю (з дещо складнішим виразом для маточікування розподілу), можна використати ті самі кроки у визначенні оцінки параметрів як максимізацію функції максимальної правдоподібності. Остання, в свою чергу, зводиться до мінімізації суми квадратів відносно нелінійною функції.

Нехай  $t_{k_1}, t_{k_2} \dots t_{k_K}$  – це послідовні (відсортовані) точки з множини  $t$ , що належать множині  $s$  (тобто  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_K\} = \{t_{k_1}, t_{k_2} \dots t_{k_K}\}$ ). Згідно означенню, досліднику відомі спостереження ціни акції у ці моменти у часі:  $y = \{y_{t_{k_1}}, y_{t_{k_2}}, \dots y_{t_{k_K}}\}$ .

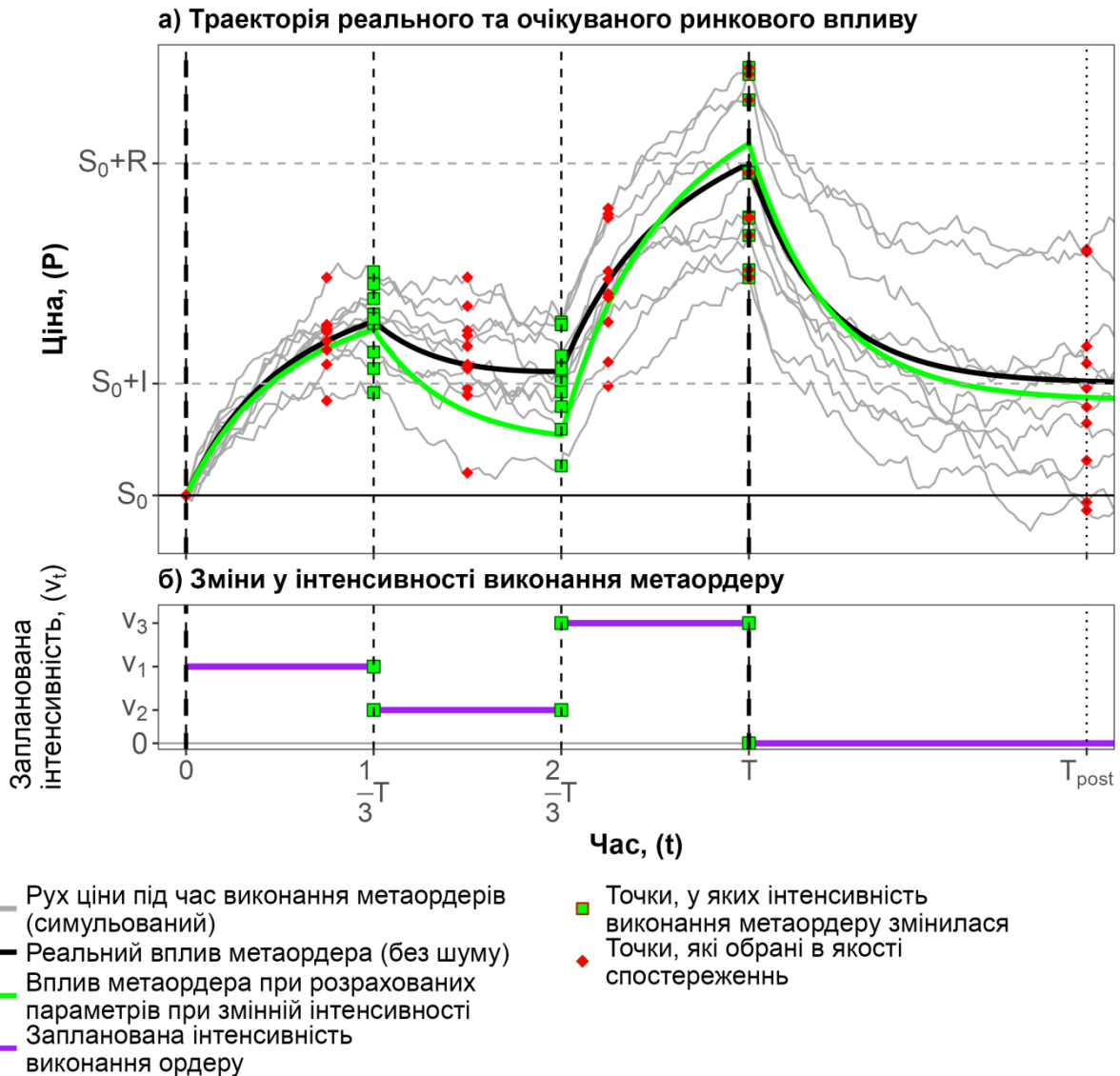
Тоді оцінка параметрів може бути отримана згідно наступному виразу:

$$(\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c}) = \underset{\mu, \rho, c}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^K c_i + w_i (\Delta y_i - d_i(\mu, \rho, c))^2 \right\} \tag{2.88}$$

де  $\Delta y_i = y_{t_{k_i}} - y_{t_{k_{i-1}}}$ , а інші вирази, відповідно:

$$\begin{aligned}
 c_i &= \log \sigma \sqrt{2\pi(t_{k_i} - t_{k_{i-1}})} \\
 w_i &= \frac{1}{2\sigma^2(t_{k_i} - t_{k_{i-1}})} \\
 d_i(\mu, \rho, c) &= cv \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j(t_j - t_{j-1}) + e^{-\rho t_{k_i}} \sum_{j=1}^{t_{k_i}} a_j \frac{\mu}{\rho} (e^{\rho t_j} - e^{\rho t_{j-1}}) \\
 &\quad - e^{-\rho t_{k_{i-1}}} \sum_{j=1}^{t_{k_{i-1}}} a_j \frac{\mu}{\rho} (e^{\rho t_j} - e^{\rho t_{j-1}})
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

Не зважаючи на, здавалося б, складну форму виразу у (2.89), на практиці її доволі легко обчислювати за допомогою рекурентного співвідношення її доданків.



**Рис. 2.16** Результуюча функція ринкового впливу на основі розрахованих параметрів методом максимальної правдоподібності

*Джерело: Розраховано автором*

На рис. 2.16 наведено приклад розрахунку параметрів та результуючої очікуваної функції ринкового впливу за умови змінної інтенсивності торгівлі.

У ньому було здійснено припущення, що у інвестора є вибірка з десяти метаордерів. Проте внаслідок певних зовнішніх причин, вони виконувалися нерівномірно: третину всієї тривалості інтенсивність торгівлі становила  $v_1$ ,

наступна третина здійснювалася зі швидкістю  $v_2$ , і нарешті, остання частина – з інтенсивністю  $v_3$  (числові значення наведені у Додатку Є). Внаслідок цього, ціна на акцію зростала нерівномірно. Виконавець і інвестор володіють всією повнотою інформації щодо значень  $v_1, v_2, v_3$  та моментів, у які відбулися зміни у інтенсивності.

З цих десяти метаордерів інвестор обрав певні точки для розрахунку параметрів у моделі Обіжаєвої-Ванга з лінійним постійним впливом (2.74). Нехай з кожного мета ордеру були здійснені спостереження ціни акції у  $t = \left\{ \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T \right\}$ , а також – на кінець ордеру ( $T$ ) та певний час після цього ( $T_{post} = 1.6T$ ). На основі значень ціни акції під час виконання метаордерів цих точок і були обчислені значення  $\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c}$  згідно формули (2.89), які призвели до очікуваної траєкторії впливу, що зображена зеленою лінією на рис. 2.16. Як можна спостерігати, у певних сегментах вона дещо відхиляється від своїх реальних значень, що спричинено похибкою вибірки, адже у даному випадку вона обмежена всього десятьма метаордерами.

Запропонований спосіб (що є результатом праці Ф. Лі та ін. [179]) дещо відхиляється від тих, що використовувалися у академічній літературі до цього часу: стандартною практикою є усереднення інтенсивності виконання метаордеру та використання методів для постійної інтенсивності торгівлі [172]. Звісно, така оцінка параметрів буде менш точною ніж та, що отримана методом максимальної правдоподібності.

Так, дійсно, більша частина стандартних метаордерів на практиці виконується з постійною інтенсивністю. Це є сильним аргументом того, що, оскільки зміна у інтенсивності торгівлі відбувається не часто, немає потреби ускладнювати розрахунок параметрів моделі. Проте останні дослідження виявили, що постійна інтенсивність це не є оптимальним способом виконання метаордеру відповідно до майже усіх моделей поширювача [134], [180] (ця тема буде більш докладно розглянута у розділі 3.2). Як наслідок,

очікується, що метод максимальної правдоподібності буде набувати популярності.

Крім того, на практиці, значна кількість метаордерів, які отримують брокери мають додаткові інструкції виконання, що обмежують ціну за якої вони можуть продовжувати торгуватися – ліміт-ціни.

Логіка ліміт-цін на метаордерах є подібною до тих, що використовуються для ордерів на біржах: ліміт-ціна на метаордері купівлі (продажу) забороняє виконавцю мета ордеру купувати (продавати) акції за ціною, вищою (нижчою) за лімітуючу.

Подібні інструкції значним чином обмежують можливості аналітиків розрахувати параметри у моделях ринкового впливу. Так у випадку наявності ліміт-ціни на ордері, на перший погляд, здається, що метод максимальної правдоподібності надасть задовільні оцінки параметрів моделі. Так, дійсно, для стороннього спостерігача, момент, у якій ціна на акцію вийшла за обмеження встановлені лімітуючою ціною, будуть виглядати як зміна інтенсивності торгівлі до нуля. І згодом, коли ціна повернеться до дозволеного інтервалу внаслідок реверсії, відновлення торгівлі відобразиться у поверненні інтенсивності торгівлі до попереднього значення.

Проте, при сліпому використанні методу максимальної правдоподібності у цьому випадку, отримані значення параметрів будуть значно відхилитися від своїх справжніх значень. Крім того, збільшення розмірів вибірки не призведе до більш точних значень, що вказує на те, що отримані оцінки не є сумісними.

Це відбувається внаслідок того, що інтенсивність торгівлі не є обраною наперед. Якщо вона залежать від траєкторії руху ціни, то вона також буде залежати від шуму, частини у динаміці вартості акції, що спричинена випадковим блуканням. Внаслідок цього, будь-які спостереження здійснені щодо значень ціни акції будуть залежати від всього шляху вінеровського процесу  $W_s$ . Це суттєво ускладнює весь процес обчислення функції правдоподібності, у попередніх випадках результат залежав лише від

значень, які набувало випадкове блукання  $W_S$  у точках, які були обрані в якості спостережень.

До цього часу, науковці не приділяли цьому питанню значної уваги. Так, А. Алмгрен та ін. [172] вказали, що цей ефект може бути «джерелом суттєвої похибки» ([172], с.35), проте все одно здійснювали розрахунок параметрів своєї моделі повністю, ігноруючи наявність лімітуючи цін на деяких метаордерах. Їх аргумент полягав в тому, що виключаючи метаордери, які не були виконані повністю внаслідок обмежень накладених лімітуючою ціною, вони отримували схожі оцінки параметрів. На жаль, це недостатнє обґрунтування для того, щоб ігнорувати наявність лімітів на метаордерах.

Так, навіть залишаючи у вибірці лише метаордери, для яких ціна завжди знаходилася у межах, визначених лімітом, дослідник не лише зменшує обсяг інформації, яку він може використовувати, але й створює «похибку вибірки». У такому випадку він автоматично прибирає з вибірки спостереження, у яких ціна рухалася надто несприятливо, і залишає лише метаордери у яких динаміка ціни була кращою за очікуваною. Як наслідок, параметр розраховані лише на «сприятливих» спостереженнях будуть суттєво занижувати очікувані витрати ринкового впливу.

Цей ефект продемонстровано на рис. 2.17 (чисельні значення використані у його побудові надані у Додатку Ж). На цьому графіку здійснена симуляція виконання двадцяти метаордерів з постійною інтенсивністю торгівлі відповідно до припущень, що були використані у попередньому прикладі (рис. 2.15). Проте у цей час інвестор додатково встановив лімітуючи ціну  $S_{Limit}$ . Коли ціна перетинає цю позначку, торгівля зупиняється. Виконавець продовжує торгівлю лише тоді, коли ціна знову опускається нижче значення  $S_{Limit}$ .

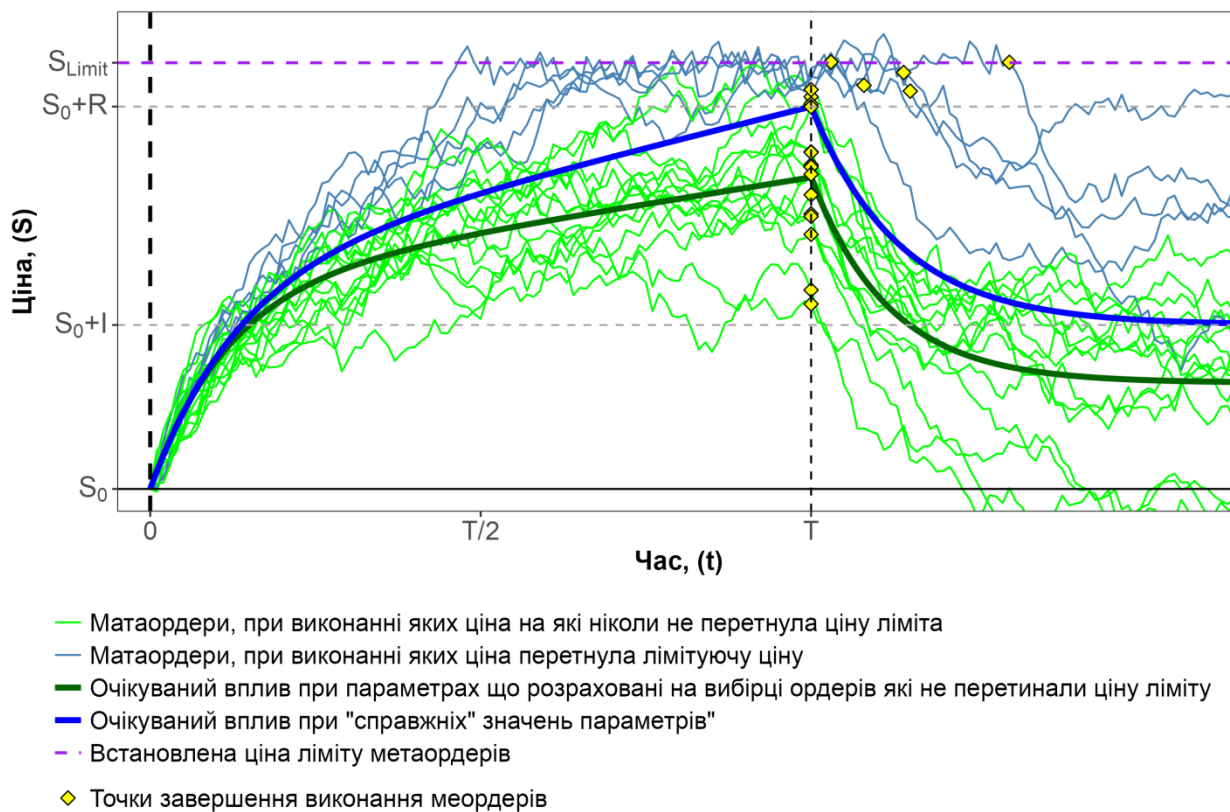
За відсутності торгівлі ціна буде зменшуватися внаслідок реверсії, тому якщо ціна перетнула лімітуючу один раз, у більшості випадків це призведе до наступного циклу:

- 1) ціна перетнула лімітуючу  $\rightarrow$  виконання метаордеру зупинилося;

2) торгівля зупинилася → ціна в середньому зменшується внаслідок реверсії;

3) ціна зменшується і знову повертається у дозволений діапазон → торгівля відновлюється;

4) торгівля знову спричиняє ринковий вплив → і знову рухає ціну вгору.



**Рис. 2.17 Приклад отримання занижених оцінок внаслідок відкидання ордерів, які перетнули ціну ліміту**

*Джерело: Розраховано автором*

На рис. 2.17 це відображається у тому, що ціна, яка перетнула ліміт один раз, продовжує «коливатися» коло неї (світло-сині лінії на графіку). Звісно, це призводить до того, що виконання мета ордеру сповільнюється. Через це завершення мета ордеру відбувається не у запланований момент часу  $T$ , а дещо згодом, коли весь обсяг замовлення виконано. Як наслідок, на рис. 2.17 моменти завершення метаордерів (жовті точки), що відповідають світло-синім траєкторіям цін, знаходяться правіше від  $T$  на осі абсцис.

Якщо дослідник буде ігнорувати наявність ордерів, які перетнули лімітуючи ціну (світло-сині лінії на графіку) та використовуватиме лише ті, що ніколи не перетинали ліміту (світло-зелені криві), то розраховані параметри призведуть до заниження очікуваного впливу метаордеру (темно-зелена лінія) відносно його «справжніх» значень (темно-синя лінія).

Загалом, розрахунок параметрів моделі при наявності ціни ліміту є відкритим питанням у фінансовій науці. На даний момент не існує способу для отримання цих значень, результатом якого були б незміщені та сумісні оцінки.

Теоретично, можна виокремити два потенційні підходи для розв'язку цієї проблеми. Перший полягає у розширенні методу Ф. Лі та ін. [179] і здійснення оцінок максимальної правдоподібності за умови цензування, що були розроблені у працях Е. Каплана та П. Маєра [181]. У цьому підході можна розглядати ціну як процес, спостереження якого є можливим лише до певної величини – границі цензування. При першому перетині цього значення, подальші спостереження ціни акції вважаються «цензурованими», тобто такими, що не відповідають своїм справжнім значенням, проте містять певну інформацію щодо траєкторії ціни [182]. На жаль, у більшості застосувань цих методів здійснюється припущення, що процес цензування є незалежним від процесу, який вимірюється, що не відповідає дійсності у випадку лімітуючи цін. Для успішного використання цензованих оцінок необхідні додаткові дослідження направлені на те, щоб подолати обмеження накладені цим припущенням.

Другим підходом є використання залежних спостережень. Замість того, щоб змінювати спосіб розрахунку оцінок, можна прямо прийняти той факт, що спостереження залежать від всієї тратторії руху цін та моделювати дві величини: власне зміну у ціні і ймовірність з якою вона перетне лімітуючу. Це дозволить прямо вирішувати проблему зміщень у оцінці. Так, теоретично можливо доповнити динаміку ринкового впливу ймовірністю, що шлях процесу не перетне задану величину. Ця величина буде еквівалентною

ймовірності броунівського мосту перетнути задану функцію. Проте, для будь-яких функцій, складніших за лінійну, ця задача не буде мати відомого формульного розв'язку. Знаходження же відповіді методами Монте-Карло, в свою чергу, є дуже вимогливим для обчислювальних ресурсів.

Отже, у цьому розділі було розглянуто ринковий вплив, методи його обрахунку; моделі які використовуються для прогнозування та оцінки транзакційних витрат ринкового впливу.

Як було зазначено у цьому розділі, важливість точної моделі ринкового впливу на всі аспекти інвестування великих компаній важко переоцінити.

По-перше, транзакційні витрати будуть впливати на формування оптимального портфеля – традиційний підхід до інвестування, який використовують пенсійні, пайові та хедж фонди.

По-друге, динаміка ринкового впливу визначатиме найкращу стратегію виконання метаордера брокером або трейдером, за якої зрушення у ціні на фінансовий актив будуть мінімальними.

Нарешті, для інвестора, який використовував посередника у виконанні замовлення, нормалізація емпіричних спостережень витрат відповідно до очікувань, запропонованих відповідною моделлю, надають можливість швидше визначити, який з брокерів надає послуги найвищої якості.

Кожне з цих застосувань, тим чи іншим чином прямо впливає на кінцевий фінансовий результат відповідного учасника інвестиційного процесу. Більш детально приклади оцінки та використання моделей ринкового впливу будуть розглянуті у третьому розділі цієї роботи.

## Висновки до Розділу 2

Дослідження методичного і модельного інструментарію для аналізу трансакційних витрат і, зокрема, витрат ринкового впливу, дало змогу зробити такі висновки:

1. Автором визначено, що серед неявних трансакційних витрат, найбільшого значення у процесі інвестування мають витрати спреду та ринкового впливу, оскільки всі інші частини трансакційних витрат є або фіксованими і відомими наперед, або їх математичне сподівання прямує до нуля за нормальних умов. Витрати спреду становлять компенсацію ризику асиметрії в інформації і плату учасникам ринку, які погодилися провести угоду з інвестором у цей конкретний момент часу. Витрати ринкового впливу виникають внаслідок збурень у нормальній діловій активності ринку, що спричинені проведенням інвестором торгових операцій.

2. Встановлено, що внаслідок конкурентного характеру діяльності з надання ліквідності на фондових ринках, у формуванні розміру витрат спреду виявлені закономірності, які значно полегшують процес їх оцінки та прогнозування за звичайних умов на ліквідних фінансових ринках. В свою чергу, витрати ринкового впливу є значно складнішими для аналізу внаслідок того, що вони формуються в результаті взаємодії багатьох факторів у системі функціонування фондового ринку. Через це, в подальшому дослідження було зосереджено на витратах ринкового впливу.

3. Було з'ясовано, що на даний момент не існує загальної, консистентної та несуперечливої моделі для аналізу та прогнозування витрат ринкового впливу. Автором визначено, що сучасні моделі здатні відобразити лише деякі властивості цієї складової трансакційних витрат та прогнозувати їх величину лише за умови коректності певних (інколи доволі обмежувачих) припущень.

4. Виділено категорії моделей ринкового впливу відповідно до того, з чієї позиції здійснюється моделювання: ендогенні – які описують динаміку

ринкового впливу для конкретного інвестора та екзогенні – які досліджують величину ринкового впливу для всіх учасників торгових операцій загалом. Виокремлено також моделі першого та другого покоління в залежності від того, чи дозволяє їх форма аналізувати реакцію ринкових агентів на проведення трансакції інвестором.

5. Встановлено, що ендогенні моделі прогнозують розмір витрат ринкового впливу за допомогою побудови функціональної залежності між динамікою ціни на акцію та інтенсивністю проведення інвестором торгових операцій.

6. Виявлено, що підходи, які моделюють зміни в ціні на акцію що спричинені трансакціями інвестора, неефективно використовують емпіричні дані. Автором запропоновано використати метод максимальної правдоподібності для розрахунку невідомих параметрів у функціональній залежності між ціною та інтенсивністю торгівлі акції. Автором доведено, що використання цього методу покращує точність прогнозів моделі.

## РОЗДІЛ 3.

### ПРОГНОЗУВАННЯ ТРАНСАКЦІЙНИХ ВИТРАТ РИНКОВОГО ВПЛИВУ ЯК ЧИННИК ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ПРИЙНЯТТЯ ІНВЕСТИЦІЙНИХ РІШЕНЬ НА РИНКАХ АКЦІЙ

#### 3.1. Оцінка якості брокерських послуг на основі функції витрат ринкового впливу операцій з акціями

Як вже зазначалося, однією з нагальних проблем, яка постає перед інвестором – це вибір одного з сотень брокерів, який найкраще б захищав інтереси свого клієнта. Брокери не лише виконують замовлення клієнтів з приводу купівлі-продажу акцій, але й надають послуги фінансування, здійснюють дослідження інвестиційної привабливості фінансових активів та надають поради з приводу управління портфелем.

Проте їх посередницька діяльність у торгівлі була і є основною сферою їх спеціалізації. Відповідно, оцінка інвестором якості послуг брокера, перш за все, залежать від його успіху у виконанні ордерів з найменшими трансакційними витратами. Крім того, брокери здійснюють і цінову конкуренцію: різні посередники будуть вимагати різну компенсацію за свої послуги.

Таким чином, для того, щоб сказати, що послуги певного брокера є найкращими, необхідно порівняти плату, яку стягує брокер у вигляді комісії та середні трансакційні витрати, яких зазнає інвестор, коли замовлення здійснюються через даного посередника. Відповідно, брокер, який здатний виконати ордер з найменшими неявними і явними витратами (враховуючи що брокерська комісія належить до останніх), буде найбільш оптимальним вибором для раціонального інвестора.

У попередніх розділах зазначалося, що оцінка однієї з найбільшої складових трансакційних витрат – витрат ринкового впливу - ускладнюється тим, що велику роль для кожного ордеру відіграють випадкові фактори.

Дійсно, на витрати одного конкретного замовлення впливатиме безліч чинників: характер ринковою кон'юнктури на той момент, чи інвестору пощастило знайти контрагента, який згодний купити у інвестора акції інвестора блоком (оптом), чи замовлення інвестора конкурує з попитом на обмежену ліквідність інших потенційних покупців акції, які випадково вирішили придбати акції у той самий момент, що і інвестор, тощо.

Таким чином, майже неможливо судити про якість надання своїх послуг брокером на основі одного або декількох метаордерів. Високі витрати можуть бути викликані не тим, що якість послуг брокера на низькому рівні, а випадковістю. Наприклад, він міг отримав метаордер у момент, коли ринок переживав короткотермінове зниження активності, а його конкурент – у момент, коли інший ринковий агент прагнув продати великий обсяг акцій. Одиначних прикладів явно недостатньо для того, щоб відповісти який з брокерів є кращим.

Отже, для того, щоб зменшити роль випадковості у цій оцінці, необхідно диверсифікувати вплив зовнішніх факторів внаслідок збільшення спостережень. На практиці це завдання потребує формування вибірок великого обсягу.

Окрім цього, абсолютне значення витрат є малоінформативним. Навіть якщо інвестор володіє інформацією щодо середніх трансакційних витрат, на які він може очікувати при використанні послуг конкретного брокера, ця інформація все одно не допоможе йому прийняти рішення щодо того, чи варто користуватися його послугами.

Для розв'язання цієї проблеми величина очікуваних трансакційних витрат має бути порівняна з очікуваними витратами використання інших потенційних виконавців замовлення. Отже, для того, щоб визначити кращого брокера, недостатньо виміряти лише трансакційні витрати його послуг – необхідно виміряти їх і для всіх його конкурентів. Оскільки величина витрат може бути розрахована лише на основі власного досвіду і власних замовлень, інвестору іноді необхідно співпрацювати і з менш якісними брокерами –

лише для того, щоб зібрати необхідну вибірку і встановити базис для порівняння і оцінки більш гідних кандидатів.

Відповідно, чим ефективніше інформація буде зібрана та використана для оцінки трансакційних витрат, тим менше інвестору доведеться користуватися послугами менш якісного брокера. Таким чином, точність оцінки трансакційних витрат переростає з проблеми, яка є важливою з статистичної точки зору, у проблему, розв'язок якої прямо вплине на діяльність та витрати інвестора.

Прийняття рішень потребують точної оцінки витрат; для точної оцінки потрібна велика вибірка метаордерів виконаних широким колом брокерів, а співпраця з великою кількістю брокерів означає, що певна частина з них буде нижчої якості – що, в свою чергу, призведе до вищих витрат.

На практиці інституційні інвестори підходять до цієї проблеми схожим чином до того, як здійснюється тестування нових продуктів у виробничих компаніях – за допомогою А/Б тестів. З брокером укладається домовленість про здійснення співпраці у «пілотному» режимі. Внаслідок цього, певна невелика частина трансакцій, яку прагне здійснити інвестор, здійснюються через вищевказаного посередника. Після того, як інвестор мав змогу зібрати та оцінити фінансовий ефект наданих послуг та порівняти його з поточними домовленостями на основі меншої вибірки, він може прийняти рішення щодо доцільності здійснення торгівлі через нового посередника.

Оскільки процес зміни брокера є відносно простим у контексті діяльності інвестиційних компаній, учасники фінансового ринку завжди перебувають у пошуку виконавців замовлень, які надають кращі послуги за меншою ціною. Через це, процес оцінки і порівняння поточного брокера з його конкурентами, є постійним процесом для інституційних інвесторів.

Тому певні компанії дещо вдосконалили процес здійснення А/Б тестування брокерів. У останні роки значного поширення набули так звані «колеса алгоритмів» [183] [184]. Їх ідея полягає в тому, що у кожний момент часу інвестор користується послугами певного набору фінансового

посередників. Коли у нього виникає потреба придбати або продати певних обсяг акцій – замовлення призначається одному з брокерів, що обирається випадково.

Трансакційні витрати кожного з учасників «колеса» вимірюється постійно. Коли зібраних даних достатньо для того, щоб визначити, які з претендентів надають послуги гіршою якості від своїх конкурентів, їх прибирають з «колеса» та замінюють новими учасниками.

Таким чином, послуги кожного нового претендента порівнюються з кращими брокерами – тими, які залишилися у «колесі» на основі попередніх оцінок. Перевагою «колеса алгоритмів» є те, що процес тестування відбувається майже автоматично і не потребує створення нового А/Б тесту, у певному сенсі, вся торгівля компанії являє собою один великий тест.

Деякі інвестори ще більше модернізують цей процес і не лише змінюють учасників «колес», але на основі поточної інформації ще й надають більшу чи меншу замовлень брокерам з кращим або гіршим результатом, відповідно. В такому формулюванні завдання зводиться до відомої проблеми у математиці щодо розподілу обмежених ресурсів серед гральних машин з обмеженою інформацією щодо ймовірності виграшу [185].

Проте все ж таки, в переважній більшості випадків, інституційні інвестори використовують більш прості правила для прийняття рішення щодо того, чи брокер має залишатися у «колесі». Вони мають враховувати явні витрати використання того чи іншого фінансового посередника, все коло послуг, які він пропонує, вартість фінансування та стратегічні цілі компанії.

Проте, навіть нехтуючи подібними факторами і намагаючись прийняти рішення щодо доцільності співпраці з одним брокером, тобто відповісти лише на питання чи надає він кращі чи гірші послуги, ніж його конкуренти; інвестор не знаходить простої відповіді. Ключовою проблемою є визначення обсягу даних, які необхідні для того, щоб розділити випадковість та погану якість у послугах брокера. Оскільки, як вже раніше зазначалося, збільшення

емпіричних спостережень прямо впливають на фінансовий результат інвестора, він зацікавлений у точному визначенні цього обсягу.

Отже, важливим є встановлення ефективного критерію відбору брокерів на основі емпіричних даних. Так, нехай інвестиційна компанія розглядає двох брокерів і прагне вибрати того, який надаватиме свої послуги найкраще. Їй відомо про те, що один з факторів на обмеженій вибірці метаордерів становитиме елемент везіння для певного брокера. Компанія запускає А/Б тест для того, щоб визначити напевне: хто з двох кандидатів є кращим. Коли в неї виникає потреба придбати або продати акції, у 50% випадків це замовлення отримує брокер А; у решті випадків це замовлення виконує брокер Б.

Нехай наслідком проведеного експерименту, тобто порівнянні результату діяльності двох посередників, є те, що компанія отримує вибірку трансакційних витрат, які виникли внаслідок торгів на ринку акцій. Нехай для брокера А ця вибірка становить множину  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_{N_A}\}$ . В свою чергу, для брокера Б, виконані ним замовлення призведуть до витрат  $b = \{b_1, b_2, \dots, b_{N_B}\}$ . Якщо тест проходив впродовж доволі довгого періоду часу і у ньому були відсутні статистичні упередження, то розміри двох вибірок мають бути приблизно однаковими:  $N_A \approx N_B$ .

Крім того, якщо об'єми вибірок  $a$  та  $b$  є достатньо великими, то вони дозволяють побудувати емпіричні функції розподілів витрат для обох брокерів. Позначимо  $p_a(x)$  щільність цього розподілу для брокера А та  $p_b(x)$  – для брокера Б відповідно. В такому формулюванні проблема зводиться до задачі традиційної для фінансової науки: вибору найкращого активу за заданого розподілу його дохідності. Єдиною відмінністю буде лише той факт, що у цьому прикладі інвестор прагне не максимізувати дохідність (для заданого рівня ризику), а мінімізувати витрати (те саме, що максимізувати дохід, за умови того що випадкова величина приймає лише від'ємні значення).

Для цього можна використати будь-який з методів, запропонований фінансовою наукою. Наприклад, інвестор може оцінити свою функцію корисності за Нейманом-Моргенштерном [186]  $U(x)$  і обрати брокера для якого результуюча корисність буде більшою. Іншими словами, якщо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x)p_a(x)dx > \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)p_b(x)dx \quad (3.1)$$

то можна буде стверджувати, що послуги брокера А приносять більше корисності для інвестиційної компанії. Відповідно, якщо знак нерівності буде протилежним, те саме можна буде стверджувати для брокера Б.

За умови обмеженої кількості ресурсів та кількості метаордерів, які можуть бути використані для проведення тестування (бюджету метаордерів), цей критерій оцінки є дуже доречним. Проте, коли компанія створює багато замовлень в процесі цієї діяльності, він матиме низку недоліків.

Перш за все, цей метод повністю ігнорує статистичну похибку: так, емпіричні розподіли  $p_a(x)$  та  $p_b(x)$  вважаються завжди істинними, що буде не вірним на вибірках обмеженого обсягу. Якщо кількість замовлень, які компанія може виділити на оцінку брокерів, є фіксованою, то неможливо збільшити кількість спостережень та отримати кращу оцінку цих розподілів. У такому випадку цю похибку доводиться ігнорувати.

По-друге, цей метод не дає відповіді на питання, чи інвестор має достатній обсяг даних для того, щоб розділити, коли висновок про превалювання одного брокера над іншим є наслідком везіння, а – є результатом майстерності брокера. Основне припущення тут полягає у тому, що розподіл результатів не зміниться у майбутньому, тож якщо брокера спіткала удача впродовж тестування, то вона буде спіткати його у майбутньому (або що вона взагалі відсутня). Очевидно, що це доволі нереалістичне припущення, адже елемент везіння у тестуванні на обмежених вибірках присутній, проте цей фактор не є відтворюваною або послідовною характеристикою.

Так, якщо компанія кожен день торгує безліч ордерів, то для неї значно меншу роль відіграє ризик (волатильність) отриманих витрат. Дійсно, на достатньо великих вибірках середній отриманий результат прямує до математичного очікування розподілу (середнього значення вибірки), відповідно до центральної граничної теореми. Це означає, що функція корисності для інвестора буде залежати лише від значення отриманого результату  $U(x) \approx x$ , і тоді корисність для інвестора буде повністю еквівалентна математичному сподіванню:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x)p(x)dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)dx = E[x] \quad (3.2)$$

Тому компанія, яка може виділити безліч ордерів для тестування, яка прагне отримати достовірний результат і при цьому мінімізувати користування послугами гіршої якості, зважатиме лише на те, якими є математичні сподівання витрат відповідних брокерів.

Крім того, оскільки в неї є певна гнучкість у розподіленні ресурсів, для неї набуватиме більшого значення статистична похибка розрахунку маточікування генеральної сукупності.

Таким чином, за умови великої кількості ордерів задача інвестора перетворюється у те, щоб визначити брокера, у якого очікувані середні витрати будуть вищими загалом, враховуючи, що наявна інформація обмежена вибраними спостереженнями. Подібні проблеми часто виникають у багатьох сферах діяльності. Тому статистика має доволі розвинутий апарат для знаходження відповіді на це питання.

Так, інвестор може сформулювати і перевірити статистичну гіпотезу. Нехай  $\mu_a$  та  $\mu_b$  – це середні витрати вибірок  $a$  та  $b$  відповідно. Тоді, якщо можна довести що  $\mu_a < \mu_b$  з певною високою ймовірністю, можна стверджувати, що витрати брокера  $A$  менш за витрати його конкурента. Для цього формулюється базова  $H_0$  та альтернативна  $H_a$  гіпотези :

$$\begin{aligned} H_0: \mu_a &\geq \mu_b \\ H_a: \mu_a &< \mu_b \end{aligned} \quad (3.3)$$

Якщо даних вибірки достатньо для того, щоб відхилити  $H_0$  з певним рівнем статистичної значущості (низькою ймовірності відхилення гіпотези яка насправді є вірною), це вказує що  $\mu_a < \mu_b$  і, як наслідок, малоімовірно, що менші середні витрати брокера А є результатом везіння.

Для перевірки  $H_0$  гіпотези застосовують наступний статистичний критерій. Перш за все, твердження (3.4) можна переформулювати наступним чином:

$$\begin{aligned} H_0: \mu_a - \mu_b &\geq 0 \\ H_a: \mu_a - \mu_b &< 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

В цьому випадку достатньо знати ймовірність, що величина  $\mu_a - \mu_b$  є більшою від нуля, враховуючи її очікуваний розподіл. Для цього необхідно знайти оцінки значень  $\mu_a$ ,  $\mu_b$  та їх стандартне відхилення.

Так, якщо набір  $a$  (обсягом  $N_a$ ) становить множину емпіричних витрат першого брокера, то вибіркове середнє цієї множини становить:

$$\hat{\mu}_a = \bar{a} = \frac{1}{N_a} \sum_{i=1}^{N_a} a_i \quad (3.5)$$

Ця величина також є оцінкою математичного очікування витрат для брокера А загалом. Як відомо, різниця між отриманою оцінкою  $\hat{\mu}_a$  та справжнім значенням середніх витрат для всіх ордерів, що були або будуть коли-небудь виконані цим брокером (якщо припустити стаціонарність розподілу витрат), буде слідувати t-розподілу Стьюдента. А за умови великої кількості спостережень, нормальному розподілу з наступними характеристиками:

$$\mu_a - \hat{\mu}_a \sim N(0, \hat{\sigma}_a^2) \quad (3.6)$$

де  $\sigma_a$ - стандартна похибка математичного очікування

Її значення залежить від загальної дисперсії витрат брокера  $s_a^2$ :

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{s_a^2}{N_a - 1} \quad (3.7)$$

Значення  $s_a^2$  є невідомим, а отже, його також треба оцінити за допомогою відповідної формули розрахунку дисперсії вибірки:

$$s_a^2 = \bar{a} = \frac{1}{N_A - 1} \sum_{i=1}^{N_a} (a_i - \bar{a})^2 \quad (3.8)$$

Для брокера Б оцінка математичного сподівання  $\hat{\mu}_b$  та стандартна похибка  $\sigma_b^2$  також розраховуються відповідно до формул (3.5), (3.7) та (3.8).

Як наслідок, тепер можливо оцінити відповідні значення для різниці:

$$(\mu_a - \mu_b) - (\hat{\mu}_a - \hat{\mu}_b) = (\mu_a - \hat{\mu}_a) - (\mu_b - \hat{\mu}_b) \sim N(0, \hat{\sigma}_a^2) - N(0, \hat{\sigma}_b^2) \quad (3.9)$$

Або:

$$(\mu_a - \mu_b) \sim N(\hat{\mu}_a, \sigma_a^2) - N(\hat{\mu}_b, \sigma_b^2) = N(\hat{\mu}_a - \hat{\mu}_b, \hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_b^2) \quad (3.10)$$

Таким чином, ймовірність того, що різниця середніх витрат брокерів А і Б більша за нуль, становить:

$$P(\mu_a - \mu_b > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_a - \hat{\mu}_b}{\sqrt{\hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_b^2}}\right) \quad (3.11)$$

де  $\Phi$  – кумулятивна функція стандартного нормального розподілу.

Отже, якщо вираз (3.11) є меншим за певне значення рівня надійності (наприклад, 5%), то можна відхилити  $H_0$  на користь її альтернативи  $H_a$  з високою ймовірністю.

Вищеописаний критерій майже повністю еквівалентний стандартному критерію Стьюдента для перевірки гіпотези про рівність середніх двох незалежних вибірок [187]. У даному випадку він був дещо спрощений: відомо, що статистика розподілена як розподіл t-розподіл Стьюдента, який при наявності багатьох спостережень матиме багато ступенів свободи і прямуватиме до стандартного нормального розподілу. Оскільки цей критерій застосовується для даної задачі лише за умови наявності значного обсягу спостережень, був використаний нормальний розподіл.

Розглянемо застосування цього критерію на прикладі. Нехай інвестор зацікавлений у порівнянні витрат торгівлі при застосуванні двох брокерів. Він застосовує А/Б тестування для того, щоб оцінити напевне, який з них є кращим. Внаслідок цього він відправляє кожен метаордер до цих брокерів по черзі.

Припустимо, що ринковий вплив слідує моделі Алмгрена (2.25), (Д.1):

$$S_t = S_0 + \gamma v^\alpha t + \mathbb{1}_{t \in (0, T]} \cdot \eta v^\beta + \sigma \int_0^t dW_s \quad (3.12)$$

з параметрами  $\gamma = 1$ ,  $\eta = 0.75$ ,  $\alpha = \beta = 1$ .

Проте, припустимо, що інвестор на даний момент повністю ігнорує модель динаміки ринкового впливу і повністю концентрується лише на емпіричних значеннях отриманих витрат.

Нагадаємо, що у цій моделі середню премію, яку інвестор заплатить внаслідок ринкового впливу, становить:

$$E[S_{avg} - S_0] = E[J] = \frac{1}{2} \gamma v^\alpha T + \eta v^\beta \quad (3.13)$$

Проте, оскільки кожен з мета ордерів також пливатиме ринковий шум, емпірично це значення буде розраховане за допомогою наступною формули:

$$\hat{J} = \sum_{\text{всі трансакції}} (S_t - S_0) q_t \quad (3.14)$$

де  $q_t$  – кількість акцій обмінаних під час виконання мета ордеру у час  $t$ .

В свою чергу, за умови неперервної і постійної торгівлі з фіксованою швидкістю, цей вираз можна перетворити наступним чином:

$$\sum_{\text{всі трансакції}} (S_t - S_0) q_t \approx \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T/\Delta t} S_{i\Delta t} dt \quad (3.15)$$

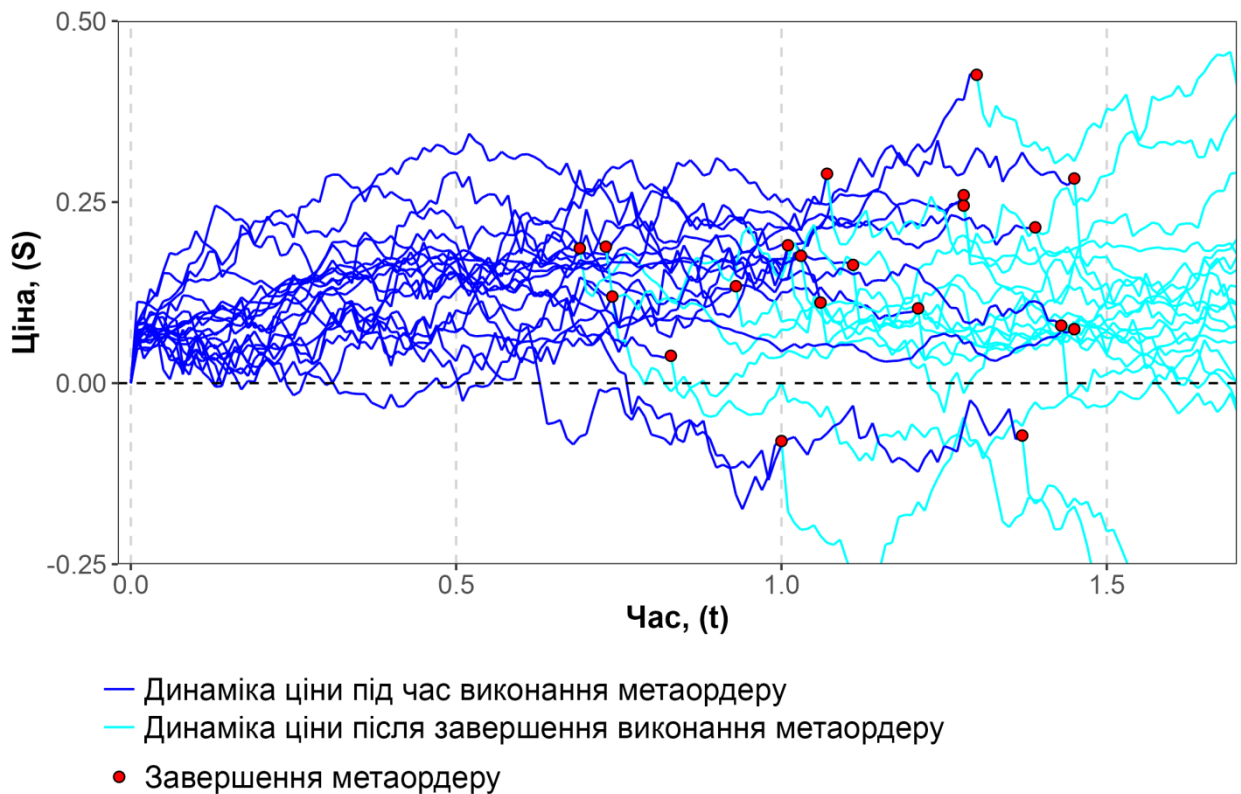
Отже, у цьому прикладі інвестор володіє даними про витрати кожного брокера, виміряні емпіричним шляхом, відповідно до формул (3.14) або (3.15).

Проте сподіватися, що ордери відправлені до обох брокерів будуть повністю ідентичними, є дещо нереалістично: це означало би, що інвестор використовує лише стандартизовані ордери, інвестує лише в одну акції, якою він торгує з однією і тією самою швидкістю впродовж одного й того самого періоду. Окрім цього, ринкові умови та кон'юнктура також залишаються незмінними.

Щоб не встановлювати подібні обмеження, припустимо, що параметри волатильності акції, довжини метаордера та інтенсивності його виконання

змінюються внаслідок зовнішніх процесів (інвестиційної моделі, нової інформації щодо діяльності емітента акцій, тощо), які для інвестора та виконавця є випадковими з позиції торгівлі метаордеру та ринкового впливу. Нехай у цьому прикладі:

- волатильність акції  $\sigma$  є випадковою величиною, що є рівномірно розподіленою на проміжку від 0.05 до 0.2:  $\sigma \sim U(0.05, 0.2)$ ;
- тривалість метаордеру  $T$  становить від 0.5 до 1.5 одиниць часу:  $T \sim U(0.5, 1.5)$ ;
- інтенсивність торгівлі є постійною для кожного замовлення, проте не однаковою для різних метаордерів: від 5% до 15% від ринкового обсягу торгів  $\nu \sim U(0.05, 0.15)$ .



**Рис. 3.1** Приклад симуляції динаміки ціни при виконанні двадцяти мета ордерів

*Джерело: Розраховано автором*

В результаті, очікуваний вплив кожного ордеру буде знаходитися на проміжку  $E[J] \in [0.05, 0.225]$ , що можна розрахувати, підставивши

найбільші/найменші значення вищенаведених розподілів у формулу (3.13). Реально отримані значення можуть виходити за ці обмеження за рахунок ринкового шуму, вплив якого визначається волатильністю  $\sigma$ .

Приклад симуляції динаміки ціни 20-ти ордерів за обраних параметрів наведений на рис. 3.1- за умови нормалізації ціни таким чином що  $S_0 = 0$ .

Отже, інвестор послідовно відправляє метаордери інвестору А і Б, які виконують ці замовлення і спричиняють зміну у цінах, динаміка яких подібна до зображених на малюнку вище. Внаслідок ці траєкторії дозволяють розрахувати середню премію (витрати), яку інвестор сплачує понад початкову ціну  $S_0$ .

Припустимо, що брокер Б є гіршим від брокера А і завжди виконує метаордер з ціною, що є гірше від симульованої на фіксоване значення, наприклад на 0.01 грошову одиницю. Отже, для кожного метаордера, при виконанні якого ціна слідує процесу (3.12), середня ціна, яку отримують брокер А і Б для даного замовлення становитимуть:

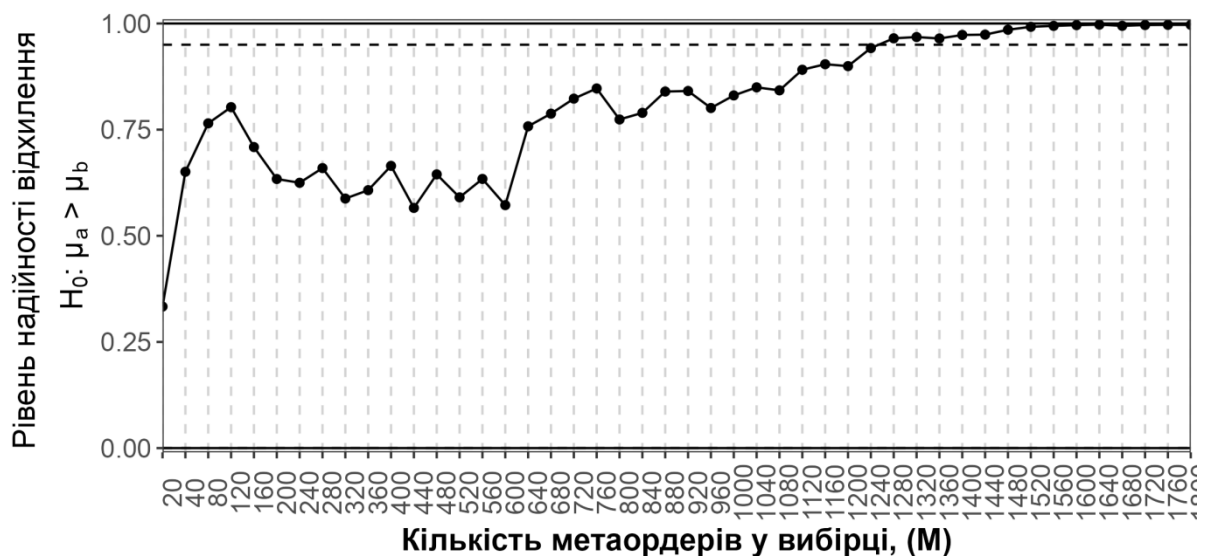
$$\begin{aligned} \hat{J}_A &= \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{\frac{T}{\Delta t}} S_{i\Delta t} dt \\ \hat{J}_B &= \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt + 0.01 \approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{\frac{T}{\Delta t}} S_{i\Delta t} dt + 0.01 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Інвестор не знає, що брокер Б є гіршим від брокера А наперед. Проте він прагне зібрати достатньо спостережень, щоб сказати напевне, який з брокерів є гіршим. Для цього він здійснює перевірку статистичної гіпотези:

$$H_0: \mu_a \geq \mu_b \quad (3.17)$$

яку він прагне відхилити з 95% рівнем надійності.

Цей тест послідовно застосовується під час того, як інвестор відправляє метаордери. Динаміка ймовірності відхилення гіпотези зображена на рис. 3.2. Як бачимо, гіпотеза може бути відхилена з 95% рівнем надійності лише після того, як більше ніж 1200 ордерів були здійснені брокером А та брокером Б (по 600 на кожного виконавця).



**Рис. 3.2** Динаміка ймовірності відхилення статистичної гіпотези того, що витрати брокера А вищі

*Джерело: Розраховано автором*

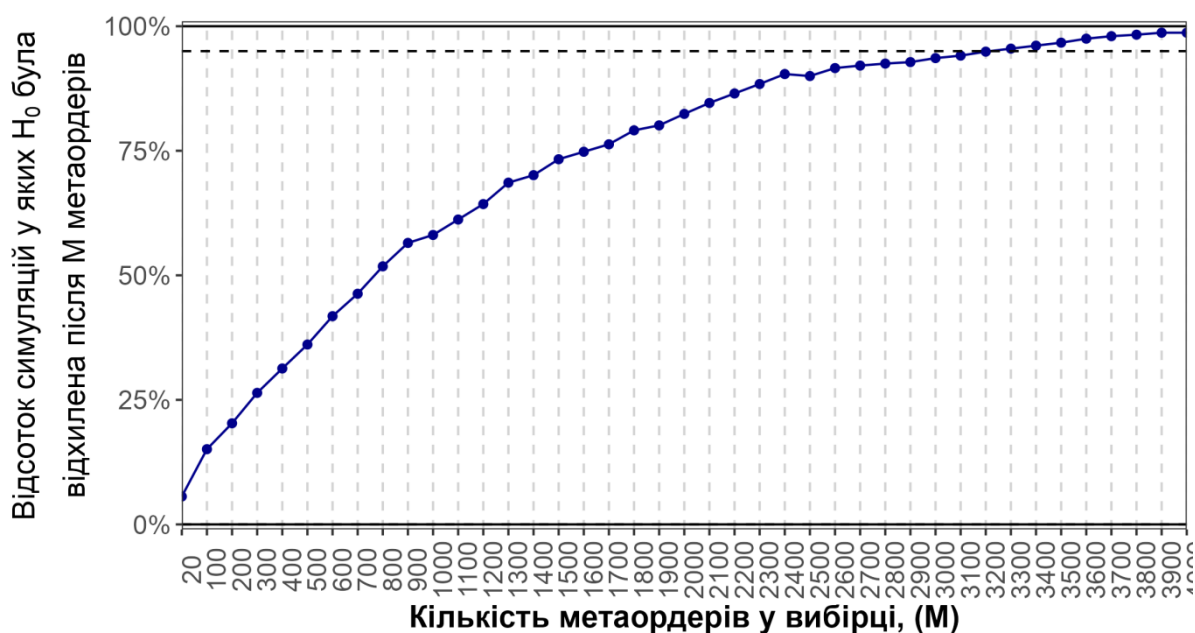
Звісно, рис. 3.2 демонструє розрахунок критерію лише до окремого випадку: очевидно, що в залежності від інших випадкових факторів, кількість ордерів, що необхідна для відхилення гіпотези, може суттєво відхилятися. Так, брокер Б може доволі довго приховувати нижчу якість своїх послуг, якщо половина ордерів, які були відправлені йому на виконання інвестором, є відносно легшою за ті, які отримав брокер А, внаслідок несприятливого збігу обставин. Тому при розгляді тестування гіпотез недостатньо розглядати лише результат однієї симуляції. Таким чином, рис. 3.2 представляє лише демонстрацію того, як один окремих А/Б тест виглядатиме у очах інвестора.

Проте для того, щоб дослідити ефективність критерію не на одиничному прикладі, було здійснена симуляція 1000 А/Б тестів: у кожному інвестор оцінює гіпотезу (3.4) за умови вищенаведених параметрів.

Рис. 3.3 демонструє ймовірність того, що гіпотеза буде відхилена (а отже, послуги брокера Б буде визнано гіршими) після того, як буде відправлено  $M$  ордерів. Тобто, рис. 3.2 відображає упевненість, з якою інвестор може це стверджувати для однієї симуляції, на основі фіксованої кількості ордерів у вибірці; а рис 3.3 – з якою ймовірністю цієї кількості

ордерів буде достатньо щоб дійти цього висновку з 95% рівнем впевненості.  
(3.4)

Таким чином, приклад, зображений на рис 3.2, є одним з тих, в яких удача на стороні інвестора: йому знадобилося лише 1200 ордерів, у той час як, зазвичай, для того, щоб гіпотеза була відхилена у 95% випадків, необхідно близько 3000 замовлень у вибірці.



**Рис. 3.3** Відсоток симуляцій у яких  $H_0$  була відхилена після  $M$  метаордерів

*Джерело: Розраховано автором*

Варто зазначити, що 3.3 зосереджується лише на силі критерію та на даний момент залишає питання зміни похибки першого роду оспоронь.

Крім того, ці значення розраховані лише для конкретного випадку, де значення параметрів та модель витрат були надані. У несимульованому випадку ці кількість факторів, які можуть впливати на результат та кількість шуму у вибірці, може суттєво відрізнятись.

Можна стверджувати, що невизначеність у витратах ринкового впливу у обох вибірках виникає внаслідок двох окремих джерел. Перш за все, це невизначеність пов'язана з власне невизначеністю ринкової кон'юнктури та

випадкового шуму у ціні акції. По-друге, це неоднорідність метаордерів, якість виконання яких оцінюється.

Оскільки метаордери відрізняються за швидкістю та тривалістю виконання, розкид значень ринкових витрат буде ширшим. Це збільшує співвідношення рівня шуму відносно інформації наявного у вибірці і призводить до того, що статистичне тестування гіпотези стає складнішим. Проте ця проблема зазвичай наявна і на практиці. Більше того, кількість факторів, які призводитимуть до неоднорідності вибірки, може бути більшою. Властивості акції, що торгуються, період дня, у який здійснюється замовлення, використання альтернативних майданчиків, це все те, що може вплинути на результуючі витрати.

Проте модель трансакційних витрат ринкового впливу може допомогти у нормалізуванні значень отриманих витрат - принаймні, відносно тих факторів, що явно у неї входять.

Так у рівнянні (3.11) параметри  $\hat{\sigma}_a^2$  та  $\hat{\sigma}_b^2$  є оцінкою дисперсії вибірки витрат брокера А та брокера Б, відповідно. Ймовірність  $P(\mu_a - \mu_b > 0)$  і протилежна їй  $P(\mu_b - \mu_a > 0)$ , мають обернену залежність зі стандартними відхиленнями вибірки. Ідея нормалізації полягає в тому, щоб використовуючи модель трансакційних витрат ринкового впливу, зменшити дисперсію величини, яка порівнюється.

Відповідно, введемо поняття «несподівних витрат» - це та частина, на яку емпіричні значення витрат відхиляються від очікуваних. Іншими словами, якщо виконання мета ордера брокером А призвело до того, що інвестор втратив  $a_i$  внаслідок ринкового впливу, у той час як модель прогнозувала значення  $\hat{a}_i$ , то несподівані витрати становитимуть:

$$\varepsilon_i^{(a)} = a_i - \hat{a}_i \quad (3.18)$$

Таким чином, витрати ринкового впливу складаються з:

- очікуваної частини, передбаченої моделлю. Оскільки для розробки та знаходження параметрів моделі використовуються історичні дані, вона

відображає звичайні витрати інвестора за те, щоб виконати метаордер з заданими параметрами на торгівлю акції з подібними характеристиками;

- несподівані частини. Ця частина витрат викликана факторами, які модель не здатна передбачити або врахувати: характер ринкової кон'юнктури у момент здійснення ордера, якість надання послуг брокером та просто ринковий шум.

Дійсно, оскільки якість послуг брокера не врахована у моделі трансакційних витрат, прибуток або збиток спричинені діями виконавця метаордера, повністю входять до несподіваної частини витрат.

Таким чином, порівнюючи брокера А і Б, не має сенсу порівнювати частину витрат, яка викликана характеристиками метаордера та акції. Отже, замість оцінки ймовірності того, що середні витрати першого брокера перевищують витрати другого  $P(\mu_a - \mu_b > 0)$ , можна оцінити ймовірність того, що несподівані витрати брокера А більші за несподівані витрати брокера Б:

$$P(\varepsilon_a - \varepsilon_b > 0) \quad (3.19)$$

де  $\varepsilon_a$  і  $\varepsilon_b$  – очікувані середні несподівані витрати брокерів А і Б відповідно:  $\varepsilon_a = E[\varepsilon_i^{(a)}]$ ,  $\varepsilon_b = E[\varepsilon_i^{(b)}]$ .

Перевагою цього є те, що дисперсія несподіваних витрат може бути меншою за дисперсію загальних ринкових витрат. Дійсно, згідно властивостей дисперсії:

$$Var[a - \hat{a}] = Var[a] + Var[\hat{a}] - 2Cov(a, \hat{a}) \quad (3.20)$$

Отже, якщо  $Cov(a, \hat{a}) > \frac{1}{2}Var[\hat{a}]$ , то:  $Var[a - \hat{a}] < Var[a]$ , а отже, стандартне відхилення цієї вибірки буде меншою. А тоді, відповідно, ймовірність (3.19) буде меншою і інвестору знадобиться менша вибірка ордерів, щоб відхилити гіпотезу  $H_0$ , якщо вона є невірною.

Чи можна очікувати що  $Cov(a, \hat{a}) > \frac{1}{2}Var[\hat{a}]$ ? Представимо кореляцію як добуток кореляції і стандартних відхилень:

$$\rho(a, \hat{a}) \cdot \sqrt{\text{Var}[\hat{a}] \cdot \text{Var}[a]} > \frac{1}{2} \text{Var}[\hat{a}] \quad (3.21)$$

Або:

$$2 \cdot \rho(a, \hat{a}) \cdot \sqrt{\text{Var}[a]} > \sqrt{\text{Var}[\hat{a}]} \quad (3.22)$$

Таким чином, нерівність буде справджуватися якщо: а) кореляція між витратами ринкового впливу і передбаченнями моделі є високою; б) прогнози моделі мають низьке стандартне відхилення.

Висока кореляція між прогнозами і значеннями, що прогножуються є ознакою точної моделі. Отже, чим точнішою є модель трансакційних витрат ринкового впливу, тим ймовірніше що нерівність (3.22) виконується.

В свою чергу, низьке стандартне відхилення моделі означає, що основна частина невизначеності у витрати привнесена не вибором інвестором акції для торгівлі і не параметрами метаордера, а власне невизначеністю, спричиненою кон'юнктурними коливаннями на ринку. Чим більш подібними є замовлення інвестора за своїми характеристиками (тривалістю, інтенсивністю виконання), тим меншою буде коливання очікуваних витрат  $\text{Var}[\hat{a}]$ .

Отже, чим точніші передбачення надає модель щодо витрат ринкового впливу, та чим більш стандартизованими є метаордери, тим ймовірніше що (3.22) справджується.

Розглянемо попередній приклад, в якому інвестор намагався відхилити гіпотезу про те, що брокера А є гіршим за брокера Б. Нагадаємо, що середня ймовірність, з якою він інвестор міг це зробити з 95% ймовірністю після  $M$  ордерів, зображена на рис. 3.3.

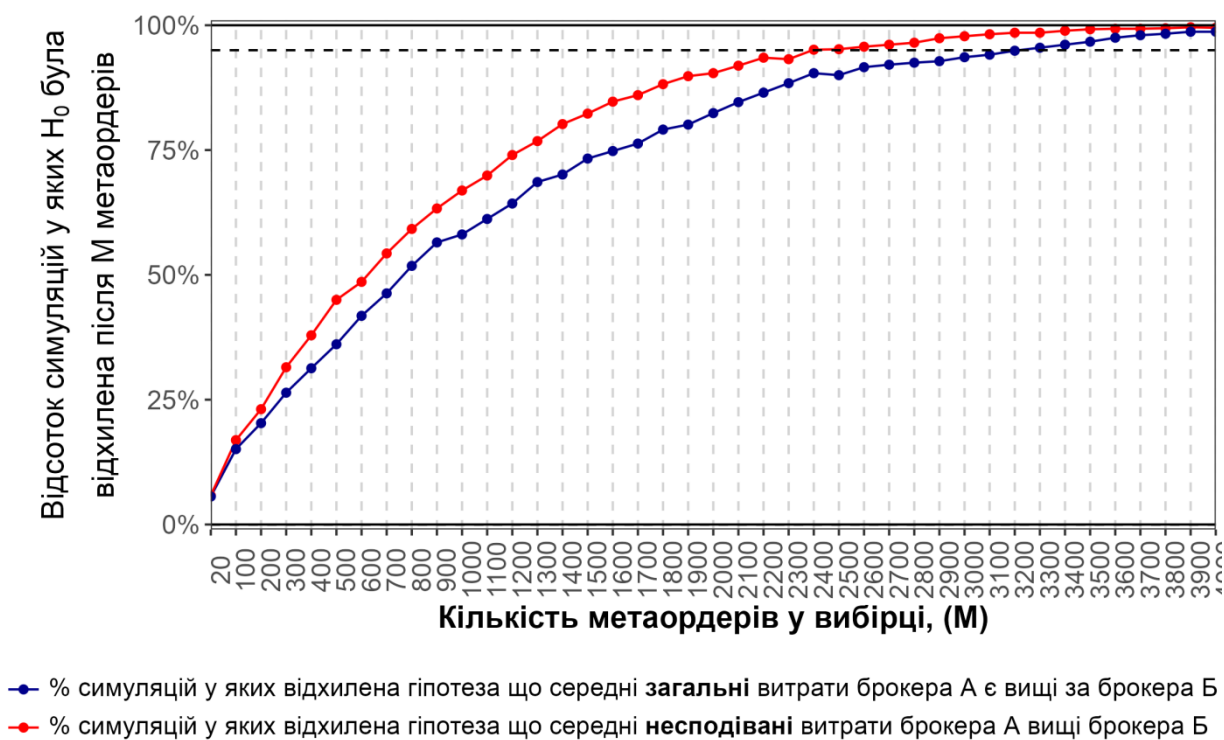
Припустимо, що інвестор знає коректну модель витрат ринкового впливу (3.12) і володіє інформацією щодо справжніх значень параметрів ( $\gamma = 1, \eta = 0.75, \alpha = \beta = 1$ ). Тобто вважається, що інвестор вже використав свої попередні замовлення (здійсненні поза даного А/Б тестування) для розробки моделі трансакційних витрат; при цьому вибірка використаних

метаордерів була достатньо велика, щоб похибкою оцінювання можна було знехтувати.

Отже, тепер інвестор перевіряє наступну статистичну гіпотезу:

$$H_0: E[a_i - \hat{a}_i] \geq E[b_i - \hat{b}_i] \equiv H_0: \varepsilon_a - \varepsilon_b \geq 0 \quad (3.23)$$

На рис. 3.4 зображено як змінився відсоток симуляцій, у якій гіпотеза була відхилена після  $M$ , за умови застосування критерію лише до несподіваної частини загальних витрат. З графіку видно, що якщо у попередньому випадку гіпотеза відхилялася у 95% випадках лише після більше як 3000 ордерів, то при використанні несподіваних витрат це значення зменшилося принаймні до 2500.



**Рис. 3.4. Порівняння ймовірностей, що гіпотеза буде відхилена за умови використання загальних та лише несподіваних витрат**

*Джерело: Розраховано автором*

Таким чином, використання моделі транзакційних витрат дозволяє оперувати на несподіваних витратах, які мають меншу дисперсію. Внаслідок цього, відхилення статистичної гіпотези потребує менший обсяг вибірки. Отже, якщо інвестор обирає з-поміж двох виконавців та використовує саме

статистичний критерій для визначення брокера чікими послугами користуватися, нормалізація витрат дозволяє прийняти рішення на основі меншої кількості відправлених замовлень.

Як наслідок, тестування триває коротший проміжок часу і інвестор менше користується послугами потенційно гіршого брокера. Звісно, якщо модель побудована невірно, тобто має низьку прогностичну здатність (низьку кореляцію з емпіричними витратами) або високу похибку вибірки у оцінених параметрах, то умова (3.22) не буде справджуватися, і використання такої моделі може призвести до гірших результатів.

Таким чином, точність моделі трансакційних витрат і якість оцінки її параметрів прямо впливає на фінансовий результат компанії, оскільки вона дозволяє швидше визначити виконавців, чиї послуги призводять до більших витрат ринкового впливу.

Покращення процесу вибору брокера інвестором призводить до поліпшення ефективності роботи ринку посередницьких послуг, зменшуючи витрати на пошук інформації щодо постачальників цих послуг. Крім того, якщо послуги гіршої якості визначаються клієнтами швидше, це зменшує шанси компаній, які не мають конкурентних переваг, оперувати на цих ринках. Нарешті, якщо клієнт чітко здатний визначити, що певний брокер надає послуги вищої якості, він буде готовий платити вищу ціну за їх отримання. Ця премія, в свою чергу, заохочує посередників покращувати якість своїх послуг, і є стимулом до інновації в цій галузі.

Отже, покращення процедури відбору брокерів призводить до більш конкурентного ринку та покращує інноваційний потенціал у галузі брокерських послуг. Це є особливо актуальним для країн, в якій ринки посередників лише починають процес свого становлення (одним з яких є і ринок України), адже їх ефективна робота виступає мастилом для функціонування всієї фінансової системи.

### **3.2. Вибір оптимального плану виконання метаордеру на фондовому ринку акцій**

У попередніх розділах, майже у всіх випадках, ринковий вплив моделювався за умови постійної інтенсивності виконання. Таке припущення дозволяє суттєво спростити проблему різноманіття можливих алгоритмів торгівлі метаордером або гетерогенність у діяльності трейдерів. У цьому випадку швидкість та характер виконання замовлення характеризується одним числом, яке містить всю інформацію про нагальність метаордеру та відносний рівень, на який збільшується попит на ліквідності внаслідок його виконання.

Сучасний академічна література поділяє усі трансакції на два типи [79]. Перший тип, спричинений інформаційними чинниками, проводиться інвесторами внаслідок того, що вони можуть (або вважають, що можуть) передбачити короточасні зміни у ціні акцій та хочуть діяти на основі цієї інформаційної переваги. Другим типом трансакцій є ті, що були здійснені виключно через потреби у ліквідності: тобто через те, що їх ініціатор потребував перетворення акцій у їх грошовий еквівалент та навпаки. Певним чином до цього типу також можна віднести торгівлю інвесторів, які мають дуже довгий горизонт планування, такі як пенсійні та пайові фонди. Звісно, вони здійснюють інвестування своїх активів на основі аналізу і оцінки доцільності інвестування у ті чи інші інструменти. Проте, оскільки вони намагаються передбачити дохід від інвестицій на багато років вперед, цей аналіз майже не впливає на рішення щодо того, яким саме чином здійснювати ту чи іншу трансакцію. Цей поділ є відносно умовним, і велика кількість торгівельної діяльності має ознаки обох типів.

Проте інституційні інвестори представляють собою основну групу, яка оперує на фінансовому ринку та активно використовує метаордери. Для великої їх частини є характерним здійснення трансакцій, що обумовлені

потребою у ліквідності: перебалансування інвестиційного портфеля, забезпечення готівки для знаття коштів клієнтами, тощо.

У таких випадках інвестори є менш чутливими до щоденних коливань ціни. Через це вони менше зацікавлені в тому, щоб отримати найкращу ціну, відповідно до моменту початку торгів; їх основним критерієм є те, чи їх ціна трансакції є справедливою відносно тієї, яку отримує інші учасники ринку. Крім того, через те, що їх торгівля не містить інформаційної складової, проте матеріально змінюють попит та пропозицію на акцію внаслідок своїх дій, вони зацікавлені у приховуванні своїх замовлень [188].

Внаслідок цього, для них постійна інтенсивність торгів має сенс: у такому разі, метаордер торгується пропорційно до обсягів торгів на ринку. Внаслідок цього, трансакції інвестора «змішуються» з ринковими обсягами торгів. Для стороннього спостерігача це виглядає як збільшення рівня ділової активності на ринку, яку важко співставити з однією трансакцією когось з учасників. Оскільки існує багато причин, чому ділова активність може змінитися: збільшення невизначеності у ціні акції, поява нової інформації щодо вартості акції або проста випадковість через ринковий шум, менш ймовірно, що учасники активно відреагують та змінять свої очікування щодо рівноважної ціни на акцію.

Звісно, через певний час вплив цієї трансакції на попит і пропозицію все ж стане помітним і ціна зміститься у несприятливому для інвестора напрямі. Проте через те, що метаордер виконується з постійною інтенсивністю відповідно до активності торгів на ринку, інвестор сподівається, що ефект буде менш виражений або принаймні зміна у ціні не буде такою раптовою.

Відповідно, через те, що інвестор прагне, щоб його трансакції відповідали трансакціям інших учасників на ринку за своїм обсягом та розподілом у часі, він буде порівнювати середню ціну, за якої метаордер був виконаний, з середньою ціною купівлі або продажу однієї акцій протягом часу, доки це замовлення було активне. Ця його референтна ціна  $p_t^{ref}$  у рівнянні (2.3) становитиме:

$$p_{ref} = \frac{\sum q_i \cdot p_i}{\sum q_i} \quad (3.24)$$

де  $q_i$  – об'єм здійснених операцій купівлі-продажу на ринку протягом часу, доки метаордер виконувався, а  $p_i$  – їх відповідні ціни.

Таким чином, величина  $p_{ref}$  представляє собою середньозважену на обсяг торгів ціну. У фінансовій галузі та у академічній літературі її називають VWAP (volume-weighted average price). Відповідно, стратегії, які направлені на торгівлю метаордеру відповідно до цієї референтної ціни називають VWAP-стратегіями.

Особливостями цих стратегій є те, що для досягнення найкращої середньої ціни відповідно до VWAP, план інтенсивності торгівлі відіграє дуже незначну роль. Дійсно, постійна швидкість виконання метаордера є найкращим планом виконання у такому випадку. Натомість, важливою є ціна трансакцій дочірніх ордерів, відповідно до цін купівлі-продажу на момент їх здійснення. Так, оскільки середній ринковий учасник зазвичай проводить свої трансакції майже рівно посередині між цінами купівлі-продажу, то якщо виконавцю вдається купувати акції завжди за ціною купівлі та продавати за ціною продажу, він зможе здійснити все замовлення за ціною, що буде кращою за референтну приблизно на величину половини спреда.

За таких умов, виконавцю VWAP ордера важливим стає також передбачення обсягу торгів на всьому ринку. Якщо ці прогнози вірні, то він може розмістити дочірнє замовлення за кращою ціною наперед та чекати його виконання. Це є кращою альтернативою того, щоб реагувати на здійснені трансакції на ринку та відправляти термінові ордери на біржі, які закономірно здійснюються за гіршою з цін купівлі-продажу.

Отже, для інвестора, який керується, перш за все, інтересами ліквідності, постійна інтенсивність торгів є найкращою та бажаною стратегією. В такому випадку, для оцінки трансакційних витрат відносно початкової ціни, можна використовувати спрощені формули, в яких інтенсивність вважається незмінною

Проте для інвестора, виконання має займати більш активну позицію, якщо він володіє певною інформацією щодо того, в якому напрямі буде змінюватися ціна, або якщо він використовує в якості референтної ціни ринкову ціну на початок виконання мета ордеру.

Так, якщо інвестор твердо переконаний, що акція зросте у  $\alpha$  разів, збільшення позиції в цьому активі матиме сенс лише доти, доки граничні витрати ринкового впливу є меншими за  $\alpha$ . Дійсно, за умови того, що інвестор абсолютно точно передбачив рух ціни на акцію, прибуток його позиції становитиме:

$$\pi = \alpha Q - C(Q) \quad (3.25)$$

де  $C(Q)$  – трансакційні витрати, яких зазнав інвестор при виконання мета ордеру об'ємом  $Q$ . А отже:

$$\pi \rightarrow \max \Leftrightarrow \alpha = \frac{d}{dQ} C(Q) \quad (3.26)$$

Функція  $C(Q)$  становить суму всіх видів витрат, які постають перед інвестором: комісії, витрати спреду, витрати ринкового впливу, тощо. Тому:

- за умови відсутності дискримінації другого ступеню [144] у встановленні комісій / плат за брокерські послуги, тощо, частина  $C(Q)$ , що відповідає явним витрати, змінюється лінійно від обсягу замовлення;
- за умови того, що виконання здійснюється у середині дня, де значення спреду є стабільним (рис. 2.1), витрати спреду також є лінійною функцією від  $Q$ .

З іншого боку, витрати ринкового впливу можуть не тільки змінюватися нелінійно, в залежності від обсягу торгівлі, але будуть залежати і від розподілу виконання цього обсягу у часі. Іншими словами, план виконання ордеру також матиме значення.

Наведемо наступний приклад. Розглянемо мета ордер, який прагне купити блок акцій з загальною інтенсивністю  $\nu = 5\%$ . Нехай ринковий вплив задається моделлю Обіжаєвої-Ванга з лінійними постійними витратами (2.50) з параметрами  $\mu = 100$ ,  $c = 0.5$ ,  $\rho = 7.5$ . Окрім того,

вважатимемо, що протягом періоду виконання метаордеру ( $T = 1$ ) обсяг ринкових трансакцій поза межами цього замовлення, становить певну величину  $V$ . В такому випадку, кількість акцій, які будуть придбані (а, відповідно, і розмір замовлення), становитиме  $Q = v \cdot V = 0.05 \cdot V$ .

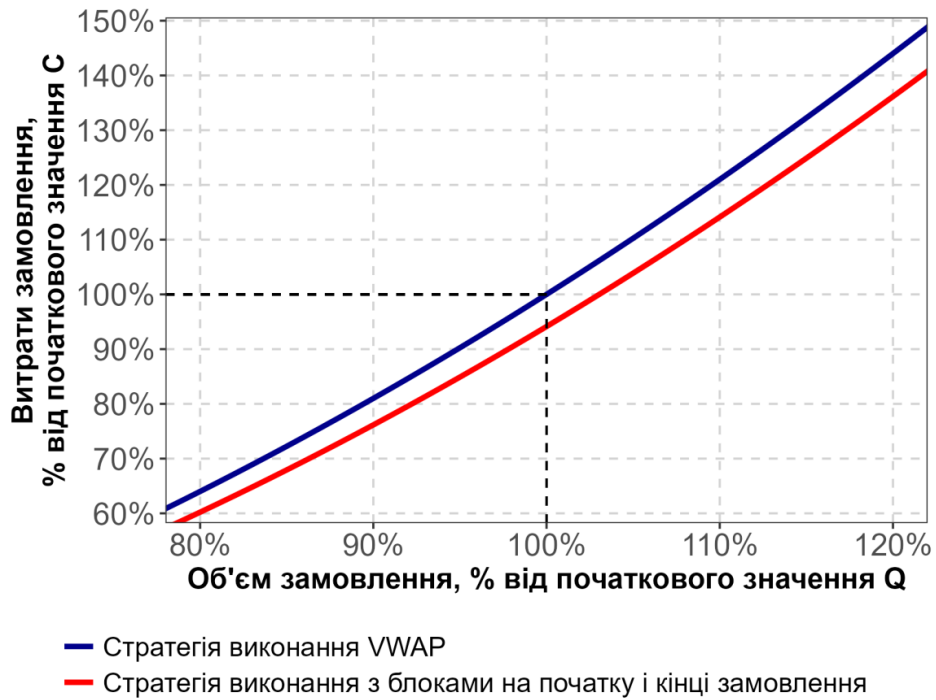
За умови фіксованої тривалості ордеру, єдиним способом, яким виконавець замовлення може збільшити об'єм реалізованих акцій, є збільшення інтенсивності торгівлі. Таким чином, якщо інвестор прагне придбати на 10% більше акцій, інтенсивність торгівлі має збільшитися на відповідний відсоток, до  $v^* = 5.5\%$ .

Таким чином, це відношення дозволяє встановити залежність між об'ємом замовлення та витратами ринкового впливу:

$$C(Q) = \int_0^T q_t \cdot S_t(v_t) dt \quad (3.27)$$

У моделі Обіжаєвої-Ванга (2.50) ринковий вплив є лінійною функцією від інтенсивності торгів  $S_t \propto v_t$ . Отже, відповідна частина витрат буде відображати квадратичну залежність від розміру метаордеру  $C(Q) \propto Q^2$ . Якщо замовлення виконується з постійною інтенсивністю, то при збільшенні або зменшенні обсягу замовлення витрати, ринкового впливу будуть змінюватися відповідно до синьої лінії зображеної на рис. 3.5.

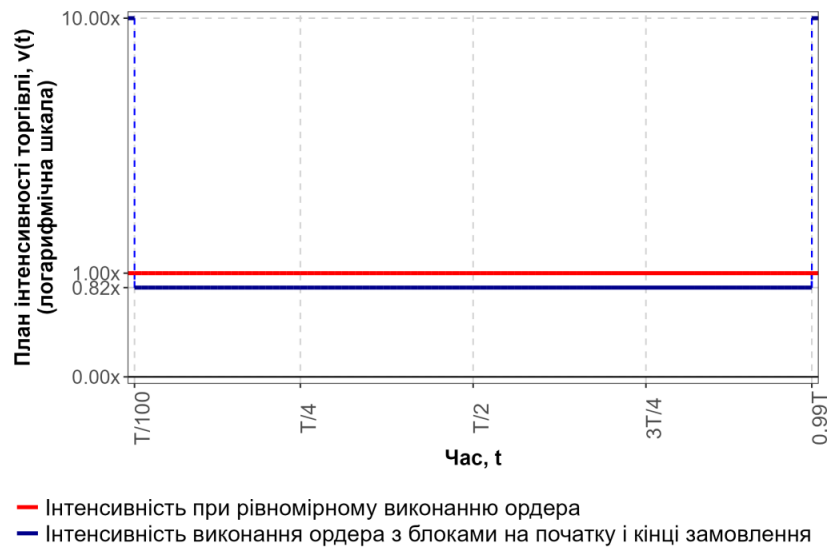
Проте залежність може змінитися. якщо виконавець метаордеру розглядає інші можливі стратегії здійснення торгівлі. Нехай він планує значно збільшити інтенсивність виконання у перші та останні  $T/100$  одиниць у 10 разів. Щоб компенсувати це збільшення в обсязі виконання, він торгуватиме зі швидкістю  $(1 - 2 \cdot \frac{9}{98})v$  протягом всього іншого часу.



**Рис. 3.5 Залежність витрат від об'єму виконання метаордера**

*Джерело: Розраховано автором*

Цей план буде приблизно відповідати стратегії виконання, порівняно великого блоку акцій на початок і кінець метаордера та торгівлі, відповідно до VWAP, увесь інший період. Динаміка зміни  $v_t$  при рівномірній торгівлі та запропонованому плані зображена на рис. 3.6.



**Рис 3.6 Динаміка інтенсивності торгівлі в залежності від обраного плану**

*Джерело: Розраховано автором*

На рис. 3.5 червона лінія відповідає відносній величині витрат ринкового впливу, за умови слідування цьому плану. Як видно з графіку, запропонована стратегія призведе до менших витрат, порівняно з використанням VWAP: виконання блоку акцій на початку і кінці метаордера знижує витрати інвестора на 5-10% у наведеному прикладі. При цьому, чим більшим є ордер, тим більш суттєвою є економія витрат, як у абсолютному, так і у відносному значенні.

Отже, стратегія виконання прямо впливає на транзакційні витрати ринкового впливу. Тому пошук оптимального плану виконання метаордера є нагальною проблемою для інвестора, адже обрана стратегія буде прямо впливати на кінцевий фінансовий результат.

Цю проблему можна прямо виразити математично у вигляді оптимізаційної задачі. Вона полягає у знаходженні такого розподілу торгівлі плану (функції)  $q(t)$  такої яка призводила б до мінімізації / максимізації певної цільової функції  $f$ :

$$\begin{aligned} f(q(t)) &\rightarrow \min \\ \int_0^T q(t)dt &= Q \end{aligned} \quad (3.28)$$

де  $Q$  – об'єм мета ордера,  $T$  – запланована тривалість виконання метаордера.

Зауважимо, що в загальному значенні тривалість  $T$  не обов'язково має бути встановлена певному значенню (так, можна визначити  $T \rightarrow +\infty$ ), оскільки обмеження на те, що загальний об'єм виконання не може перевищувати  $Q$ , а також що функція  $f$ , яка не дозволяє арбітраж (тобто не існує оптимальних стратегій у цій задачі які включають в себе одночасну купівлю і продаж акцій), або додаткове обмеження що  $\forall t: q(t) > 0$ , обумовляють той факт, що в якийсь момент часу торгівля має припинитися:  $\exists T: t > T, q(t) \rightarrow 0$ .

В свою чергу, існує два підходи до того, що саме є цільовою функцією у цій проблемі. Це розділення дещо перетинається з тим, яке застосовувалося

при виборі брокера з послугами виконання метаордера найвищої якості у попередньому розділі.

Так, перший підхід, розглядає транзакційні витрати з позиції оптимізації корисності для несхильного до ризику інвестора. Відповідно, здійснюється пошук стратегії, яка призводить до найкращого балансу між транзакційними витратами та ринковим ризиком, який виникає внаслідок стохастичного характеру ринкового впливу, обумовленого невизначеністю у кон'юнктурі та реакції ринкових агентів на виконання метаордеру.

Отже, якщо корисність інвестора за Нейманом-Моргенштерном [186] задається певною функцією  $U$ , то проблему оптимізації стратегії можна записати як:

$$\begin{aligned} U(-C(q(t))) &\rightarrow \max \\ \int_0^T q(t)dt &= Q \end{aligned} \quad (3.29)$$

Якщо  $U$  являє собою стандартну лінійну функцію, у якій вважається, що ризик повністю виражається дисперсією:

$$U(x) = E[x] - A \cdot Var[x] \quad (3.30)$$

де  $A$  – стала, яка виражає схильність інвестора до ризику, то задача (3.29) становить:

$$\begin{aligned} E[-C(q(t))] - A \cdot Var[x] &\rightarrow \max \\ \int_0^T q(t)dt &= Q \end{aligned} \quad (3.31)$$

Така постановка проблеми враховує невизначеність, яка включена у транзакційні витрати ринкового впливу. Розв'язок цієї задачі призведе до плану, який зменшить ймовірність того, що виконання одного метаордера призведе до значних витрат. За умови того, що інвестор нечасто здійснює торгівлю на фінансовому ринку акцій, цей підхід має суттєві переваги.

Проте, для інвестора, який виконує велику кількість торговельних операцій у різних акціях, цей ризик диверсифікується, адже вплив окремих несприятливих транзакцій буде компенсуватися більш успішними

транзакціями і прямувати до очікуваних значень за умови великого розміру вибірки. В такому випадку інвестор має приділяти меншу вагу невизначеності у витратах ринкового впливу, адже рано чи пізно результат наблизиться до очікуваних значень.

Тому, задача пошуку оптимального плану виконання метаордера формулюється іншим чином для інвестора зі значною кількістю транзакцій:

$$\begin{aligned} C(q(t)) \xrightarrow{q(t)} \min \\ \int_0^T q(t) dt = Q \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ця задача ігнорує випадковий елемент у витратах і вважає, що через великий розмір вибірки інвестор є нейтральним до ризику.

Оскільки задача (3.32) полягає у пошуку відповідної функції, оптимальної динаміки торгівлі, для її вирішення використовують математичний апарат варіаційного числення. Проте на практиці цю задачу спрощують та представляють  $q(t)$  як кусково-лінійну функцію:

$$q(t): \begin{cases} q(t) = q_1, & t \in (0, \Delta t) \\ \dots & \dots \\ q(t) = q_N, & t \in ((N-1)\Delta t, N\Delta t) \end{cases} \quad (3.33)$$

У такому формулюванні задача (3.32) зводиться до проблеми чисельної оптимізації, яку можна розв'язати будь-яким з доступних методів:

$$\begin{aligned} C(q_1, q_2, \dots, q_N) \xrightarrow{q_1, q_2, \dots, q_N} \min \\ \sum_{i=1}^N q_i = Q \end{aligned} \quad (3.34)$$

Очевидним є те, що процес оптимізації всіх представлених задач залежить від виду та форми моделі транзакційних витрат. Дійсно, якщо витрати задаються (3.27), то (3.32) є еквівалентною до:

$$\begin{aligned} \int_0^T q_t \cdot S_t(v_t) dt \xrightarrow{q_t} \min \\ \int_0^T q_t dt = Q \end{aligned} \quad (3.35)$$

Таким чином, динаміка ринкового впливу  $S_t$  прямо входить у цільову функцію. Нагадаємо, що рух ціни за умови вибору виконавцем того чи іншого плану торгівлі є невідомим. Тому,  $S_t$  може бути оцінена лише на основі емпіричних даних, за умови застосування однієї з моделей ринкових витрат, наведених у попередніх розділах.

Через це, характер цільової функції  $i$ , відповідно, розв'язок оптимізаційних задач (3.34) та (3.35), буде залежати від того, яку саме з конкуруючих моделей, представлених у розділі 2.3, виконавець вважає істиною.

Проте є певні висновки, які можна зробити відносно оптимального плану торгівлі, які не залежать від характеру моделі, що використовується. Перш за все, відомо, що витрати ринкового впливу складаються з постійної та тимчасової частини. Так, постійний ринковий вплив – це постійна зміна у рівноважній ціні внаслідок зміни обсягу попиту або пропозиції, що спричинена торгівлею інвестора. Особливістю цього визначення є те, що воно підкреслює, що вплив інвестора обмежений зміною у обсягу попиту або пропозиції. Тобто, зміна у ціні залежить лише від об'єму здійсненого замовлення.

Очевидним є те, що, як би не змінювалась інтенсивність торгівлі інвестора, у підсумку обсяг здійсненої трансакції буде дорівнювати розміру замовлення. Таким чином можна дійти до висновку, що як би не змінювалась інтенсивність виконання метаордера, за умови фіксованого обсягу замовлення, розмір постійного ринкового впливу буде фіксованим.

Дійсно, у всіх моделях, запропонованих у попередніх розділах, очікуваний постійний вплив виражався за допомогою наступної формули:

$$I = c \int_0^T v_s ds \quad (3.36)$$

де -  $c$  – це певна константа;  $v_s$  – план інтенсивності торгівлі; а  $T$  – період торгівлі мета ордера.

Проте ринкова інтенсивність торгівлі вважалася нормованою на обсяг ринкових трансакцій. Якщо ми послабимо це припущення, то рівняння перетворюється у:

$$I = c \int_0^T \vartheta_s V_s ds \quad (3.37)$$

де  $V_s$  – об'єм торгівлі на ринку у момент  $s$ , а  $\vartheta_s$  – план виконання метаордера, який визначає який відсоток від усіх трансакцій на ринку має становити виконання дочірніх трансакцій цього замовлення у час  $s$ .

Відповідно таким означенням, добуток  $\vartheta_s V_s$  становить також об'єм куплених або проданих акцій  $q_s$  в момент  $s$ . Це, в свою чергу, дозволяє поєднати ці величини з тривалістю виконання мета ордера  $T$ . Так відомо, що замовлення буде повністю виконаним, коли сума всіх проведених трансакцій буде дорівнювати об'єму всього замовлення  $Q$ , а отже:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} t: \int_0^t q_s ds = Q \quad (3.38)$$

З рівнянь (3.37) та (3.38) слідує що постійний плив становитиме:

$$I = c \int_0^T v_s ds = c \cdot Q \quad (3.39)$$

І відповідні витрати:

$$C_I = c \int_0^T q_t \int_0^t q_s ds dt = \frac{c}{2} Q^2 \quad (3.40)$$

Отже, величина постійних витрат змінюється відповідно до обсягу замовлення  $Q$  і не залежить від того, яким чином виконання цього обсягу акцій є розподіленим у часі. Відповідно, у процесі знаходження оптимального плану торгів можна сфокусуватися лише на оптимізації витрат, спричинених тимчасовою частиною ринкового впливу та ризиком.

Цей факт є загальноприйнятим у академічних дослідженнях, присвяченим моделям трансакційних витрат ринкового впливу та оптимальному виконанню метаордерів. Тому у подальшому дослідженні

проблеми пошуку оптимального плану у цьому розділі, ця частина ринкового впливу може бути залишена осторонь.

Отже, погляди науковців на те, як має виглядати оптимальний план торгівлі та якими мають бути його загальні характеристики, змінювалися відповідно до того, як з'являлися нові дослідження присвячені моделюванню тимчасового ринкового впливу.

Так, доволі довгий час слідування VWAP, тобто виконання ордеру пропорційно до обсягу ринкових трансакцій, вважалося оптимальною стратегією. Дійсно, як показує А. Алмгрен та Н. Кріс ([131], с.11) за умови лінійних витрат та ризик-нейтрального інвестора така стратегія дійсно призводить до найменших очікуваних витрат ринкового впливу.

Проте вони стверджували що, якщо інвестор принаймні розглядає ризик, як один із вхідних факторів у процес прийняття рішення, то, не зважаючи на свою оптимальність у середньому, такий план торгівлі навряд чи буде оптимальним. Як продемонстрували ці дослідники, навіть при незначному зменшенні очікуваних витрат, можна досягти суттєвого зменшення у невизначеності, пов'язаного з цим значенням, тобто знизити відповідний ризик.

Тому, у моделі Алмгрема-Кріса (2.48) при лінійній функції корисності (3.30) оптимальна стратегія для розв'язку дискретної постановки задачі (3.34) задається рівнянням:

$$q_j^* = Q \frac{2 \sinh\left(\frac{1}{2} k \tau\right)}{\sinh(kT)} \cosh\left(k\left(T - \left(j - \frac{1}{2}\right)\tau\right)\right) \quad (3.41)$$

де  $q_j^*$  – кількість акцій які необхідно виконати на протязом часу дискретизації  $\tau$  на проміжку від  $(j - 1)\tau$  до  $j\tau$ ; а  $k$  визначається через схильність інвестора до ризику та параметри моделі:

$$k = \frac{A\sigma^2}{\eta\left(1 - \frac{\gamma\tau}{2\eta}\right)} \quad (3.42)$$

Детальне доведення цих формул наведено у ([131], с.14).

У свою чергу, за умови вирішення цієї самої задачі у неперервній формі (3.35), вираз дещо спрощується через те, що  $\tau \rightarrow 0$ :

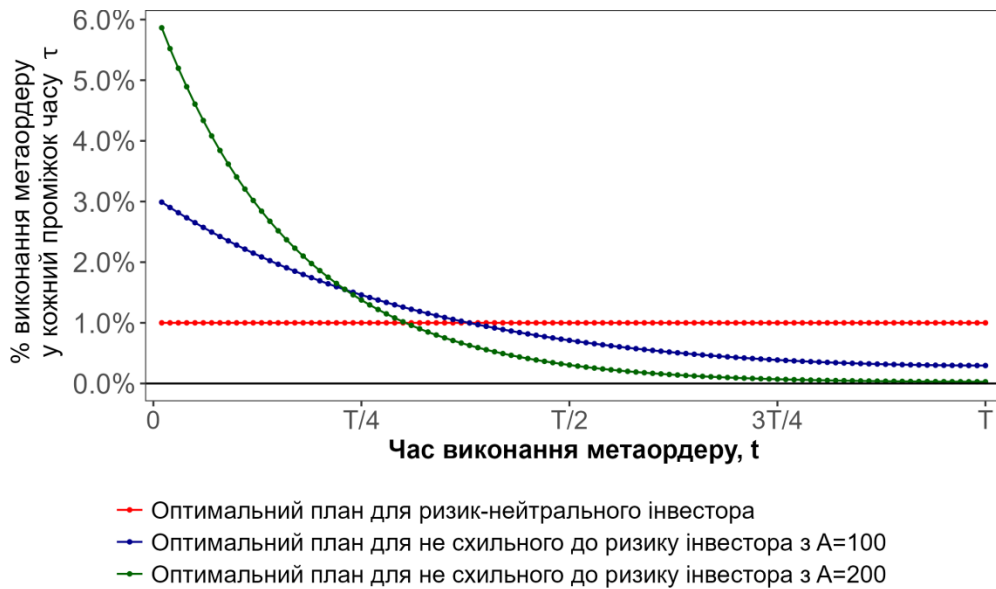
$$\int_0^t q^*(t) dt = Q \frac{\sinh\left(\frac{1}{\eta} A \sigma^2 (T - t)\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\eta} A \sigma^2 T\right)} \quad (3.43)$$

Інтуїтивне пояснення цієї формули наступне. Як відомо, додаткова дисперсія загальних витрат спричинена однією дочірньою трансакцією залежить лінійно від того, скільки часу пройшло від початку торгівлі метаордера ( $Var\left[\frac{\partial C(t)}{\partial t}\right] \sim t$ ) та квадратично від обсягу цієї трансакції ( $Var\left[\frac{\partial C(t)}{\partial t}\right] \sim q^2(t)$ ). В свою же чергу, очікувані витрати будуть залежати лише від обсягу здійснюваної трансакції:  $E\left[\frac{\partial C(t)}{\partial t}\right] \sim q^2(t)$ .

Таким чином, план з мінімізації витрат буде намагатися торгувати рівномірно; у той час як стратегії, що враховують ризик, будуть намагатися бути більш активними на початку мета ордеру через залежність дисперсії від часу.

Рис. 3.7 зображає оптимальні траєкторії інтенсивності здійснення торгівлі для різних значень параметру  $A$  у функції корисності виду (3.30) для одного метаордера з параметрами моделі (2.48):  $\sigma = 0.15$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\eta = 0.75$ .

Так модель Алмгрена-Кріса була однією з перших, яка вказала на залежність витрат від обраного плану торгівлі. Зауважимо, що вона не йшла всупереч загальноприйнятим поглядам на ефективність VWAP – замовлень, адже постійна інтенсивність дійсно призводила до оптимального виконання для ризик-нейтрального інвестора.



**Рис. 3.7 План виконання мета ордера при різних значеннях параметру A**

*Джерело: Розраховано автором на основі формул у [131]*

Проте це не справджувалося для наступної ітерації моделей поширювача. Більше того, не для всіх з них існував теоретичний розв’язок для задачі оптимальної торгівлі.

Так Дж. Газерал та ін. продемонстрували, що для будь-якої моделі з класу моделей поширювача (2.26):

$$S_t = S_0 + \int_0^t f(v_s)G(t - s)ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.44)$$

прикладеної до метаордера купівлі або продажу, оптимальний план буде включати в себе дочірні трансакції як купівлі, так і продажу за умови що  $f(v_s)$  не є лінійною [173]. Це відбувається тому, що в таких випадках сума очікуваних трансакційних витрат входу і виходу з позиції, може стати від’ємною. Це, в свою чергу, означає, що проста купівля і продаж однієї акції призводить до інвестиційного прибутку, навіть без огляду на інвестиційну привабливість цього активу.

Звісно, якщо модель дійсно дозволяє подібний вид арбітражу, то вона поводить себе всупереч багатьом теоретичним концепціям і встановленим емпіричним фактам щодо діяльності фінансових ринків. Так, якби це було

так, то інвестор міг би отримувати необмежений безризиковий прибуток, просто механічно і послідовно купуючи і продаючи акцію; при цьому цей ефект був би стійким, не залежно від того, скільки учасників використовували б його, що суперечить навіть концепції арбітражу.

Окрім того, якщо виконавці метаордерів все ж спробують розглянути оптимальну стратегію для таких замовлень та просто спробують чисельно вирішити задачу у формі (3.34) з додатковим обмеженням, що вся торгівля має відбуватися лише односторонньо:  $\forall i: q_i \geq 0$ , то їх розв'язок буде суттєво залежати від обраного інтервалу дискретизації.

Через ці причини, академічна література, яка розглядає оптимальні стратегії виконання метаордерів при витратах ринкового впливу, що задаються моделями поширювача, встановлює обмеження, що  $f(v_s)$  є лінійною. Через це, розв'язку задачі (3.35) для ринкового впливу у формі Дж. Бушада [132] (2.32) не існує.

Проте робота [180] надає оптимальний план виконання для дещо модифікованого рівняння ринкового впливу у цій моделі, в якому  $f(v_s) \sim v_s$ .

Так, якщо ринковий вплив слідує формулі:

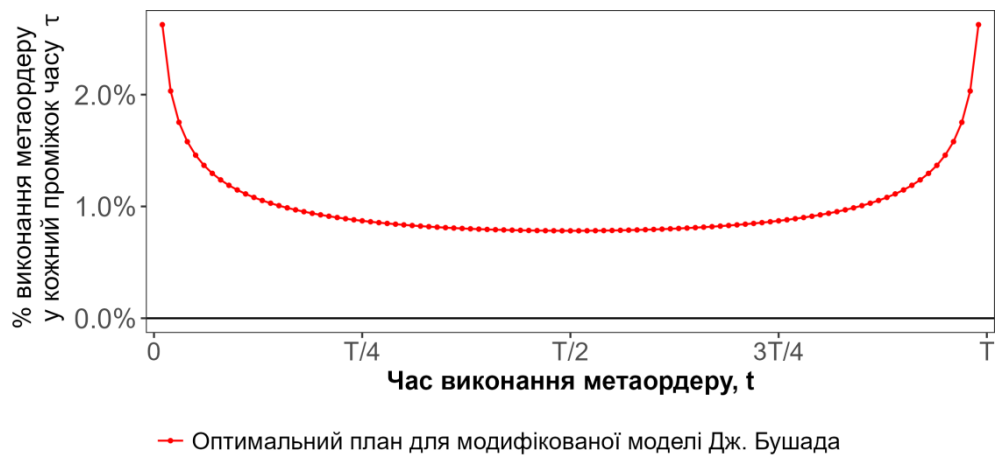
$$S_t = S_0 + \int_0^t v_s \frac{1}{(t-s)^\gamma} ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (2.90)$$

то оптимальний план, який мінімізує витрати  $C(q(t))$  становитиме:

$$q^*(t) = \frac{c}{(t(1-t))^{\frac{1-\gamma}{2}}} \quad (3.45)$$

Динаміка цієї стратегії зображена на рис. 3.8. Відповідно до графіка, ця стратегія полягає у інтенсивній торгівлі на початку і кінці замовлення, що поступово переходить у менш активну фазою у середині метаордеру.

Зазначимо, що через відносно меншу популярність моделі Дж. Бушада, академічна література не пропонує розв'язку задачі пошуку оптимальної стратегії за умови не схильного до ризику інвестора (3.31) у цьому випадку.



**Рис. 3.8** Оптимальний план для моделі Дж. Бушада з лінійним  
МИТТЄВИМ ВПЛИВОМ

*Джерело: Розраховано автором на основі формул у [180]*

Класичною моделлю поширювача вважається модель А. Обіжаєвої та Дж. Ванга [133], рівняння якої наведено у (2.34). У цьому розділі буде розглянута її варіація, яка не включає в себе постійні витрати (2.33), адже, як було вже вказано вище, за умови припущення про лінійність цієї частини витрат ринкового впливу, їх наявність чи відсутність не впливає на оптимальний план (3.40).

А. Обіжаєва та Дж. Ванг у своїй праці [133] навели формули, які описують динаміку оптимальної інтенсивності торгівлі для своєї моделі у всіх випадках, які були розглянуті вище: за умови дискретного часу, при моделюванні ринкового впливу у вигляді неперервної функції; для несхильного та нейтрального до ризику інвесторів. Ці формули були отримані шляхом дискретизації динаміки ринкового впливу чи евристичного підбору функції для розв'язку задачі методом варіаційного числення.

Проте над пошуком оптимального плану виконання для моделей поширювача працювала низка дослідників. Тому декілька подальших праць запропонували більш загальні розв'язки задач мінімізації витрат для моделей поширювача, з яких також можна отримати вирази для моделі А. Обіжаєвої та Дж. Ванга.

Так, у випадку ризик-нейтрального інвестора та дискретизованої функції ринкового впливу, А. Обіжаєва та Дж. Ванг довели, що при дуже малому інтервалі дискретизації, оптимальний план включатиме в себе стратегію, в якій інвестор виконує блок акцій на початку і кінці метаордеру у розмірах:

$$q_0 = q_T = \frac{Q}{\rho T + 2} \quad (3.46)$$

а у решті часу – просто слідує алгоритму VWAP, відповідно до об'єму замовлення, яке залишилося виконати:

$$q_t = Q \frac{\rho}{\rho T + 2} \tau \quad (3.47)$$

Відповідно, цей план буде розв'язком і неперервної задачі мінімізації витрат.

Так у прикладі, наведеному на початку цього розділу (рис. 3.5), було запропоновано стратегію, яка відповідає оптимальній для моделі Обіжаєвої-Ванга. У наданій стратегії на рис. 3.6 виконання метаордеру починалося з блоків що становили 10х об'ємів здійснюваних за одиницю часу  $\Delta t$  усередині ордеру. Цей обраний мультиплікатор є дуже близьким до того, що випливає з формул 3.46 та 3.47:

$$\frac{q_0}{q_t} = \frac{1}{\rho \Delta t} \quad (3.48)$$

що в тій задачі становило би  $\left(7.5 \cdot \frac{1}{98}\right)^{-1} = 13.1$ . Таким чином, альтернативна стратегія виконання ордеру у цьому прикладі була дуже близькою до оптимальною.

У той же час, для несхильного до ризику інвестора, проблема пошуку оптимального плану не має вирішення у закритому вигляді (однією формулою). Проте, А. Обіжаєва та Дж. Ванг показали, що розв'язком задачі (3.31) буде наступна стратегія.

Виконання метаордеру має починатися реалізацією блоку акцій розміром  $q_0$ :

$$q_0 = Q \frac{\mu f'(0) + 2A\sigma^2}{\mu \rho f(0) + 2A\sigma^2} \quad (3.49)$$

де функція  $f$  визначена наступним виразом:

$$f(t) = \frac{v - 2A\sigma^2}{\mu\rho} + \left( -\frac{\mu\rho}{2v} + \exp\left(\frac{\rho v}{\mu\rho + A\sigma^2}(T - t)\right) \left(\frac{\mu\rho}{2v} - \frac{\mu\rho}{v - 2A\sigma^2 - \mu\rho}\right) \right)^{-1} \quad (3.50)$$

$$\text{та } v = \sqrt{4A^2\sigma^4 + 4A\sigma^2\mu\rho}.$$

Після цього ордер має виконуватися з постійною інтенсивністю, яка становитиме:

$$q_t = \mu q_0 \frac{\rho g(t) - g'(t)}{1 + \mu g(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{\mu g'(s) + \rho}{1 + \mu g(s)} ds\right) \quad (3.51)$$

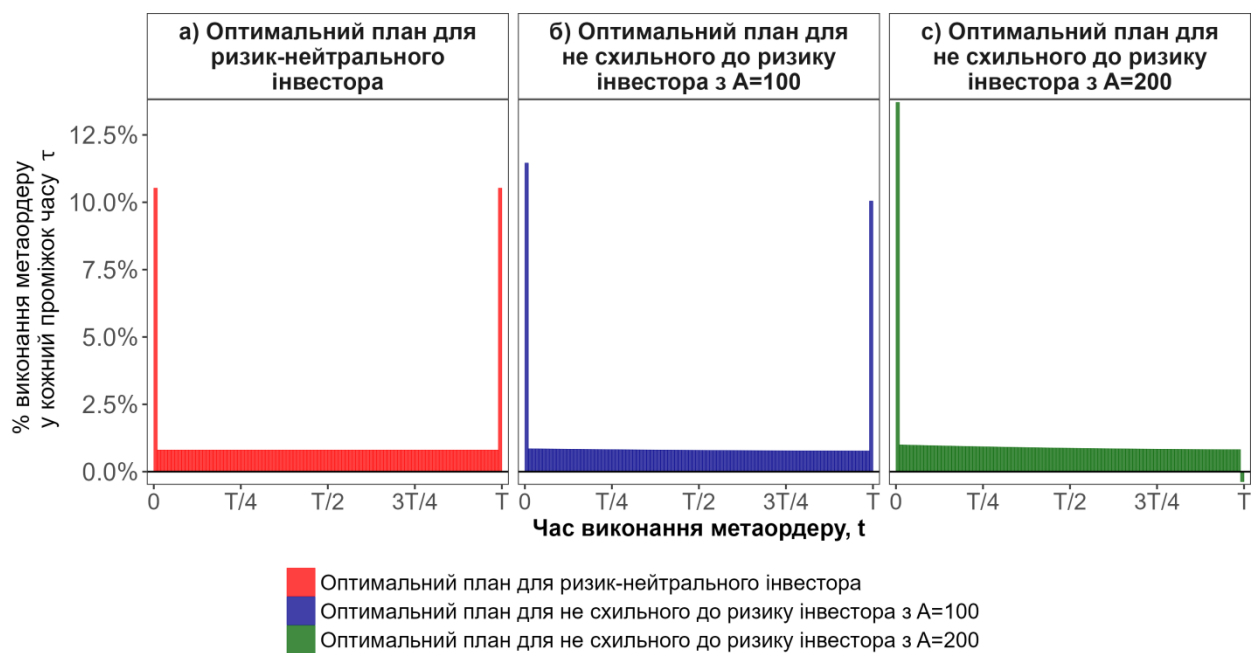
$$\text{і } g(t) = -(f'(t) - \rho f(t))/(\mu f'(t) + 2A\sigma^2)$$

Та, нарешті, у кінці запланованого періоду торгівлі мета ордеру виконавець має здійснити ще один блок на всі акції, що залишилися від початкового об'єму замовлення:

$$q_T = Q - q_0 - \int_0^T q_s ds \quad (3.52)$$

Цей план, складений для несхильного до ризику інвестора, буде характеризуватися тим, що розмір першого блоку та інтенсивність торгівлі на початку виконання замовлення буде вищою від тієї, яку пропонує оптимальна стратегія для ризик-нейтрального власника метаордеру.

Набір прикладів оптимальних стратегій для інвесторів з різною схильністю до ризику наведені на рис. 3.9. Як бачимо, розміри блоків з початку і кінця мета ордеру суттєво залежать від параметру  $A$ .



**Рис. 3.9** Оптимальні стратегії виконання метаордера у моделі Обіжаєвої-Ванга для інвесторів з різною схильністю до ризику

*Джерело: Розраховано автором на основі формул у [133]*

Цікавим спостереженням є те, що при  $A = 200$ , оптимальною стратегією на виконання ордеру з купівлі, буде придбати більший обсяг акцій, ніж встановлено у замовленні та продати надлишок у кінці одним блоком. Це, здавалося, йде дещо всупереч аргументу про відсутність арбітражу у моделі Обіжаєвої-Ванга, наведеного Дж. Газералом у [173]. Нагадаємо, що це твердження означає, що при виконанні метаордера, плани, які включають в себе і купівлю, і продаж акцій (тобто, в яких стратегії виконання змінюють свій знак), ніколи не є оптимальними.

Проте Дж. Газерал довів це твердження лише для випадку, коли інвестор зацікавлений лише у мінімізації очікуваних витрат моделі. Відповідно, для ризик-нейтрального інвестора це твердження буде справджуватися. Проте за умови оптимізації функції корисності інвестора, несхильного до ризику, оптимальні стратегія дійсно може змінювати знак, приклад чого можна бачити на рис. 3.9.

Отже, не зважаючи на відносну складність формули для знаходження оптимального плану, робота А. Обіжаєвої та Дж. Ванга надали розв'язки

задач (3.34) та (3.35) для моделі поширювача, у якій функція миттєвого впливу є лінійною, а функція розпаду виражала експоненціальну залежність від часу.

У той же час, А. Альфонсі та ін. [134] були здатні отримати схожі розв'язки для більш загального виду функції ринкового впливу, розглядаючи задачу оптимальної торгівлі з позиції моделювання книги ордерів на фінансових біржах (2.43). Вони запропонували вирази для опису динаміки ціни та пропозиції на ринку при рівномірному процесу відтворення ліквідності для будь-якої форми розподілу замовлень у книзі ордерів. Ці два припущення означали, що динаміка ринкового впливу була еквівалентною до моделі Обіжаєвої-Ванга з експоненціальною функцією розпаду ( $G(t-s) \sim e^{-(t-s)}$ ), але дозволяла використовувати довільну функцією миттєвого ринкового впливу  $f(v_s)$ .

Формулювання ринкового впливу через процеси пропозиції ліквідності на акцію дозволило їм перетворити задачу пошуку дискретного оптимального плану виконання (3.34) на задачу динамічного програмування. Внаслідок, вони розв'язали рівняння Беллмана та отримали оптимальну стратегію для ризик-нейтрального інвестора, яка також полягала також у:

- здійсненні блоку на початку мета ордеру, розміром  $q_0$ , що є розв'язком рівняння:

$$f(Q - Nq_0(1 - e^{-\rho\tau})) = \frac{f^{-1}(q_0) - e^{-\rho\tau}f^{-1}(e^{-\rho\tau}q_0)}{1 - e^{-\rho\tau}} \quad (3.53)$$

де  $f^{-1}$  – обернена функції миттєвого впливу  $f$ , а  $N = T/\tau$ .

- виконанню блоку на кінець замовлення, обсягом  $q_N$ :

$$q_N = Q - q_0 - (N - 1)q_0(1 - e^{-\rho\tau}) \quad (3.54)$$

- та слідування ринковому об'єму трансакцій, відповідно до VWAP:

$$q_i = q_0(1 - e^{-\rho\tau}), \quad \forall i = 1, \dots, N - 1 \quad (3.55)$$

Розв'язок запропонований А. Обіжаєвою та Дж.Вангом є частковим випадком рівнянь (3.53), (3.54), (3.55) в яких  $f(v_s) \sim v_s$  (а, отже, і  $f^{-1}(v_s) \sim v_s$ ).

У той же час, Дж. Газерал та ін. [180] змогли узагальнити цю стратегію з іншої позиції. Вони стверджували, що відповідно до результатів праці [173], у моделях поширення буде відсутня можливість арбітражу лише, тоді коли функція миттєвого впливу є лінійною:  $f(v_s) \sim v_s$ . Отже, доцільно розглядати лише такі випадки, проте дозволяти обирати довільну форму функції розпаду  $G(t - s)$ .

В цих випадках вчені довели, що якщо  $G(t - s)$  є позитивно визначеною, то стратегія  $q^*(t) = \phi(t)$  буде оптимальною для ризик-нейтрального інвестора тоді, і тільки тоді, коли існує така константа  $\lambda$ , що  $q^*$  є розв'язком узагальненого інтегрального рівняння Фредгольма виду:

$$\int G(|t - s|)\phi(t) ds = \lambda \quad (3.56)$$

Так, наприклад, для моделі Обіжаєвої-Ванга,  $G(t - s) \sim e^{-\rho(t-s)}$ , оптимальною стратегією є вираз:

$$q^*(s) = \phi(s) = \frac{Q}{\rho T + 2} (\delta_0(s) + \rho s + \delta_T(s)) \quad (3.57)$$

де  $\delta_a(x)$  – дельта-функція Дірака.

В цьому можна переконатися, якщо підставити вираз (3.57) у (3.56):

$$\begin{aligned} \int G(|t - s|)\phi(t) ds &= \frac{Q}{\rho T + 2} \int_0^T e^{-\rho|t-s|} (\delta_0(s) + \rho s + \delta_T(s)) ds \\ &= \frac{Q}{\rho T + 2} \cdot \left( e^{-\rho t} + \rho \int_0^T e^{-\rho|t-s|} ds + e^{-\rho|t-T|} \right) = \frac{2Q}{\rho T + 2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Отже,  $\lambda = \frac{2Q}{\rho T + 2}$ , і це значить що вираз (3.57) є дійсно оптимальним планом.

Зазначимо, що припущення про лінійну  $f(v_s)$  та довільну  $G(t - s)$ , є дещо комплементарним до випадків, які розглядали А. Альфонсі та ін. [134], адже у їх формулюванні було запропоновано зафіксувати функцію розпаду  $G(t - s) \sim e^{-(t-s)}$  та обрати будь-яку форму для миттєвого впливу  $f(v_s)$ .

**Оптимальні плани виконання замовлення відповідно до обраної моделі**

ОМодель		Вираз
<b>Модель Алмгрена-Кріса</b> [131]	Формула моделі:	$S_t = S_0 + \gamma vt + \mathbb{1}_{t \in (0, T]} \eta v + \sigma \int_0^t dW_s$
	<b>Оптимальний план</b> Ризик-нейтральний інвестор Не схильний до ризику інвестор	$q_j^* = Q\tau$
		$q_j^* = Q \frac{2 \sinh\left(\frac{1}{2}k\tau\right)}{\sinh(kT)} \cosh\left(k\left(T - \left(j - \frac{1}{2}\right)\tau\right)\right)$
<b>Модифікована Модель Бушад</b> [132], [180]	Формула моделі:	$S_t = S_0 + \int_0^t v_s \frac{1}{(t-s)^\gamma} ds + \sigma \int_0^t dW_s$
	<b>Оптимальний план</b> Ризик-нейтральний інвестор Не схильний до ризику інвестор	$q^*(t) = c(t(1-t))^{-\frac{1-\gamma}{2}}$
		-
<b>Модель Обіжажєвої-Ванга</b> [133]	Формула моделі:	$S_t = S_0 + \mu \int_0^t v_s e^{-\rho(t-s)} ds + \sigma \int_0^t dW_s$
	<b>Оптимальний план</b> Ризик-нейтральний інвестор Не схильний до ризику інвестор	$q_0 = q_T = \frac{Q}{\rho T + 2}, \quad q_t = Q \frac{\rho}{\rho T + 2} \tau$
		Вирази (3.49), (3.51), (3.52)
<b>Узагальнення А. Альфонсі та ін.</b> [134]	Формула моделі:	$S_t = S_0 + \int_0^t f(v_s) e^{-\rho(t-s)} ds + \sigma \int_0^t dW_s,$ де $f(v_s)$ - довільна
	<b>Оптимальний план</b> Ризик-нейтральний інвестор Не схильний до ризику інвестор	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>q_0</math>, що розв'язує:</li> </ul> $f(Q - Nq_0(1 - e^{-\rho\tau})) = \frac{f^{-1}(q_0) - e^{-\rho\tau} f^{-1}(e^{-\rho\tau} q_0)}{1 - e^{-\rho\tau}}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>q_N = Q - q_0 - (N-1)q_0(1 - e^{-\rho\tau})</math></li> <li>• <math>q_i = q_0(1 - e^{-\rho\tau}), \forall i = 1, \dots, N-1</math></li> </ul>
		-
<b>Узагальнення Дж. Газерала ін.</b> [180]	Формула моделі:	$S_t = S_0 + \int_0^t v_s G(t-s) ds + \sigma \int_0^t dW_s,$ де $G(t-s)$ - довільна
	<b>Оптимальний план</b> Ризик-нейтральний інвестор Не схильний до ризику інвестор	$q^*(s)$ така що $\exists \lambda$ щоб виконувалося: $\int G( t-s ) q^*(s) ds = \lambda$
		-

*Джерело: Складено автором на основі [131], [132], [133], [134], [180]*

Таким чином, можна спостерігати, що розв'язок задачі оптимального плану торгівлі нерозривно пов'язаний з обраною моделлю траєкторії ринкового впливу. Впродовж років, по мірі того, як розвивалися погляди на характер залежності між ціною та динамікою виконання метаордера, змінювалися і висновки щодо того, якою має бути найкраща стратегія

торгівлі акцією. Спочатку науковці розглядали кожну модель окремо, намагаючись знайти найкращий план виконання відповідно до однієї із обраних ними динамік ринкового впливу. Проте подальші дослідження у цій сфері намагалися узагальнити запропоновані розв'язки для більш широких класів моделей.

Табл. 3.1 підсумовує розв'язки задач оптимального плану виконання замовлення для певного набору моделей, розглянутих у попередніх розділах.

На даний момент у фінансовій науці превалюють переконання, що для моделей поширювача, оптимальним планом виконання буде здійснити блок на початку і кінці ордеру, та слідувати VWAP у середині ордеру (для ризик-нейтрального інвестора) або торгувати зі спадаючою інтенсивністю (для не схильного до ризику інвестора).

### 3.3. Формування оптимального портфелю акцій з урахуванням трансакційних витрат ринкового впливу

У попередньому розділі ми розглянули, яким саме чином моделі витрат ринкового впливу буде визначити оптимальний план виконання метаордера. Проте це не єдине застосування даних моделей. Так, окрім визначення розміру ринкового впливу, в залежності від інтенсивності торгівлі, вони здатні також передбачати ефект, який трансакційні витрати матимуть на кінцевий результат, тобто, на чистий прибуток, отриманий в результаті інвестування у фінансовий ринок акцій.

Внаслідок цього, обсяг прогнозованих витрат буде прямо впливати на рішення, які приймає інвестор в процесі своєї діяльності.

Так, наприклад, задача формування оптимального портфелю призведе до значної різниці у наборі та відносній вазі акцій, що входять до його складу відповідно до того, чи бере інвестор до уваги трансакційні витрати ринкового впливу, чи повністю їх ігнорує.

У цьому розділі буде продемонстрований цей ефект на симульованому прикладі. Крім того, буде показано, що не тільки лише врахування трансакційних витрат призведе до різниці у оптимальних портфелях, але й точність оцінки параметрів у моделі ринкового впливу. Тому метод оцінки коефіцієнтів прямо впливатиме на фінансовий результат.

Розглянемо інвестора, який прагне інвестувати свої заощадження у певний набір акцій та скористатися всіма перевагами диверсифікації. Відповідно до Г. Марковіца [1] та сучасної портфельної теорії, портфелі, які будуть пропонувати найменший ризик за встановленого рівня доходності, формуватимуть ефективну межу.

Якщо інвестор розглядає  $N$  акцій, які потенційно можуть входити у майбутній портфель, то для кожного фіксованого значення доходності  $s$  існуватиме такий набір відносної ваги кожної акції у новоствореному портфелі  $w$  (вектор розмірністю  $[1 \times N]$ ), який мав би найменший ризик. Для

знаходження пропорцій, з якими інвестор має придбати кожний з фінансових активів задля досягнення цього результату, необхідно розв'язати наступну оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} \sigma_p^2(w) = w^T \Sigma w \rightarrow \min \\ r_p(w) = w^T R = c \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{cases} \quad (3.59)$$

де:

- $w$  – вектор  $1 \times N$ , що відповідає вагам акцій у оптимальному портфелю (відносно цього вектора здійснюється оптимізація);
- $\sigma_p^2(w)$  – ризик, який виражається як дисперсія дохідності всього портфеля;
- $\Sigma$  – матриця коваріації між акціями (розмірністю  $N \times N$ );
- $r_p(w)$  – очікувана дохідність портфеля;
- $R$  – очікувана дохідність кожної з  $N$  акцій (вектор  $1 \times N$ );
- $c$  – встановлений рівень дохідності.

Відповідно, зміна в очікуваній величині дохідності портфеля  $r_p = c$  та розв'язок задачі (3.59), дозволяє поставити у відповідність кожному значенню  $c$  вектор  $w(c)$ , який відповідатиме портфелю з найменшою ризиковістю. Величина цього ризику розраховуватиметься як дисперсія дохідності портфеля з вагами акцій  $w(c)$ :  $\sigma_p^2(w(c))$ , або еквівалентною йому величиною – стандартним відхиленням очікуваного прибутку:  $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2(w(c))}$ . Відповідно, якщо відобразити на одному графіку величини  $r_p(w(c)) = c$  та  $\sigma_p(w(c))$  для всіх можливих  $c$ , то отримана крива буде становити ефективну межу.

Продемонструємо це для конкретного випадку. Нехай інвестор розглядає  $N = 5$  різних акцій. Припустимо, що він здійснив ретельний аналіз цих фінансових інструментів та зміг безпомилкового визначити очікувану

дохідність кожної акції та асоційований з цим ризик. Більше того, інвестор бездоганно зміг оцінити сили зв'язків між компаніями та розрахувати матрицю кореляції між ними. Тобто, оскільки сам інвестиційний процес знаходиться поза зоною інтересів наведеного прикладу, тут і далі буде припускатися, що інвестор володіє всією можливою інформацією щодо інвестиційної привабливості цих п'яти акцій.

Тому очікувана дохідність  $R$ , вектор стандартних відхилень  $\sigma$  та матриця кореляції між дохідностями цих фінансових інструментів  $\rho$  (згенерована відповідно до методу описаного у [189]) вважаються заданими. Їх значення наведені у Додатку 3.

Відповідно, на основі цих вхідних параметрів можливо розрахувати матрицю коваріації  $\Sigma$ , що становитиме:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma) \cdot \rho \cdot \text{diag}(\sigma) \quad (3.60)$$

Внаслідок, інвестор володіє значеннями  $\Sigma$  та  $R$ , що необхідні для знаходження ефективної межі, відповідно до виразу (3.59). Одним зі способів здійснення цього є, варіюючи параметр  $c$ , розв'язувати задачу квадратичної оптимізації чисельно.

Проте для традиційного формулювання проблеми пошуку ефективної межі існує і закритий (формульний) розв'язок. Так ефективна межа являтиме собою функцію  $\sigma_p^2(c)$  (або  $\sigma_p^2(r_p)$ , оскільки на ефективній межі  $r_p = c$ ), що графічно становитиме параболу, задану наступним рівнянням:

$$\sigma_p^2 = \frac{\left( (\mathbb{1}'\Sigma^{-1}\mathbb{1}) \cdot r_p^2 - 2(R'\Sigma^{-1}\mathbb{1}) \cdot r_p + R'\Sigma^{-1}R \right)}{(R'\Sigma^{-1}R)(\mathbb{1}'\Sigma^{-1}\mathbb{1}) - (R'\Sigma^{-1}\mathbb{1})^2} \quad (3.61)$$

де  $\mathbb{1}$  – вектор з  $1 \times N$  одиниць.

Ефективна межа знайдена для цього випадку наведена на рис. 3.10.

Проте, окрім загальних недоліків підходу Марковіца до визначення множини оптимальних портфельів (таких як надмірна чутливість розв'язку до вхідних даних, моделювання на основі лише двох моментів дохідності, тощо), існує один, який є дуже важливим у цьому конкретному контексті: ігнорування трансакційних витрат.

Тому включимо витрати ринкового впливу у формулювання проблеми оптимального портфелю. Так, відповідно до визначення трансакційних витрат, купівля або продаж акцій буде призводити до несприятливої зміни у ціні на цей фінансовий інструмент. Як наслідок, очікувана дохідність активу буде падати. Введемо додаткову функцію  $C$  яка буде виражати цю зміну.

У попередніх розділах було продемонстровано, що чим більшою є трансакція, тим сильнішим буде ефект, який вона матиме на ринкову рівновагу, і, як наслідок, тим більше вона зменшить очікувану дохідність. Таким чином, функція  $C$  повинна залежати від того, на скільки збільшилася або зменшилася позиція інвестора у фінансових інструментах, які він розглядає. Оскільки інвестор розглядає формування нового портфеля (а не перебалансовку вже існуючого), початкова вага кожної акції є рівною нулю. А отже, об'єм трансакцій буде повністю визначатися кінцевим розподілом акцій у портфелі і буде пропорційним абсолютному значенню їх ваги  $|w|$ .

Отже, реальна дохідність, яку отримає інвестор в результаті включення трансакційних витрат до моделі, становитиме:

$$r_p = w^T R - C(|w|) \quad (3.62)$$

Оскільки інвестор зацікавлений в мінімізації свого ризику відповідно до реального доходу, то і проблема оптимізації портфеля перетворюється на:

$$\begin{cases} \sigma_p^2(w) = w^T \Sigma w \rightarrow \min \\ r_p(w) = w^T R - C(|w|) = c \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{cases} \quad (3.63)$$

Для подальшого розв'язку цієї задачі чисельно, необхідно визначити характер залежності функції  $C(|w|)$  – тобто, розмір витрат ринкового впливу від обсягу трансакції.

Як було показано у попередніх розділах, для зображення цієї залежності існує ціла низка різноманітних моделей. Для простоти припустимо, що витрати інвестора задаються лінійною моделлю трансакційних витрат Алмгрема та Кріса [131]. Нагадаємо, що згідно до базової форми цієї моделі,

очікувана зміна у ціні акцій при торгівлі з постійною інтенсивністю буде відповідати наступній лінійній функції:

$$S_t = S_0 + \gamma vt + \mathbb{1}_{t \in (0, T]} \cdot \eta v + \sigma \int_0^t dW_s \quad (3.64)$$

А отже, використовуючи формулу (3.27) очікуваний розмір витрат для однієї акції  $i$  з обсягом ордеру  $Q_i$ , буде становити інтеграл від цього виразу:

$$E[C_i(Q_i)] = E \left[ \int_0^T q_t S_t dt \right] \quad (3.65)$$

Що за умови рівномірної торгівлі спрощується до:

$$E \left[ \int_0^T q_t S_t dt \right] = E \left[ \int_0^T q_t dt \right] \cdot E \left[ \int_0^T S_t dt \right] = Q \cdot \left( \frac{1}{2} \gamma v T + \eta v \right) \quad (3.66)$$

і, таким чином, очікувані витрати складають:

$$E[C_i(Q_i, v_i)] = Q_i \cdot \left( \frac{1}{2} \gamma_i v_i T + \eta_i v_i \right) \quad (3.67)$$

де  $\gamma_i$ ,  $\eta_i$  – параметри моделі Алмгрема-Кріса для  $i$ -тої акції, а  $Q_i$  та  $v_i$  – обсяг та інтенсивність торгів цього фінансового інструменту.

Для того, щоб вираз (3.67) можна було використовувати у власні задачі оптимізації портфеля, необхідно також вказати залежність – яким чином вектор цільових ваг акцій у портфелі  $|w|$  визначатиме вектори розміру трансакцій  $Q$  та інтенсивності торгівлі  $v$ , які оберє інвестор.

У реальному застосуванні це завдання вирішується дуже очевидно: інвестор знає, якими фінансовими ресурсами він володіє; а отже, як співвідноситься розмір його портфеля і кількість акцій, які необхідно купити, щоб досягти відповідної ваги. Крім того, він знає і які його часові обмеження у формуванні портфелю: тобто, який часовий період купівлі і продажу акцій буде допустимим, перш ніж його кошти бути повністю інвестовані у кінцевий оптимальний портфель. Це буде визначати і яким чином відрізнятиметься необхідна інтенсивність торгівлі для різних акцій.

У даному прикладу, припустимо що:

1) період, впродовж якого інвестор може здійснювати всі трансакції, є фіксованим і становить одну одиницю часу ( $T = 1$ );

2) абсолютна вага акції у портфелі відноситься до обсягу купівлі, як один до одного; тобто для кожної акції:  $Q_i = |w_i|$ ;

3) інтенсивність торгівлі визначається як 10% від обсягу запланованої торгівлі. Це відповідатиме тому, що протягом часу  $T$  обсяг ринкових трансакцій в одній акції в грошовому еквіваленті становить величину, яка в середньому є в 10 разів вищою, ніж розмір всього майбутнього портфеля. Внаслідок:  $v_i = \omega \cdot |w_i|$ ,  $\omega = 0.1$

Отже, згідно цих припущень, можна записати кінцеву форму функції трансакційних витрат для однієї акції:

$$E[C_i(Q_i, v_i)] = E[C_i(|w_i|)] = \omega |w_i| \left( \frac{1}{2} \gamma |w_i|^T + \eta |w_i| \right) \quad (3.68)$$

Що означає, що проблема пошуку ефективної границі тепер матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_p^2(w) = w^T \Sigma w \rightarrow \min \\ r_p(w) = w^T R - \omega \left( \frac{1}{2} \gamma T + \eta \right) |w|^T |w| = c \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{cases} \quad (3.69)$$

Задача (3.69) являє собою квадратичну оптимізаційну задачу з квадратичним обмеженнями. Такий клас оптимізаційних проблем є NP-складним, тобто не існує детермінованого алгоритму, який розв'яже її за поліноміальний час для всіх випадків. А отже, для її розв'язку необхідно використовувати наближені чисельні методи [190].

Зокрема, емпіричним шляхом було встановлено, що алгоритм послідовного квадратичного програмування (SQP) демонструє ефективні результати у цьому прикладі. Застосування цього методу потребує знаходження Якобіана цільової функції та градієнтів усіх обмежень. Табл. 3.2 наводить ці вирази, розраховані для задачі (3.69).

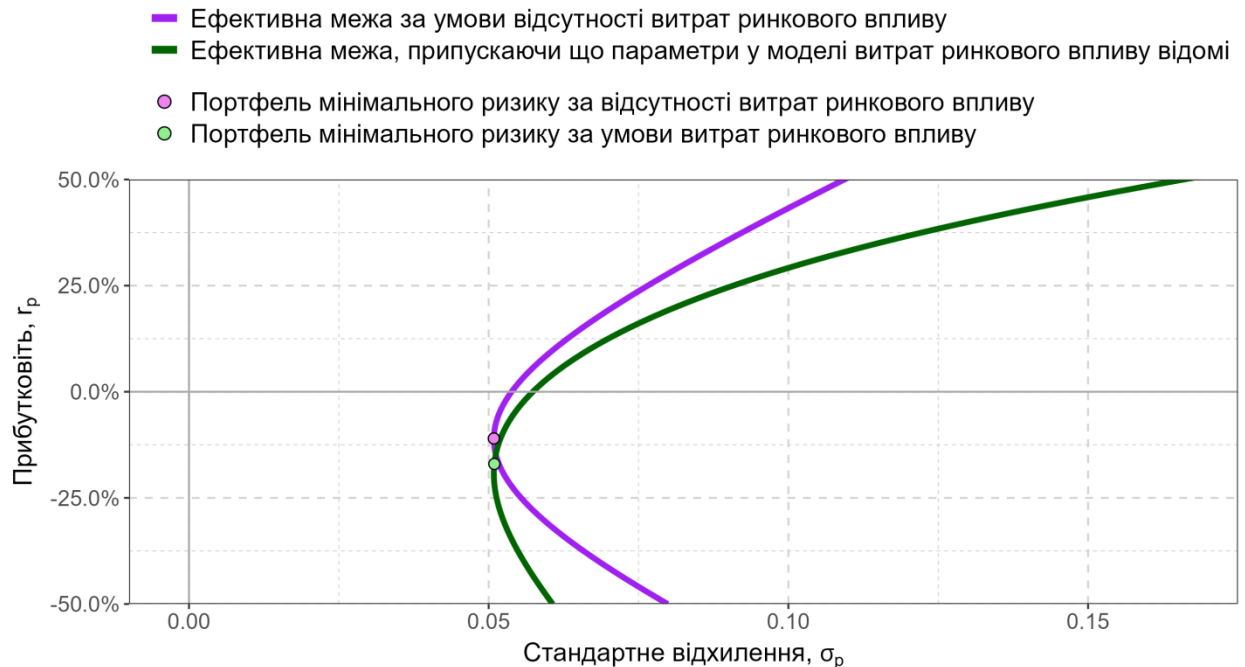
## Градiєнти та якобіани оптимізаційної задачі (3.69)

Величина	Значення	Градiєнт/Якобіан
Цільова функція	$w^T \Sigma w$	$2\Sigma w$
Обмеження на прибуток портфеля	$w^T R - \omega \left( \frac{1}{2} \gamma T + \eta \right)  w ^T  w  - c = 0$	$R - 2\omega \left( \frac{1}{2} \gamma T + \eta \right)  w $
Обмеження на ваги портфеля	$\sum_{i=1}^N w_i = 1$	$\left[ \underbrace{1, \dots, 1}_N \right]$

Джерело: Розраховано автором

Використовуючи ці вирази, метод квадратичного програмування був застосований для вирішення проблеми знаходження ефективної межі у формулюванні (3.69). Здійсненні припущення щодо значень коефіцієнтів моделі Алмгрена-Кріса  $\gamma$  та  $\eta$  наведені у додатку **Error! Reference source not found.**

Внаслідок, було отриману ефективну межу, що зображена на рис. 3.10.



**Рис. 3.10. Ефективні границі за умови наявності та відсутності витрат ринкового впливу**

Джерело: Розраховано автором

Отже, можемо спостерігати, що наявність трансакційних витрат змістило ефективну границю донизу. Дійсно, тепер інвестор очікує нижчу прибутковість за того самого рівня ризику.

Крім того, на тому самому графіку також зображені портфелі з мінімальним ризиком, ті, що здатні досягти найменшого значення стандартного відхилення. Вони мають одну і ту саму ризиковість, оскільки, відповідно до використаної моделі, трансакційні витрати не мають жодного впливу на стандартне відхилення портфелю, а отже, ці дві точки відповідають одному і тому самому набору і вазі акцій. Проте у випадку наявності ринкового впливу, очікувана дохідність зменшена на розмір трансакційних витрат цього портфелю, що в результаті зміщує його позицію на графіку донизу.

Як зазначалося раніше, ефективна границя окреслює множину портфелів, які варті уваги інвестора. Всі інші точки на графіку відповідають або недосяжним рівням дохідності і стандартного відхилення (що складають всю півплощину зліва від графіку параболи на графіку), або субоптимальним значенням прибутковості і ризиковості портфелю: так, для кожної точки, що знаходиться праворуч від кривої, буде існувати портфель на ефективній межі, який буде менш ризиковим за такого самого рівня дохідності.

Проте власне ефективна межа не відповідає на питання, який саме портфель має обрати інвестор, вона лише звужує всю площину можливих рішень до однієї лінії параболи, відсікаючи парето-неефективні розв'язки. Тому, для того щоб знайти комбінацію акцій, яка буде найкращою саме для цього інвестора, необхідно встановити, якою є відносна цінність дохідності відносно ризиковості, відповідно до його суб'єктивних поглядів.

Задля цього введемо функцію корисності, яка б описувала вподобання цього фінансового агенту. Традиційно у задачі пошуку оптимального портфеля використовують лінійну функцію корисності у вигляді:

$$U(w) = (r_p(w) - r_f) - A\sigma_p(w) \quad (3.70)$$

де  $r_f$  являє собою ставку без ризикового доходу, а коефіцієнт  $A$  виражає відносну схильність інвестора до ризику.

Перевагами функції (3.70) є те, що вона легко інтерпретується графічно: так, для кожного фіксованого значення корисності  $U_0$ , її форма відповідає прямій з кутом нахилу  $A$ , що починається у точці  $U_0 + r_f$ . Відповідно, прямі, що знаходяться вище на графіку, будуть відповідати більшій корисності.

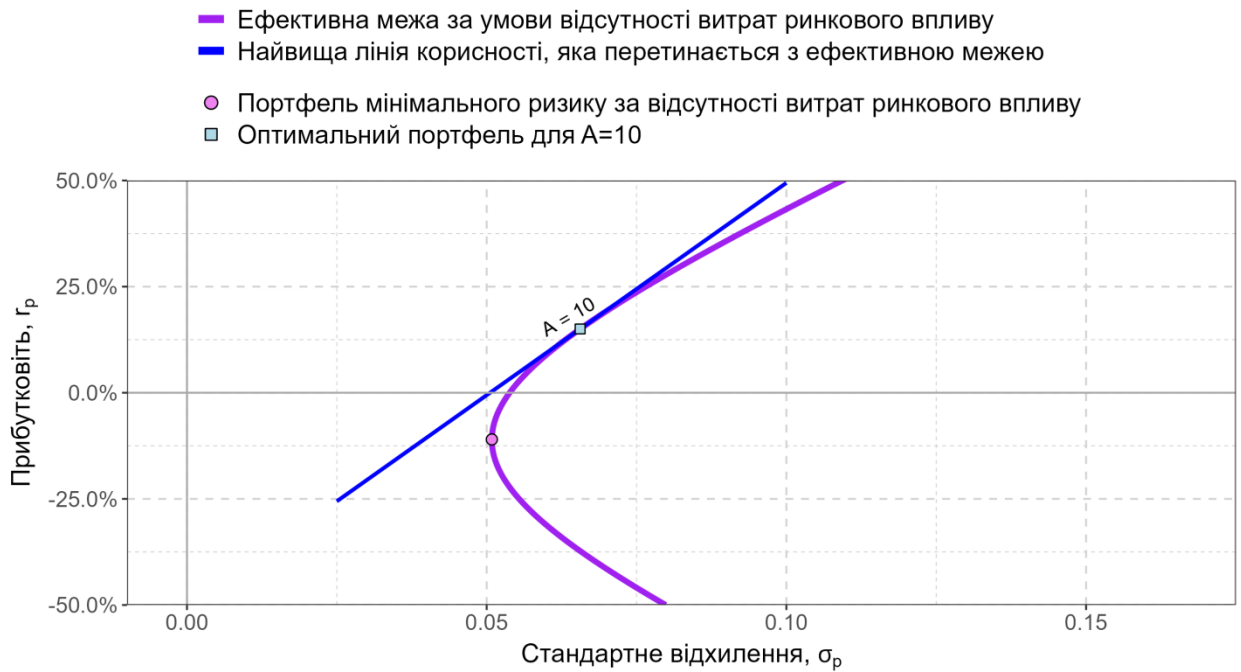
За такої умови, задача пошуку оптимального портфеля перетворюється на пошук найвищої прямої виду (3.70), яка буде перетинатися з ефективною межею. Так, множина оптимальних портфелів виражає параболічну залежність між стандартним відхиленням і прибутковістю, що є опуклою вгору функцією відносно осі ординат (рис. 3.10). Внаслідок цього, найвищою прямою з додатнім нахилом, яка буде перетинатися з ефективною межею, буде дотичною до цієї кривої.

Отже, графічно задача пошуку оптимального портфеля за умови лінійної корисності перетворюється на пошук дотичної між прямою з кутом нахилу  $A$  та функції, яка описує ефективну межу. Приклад знаходження точки перетину цих кривих у випадку відсутності трансакційних витрат, представлений на рис. 3.11.

Оптимальний портфель також можна знайти аналітично, якщо поєднати обмеження і цільову функцію з проблеми (3.59) та розв'язати одну з двох еквівалентних задач:

$$\begin{cases} U(w) = (w^T R - r_f) - A\sqrt{w^T \Sigma w} \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1 \end{cases} \quad (3.71)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{w^T \Sigma w} - \frac{1}{A}(w^T R - r_f) \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1 \end{cases}$$



**Рис. 3.11. Приклад знаходження оптимального портфелю як дотичної між ефективною межею та функції корисності**

*Джерело: Розраховано автором*

Традиційно, класичне формулювання задачі оптимізації полягає у мінімізації цільової функції, тому у подальшому буде використана друга з двох наведених форм.

Цей вираз не враховує наявність трансакційних витрат під час створення чи перебалансування інвестиційного портфелю. Проте його можна модифікувати, щоб він враховував ці ефекти, аналогічно до того, як це було здійснено у проблемі пошуку ефективної межі.

Якщо (відповідно до (3.68) та (3.69)) доходність за умови наявності ринкового впливу описується як:

$$r_p = w^T R - C(|w|) = w^T R - \omega \left( \frac{1}{2} \gamma^T + \eta \right) |w|^T |w| \quad (3.72)$$

то проблема (3.71) перетворюється на:

$$\begin{cases} \sqrt{w^T \Sigma w} - \frac{1}{A} (w^T R - \omega \left( \frac{1}{2} \gamma^T + \eta \right) |w|^T |w| - r_f) \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \end{cases} \quad (3.73)$$

яку також можна розв'язати чисельно, використовуючи метод послідовної квадратичної оптимізації, Табл. 3.3 надає список градієнтів які необхідні для застосування цього способу чисельного розв'язку задачі (3.73).

**Таблиця 3.3**

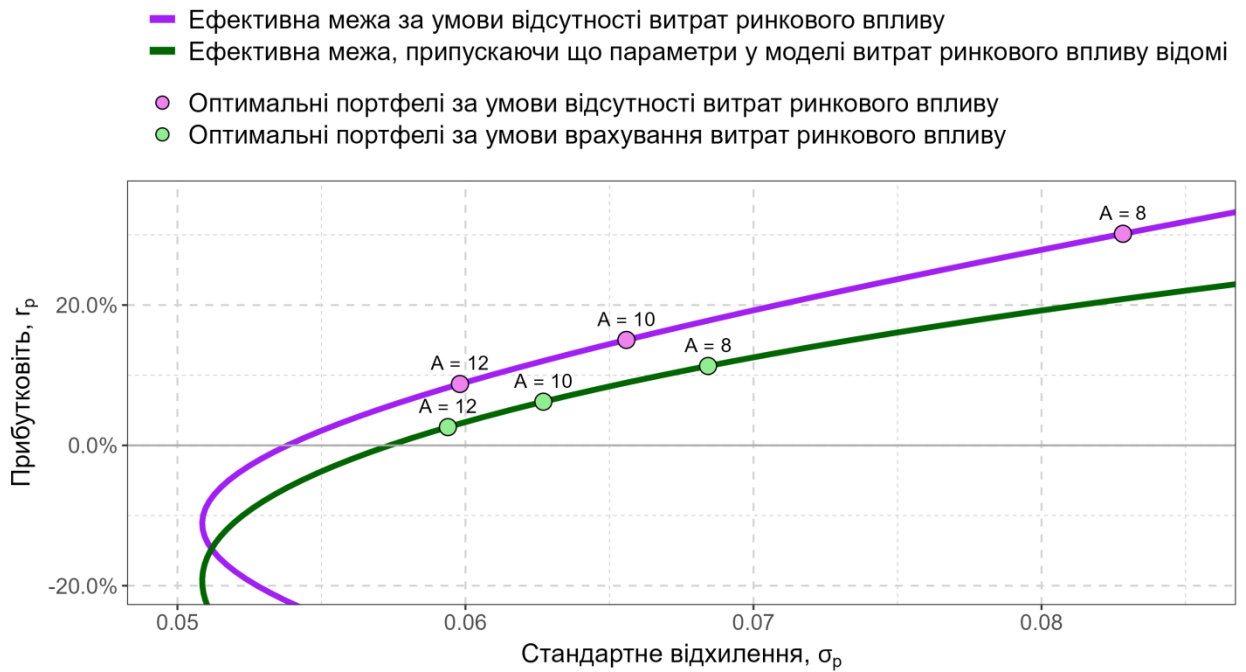
**Градієнти та яacobіани оптимізаційної задачі (3.73)**

Величина	Значення	Градієнт/Яacobіан
Цільова функція	$\sqrt{w^T \Sigma w} - \frac{1}{A} (w^T R - \omega \left( \frac{1}{2} \gamma^T + \eta \right)  w ^T  w  - r_f)$	$\frac{\Sigma w}{\sqrt{w^T \Sigma w}} - \frac{1}{A} \left( R - 2\omega \left( \frac{1}{2} \gamma^T + \eta \right)  w  \right)$
Обмеження на ваги портфеля	$\sum_{i=1}^N w_i = 1$	$\left[ \frac{1, \dots, 1}{N} \right]$

*Джерело: Розраховано автором*

Внаслідок застосування цього методу до вхідних параметрів, обраних у попередньому прикладі, були отримані оптимальні портфелі для інвесторів, які мають схильність до ризику  $A = 8$ ,  $A = 10$  та  $A = 12$  та нульову безризикову ставку  $r_f=0$ . Позиція цих оптимальних портфелів на ефективній межі зображена на рис. 3.12.

На основі графіку можна зробити висновок, що присутність трансакційних витрат ринкового впливу призводить до того, що оптимальні портфелі зміщуються вліво-вниз відносно їх відповідників, що не враховують ринковий вплив. Тобто, якщо інвестор у процесі прийняття рішень також бере до уваги ефект, який справляють його власні трансакції на ринкову рівновагу, він буде схильний обирати більш консервативні варіанти комбінацій фінансових активів у своєму портфелі.



**Рис. 3.12. Оптимальні портфелі для інвесторів з різними схильностями до ризику за умови врахування або ігнорування трансакційних витрат**

*Джерело: Розраховано автором*

У всіх попередніх прикладах, коли враховувалися трансакційні витрати, вважалося, що інвестор має повну інформацію щодо обсягу трансакційних витрат, які він зазнає. Тобто модель ринкового впливу була відомою, коректною, та всі параметри, що входять до неї, отримані з бездоганною точністю. Ці припущення обговорювалися у розділі 2.3: як правило, учасники фінансового ринку не здатні бездоганно передбачити, як зміниться ціна у відповідь на здійсненні торгові операції.

Точність оцінки трансакційних витрат прямо залежить від того:

- чи може інвестор використати емпіричні спостереження для розрахунку цього ефекту;
- наскільки реперезентивними є вибірка, якою він володіє;
- який її обсяг ;
- чи зможе він ефективно використати цю інформацію, щоб сформувати та відкалібрувати модель трансакційних витрат.

Отже, наступним кроком у шляху наближення симуляції до реальної практичної проблеми – це відмовитися від припущення про бездоганну оцінку витрат ринкового впливу. Натомість, вважалося, що інвестор знає справжню функціональну форму (тобто, знає, що ринковий вплив описується моделлю Алмгрема-Кріса), проте не може узагальнити її форму, щоб описати ефект від торгівлі кожної акції окремо (тобто, не знає яким чином параметри  $\gamma_i$  та  $\eta_i$  залежать від характеристик відповідних фінансових інструментів). Проте він володіє певними історичними спостереженнями щодо виконання  $M = 10$  метаордерів на купівлю або продаж кожної акції.

На основі цих даних він: здійснює статистичну оцінку параметрів  $\hat{\gamma}_i, \hat{\eta}_i$  для кожного фінансового активу за допомогою методів Алмгрема-Кріса або методу максимальної правдоподібності, що наведені у розділі 2.3.

Після цього, він використовує ці оцінені значення, щоб знайти оптимальний склад інвестиційного портфеля  $\tilde{w}$  шляхом розв'язку оптимізаційних задач подібних до (3.69) та (3.73):

1) щодо пошуку оптимальної межі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_p^2(\tilde{w}) = \tilde{w}^T \Sigma \tilde{w} \rightarrow \min \\ \tilde{r}_p(\tilde{w}) = \tilde{w}^T R - \omega \left( \frac{1}{2} \hat{\gamma}^T + \hat{\eta} \right) \tilde{w}^2 = c \\ \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i = 1 \end{array} \right. \quad (3.74)$$

2) та пошуку портфелю, який максимізує корисність:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U} = \sqrt{\tilde{w}^T \Sigma \tilde{w}} - \frac{1}{A} (\tilde{w}^T R - \omega \left( \frac{1}{2} \hat{\gamma}^T + \hat{\eta} \right) \tilde{w}^2 - r_f) \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i = 1 \end{array} \right. \quad (3.75)$$

Це дозволить отримати очікувані інвестором ефективні межі та набори портфелів, які забезпечать йому максимальну корисність, проте, лише з огляду на ту інформацію, яка йому доступна. Тобто, являтимуть ті значення, які він вважає, що може досягти. Проте, якщо ж він буде слідувати цим розв'язкам, то реальні значення дохідності та ризиковості не будуть

відповідати його очікуванням, адже і значення оцінених параметрів  $\hat{\gamma}$  та  $\hat{\eta}$  будуть відрізнятися від справжніх значень  $\gamma$  та  $\eta$ . Так, «справжні» прибуток, стандартне відхилення та корисність для портфеля  $\tilde{w}$  становитимуть:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2(\tilde{w}) &= \tilde{\sigma}_p^2(\tilde{w}) = \tilde{w}^T \Sigma \tilde{w} \\ r_p(\tilde{w}) &= \tilde{w}^T R - \omega \left( \frac{1}{2} \hat{\gamma}^T + \hat{\eta} \right) \tilde{w}^2 \\ U(\tilde{w}) &= \sqrt{\tilde{w}^T \Sigma \tilde{w}} - \frac{1}{A} \left( \tilde{w}^T R - \omega \left( \frac{1}{2} \hat{\gamma}^T + \hat{\eta} \right) \tilde{w}^2 - r_f \right)\end{aligned}\quad (3.76)$$

Відповідно, різниця:

- між значеннями  $\tilde{\sigma}_p^2(\tilde{w})$ ,  $\tilde{r}_p(\tilde{w})$ ,  $\tilde{U}(\tilde{w})$  з (3.74) і (3.75) та  $\sigma_p^2(\tilde{w})$ ,  $r_p(\tilde{w})$ ,  $U(\tilde{w})$  з (3.76) відобразить різницю між очікуваннями інвестора та справжніми результатами оптимізації портфеля при інвестуванні у акції з вагами  $\tilde{w}$ , що з'явилася внаслідок того, що інвестор може розрахувати функцію витрат лише з певною статистичною похибкою;

- а між  $\sigma_p^2(\tilde{w})$ ,  $r_p(\tilde{w})$ ,  $U(\tilde{w})$  та  $\sigma_p^2(w)$ ,  $r_p(w)$ ,  $U(w)$  з (3.69) і (3.73) - виникатиме внаслідок того, що якщо неточні значення параметрів моделі були використані для знаходження оптимального портфеля, то останній буде відрізнятися від по-справжньому найкращого портфеля.

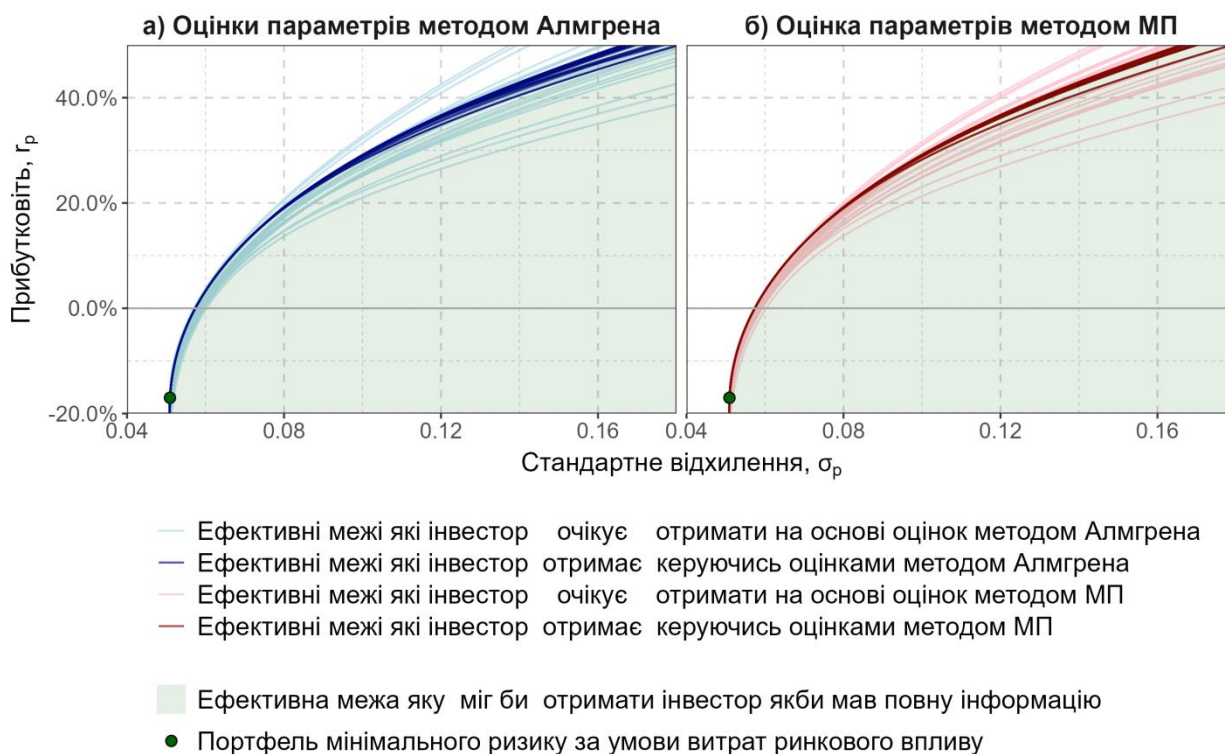
Зауважимо, що значення  $\tilde{\sigma}_p^2(\tilde{w})$ ,  $\tilde{r}_p(\tilde{w})$ ,  $\tilde{U}(\tilde{w})$  можуть знаходитися поза справжньою ефективною межею (зелена лінія на рис. 3.10), проте справжні значення  $\sigma_p^2(\tilde{w})$ ,  $r_p(\tilde{w})$ ,  $U(\tilde{w})$  завжди будуть знаходитися усередині цієї границі. На жаль, інвестор вимушений оперувати значенням  $\tilde{\sigma}_p^2(\tilde{w})$ ,  $\tilde{r}_p(\tilde{w})$ ,  $\tilde{U}(\tilde{w})$  тому що його вибірка обмежена.

Отже, чим ближче значення  $\tilde{\sigma}_p^2(\tilde{w})$ ,  $\tilde{r}_p(\tilde{w})$ ,  $\tilde{U}(\tilde{w})$  знаходяться до  $\sigma_p^2(w)$ ,  $r_p(w)$ ,  $U(w)$ , тим краще була здійснена оцінка  $\hat{\gamma}$  та  $\hat{\eta}$  – і, як наслідок, тим менший вплив невизначеності параметрів у моделі на фінансовий результат інвестора. Тобто, за такої постановки проблеми, тепер можна дослідити, який з методів оцінки параметрів призведе до портфелю, в якому  $\sigma_p^2(\tilde{w})$ ,  $r_p(\tilde{w})$ ,  $U(\tilde{w})$  є більш наближеними до рішення, в якому якби всі вхідні параметри моделі ринкового впливу є відомими:  $\sigma_p^2(w)$ ,  $r_p(w)$ ,  $U(w)$ .

Відповідно до теорії оцінки параметрів, відкалібровані значення  $\hat{\nu}$  та  $\hat{\eta}$  є функцією здійснених спостережень. Внаслідок цього, отримана ефективна межа та оптимальні портфелі також будуть залежати від реалізації ринкового впливу, які інвестор спостерігав у історичних даних. Тому на основі однієї вибірки важко робити будь-які висновки щодо того, які методи є більш точними.

Внаслідок цього, буде здійснено симуляція, у якій цей процес (генерація даних – оцінка параметрів – вибір оптимального портфеля) буде повторений  $K = 1000$  разів. Якщо один з методів виявиться матеріально більш ефективним на основі тисячі спроб, то можна буде стверджувати, що, ймовірніше за все, це не просто результат везіння, а в середньому він дійсно є кращим за альтернативні.

Приклад перших 20 таких симуляцій зображений на рис. 3.13. Так, границя зеленої площини визначає оптимальну комбінацію дохідності і ризиковості, яку інвестор міг би отримати, якби володів повною інформацією (величини  $\sigma_p(w)$  та  $r_p(w)$ ).



**Рис. 3.13 Приклад 20 симуляцій оптимізації портфеля інвестором при невідомих параметрах моделі ринкового впливу**

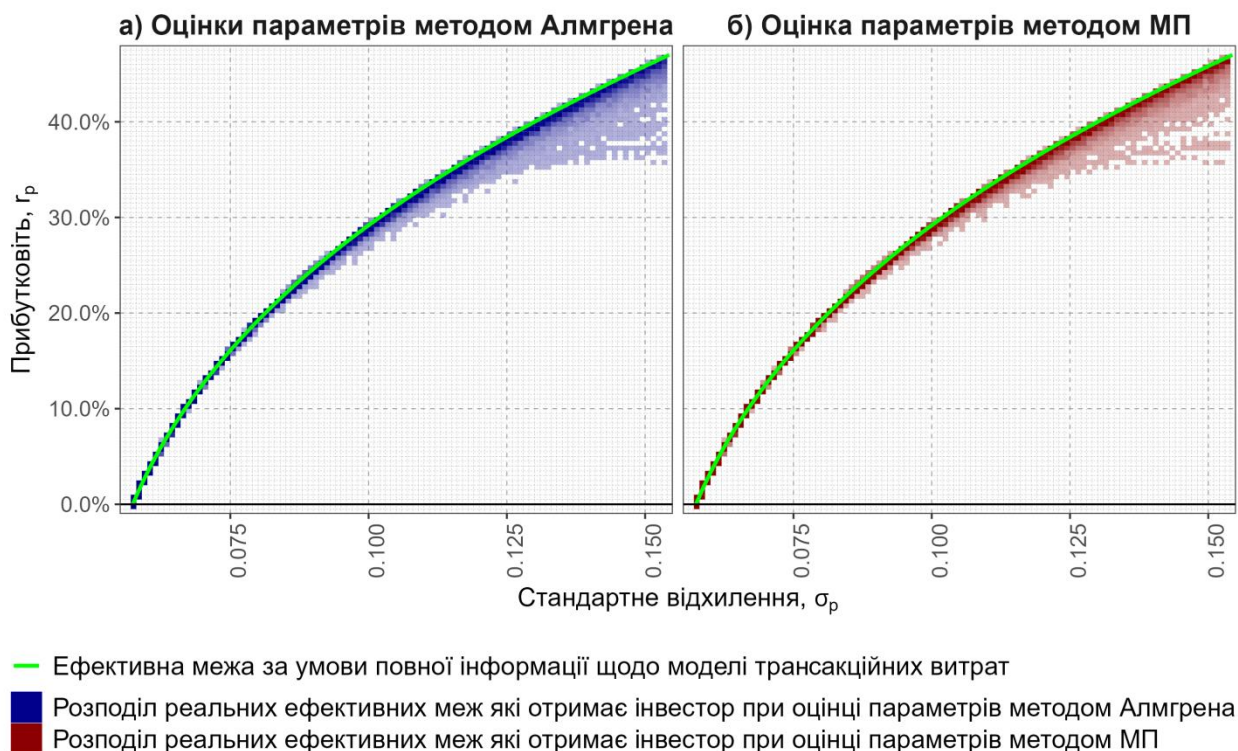
*Джерело: Розраховано автором*

Світло-сині та світло-червоні лінії визначають ефективні межі, які інвестор вважає, що він зможе досягти на основі оцінок параметрів моделі витрат  $\hat{\gamma}$  та  $\hat{\eta}$  (значення  $\tilde{\sigma}_p(\tilde{W})$  і  $\tilde{r}_p(\tilde{W})$ ). Темно-сині та червоно-сині зображають результуючі межі, яких дійсно досягне інвестор, якщо використовуватиме ваги акції у портфелі оптимізовані за умовах неповної інформації ( $\sigma_p(\tilde{W})$  та  $r_p(\tilde{W})$ ).

З рис. 3.13 можна спостерігати, що у випадку оцінки параметрів методом МП, і очікувані, і реальні ефективні межі знаходяться дещо ближче до свого справжнього значення. Проте на цьому графіку зображений лише ефект 20 симуляцій, що є доволі обмеженою вибіркою, щоб на цій основі можна було здійснювати подібні висновки.

Рис. 3.14 ілюструє ефект 1000 подібних симуляцій. На жаль, за умови відображення кожної з симуляції лінії, їх скупчення важко відобразити

графічно. Через це, на даному графіку зображені емпіричні двовимірні розподіли щільності отриманих ефективних меж.



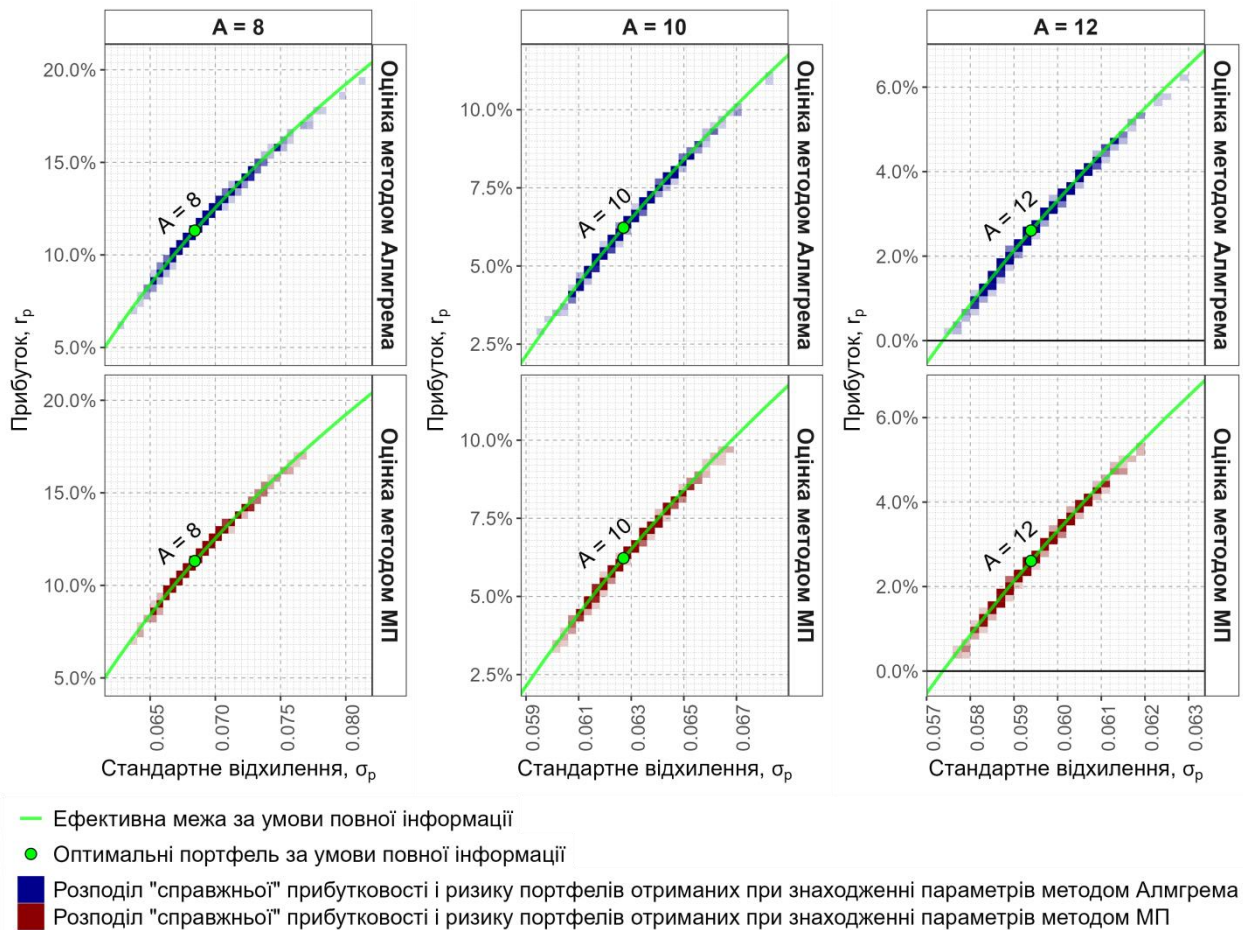
**Рис. 3.14. Розподіл реальних ефективних меж (на основі 1000 симуляцій) які отримає інвестор за умови неповної інформації**

*Джерело: Розраховано автором*

З рисунку видно, що твердження здійснене на основі 20 симуляцій, зберігається і при збільшенні їх кількості. Графік щільності розподілу ефективних меж, за умови оцінки їх методом максимальної правдоподібності, є більш скупченим біля лінії оптимальної межі, яку інвестор отримав би, якщо він володів би повною інформацією. Такого висновку можна дійти через те, що площа розсіювання значень (зафарбована область) на рис. 3.14 є меншою, за умови використання даного методу оцінювання. Тобто, відповідні реальні ефективні межі прилягають щільніше до теоретично абсолютно оптимальної границі.

Дослідимо, чи подібне буде також виконуватися для розподілу справжніх прибутковості і ризику (розрахованих відповідно до (3.76)) для портфелів обраних інвестором при оптимізації задачі (3.75) – тобто за умови

що він не знає точних  $\gamma$  та  $\eta$ . Результати максимізації очікуваної корисності з позиції інвестора – та відповідно до інформації, якою він володіє – зображені на рис. 3.15.



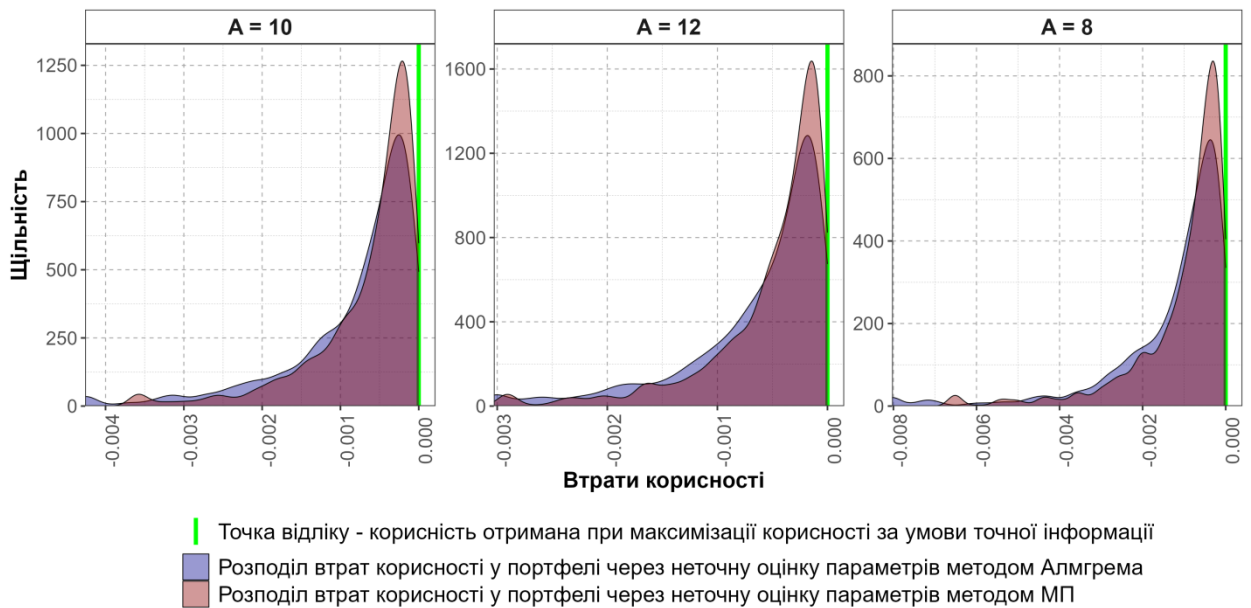
**Рис. 3.15 Розподіл реальної прибутковості та доходності портфельів за умови оцінки параметрів різними методами**

*Джерело: Розраховано автором*

Як бачимо з графіку, в середньому отримані реальні значення прибутковості та стандартного відхилення портфельів знаходяться ближче до своїх «ідеальних» значень, тобто тих, які могли бути отримані, якби інвестор оперував на основі повної інформації, за умови використання оцінок на основі максимальної правдоподібності.

Окрім цього, іншим способом порівняти ці два методи є оцінка реальної корисності, яку отримує інвестор, керуючись відповідними оцінками. На рис. 3.16 зображені розподіли втрат у корисності (у ютілях), спричинені тим, що

точні значення параметрів  $\gamma$  та  $\eta$  невідомі інвестору. Знову ж таки, на графіку видно, що розподіл, отриманий при застосування методу МП, більш щільно прилягає до теоретичного максимуму (зеленої лінії на графіку).



**Рис. 3.16. Втрати корисності внаслідок використання інвестором одного з двох методів оцінки за відсутності повної інформації**

*Джерело: Розраховано автором*

У середньому він призводить до кращих результатів ніж метод А. Алмгрена приблизно у 60% випадків. Точні значення порівняння середніх результатів обох оцінок надані у табл. 3.4.

**Таблиця 3.4**

**Порівняння середніх втрат у корисності**

A	Метод Алмгрена		Метод максимальної правдоподібності		% симуляцій у яких ММП переміг метод Алмгрена	Середній вигравш методу МП порівнянно з методом Алмгрена		
	середнє	станд. похибка	середнє	станд. похибка		середнє	станд. похибка	~ вигравш у дохідності
A = 8	-0.001265	0.000046	-0.001026	0.000037	60.1%	0.0002393	0.0012656	0.02%
A = 10	-0.000807	0.000026	-0.000655	0.000022	62.2%	0.0001513	0.0008069	0.02%
A = 12	-0.000629	0.000020	-0.000514	0.000018	62.1%	0.0001155	0.0006295	0.01%

*Джерело: Розраховано автором*

Зауважимо, що корисність, виміряну у ютілях, можна порівняти лише у відносному сенсі. Проте функція корисності задається рівнянням (3.77),

тобто являє собою дохідність портфелю, зменшену на величину ризику. Через це, отримані переваги у ютілях можна розглядати приблизно як збільшення дохідності портфелю на відповідну величину.

Так, покращення дохідності за умови застосування методу максимальної правдоподібності на 0.02%, становить собою відносно малу величину, порівняно з загальним прибутком очікуваних портфелів. Проте для отримання цього результату не потрібно залучати будь-які додаткові ресурси. Весь ефект досягається лише внаслідок більш ефективного використання наявної інформації.

Варто зазначити, що будь-яке збільшення дохідності окремих інвесторів внаслідок більш оптимального розподілу ресурсів, призводить до покращення всієї економіки в цілому. Оскільки певна частина у вищезазначеному прирості доходу утворилася внаслідок зменшення трансакційних витрат, з цього слідує, що менше фінансових ресурсів було зосереджено у руках посередників; і більше – досягло реального сектору економіки. Тобто, фінансові ринки, у яких інвестори здатні приймати рішення більш ефективно, буде характеризуватися вищими темпами зростання, що є особливо важливим у контексті країн, фінансові ринки яких ще розвиваються, до яких належить ринок України.

### Висновки до Розділу 3

Внаслідок аналізу прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу як чинника підвищення ефективності прийняття інвестиційних рішень на ринках акцій, були зроблені наступні висновки:

1. Встановлено, що зменшення трансакційних витрат є одним з основних критеріїв для інвестора, за яким він здійснює вибір брокера, що надає йому свої посередницькі послуги у торгівлі акціями. Через стохастичний характер витрат ринкового впливу, інвестор оцінює якість наданих послуг шляхом формулювання та перевірки статистичної гіпотези. Якщо інвестор може відхилити гіпотезу, що його брокер здатний забезпечити найменші трансакційні витрати, це означає, що існують підстави для заміни цього посередника на користь конкурента.

2. Автором запропоновано зменшити необхідний період збору даних для перевірки статистичної гіпотези якості брокерських послуг шляхом оцінки не абсолютного значення трансакційних витрат ринкового впливу, а різниці між їх обсягом та прогнозованими значеннями, що надані відповідною моделлю. Автором доведено, що використання функціональної залежності для передбачень величини трансакційних витрат, яка була побудована за допомогою методу максимальної правдоподібності, також зменшує необхідний об'єм емпіричних даних.

3. Встановлено, що для виконання замовлення купівлі або продажу акцій протягом певного періоду часу, інвестор формує план торгівлі, який визначає, з якою інтенсивністю мають бути проведені його ринкові операції. Для ризик-нейтрального інвестора оптимальний план торгівлі має мінімізувати його загальні трансакційні витрати ринкового впливу, а для несхильного до ризику інвестора – максимізувати загальну корисність проведених операцій.

4. З'ясовано, що незважаючи на наявність значної кількості моделей трансакційних витрат ринкового впливу, які відображають той чи інший

аспект цього явища, їх застосування до задачі пошуку оптимального плану торгівлі призводить до якісно схожих розв'язків. Вони включають у себе здійснення двох значних за обсягами трансакцій (блоків) на початку і у кінці горизонту планування та рівномірній торгівлі активом у середині.

5. Визначено, що наявність трансакційних витрат змінює очікувану дохідність відповідних фінансових активів. Як наслідок, якщо при формуванні інвестиційного портфелю інвестор керується сучасною портфельною теорією та ігнорує наявність трансакційних витрат ринкового впливу при вирішенні відповідної оптимізаційної задачі, отриманий розв'язок не максимізуватиме його корисність. Запропоновано модифікувати цю модель шляхом включення трансакційних витрат у її математичне формулювання.

6. Доведено, що врахування трансакційних витрат ринкового впливу у задачі пошуку оптимального портфелю призводить до суттєво іншого розв'язку. Це змінює складові цільового портфелю і алокацію фінансових ресурсів інвестора.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі поглибленні теоретичні засади, удосконалений модельний інструментарій прогнозування трансакційних витрат ринкового впливу та надані практичні рекомендації щодо підвищення ефективності прийняття інвестиційних рішень на організованих ринках акцій.

Це дозволило зробити наступні висновки, які є результатом вирішення основних завдань дисертації:

1. Запропоновано узагальнення підходів, що формують визначення сутності та джерел трансакційних витрат операцій з акціями: як результати побічних ефектів, невизначеності у правах власності між економічними агентами, нерівності у інформації (інституційний підхід); як частина податків та через ліквідність активів (фінансовий підхід); як винагорода, яку вимагає або сплачує покупець/продавець для того щоб компенсувати нерівність у інформації (інформаційний підхід). Це дозволило виокремити три головні підходи до джерел трансакційних витрат на фінансових ринках: як відповідну плату за нагальність та визначеність у здійсненні купівлі-продажу; як премію для стимулювати потенційних контрагентів взяти участь у ринковій торгівлі та провести з ними обмін; як компенсацію за участь у обміні, в якому його контрагент може мати інформаційну перевагу. Визначено, що сучасні наукові праці, головним чином, фокусуються на вивченні неявних трансакційних витрат та ефектів, спричинених спредом купівлі-продажу та ринковим впливом при дослідженні мікроструктури організованих ринків акцій.

2. Критичний аналіз теоретичних підходів до визначення сутності мікроструктури ринку дозволив встановити, що це - процес та результат обміну активів на основі визначених правил обміну; процес, за яким приховані потреби інвесторів перетворюються у ціни та об'єми торгів; торговий механізм та засіб регулювання трансакцій. Запропоновано класифікацію фінансового ринку акцій на основі відмінностей у кон'юнктурі та методах здійснення операцій купівлі-продажу: світлі, сірі, темні (за

наявності інформації щодо книги лімітних ордерів); постійної торгівлі, аукціони, дилерської торгівлі (за видами ордерів, які може відправляти інвестор); твердих та умовних ордерів (за видами ордерів, які може відправляти інвестор); маркет, ліміт, стоп, прив'язаного ордерів (за видами ордерів). Визначено, що різноманітність структури та організації торгових майданчиків для здійснення торгівлі акціями, різні види ордерів, різні категорії учасників торгівлі на фондових ринках та різні характерів взаємодії між ними, обумовлено потребою надати інвестору інструменти, яким він здатний оперувати для зменшення своїх трансакційних витрат та поліпшити свій процес інвестування.

3. На основі узагальнення термінологічних підходів, трансакційні витрати ринкового впливу було визначено як витрати, спричинені несприятливим рухом цін внаслідок самого процесу здійснення торгівлі і за природою є витратами внаслідок зворотного (кількісного і інформаційного) впливу купівлі-продажу акцій на баланс попиту і пропозиції та на очікування ринкових агентів (поведінку); їх розмір не визначений заздалегідь та вимагає розробки спеціалізованого предикативного інструментарію для квантифікації.

4. На основі симуляцій потенційного розміру неявних витрат втрачених можливостей і своєчасності доведено, що стандартна форма функції прогнозованих трансакційних витрат торгівлі акціями включає чотири стохастичні елементи – розмір витрат спреду, ринкового впливу, своєчасності і втрачених можливостей, що спрощує проблему прогнозування трансакційних витрат торгівлі метаордеру акції до передбачення лише двох їх складових: очікуваних витрат спреду і очікуваних витрат ринкового впливу і є більш зручним для практичного застосування.

5. Виявлено, що на даний момент не існує загальної, консистентної та несуперечливої моделі трансакційних витрат ринкового впливу. Автором визначено, що сучасні моделі здатні відображати лише деякі властивості цієї складової трансакційних витрат та прогнозувати їх величину лише за умови

коректності певних (інколи доволі обмежуючих) припущень. Запропоновано виділяти ендогенні і екзогенні моделі (відповідно до того, чи здійснюється їх аналіз з позиції інвестора чи ринку загалом) та моделі першого і другого покоління (в залежності від того, чи моделюється вплив на подальшу поведінку учасників обміну (що підвищує точність прогнозу). Обґрунтовано, що ключовими детермінантами ринкового впливу на ринках акцій виступають як об'єктивні параметри торгівлі – обсяг ордеру (модель Кайла, модель квадратного кореня), інтенсивність торгівлі (модель Алмгрена-Кріса), характер інформаційного розсіювання тимчасової складової ринкового впливу (моделі Дж. Газерала, Обіжаєвої - Ванга), так і зміни у поведінці ринкових учасників в залежності від характеру та послідовностей ринкових подій (моделі «історично залежного ринкового впливу»), коли учасники ринку коректують свої очікування і плани в залежності від дій виконавця метаордеру.

6. Встановлено, що ендогенні моделі першого і другого поколінь підходять до прогнозування витрат ринкового впливу шляхом моделювання динамки ціни на акцію як результат проведених інвестором ринкових операцій. Виявлено, що запропоновані підходи використовують емпіричні дані неефективно у процесі відтворення цієї залежності, тому автором запропоновано використати метод максимальної правдоподібності для розрахунку невідомих параметрів у функціональній залежності між ціною та інтенсивністю торгівлі акції. Доведено, що використання цього методу покращує точність прогнозів моделі.

7. На основі аналізу моделей визначено, що зменшення трансакційних витрат є одним з основних критеріїв для інвестора, за яким він здійснює вибір брокера, що надає йому свої посередницькі послуги у торгівлі акціями. Через стохастичний характер витрат ринкового впливу, інвестор оцінює якість наданих послуг шляхом формулювання та перевірки статистичної гіпотези. Якщо інвестор може відхилити гіпотезу, що його брокер здатний забезпечити найменші трансакційні витрати, це означає, що

існують підстави для заміни цього посередника на користь конкурента. Автором запропоновано зменшити необхідний період збору даних для перевірки статистичної гіпотези якості брокерських послуг шляхом оцінки не абсолютного значення трансакційних витрат ринкового впливу, а різниці між їх обсягом та прогнозованих значень, наданих відповідною моделлю. Автором доведено, що використання функціональної залежності для передбачень величини трансакційних витрат, яка була побудована за допомогою методу максимальної правдоподібності, також зменшує необхідний об'єм емпіричних даних

8. Доведено, що формування плану здійснення торгівлі інвестором має мати на меті мінімізацію трансакційних витрат ринкового впливу. Незважаючи на різноманіття сучасних моделей прогнозування динаміки ринкового впливу, розв'язок відповідних оптимізаційних задач призводить до якісно схожих планів виконання замовлень на купівлю\продаж акцій, який полягає у торгівлі блоків на початку і в кінці замовлення та рівномірній торгівлі у середині.

9. Встановлено, що за умови ігнорування трансакційних витрат, розв'язок задачі сучасної портфельної теорії не призведе до максимізації корисності інвестора, оскільки реальна дохідність активів які складатимуть цей портфель буде відрізнятися на величину цих самих витрат. Тому, було запропоновано розширити модель пошуку оптимального портфелю шляхом включення до неї трансакційних витрат, яка відображав би ці ефекти. Було доведено, що вирішення модифікованої задачі призводить до якісно іншого розв'язку і суттєвій відмінності у складових цільового портфелю.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Markowitz H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, vol. 7, pp. 77-91, 1952.
- [2] Sharpe W. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, vol. 19, no. 3, pp. 425-442, Sep 1964.
- [3] Fama E., French K. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, vol. 33, no. 1, pp. 3-56, 1993.
- [4] Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637-654, May-Jun 1973.
- [5] Merton R. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, no. 1, pp. 141-183, 1973.
- [6] Coase R. The Problem of Social Cost. *Journal of Law and Economics*, vol. 3, pp. 1-44, Oct 1960.
- [7] Olson M. *The Logic of Collective Action: Public Goods and the Theory of Groups.*, 2nd ed.: Harvard University Press, 1971.
- [8] North D. *Transaction costs, institutions, and economic performance.* San Francisco, Calif: ICS Press, 1992.
- [9] Williamson O. Transaction-Cost Economics: The Governance of Contractual Relations. *Journal of Law and Economics*, vol. 22, no. 2, pp. 233-261, Oct 1979.
- [10] Grossman S., Hart O. The Costs and Benefits of Ownership: A Theory of Vertical and Lateral Integration. *Journal of Political Economy*, vol. 94, no. 4, pp. 691-719, Aug 1986.
- [11] Holmstrom B., Milgrom P. Multitask Principal-Agent Analyses: Incentive Contracts, Asset Ownership, and Job Design. *Journal of Law, Economics, & Organization*, vol. 7, no. (special issue), pp. 24-52, 1991.
- [12] Akerlof G. The Market for "Lemons": Quality Uncertainty and Market

- Mechanism. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 84, no. 3, pp. 488-500, Aug 1970.
- [13] Stigler G. The Economics of Information. *Journal of Political Economy*, vol. 69, no. 3, pp. 213-225, 1961.
- [14] Spence M. Job Market Signaling. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 87, no. 3, pp. 355-374, Aug. 1973.
- [15] Coase R. The Nature of the Firm. *Economica*, vol. 4, no. 16, pp. 386-405, November 1937.
- [16] Tobin J. A Proposal for International Monetary Reform. *Eastern Economic Journal*, vol. 3, no. 3/4, pp. 153-159, Oct 1978.
- [17] Roll R. Price volatility, international market links, and their implications for regulatory policies. *Journal of Financial Services Research*, vol. 3, no. 2-3, pp. 211-246, 1989.
- [18] Aliber R., Chowdhry B., and Yan S. Some Evidence that a Tobin Tax on Foreign Exchange Transactions May Increase Volatility. *Review of Finance*, vol. 7, no. 3, pp. 481-510, 2003.
- [19] Bershova N., Rakhlin D. The Non-Linear Market Impact of Large Trades: Evidence from Buy-Side Order Flow. *Quantitative Finance*, vol. 13, no. 11, pp. 1759-1778, 2013.
- [20] Datar V., Naik N., and Radcliffe R. Liquidity and stock returns: An alternative test. *Journal of Financial Markets*, vol. 1, no. 2, pp. 203-219, 1998.
- [21] Vayanos D., Wang J. Liquidity and Asset Returns Under Asymmetric Information and Imperfect Competition. *The Review of Financial Studies*, vol. 25, no. 5, pp. 1339-1365, May 2012.
- [22] Keynes J.M. *A Treatise on Money (In Two Volumes)*., Robinson A., D. Moggridge, Eds. Cambridge: Cambridge University Press, 1930.
- [23] Hicks J. Liquidity. *The Economic Journal*, vol. 72, no. 288, pp. 787-802,

Dec 1962.

- [24] Keynes J.M. *The General Theory of Employment, Interest and Money.*, 2007th ed.: Palgrave Macmillan, 1936.
- [25] Hirshleifer J. Liquidity, uncertainty, and the accumulation of information in *Uncertainty and Expectations in Economics: Essays in Honor of G.L.S. Shackle*, Carter C., J. Ford, Eds. Oxford, 1972, pp. 136-147.
- [26] Carruthers B., Stinchcombe A. The Social Structure of Liquidity: Flexibility, Markets, and States. *Theory and Society*, vol. 28, no. 2, pp. 353-382, Jun 1998.
- [27] Demsetz H. The Cost of Transacting. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 82, no. 1, pp. 33-53, Feb 1968.
- [28] Kraus A., Stoll H. Price Impacts of Block Trading on the New York Stock Exchange. *The Journal of Finance*, vol. 27, no. 3, pp. 569-588, June 1972.
- [29] Miller L. On "Liquidity" and "Transaction Costs". *Southern Economic Journal*, vol. 32, no. 1, July 1965.
- [30] Камінський А.Б., Бабенко Д. Нечітко-множинний підхід до оптимізації портфеля цінних паперів із врахуванням ліквідності. *Економічна кібернетика*, vol. 61, pp. 21-30, 2010.
- [31] Камінський А.Б. Рейтинговий підхід до моделювання ліквідності в портфельній теорії. *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка*, vol. 86, pp. 39-43, 2006.
- [32] Sazheniuk V., Chornous G., and Iarmolenko Y. Information Model for Pricing on Electronic Markets. *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 56, pp. 655-664, Jul 2020.
- [33] Калач Г.М. Сутність та методи оцінки трансакційних витрат на фондовому ринку. *Економічний аналіз*, vol. 17, no. 1, pp. 132-138, 2014.
- [34] Любкіна О., Ігнатюк В. Трансакційні витрати торгівлі на

- організованих фондових ринках: структура та наслідки для ефективності ринку. *Вісник Хмельницького національного університету: Економічні науки*, vol. 4, no. 320, pp. 60-71, 2023.
- [35] Любкіна О., Ігнатюк В. Застосування функції витрат ринкового впливу для оцінки якості брокерських послуг на ринку акцій. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*, vol. 4, no. 221, pp. 27-36, 2022.
- [36] Юркевич О., Шинкаренко А. Рівень ліквідності фондового ринку: значення та підходи до визначення. *Вісник НБУ*, vol. 4, no. 194, pp. 94-97, 2012.
- [37] Солодка О.О. Сегментаційний розріз біржового ринку ф'ючерсних контрактів України. *Міжнародний науковий журнал Інтернаука. Серія: Економічні науки*, no. 5, pp. 18-23, 2020.
- [38] Дзюба П. Концепція оцінювання дохідностей: витoki та місце в сучасній теорії міжнародного портфельного інвестування. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Міжнародні відносини*, vol. 50, no. 2, pp. 64-76, 2019.
- [39] Shkolnyk I., Frolov S., Orlov V., Dziuba V., and Balatskyi Y. Influence of World Stock Markets on the Development of the Stock Market in Ukraine. *Investment Management and Financial Innovations*, vol. 18, no. 4, pp. 223-240, 2021.
- [40] Alekseyenko L., Kulyna H., Vatslavskyi O., Shevchuk A., and Yazlyuk B. Financial System and its Components, as Factors of Economic Development of Ukraine. *Journal of Advanced Science and Technology*, vol. 29, no. 9, pp. 4598-4605, 2020.
- [41] Любкіна О.В. «Непрозорі» фінансові ринки: види, причини формування та вплив на цінову ефективність і захищеність інвесторів. *Формування ринкових відносин в Україні*, vol. 12, no. 163, pp. 9-13, 2014.

- [42] Amihud Y. Illiquidity and stock returns: cross-section and time-series effects. *Journal of Financial Markets*, vol. 5, no. 1, pp. 31-56, Jan 2002.
- [43] Amihud Y., Mendelson H. Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of Financial Economics*, vol. 17, no. 2, pp. 223-249, Dec 1986.
- [44] Briere M., Lehalle C.-A., Nefedova T., and Raboun A. Stock Market Liquidity and the Trading Costs of Asset Pricing Anomalies. *Université Paris-Dauphine Research Paper No. 3380239*, pp. 1-36, May 2019.
- [45] Novy-Marx R., Velikov M. A Taxonomy of Anomalies and their Trading Costs. *The Review of Financial Studies*, vol. 29, no. 1, pp. 104-147, Jan 2016.
- [46] Frazzini A., Israel R., and Moskowitz T. Trading Costs of Asset Pricing Anomalies. *Fama-Miller Working Paper, Chicago Booth Research Paper No. 14-05*, pp. 1-68, 2014.
- [47] Collins B., Fabozzi F. A Methodology for Measuring Transaction Costs. *Financial Analyst Journal*, vol. 47, no. 2, pp. 27-36, 1991.
- [48] Black F. Noise. *The Journal of Finance*, vol. 41, no. 3, pp. 528-543, Jul 1986.
- [49] Glosten L., Milgrom P. Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders. *Journal of Financial Economics*, vol. 14, no. 2, pp. 71-100, March 1985.
- [50] Kyle A. Continuous Auctions and Insider Trading. *Econometrica*, vol. 53, no. 6, pp. 1315-1335, Nov 1985.
- [51] Liu H., Wang Y. Market making with asymmetric information and inventory risk. *Journal of Economic Theory*, vol. 163, pp. 73-109, May 2016.
- [52] Jennings R., Barry C. On Information Dissemination and Equilibrium Asset Prices: A Note. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 19, no. 4, pp. 395-402, Dec 1984.

- [53] Beneish M. Stock Prices and the Dissemination of Analysts' Recommendation. *The Journal of Business*, vol. 64, no. 3, pp. 393-416, Jul 1991.
- [54] Page L., Siemroth C. How Much Information Is Incorporated into Financial Asset Prices? Experimental Evidence. *The Review of Financial Studies*, vol. 34, no. 9, pp. 4412-4449, Dec 2020.
- [55] Easley D., Engle R., O'Hara M., and Wu L. Time-Varying Arrival Rates of Informed and Uninformed Trades. *Journal of Financial Econometrics*, vol. 6, no. 2, pp. 171-207, 2008.
- [56] Easley D., Kiefer N., O'Hara M., and J. Paperman Liquidity, Information, and Infrequently Traded Stocks. *The Journal of Finance*, vol. 51, no. 4, pp. 1405-1436, Sep 1996.
- [57] Goldman B., Sosin H. Information dissemination, market efficiency and the frequency of transactions. *Journal of Financial Economics*, vol. 7, no. 1, pp. 29-61, Mar 1979.
- [58] Chacko G., Jurek J., and Stafford E. The Price of Immediacy. *Journal of Finance*, vol. 63, no. 3, pp. 1253-1290, Jun 2008.
- [59] Armstrong C., Core J., Taylor D., and Verrecchia R. When Does Information Asymmetry Affect the Cost of Capital? *Journal of Accounting Research*, vol. 49, no. 1, pp. 1-40, Mar 2011.
- [60] *The Organization of Economic Activity: Issues Pertinent to the Choice of Market versus Non-market Allocation*. Washington, D.C: Government Printing Office, 1969, vol. vol. 1.
- [61] Fama E. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, vol. 25, no. 2, pp. 383-417, May 1970.
- [62] Admati A., Pfleiderer P. A Theory of Intraday Patterns: Volume and Price Variability. *Review of Financial Studies*, vol. 1, no. 1, pp. 3-40, Jan 1988.
- [63] Gu B., Hitt L. Transaction Costs and Market Efficiency. in *ICIS 2001*

- Proceedings*, New Orleans, Louisiana, USA, 2001.
- [64] Davila E., Parlato C. Trading Costs and Informational Efficiency. *The Journal of Finance*, vol. 76, no. 3, pp. 1471-1539, June 2021.
- [65] Garman M. Market microstructure. *Journal of Financial Economics*, vol. 3, no. 3, pp. 257-275, Jun 1976.
- [66] O'Hara M. *Market Microstructure Theory.*, 1st ed.: Wiley, 1998.
- [67] Madhavan A. Market Microstructure: A Survey. *Journal of Financial Markets*, vol. 3, no. 3, pp. 205-258, 2000.
- [68] Asmar M., Ahmad Z. Market Microstructure: The Components of Black-Box. *International Journal of Economics and Finance*, vol. 3, no. 1, pp. 12-37, 2011.
- [69] National Bureau of Economic Research. (2021, June) NBER Working Group Descriptions. [Online]. [https://web.archive.org/web/20080722025938/http://www.nber.org/workin/ggroups/groups\\_desc.html](https://web.archive.org/web/20080722025938/http://www.nber.org/workin/ggroups/groups_desc.html)
- [70] Hasbrouck J *Empirical Market Microstructure: The Institutions, Economics, and Econometrics of Securities Trading.*, Illustrated edition ed.: Oxford University Press, 2007.
- [71] Yan H. Chapter 15: Chinese A and B Shares in *Encyclopedia of Finance*, Lee C., Lee A., Eds. New York: Springer, 2006, ch. 15, p. 855.
- [72] Chatterjee S., Taplin N. (2015, Aug) Reuters: China stock exchanges step up crackdown on short-selling. [Online]. <https://www.reuters.com/article/us-china-markets-shorting/china-stock-exchanges-step-up-crackdown-on-short-selling-idUSKCN0Q909E20150804>
- [73] Bris A., Goetzmann W., and Zhu N. Efficiency and the Bear: Short Sales and Markets around the World. *The Journal of Finance*, vol. 62, no. 3, pp. 1029-1079, Jun 2007.

- [74] London Stock Exchange. (2022, Oct.) FAQ. [Online]. <https://www.londonstockexchange.com/personal-investing/faqs>
- [75] Japan Exchange Group. (2022, Oct.) Trading Rules of Domestic Stocks. [Online]. <https://www.jpx.co.jp/english/equities/trading/domestic/01.html>
- [76] Gao J., Hou Y., Fan F., and Liu F. Complexity Changes in the US and China's Stock Markets: Differences, Causes, and Wider Social Implications. *Entropy (Basel)*, vol. 22, no. 1, pp. 1-13, Jan 2020.
- [77] Yang Y. Comparison and Analysis of Chinese and United States Stock Market. *Journal of Financial Risk Management*, vol. 9, no. 1, pp. 44-55, Mar 2020.
- [78] Базилевич В.Д., Попов В.М., and Базилевич К.С.та ін. *Економічна теорія: Політекономія.*, 6th ed., Базилевича заред. В.Д., Ed. Київ: Знання-Прес, 2007.
- [79] Brunnermeier M Information Leakage and Market Efficiency. *The Review of Financial Studies*, vol. 18, no. 2, pp. 417-457, Feb 2005.
- [80] України Закон Про товарні біржі. , vol. 10, 1992.
- [81] Волохова І.С., Шишкіна Н.А., and Волкова О.Г.та ін. *Фінанси: навчальний посібник.* Харків: ПромАрт, 2018.
- [82] Libman D., Haber S., and M. Schaps Forecasting Quoted Depth With the Limit Order Book. *Frontiers of Artificial Intelligence*, vol. 4, no. 667780, May 2021.
- [83] Securities and Exchange Commission. (2021, December) Alternative Trading System ("ATS") List. [Online]. <https://www.sec.gov/foia/docs/atlist.htm>
- [84] CBOE Website. (2021, 18 May) A Deep Dive Into U.S. Equities Trading Venues. [Online]. <https://www.cboe.com/insights/posts/a-deep-dive-into-u-s-equities-trading-venues/>
- [85] UBS China Equities Team. (2020, 06 Nov) UBS China A-shares: FAQ,

- facts and figures. [Online].  
<https://www.ubs.com/global/en/assetmanagement/insights/thematic-viewpoints/apac-and-emerging/articles/stock-connect-china-a-shares-faqs-equity-investing.html>
- [86] Li Y., Meng X., and Wei X. China's New Third Board Market: Opportunities and Challenges. in *Procedia Computer Science*, vol. 55, 2015, pp. 1050-1059.
- [87] TD Bank. (2022, January) Trading of Canadian Listed Securities on Multiple Marketplaces. [Online].  
[https://www.td.com/ca/document/PDF/multiplemarkets\\_disclosure.pdf](https://www.td.com/ca/document/PDF/multiplemarkets_disclosure.pdf)
- [88] Зятюк С. (2022, January) Фондові біржі в Україні та світі: що це і як працює. [Online]. [https://education.24tv.ua/fondovi-birzhi-ukrayini-sviti-shho-tse-yak-pratsyuye-ostanni-novini\\_n1621860](https://education.24tv.ua/fondovi-birzhi-ukrayini-sviti-shho-tse-yak-pratsyuye-ostanni-novini_n1621860)
- [89] Degryse H., Karagiannis N., Tombeur G., and Wuyts G. Two shades of opacity: Hidden orders and dark trading. *Journal of Financial Intermediation*, vol. 47, p. 100919, 2021.
- [90] Мозговий О.М. Оболенська Т.Є., Мусієць Т.В. *Міжнародні фінанси: навчальний посібник.*, О.М. Мозговий, Ed. К.: КНЕУ, 2005.
- [91] BIDS Trading. (2022, February) Solutions: BIDS Trading. [Online].  
<https://www.bidstrading.com/solutions/solutions-overview/>
- [92] Securities and Exchange Commission. (2005) Regulation National Market System. [Online]. <https://www.sec.gov/rules/final/34-51808.pdf>
- [93] Wah E., Wellman M. Latency arbitrage in fragmented markets: A strategic agent-based analysis. *Algorithmic Finance*, vol. 5, pp. 69-93, 2016.
- [94] Aquilina M., Budish E., and O'Neill P. Quantifying the high-frequency trading "arms race". *BIS Working Papers*, no. 955.
- [95] Bozdog D., Florescu I., Khashanah K., and Wang J. Rare Events Analysis of High-Frequency Equity Data. *Wilmott Journal*, pp. 74-81, July 2011.

- [96] Bloomberg. (2020, September) Third Chinese Company in a Week Has Accidental 'Fat Finger' Share Sale. [Online]. <https://www.bloomberg.com/news/articles/2020-09-07/-fat-finger-holder-stake-sales-are-becoming-a-trend-in-china>
- [97] Barton S., Walt E. (2017, June) Bloomberg. [Online]. <https://www.bloomberg.com/news/articles/2017-06-26/gold-plunges-as-1-8-million-ounces-traded-in-a-new-york-minute>
- [98] Bloomberg Quint. (2018, March) Trading Error Erases \$3 Billion From Taiwan Oil Heavyweight. [Online]. <https://www.bloombergquint.com/markets/mystery-trades-wipe-out-3-billion-from-taiwan-oil-heavyweight>
- [99] Wilcox J. The Effect of Transaction Costs and Delay on Performance Drag. *Financial Analysts Journal*, vol. 49, no. 2, pp. 45-54, Mar-Apr 1993.
- [100] Seligman J. Does Urgency Affect Price at Market? An Analysis of U.S. Treasury Short-Term Finance. *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 38, no. 4, pp. 989-1012, 2006.
- [101] Amihud Y., Mendelson H., and Pedersen L. Liquidity and Asset Prices. *Foundations and Trends in Finance*, vol. 1, no. 4, pp. 269-364, 2005.
- [102] Akins B., Ng J., and Verdi R. Investor Competition over Information and the Pricing of Information Asymmetry. *The Accounting Review*, vol. 87, no. 1, pp. 35-58, Jan 2012.
- [103] Glosten L., Harris L. Estimating the components of the bid/ask spread. *Journal of Financial Economics*, vol. 21, no. 1, pp. 123-142, May 1988.
- [104] Keim D. Madhavan A. The Cost of Institutional Equity Trades. *Financial Analyst Journal*, vol. 54, no. 4, pp. 5-69, Jul 1998.
- [105] McNish T., Wood R. An Analysis of Intraday Patterns in Bid/Ask Spreads for NYSE Stocks. *The Journal of Finance*, vol. 47, no. 2, pp. 753-764, Jun 1992.

- [106] Chan K., Chung P., and Johnson H. The Intraday Behavior of Bid-Ask Spreads for NYSE Stocks and CBOE Options. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 30, no. 3, pp. 329-346, Sep 1995.
- [107] George T., Longstaff F. Bid-Ask Spreads and Trading Activity in the S&P 100 Index Options Market. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 28, no. 3, pp. 381-397, Sep 1993.
- [108] Demsetz H. Limit orders and the alleged Nasdaq collusion. *Journal of Financial Economics*, vol. 45, no. 1, pp. 91-95, 1997.
- [109] Biais B., Hillion P., and Spatt C. An Empirical Analysis of the Limit Order Book and the Order Flow in the Paris Bourse. *The Journal of Finance*, vol. 50, no. 5, pp. 1655-1689, Dec 1995.
- [110] Lo A., MacKinlay C., and Zhang J. Econometric models of limit-order executions. *Journal of Financial Economics*, vol. 65, no. 1, pp. 31-71, Jul 2002.
- [111] Cont R., Kukanov A. Optimal order placement in limit order markets. *Quantitative Finance*, vol. 17, no. 1, pp. 21-39, 2017.
- [112] Harris L., Hasbrouck J. Market vs. Limit Orders: The SuperDOT Evidence on Order Submission Strategy. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 31, no. 2, pp. 213-231, Jun 1996.
- [113] Cohen K., Maier S., Schwartz R., and Whitcomb D. Transaction Costs, Order Placement Strategy, and Existence of the Bid-Ask Spread. *Journal of Political Economy*, vol. 89, no. 2, pp. 287-305, Apr 1981.
- [114] Zhang Z., Zohren S., and Roberts S. DeepLOB: Deep Convolutional Neural Networks for Limit Order Books. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 67, no. 11, pp. 3001-3012, Jun 2019.
- [115] Vyetrenko S. et al. Get Real: Realism Metrics for Robust Limit Order Book Market Simulations. *Proceedings of the First ACM International Conference on AI in Finance*, pp. 1-8, 2020.

- [116] Maglaras C., Moallemi C., and Wang M. A deep learning approach to estimating fill probabilities in a limit order book. *Quantitative Finance*, vol. 22, no. 11, pp. 1989-2003, Aug 2022.
- [117] Chan L., Lakonishok J. The Behavior of Stock Prices Around Institutional Trades. *The Journal of Finance*, vol. 50, no. 4, pp. 1147-1174, Sep 1995.
- [118] Beebower G., Priest W. The tricks of the trade. *The Journal of Portfolio Management*, vol. 6, no. 2, pp. 36-42, 1980.
- [119] Dann L., Mayers D., and Raab R. Trading rules, large blocks and the speed of price adjustment. *Journal of Financial Economics*, vol. 4, no. 1, pp. 3-22, 1977.
- [120] Blum G. Kracaw W., Lewellen W. Determinants Of The Execution Costs Of Common Stock Trades By Individual Investors. *Journal of Financial Research*, vol. 9, no. 4, pp. 291-301, Dec 1986.
- [121] Barnea A., Logue E. Stock Trading and Portfolio Performance. *Journal of Bank Research*, vol. 7, pp. 150-157, 1976.
- [122] Berkowitz S., Logue D., and E. Noser The Total Cost of Transactions on the NYSE. *Journal of Finance*, vol. 43, pp. 97-112, 1988.
- [123] Bagehot W. The Only Game in Town. *Financial Analyst Journal*, vol. 27, no. 2, pp. 12-14, 1971.
- [124] Copeland T., Galai D. Informational Effects on the Bid-Ask Spread. *The Journal of Finance*, vol. 38, no. 5, pp. 1457-1469, Dec 1983.
- [125] Grossman S., Stiglitz J. On the Impossibility of Informationally Efficient Markets. *The American Economic Review*, vol. 70, no. 3, pp. 393-408, Jun 1980.
- [126] Loeb T. Trading Cost: The Critical Link between Investment Information and Results. *Financial Analysts Journal*, vol. 39, no. 3, pp. 39-44, May-Jun 1983.
- [127] Wagner W., Edwards M. Best Execution. *Financial Analysts Journal*, vol.

- 49, no. 1, pp. 65-71, Jan-Feb 1993.
- [128] Grinold R., Kahn R. *Active Portfolio Management: A Quantitative Approach for Providing Superior Returns and Controlling Risk.*, Second Edition ed.: McGraw Hill, 1999.
- [129] Avramovic A. (2017, March) Market Structure: We're All High Frequency Traders Now. [Online]. [http://www.smallake.kr/wp-content/uploads/2017/10/HFT\\_world.pdf](http://www.smallake.kr/wp-content/uploads/2017/10/HFT_world.pdf)
- [130] Vlastelica R. (2017, March) Market Watch: High-frequency trading has reshaped Wall Street in its image. [Online]. <https://www.marketwatch.com/story/high-frequency-trading-has-reshaped-wall-street-in-its-image-2017-03-15>
- [131] Almgren R., Chriss N. Optimal Execution of Portfolio Transactions. *Journal of Risk*, vol. 3, pp. 5-39, 2001.
- [132] Bouchaud J.P., Gefen Y., Potters M., and Matthieu W. Fluctuations and response in financial markets: the subtle nature of 'random' price changes. *Quantitative Finance*, vol. 4, no. 2, pp. 176-190, 2004.
- [133] Obizhaeva A., Wang J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. *Journal of Financial Markets*, vol. 16, no. 1, pp. 1-32, 2013.
- [134] Alfonsi A., Fruth A., and Shied A. Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions. *Quantitative Finance*, vol. 10, pp. 143-157, 2010.
- [135] Taranto D., Bormetti G., Bouchaud J.P., Lillo F., and Toth B. Linear models for the impact of order flow on prices. II. The Mixture Transition Distribution model. *Quantitative Finance*, vol. 18, no. 6, pp. 917-931, 2018.
- [136] Eisler Z., Bouchaud J.P., and Kockelkoren J. Models for the impact of all order book events in *Market Microstructure: Confronting Many Viewpoints*, Abergel F et al., Eds. Oxford, UK: John Wiley & Sons Ltd,

- 2012, p. 254.
- [137] Gatheral J. (2016, May) Three models of market impact - Lectures from Baruch MFE Program. [Online]. <https://mfe.baruch.cuny.edu/wp-content/uploads/2017/05/Chicago2016OptimalExecution.pdf>
- [138] Alfonsi A., Blanc P. Extension and Calibration of a Hawkes-Based Optimal Execution Model. *Market Microstructure and Liquidity*, vol. 2, no. 2, 2016.
- [139] Fosset A., Bouchaud J.P., and Benzaquen M. Non-parametric Estimation of Quadratic Hawkes Processes for Order Book Events. *The European Journal of Finance*, Apr 2021.
- [140] Toth B., Eisler Z., and Bouchaud J.P. The Short-Term Price Impact of Trades is Universal. *Market Microstructure and Liquidity*, vol. 3, no. 2, p. 1850002, 2017.
- [141] Marcaccioli R., Bouchaud J.P., and Benzaquen M. Exogenous and endogenous price jumps belong to different dynamical classes. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2022, no. 023403, 2022.
- [142] FINRA. FINRA Rules and Guidance. [Online]. <https://www.finra.org/rules-guidance/rulebooks/finra-rules/5310>
- [143] Han M., Kim S., and V. Nanda. (2018, Jul) SSRN. [Online]. [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=3221946](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3221946)
- [144] Pigou A. *The Economics of Welfare*. London: MacMillan, 1920.
- [145] Traders Magazine: Editorial Staff. (2010, August) Tale of the Tape. [Online]. <https://www.tradersmagazine.com/departments/brokerage/tale-of-the-tape/>
- [146] Securities and Exchange Commission. (2005, August) Regulation NMS. [Online]. <https://www.sec.gov/rules/final/34-51808.pdf>
- [147] European Parliament. (2014, May) Official Website of European Union.

- [Online]. <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:02014L0065-20160701>
- [148] Osipovich A., Michaels D., and G. Morgenson SEC Ruling Takes Aim at Stock-Exchange Profits *The Wall Street Journal*, Oct 2018, <https://www.wsj.com/articles/sec-to-rule-nyse-nasdaq-didnt-justify-market-data-fee-increases-1539721232>.
- [149] OECD. (2014) Privatisation and Demutualisation of MENA Stock Exchanges: to be or not to be? [Online]. <https://www.oecd.org/corporate/PrivatisationDemutualisationMENASockExchanges.pdf>
- [150] Katz M., Shapiro C. Systems Competition and Network Effects. *Journal of Economic Perspectives*, vol. 8, no. 2, pp. 93-115, 1994.
- [151] Ігнатюк А.І., Ігнатюк В.В. Моделі мережевих ефектів та їх практичне застосування. *Вісник Чернівецького торговельно-економічного інституту*, vol. 45, no. 1, pp. 405-418, 2012.
- [152] Parker G., Alstynе M. Two-Sided Network Effects: A Theory of Information Product Design. *Management Science*, vol. 51, no. 10, pp. 1494-1504, 2005.
- [153] Comerton-Forde C., Gregoire V., and Zhong Z. Inverted fee structures, tick size, and market quality. *Journal of Financial Economics*, vol. 134, no. 1, pp. 141-164, October 2019.
- [154] Abdi F., Rinaldo A. A Simple Estimation of Bid-Ask Spreads from Daily Close, High, and Low Prices. *The Review of Financial Studies*, vol. 30, no. 12, pp. 4437–4480, December 2017.
- [155] Cont R., Stoikov. S., and Tareja R. A Stochastic Model for Order Book Dynamics. *Operations Research*, vol. 58, no. 3, pp. 549-563, May-June 2010.
- [156] Bazylevych V., Ihnatiuk V. Metaorder limit prices in evaluating expected

- market impact and assessing execution service quality. *Investment Management & Financial Innovations*, vol. 16, no. 2, pp. 355-369, July 2019.
- [157] Gross-Kluschmann A., Hautsch N. Predicting Bid–Ask Spreads Using Long-Memory Autoregressive Conditional Poisson Models. *Journal of Forecasting*, vol. 32, no. 8, pp. 724-742, December 2013.
- [158] Cattivelli L., Pirino D. A SHARP model of bid–ask spread forecasts. *International Journal of Forecasting*, vol. 35, no. 4, pp. 1211-1225, 2019.
- [159] Fall M., Louhichi W., and Viviani J. Forecasting the intra-day effective bid ask spread by combining density forecasts. *Applied Economics*, vol. 53, no. 50, pp. 5772-5792, June 2021.
- [160] Bartolomeo D., Hoffman H. (2007) A Market Impact Model that Works. [Online]. <https://www.northinfo.com/documents/279.pdf>
- [161] Maughan S., Link K., and Fernbach N. (2021, February) Impact and Total Cost to Trade. [Online]. <https://www.liquidnet.com/expert-insights/impact-and-total-cost-to-trade>
- [162] Bouchaud J.P. (2020, Sep) The endogenous dynamics of markets: price impact and feedback loops. [Online]. <https://arxiv.org/abs/1009.2928>
- [163] Filimonov V. Exogenous versus endogenous dynamics in the price discovery process. in *Quantitative Finance Research Group, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2015*, <http://mathfinance.sns.it/index.php/vladimir-filimonov-exogenous-versus-endogenous-dynamics-in-the-price-discovery-process/>.
- [164] Taranto D., Bormetti G., Bouchaud J.P., Lillo F., and Toth B. Linear models for the impact of order flow on prices I. History dependent impact models. *Quantitative Finance*, vol. 18, no. 6, pp. 903-915, 2016.
- [165] Abel-Noser Big Data. [Online]. <https://www.abelnoser.com/big-data.html>
- [166] Torre N., BARRA Market Impact Model Handbook. BARRA Inc.,

Berkeley , 1997.

- [167] Bloomberg Professional Services. (2020, October) Moving the market: A look at prices and impacts from trading. [Online]. <https://www.bloomberg.com/professional/blog/moving-the-market-a-look-at-prices-and-impacts-from-trading/>
- [168] Zarinelli E., Treccani M., Farmer J., and Lillo F. Beyond the square root: Evidence for logarithmic dependence of market impact on size and participation rate. *Market Microstructure and Liquidity*, vol. 1, no. 2, 2015.
- [169] Toth B. et al. Anomalous price impact and the critical nature of liquidity in financial markets. *Physical Review X*, vol. 1, no. 2, 2011.
- [170] Toth B., Eisler Z., and Bouchaud J.P. The Square-Root Impace Law Also Holds for Option Markets. *Wilmott*, vol. 85, pp. 70-73, 2016.
- [171] Forsyth P., Kennedy J., Tse S., and Windcliff H. Optimal trade execution: A mean quadratic variation approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 36, no. 12, pp. 1971-1991, 2012.
- [172] Almgren R., Thum C., Hauptmann E., and Li H. Direct estimation of equity market impact. *Risk*, vol. 57, no. 58–62, July 2005.
- [173] Gatheral J. No-dynamic-arbitrage and market impact. *Quantitative Finance*, vol. 10, no. 7, pp. 749-759, 2010.
- [174] Gatheral J., Alexander S. Dynamical Models of Market Impact and Algorithms for Order Execution in *Handbook on Systemic Risk*, Fouque JP., J. Langsam, Eds. Cambridge, 2013.
- [175] Curato G., Gatheral J., and Lillo F. Optimal execution with non-linear transient market impact. *Quantitative Finance*, vol. 17, no. 1, pp. 41-54, 2017.
- [176] Brockmann X., Serie E., Kockelkoren J., and Bouchaud JP. Slow decay of impact in equity markets. *Market Microstructure and Liquidity*, vol. 1, no. 2, p. 1550007, 2015.

- [177] Bucci F., Benzaquen M., Lillo F., and Bouchaud JP. Slow Decay of Impact in Equity Markets: Insights from the ANcerno Database. *Market Microstructure and Liquidity*, vol. 4, no. 3, p. 1950006.
- [178] Spenser I. (2020, Oct) MarketWatch. [Online]. <https://www.marketwatch.com/story/the-number-of-companies-publicly-traded-in-the-us-is-shrinking-or-is-it-2020-10-30>
- [179] Li F. et al. Do price trajectory data increase the efficiency of market impact estimation? *arXiv*, pp. 1-33, May 2023.
- [180] Gatheral J., Shied A., and Slynko A. Transient linear price impact and Fredholm integral equations. *Mathematical Finance*, vol. 22, no. 3, pp. 445-474, 2012.
- [181] Kaplan E., Meier P. Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 53, no. 282, pp. 457-481, 1958.
- [182] Strawderman R. Estimating the Mean of an Increasing Stochastic Process at a Censored Stopping Time. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 95, no. 452, pp. 1192-1208, Dec 2000.
- [183] Basar S. (2021, May) Traders magazine. [Online]. <https://www.tradersmagazine.com/xtra/as-the-algo-wheel-turns/>
- [184] Bloomberg Professional Services. (2019, November) What's an "Algo Wheel?" And why should you care? [Online]. <https://www.bloomberg.com/professional/blog/whats-algo-wheel-care>
- [185] Thananjeyan B. et al. Resource Allocation in Multi-armed Bandit Exploration: Overcoming Sublinear Scaling with Adaptive Parallelism. *Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning*, vol. 139, 2021.
- [186] Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior.*, 776th ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1953.

- [187] Gosset ("Student") W. The probable error of a mean. *Biometrika*, vol. 6, no. 1, pp. 1-25, 1908.
- [188] Yang L., Zhu H. Back-Running: Seeking and Hiding Fundamental Information in Order Flows. *The Review of Financial Studies*, vol. 33, no. 4, pp. 1484-1533, Apr 2020.
- [189] Pourahmadi M., Wang X. Distribution of random correlation matrices: Hyperspherical parameterization of the Cholesky factor. *Statistics & Probability Letters*, vol. 106, no. 5-12, 2015.
- [190] Garey M., Johnson D. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness (Series of Books in the Mathematical Sciences)*, 1st ed. New York: W.H. Freeman and Company, 1979.
- [191] Shmidt D., Makalic E. (2018, Nov.) Package 'randcorr'. [Online]. <https://cran.r-project.org/web/packages/randcorr/randcorr.pdf>
- [192] Офіційний вебпортал парламенту України. [Online]. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1050-01#Text>
- [193] України Закон Про цінні папери та фондовий ринок. *Відомості Верховної Ради України*, vol. 31, 2006.
- [194] Alfonsi A., Shied A Optimal Trade Execution and Absence of Price Manipulations in Limit Order Book Models. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 490-552, February 2010.
- [195] Шкварчук Л.О. *Фінансовий ринок: начальний посібник (382 с.)*. К.: Знання, 2013.
- [196] Стойко О.Я, Дема Д.І. *Фінанси: підручник (406 с.)*, Стойко О.Я., Ed. К.: Алерта, 2017.
- [197] Еш С. *Фінансовий ринок (528 с.)*. К.: Центр Учбової літератури, 2011.
- [198] В.В. Ігнатюк Мережеві ефекти та рівновага олігополістичних ринків (на прикладі українського ринку мобільного зв'язку). *Збірник наукових праць студентів економічного факультету (за заг. ред.*

*проф. В.Д. Базилевича*), pp. 90-97, 2011.

- [199] Любка О., Ігнатюк В. Методичні підходи до оцінювання та прогнозування трансакційних витрат біржової торгівлі на фондовому ринку. *Актуальні проблеми економіки*, vol. 12, no. 258, pp. 111-125, 2022.

## ДОДАТКИ

### Додаток А

Розглянемо процес моделювання виконання метаордеру з заданими характеристиками.

Так, симуляція торгівлі має здійснюватися відповідно до двох складових: 1) моделювання динаміки книги ліміт ордерів; 2) власне стратегії торгівлі метаордера.

Так, Р. Конт та ін. [155] запропонували описати динаміку книги ліміт ордерів як неперервний процес Маркова з визначеним набором переходів між станами процесу.

Так, якщо книга ліміт ордерів представляє собою набір ордерів на купівлю:

$$x^{buy} = (x_{p_1}^{buy}, \dots, x_{p_k}^{buy}, \dots, x_{p_N}^{buy}, \dots)$$

та продаж:

$$x^{sell} = (x_{p_1}^{sell}, \dots, x_{p_k}^{sell}, \dots, x_{p_N}^{sell}, \dots)$$

де  $x^{buy}$  – вектор кількості ордерів на купівлю та  $x^{sell}$  – вектор кількості ордерів на продаж за цінами  $p_1, \dots, p_k, \dots, p_N, \dots$ . Оскільки кількість не може бути від'ємною, то кожен елемент векторів не менший від нуля:  $\forall p_k: x_{p_k}^{buy} \geq 0$ ;  $\forall p_k: x_{p_k}^{sell} \geq 0$ .

Р. Конт та ін. [155] пропонують ввести моделювати наступний процес що є різницею цих двох величин:

$$x = x^{buy} - x^{sell} = (x_{p_1}, \dots, x_{p_k}, \dots, x_{p_N}) \quad (A.1)$$

У векторі  $x$ , позитивні елементи  $x_{p_k} > 0$  означають, що за ціни  $p_k$  у книзі ордерів знаходиться  $|x_{p_k}|$  ліміт ордерів на купівлю. Відповідно, негативні елементи  $x_{p_k} < 0$  вказують на  $|x_{p_k}|$  ордерів на продаж за ціною  $p_k$ . Таким чином, найкраща ціна купівлі  $p_B$  – це максимальна ціна за якою  $x_{p_k}$  є більшим від нуля:  $p_B = \max\{p_k : x_{p_k} < 0\}$ ; а найкраща ціна продажу – мінімальна ціна за якою  $x_{p_k}$  є від'ємною:  $p_A = \min\{p_k : x_{p_k} > 0\}$ .

Відповідно,  $x$  змінюється у часі внаслідок наступних подій:

1) Надходження у книгу заявок нового ліміт ордеру:

*На купівлю:*

$$x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_k} + 1, \dots, x_{p_N}) \text{ з інтенсивністю } \lambda(p_k - p_B), \quad p_k > p_B \quad (\text{A.2})$$

*На продаж:*

$$x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_k} - 1, \dots, x_{p_N}) \text{ з інтенсивністю } \lambda(p_A - p_k), \quad p_k < p_A$$

де  $\lambda(i)$  – певна функція що виражає ймовірність отримання нового ліміт ордеру на глибині  $i$  відносно найкращих цін купівлі та продажу.

2) Надходження нового маркет ордеру:

*На купівлю:*

$$x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_B} + 1, \dots, x_{p_N}) \text{ з інтенсивністю } \mu \quad (\text{A.3})$$

*На продаж:*

$$x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_A} - 1, \dots, x_{p_N}) \text{ з інтенсивністю } \mu$$

3) Скасування ордерів, що були відправлені раніше з інтенсивністю відповідно до глибини їх розміщення (що задається функцією  $\theta(i)$ ):

*На купівлю:*

$$x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_k} + 1, \dots, x_{p_N}) \text{ з інтенсивністю } \theta(p_k - p_B) |x_{p_k}|, p_k > p_B \quad (\text{A.4})$$

*На продаж:*

$$x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_k} - 1, \dots, x_{p_N}) \text{ з інтенсивністю } \theta(p_A - p_k) |x_{p_k}|, p_k < p_A$$

Р. Конт. та ін. [155] розраховали значення параметрів  $\mu$ ,  $\theta(i)$ ,  $\lambda(i)$  на прикладі однієї акції (Sky Perfect Communication). Відповідно:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.94 \\ \lambda(i) &= k / i^\alpha, \text{ де } k = 1.92, \alpha = 0.52 \\ \theta(i) &= \{0.71, 0.81, 0.68, 0.56, 0.47\} \text{ для } i \in [1, 5] \\ \theta(i) &= \theta(5) \text{ для } i \geq 5 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Проте, недоліком такої моделі було те, що вона дозволяла моделювати лише ендогенні змінні у книзі ордерів не дозволяла врахувати вплив екзогенної торгівлі – наприклад, виконання метаордеру.

Тому робота [156] розширила цю модель. У ній автори ввели вектор  $z = x - y$ , де  $x$  – різниця між ордерами купівлі і продажу за заданої ціни

спричинена звичайною ринковою активністю (тобто, так само як визначено у формулі (A.1)), а  $y$  – кількість дочірніх ордерів на купівлю акції за даною ціною що були відправлені виконавцем екзогенного метаордеру.

Так, найкращі ціни продажу і купівлі мають бути перевизначені відповідно:  $p_B = \max\{p_k : z_{p_k} < 0\}$ ,  $p_A = \min\{p_k : z_{p_k} > 0\}$ .

Тепер, при надходженні нового ринкового ордеру, необхідно визначити з яким з контра- ліміт ордерів буде здійснена трансакція: з тими, що відправлені виконавцем метаордера або іншим агентом на ринку.

Для того, щоб симуляція була наближена до реальності, дослідники запропонували використати правило черги FIFO (або так званим правилом пріоритету «ціна/час») – що на даний момент використовується більшою частиною бірж.

**Таблиця А.1**

**Динаміка процесу  $z$**

Опис переходу	Перехід	Часовий компонент (вплив черги)
<i>Власне процес</i>	$z = (x_{p_1} - y_{p_1}, \dots, x_{p_k} - y_{p_k}, \dots, x_{p_N} - y_{p_N})$ $p_B = \max\{p_k : z_{p_k} < 0\}$ $p_A = \min\{p_k : z_{p_k} > 0\}$	-
<u>Список переходів:</u> 1) Надходження нового ліміт ордеру	$x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_k} - 1, \dots, x_{p_N})$ з інтенсивністю $\lambda(p_A - p_k)$ для $p_k < p_A$ $x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_k} - 1, \dots, x_{p_N})$ з інтенсивністю $\lambda(p_A - p_k)$ для $p_k < p_A$	Новий ордер додано до черги за ціною $p_k$
2) Надходження нового маркет ордеру на купівлю	$x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_A} - 1, \dots, x_{p_N})$ with rate $\mu$	Видалено ордер з початку черги за ціною $p_A$
3) Надходження нового маркет ордеру на продаж	З інтенсивністю $\mu$ : • $y \rightarrow (y_{p_1}, \dots, y_{p_B} - 1, \dots, y_{p_N})$ якщо перший ордер за ціною $p_B \in$ дочірнім для метаордеру • $x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_B} + 1, \dots, x_{p_N})$ якщо перший ордер за ціною $p_B \in$ ендogenous ордером	Видалено ордер з початку черги за ціною $p_B$ . Цей ордер може бути екзогенного або ендogenous характеру – в залежності від того, який з них знаходиться на початку черги.
4) Скасування ендogenous ліміт ордеру	○ $x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_k} - 1, \dots, x_{p_N})$ з інтенсивністю $\theta(p_k - p_B) x_{p_k} $ для $p_k > p_B$ ○ $x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_k} - 1, \dots, x_{p_N})$ з інтенсивністю $\theta(p_A - p_k) x_{p_k} $ для $p_k < p_A$	Видалено ендogenous ордер у випадковій позиції в черзі за ціною $p_k$

*Джерело:* [156]

Так:

- Новий ліміт ордер – ендogenous чи екзогенного характеру – буде завжди доданий у кінець наявної черги ордерів за даною ціною.
- Новий ринковий ордер завжди здійснює трансакцію з найпершим ордером у черзі контра- ліміт ордерів за даною ціною.

- У випадку скасування ордера, видаляється випадковий ордер у черзі зі списку ендогенних ордерів.

Як наслідок, попередньо описані переходи Марковського процесу  $x$  відрізняються для процесу  $z$ . Список наведений у табл. А.1.

Завдяки наведеним правилам, можливо моделювати виконання метаордеру відповідно до будь-якого торгового алгоритму: достатньо лише задати набір переходів для процесу  $u$ .

Так, у другому розділі симуляція торгівлі метаордеру передбачала відправку дочірніх ордерів таким чином, щоб один і лише один ордер був виконаний у певний фіксований період часу  $X$  (TWAR алгоритм).

Згідно такої постановки задачі, процес  $u$  можна описати за допомогою переходів наведених у табл. А.2.

**Таблиця А.2**

**Динаміка процесу  $u$**

Опис переходу	Перехід	Часовий компонент (вплив черги)
<b>Правила переходу процесу у кожний період <math>X</math></b>		
Відправка нового пасивного дочірнього ордеру	$p_{passive} = \min\{p_B, p_{limit}\}$ $y \rightarrow (y_{p_1}, \dots, y_{p_{passive} + 1}, \dots, y_{p_N})$	Новий екзогенний ордер додано до черги за ціною $p_{passive}$
Скасувати пасивний дочірній мета ордер якщо його не було виконано протягом періоду $X$ (внаслідок переходу 3) у процесі $z$ )	Якщо $y_{p_{passive}} > 0$ : $y \rightarrow (y_{p_1}, \dots, y_{p_{passive} - 1}, \dots, y_{p_N})$	Дочірній екзогенний ордер за ціною $p_{passive}$ видаляється з черги
Якщо за попередній період $X$ пасивний ордер було скасовано (а не виконано), алгоритм відправляє один агресивний ордер за ціною продажу (який гарантовано буде виконано)	Якщо $y_{p_{passive}} > 0$ та $p_{aggressive} \leq p_{limit}$ : $p_{aggressive} = p_a$ $x \rightarrow (x_{p_1}, \dots, x_{p_{aggressive} - 1}, \dots, x_{p_N})$	Екзогенний агресивний дочірній ордер буде виконаний за ціною $p_{aggressive}$ . Контра ордером виступить перша з ендогенних заявок у черзі за ціною $p_{aggressive}$

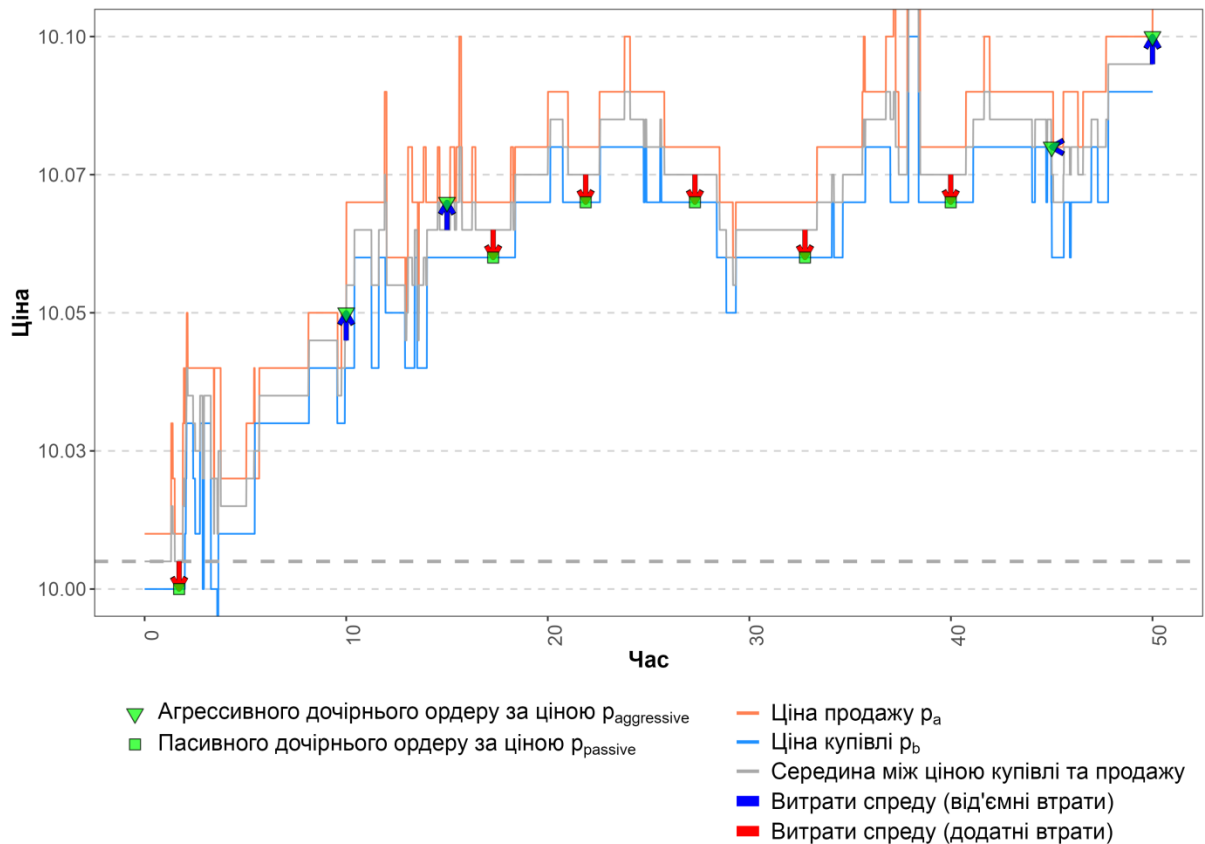
Джерело: [156]

У переважній більшості застосувань цього способу моделювання використовувалися параметри наведені у (А.5) для моделювання динаміки книги заявок.

В свою чергу, для процесу  $u$  параметри  $X$  та загальний період моделювання було вказано окремо.

## Додаток Б

В цьому додатку представлені розраховані числові значення витрат спреду що зображені на рис. 2.2 (який також наведено знизу для наочності).



**Рис. Б.1 Витрати спреду**

Джерело: Симульоване виконання метаордеру за допомогою метода описаного у Додатку А та [156]

Для розрахунку власне значення витрат спреду у прикладі на рис. Б.1 буде використана формула наведена у (2.2):

$$\text{Витрати спреду} = sideSign \cdot \sum_{t=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} - 1 \right) \quad (\text{Б.1})$$

Список всіх здійснених транзакцій та відповідних витрат спреду для кожного з дочірніх ордерів наведені у табл. Б.1.

Отже, внаслідок виконання метаордеру у даному симульованому прикладі, інвестор зазнав -1.49 bps (сотих відсотків) транзакційних витрат. Це значення від'ємне, а отже – торгова стратегія призвела до збережень замість витрат. Зважаючи на характер транзакцій у табл. Б.1, можна зробити

висновок що це сталося внаслідок того, що алгоритм здійснював транзакції за ціною  $p_{passive}$  відносно частіше ніж за ціною  $p_{aggressive}$ .

Таблиця Б.1

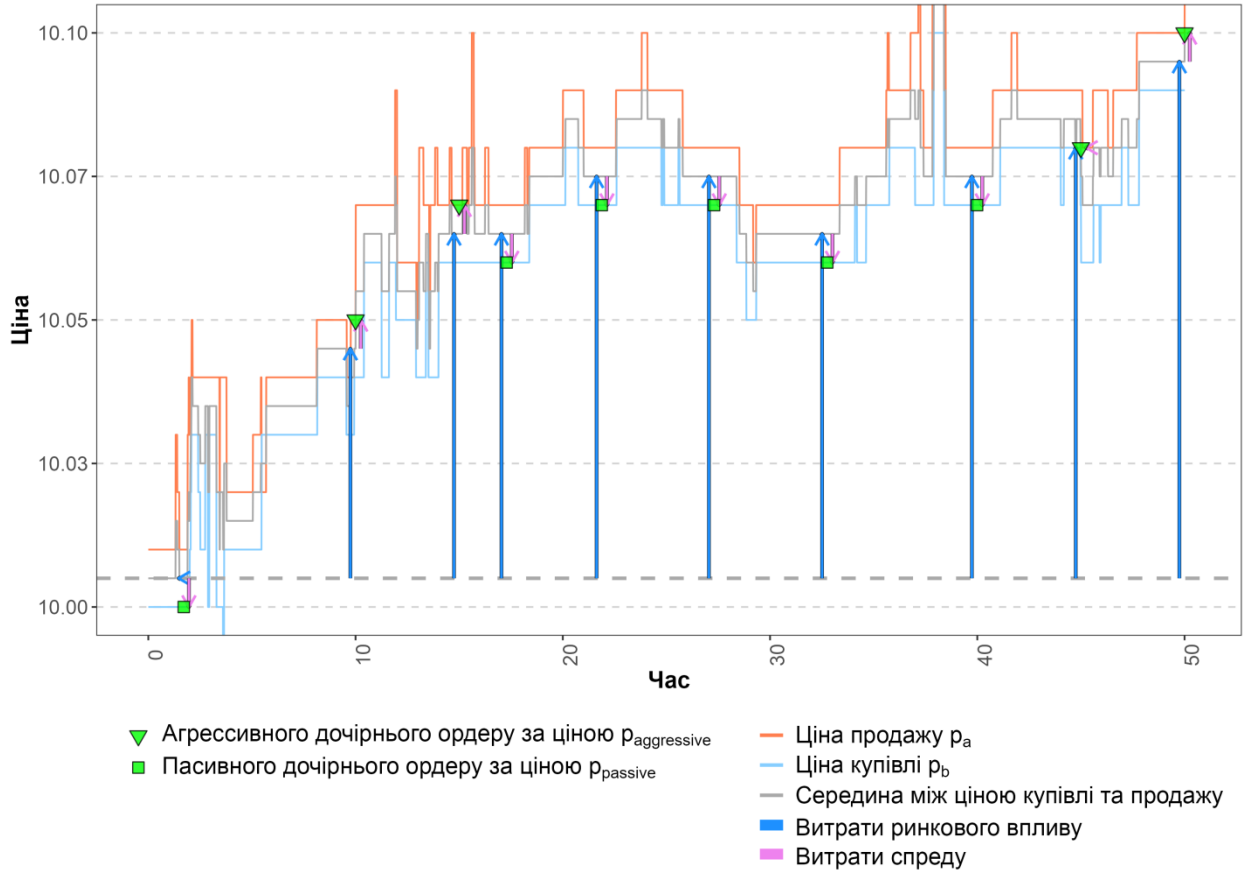
Розрахунок транзакційних витрат спреду

Інформація про здійснені транзакції дочірніх ордерів					Розрахунок витрат спреду	
Час виконання	Сторона виконання ордеру ( $p_{aggressive} / p_{passive}$ )	Кількість виконання	Ціна виконання дочірнього ордеру ( $p_t^{exec}$ )	Середина між ціною купівлі і продажу у цей момент	$\frac{q_t}{Q}$	$\frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} - 1$ (у bps = сотих відсотку)
1.71	passive	100	10.00	10.005	0.1	-5.00
10	aggressive	100	10.05	10.045	0.1	4.98
15	aggressive	100	10.07	10.065	0.1	4.97
17.29	passive	100	10.06	10.065	0.1	-4.97
21.88	passive	100	10.07	10.075	0.1	-4.96
27.3	passive	100	10.07	10.075	0.1	-4.96
32.76	passive	100	10.06	10.065	0.1	-4.97
39.99	passive	100	10.07	10.075	0.1	-4.96
45	aggressive	100	10.08	10.08	0.1	0.00
50	aggressive	100	10.10	10.095	0.1	4.95
<b>Загалом</b>		<b><math>Q = 1000</math></b>	<b>10.06</b>	<b>10.06</b>	<b>1.0</b>	<b>-1.49</b>

Джерело: розраховано за даними отриманими внаслідок моделювання виконання метаордеру за допомогою метода описаного у Додатку А та [156]

## Додаток В

В цьому додатку представлені розраховані числові значення витрат ринкового впливу що зображені на рис. 2.3 (який наведено знизу для наочності).



**Рис. В.1 Витрати ринкового впливу**

Джерело: симульоване виконання метаордеру за допомогою метода описаного у Додатку А та [156]

Для розрахунку власне значення витрат ринкового впливу у прикладі на рис. В.1 була використана формула наведена у (2.3):

$$\text{Витрати ринкового впливу} = sideSign \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} - 1 \right) \quad (B.1)$$

в якій  $p_{arrival}$  — ринкова ціна за якою ордер був отриманий (чорна пунктирна лінія на рис. В.1), що виступала в якості  $p_t^{ref}$ .

Список всіх здійснених трансакцій та відповідних витрат ринкового впливу для кожного з дочірніх ордерів наведені у табл. В.1. Трансакції у цій

таблиці повністю ідентичні до тих що були використані у додатку Б, у табл. Б.1.

**Таблиця В.1**

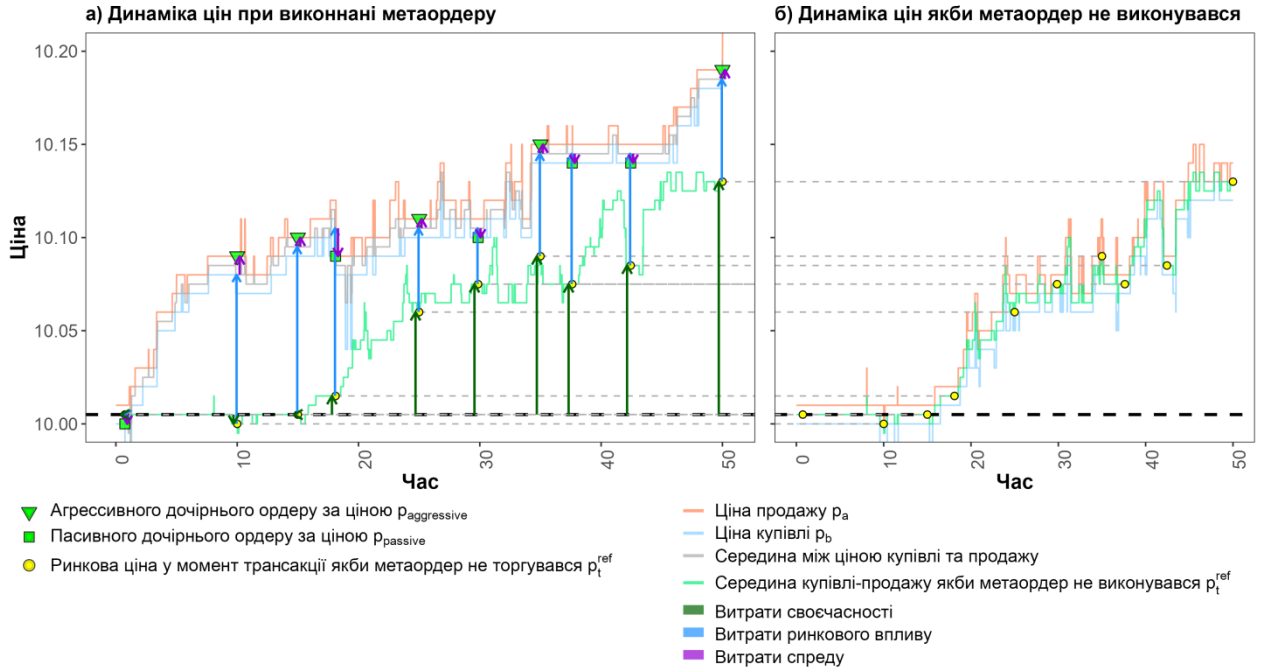
**Розрахунок трансакційних витрат ринкового впливу**

Інформація про здійснені трансакції дочірніх ордерів					Розрахунок витрат ринкового впливу		
Час виконання	Сторона виконання ордеру ( $p_{aggressive} / p_{passive}$ )	Кількість виконання	Ціна виконання дочірнього ордеру ( $p_t^{exec}$ )	Середина між ціною купівлі і продажу у цей момент	$\frac{q_t}{Q}$	$p_t^{ref}$ ( $p_{arrival}$ )	$\frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} - 1$ (у bps = сотих відсотку)
1.71	passive	100	10.00	10.005	0.1	10.005	-5.00
10	aggressive	100	10.05	10.045	0.1	10.005	44.98
15	aggressive	100	10.07	10.065	0.1	10.005	64.97
17.29	passive	100	10.06	10.065	0.1	10.005	54.97
21.88	passive	100	10.07	10.075	0.1	10.005	64.97
27.3	passive	100	10.07	10.075	0.1	10.005	64.97
32.76	passive	100	10.06	10.065	0.1	10.005	54.97
39.99	passive	100	10.07	10.075	0.1	10.005	64.97
45	aggressive	100	10.08	10.08	0.1	10.005	74.96
50	aggressive	100	10.10	10.095	0.1	10.005	94.95
<b>Загалом</b>		<b>Q = 1000</b>	<b>10.06</b>	<b>10.06</b>	<b>1.0</b>		<b>57.97</b>

*Джерело: розраховано за даними отриманими внаслідок моделювання виконання метаордеру за допомогою метода описаного у Додатку А та [156]*

## Додаток Г

В цьому додатку представлені розраховані числові значення витрат ринкового впливу що зображені на рис. 2.4 (який також представлено на рис. Г.1 для наочності).



**Рис. Г.1 Витрати своєчасності**

Джерело: симульоване виконання метаордеру за допомогою метода описаного у Додатку А та [156] при  $\mu = 1.41$  для ринкових ордерів на купівлю акції

Власне витрати спреду, ринкового впливу та своєчасності розраховані у табл. Г.1. Для розрахунку були використані рівняння (2.2), (2.3) та (2.4). Вони також наведені у цьому додатку: формули (Г.1) (Г.2) (Г.3) відповідно.

$$\text{Витрати спреду} = sideSign \cdot \sum_{t=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \frac{p_t^{exec}}{p_t^{mid}} - 1 \right) \quad (\text{Г.1})$$

$$\text{Витрати ринкового впливу} = sideSign \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \frac{p_t^{mid}}{p_t^{ref}} - 1 \right) \quad (\text{Г.2})$$

$$\text{Витрати своєчасності} = sideSign \cdot \sum_{t=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \frac{p_t^{ref}}{p_{arrival}} - 1 \right) \quad (\text{Г.3})$$

Крім того, у табл. Г.1 обчислені значення і всіх неявних витрат загалом за умови того, що метаордер був виконаний повністю і витрати втрачених можливостей дорівнюють нулю. Формула для обчислення показана у (Г.4).

$$\text{Неявні витрати} = \text{sideSign} \cdot \sum_{t=1}^N \frac{q_t}{Q} \left( \frac{p_t^{exec}}{p_{arrival}} - 1 \right) \quad (\text{Г.4})$$

Таблиця Г.1

**Розрахунок транзакційних витрат своєчасності**

Час виконання	Сторона виконання ордеру	Кількість виконання	Ціна виконання дочірнього ордеру ( $p_t^{exec}$ )	Середина між ціною купівлі і продажу у цей момент	Ціна яка б переважала на ринку якби мета ордер не торгувався ( $p_t^{ref}$ )	Середина ціи куплі-продажу на момент початку метаордеру ( $p_{arrival}$ )	$\frac{q_t}{Q}$	Витрати спреду	Витрати ринкового впливу	Витрати своєчасності	Неявні витрати загалом
0.74	passive	100	10.00	10.005	10.005	10.005	0.1	-5.00	0.00	0.00	-5.00
10	aggressive	100	10.09	10.08	10	10.005	0.1	9.92	80.00	-0.50	84.96
15	aggressive	100	10.10	10.095	10.005	10.005	0.1	4.95	89.96	0.00	94.95
18.11	passive	100	10.09	10.105	10.015	10.005	0.1	-14.84	89.87	1.00	84.96
25	aggressive	100	10.11	10.105	10.06	10.005	0.1	4.95	44.73	5.50	104.95
29.86	passive	100	10.10	10.105	10.075	10.005	0.1	-4.95	29.78	7.00	94.95
35	aggressive	100	10.15	10.145	10.09	10.005	0.1	4.93	54.51	8.50	144.93
37.62	passive	100	10.14	10.145	10.075	10.005	0.1	-4.93	69.48	7.00	134.93
42.44	passive	100	10.14	10.145	10.085	10.005	0.1	-4.93	59.49	8.00	134.93
50	aggressive	100	10.19	10.185	10.13	10.005	0.1	4.91	54.29	12.49	184.91
<b>Загалом</b>		<b>1000</b>	<b>10.11</b>	<b>10.11</b>	<b>10.05</b>	<b>10.01</b>	<b>1</b>	<b>-0.50</b>	<b>57.21</b>	<b>4.90</b>	<b>105.95</b>

Джерело: розраховано за даними отриманими внаслідок моделювання виконання метаордеру за допомогою метода описаного у Додатку А та [156]

## Додаток Д

У цьому додатку здійснено порівняння точності розрахунку параметрів за допомогою методів Р. Алмгрена та ін. [172] і методу максимальної правдоподібності [179].

Для здійснення цього аналізу була використана модель Р. Алмгрена [172] лінійного ринкового впливу, згідно якій ціна при виконанні метаордеру змінюється згідно наступного процесу:

$$S_t = S_0 + \gamma v^\alpha t + \mathbb{1}_{t \in (0, T]} \cdot \eta v^\beta + \sigma \int_0^t dW_s \quad (\text{Д.1})$$

Була здійснена симуляція торгівлі десяти мета ордерів відповідно до рівняння динаміки ринкового впливу (Д.1). Припускалося, що інвестор розглядає лінійну модель: тобто йому відомо що  $\alpha = 1$  та  $\beta = 1$ . Крім того, вважалось, що він також володіє інформацією щодо волатильності акції ( $\sigma$ ), оскільки це є один з вхідних параметрів для моделей оптимізації інвестиційного портфеля. Дійсно, щоб розглядати проблему трансакційних витрат, інвестор спочатку повинен вирішити що фінансовий інструмент є інвестиційно привабливим – що включає в себе розрахунок очікуваної дохідності та ризику (волатильності) цього активу. Отже, очікувалося що  $\sigma$  є заданою і дорівнювала  $\sigma = 0.05$ . Згідно цьому значенню у одиницю часу ціна на акцію не зміниться більше ніж на 0.1\$ з 95% рівнем надійності за умови відсутності зовнішніх шоків.

Торгівля метаордеру представляє собою такий шок. У симуляції вважалось що інвестор має вибірку з  $M = 10$  метаордерів кожен з яких виконувався протягом  $T = 1$  одиниці часу (1 години) з інтенсивністю  $v = 10\%$ .

На основі цих 10 ордерів інвестор прагне отримати оцінку параметрів  $\hat{\gamma}$  та  $\hat{\eta}$  – як можна ближче до «справжніх» значень цих величин, які є невідомими інвестору:  $\gamma = 1$ ,  $\eta = 0.75$ . Для цього він використовує методи запропоновані Алгремом та ін. [172] і методом максимальної

правдоподібності наведеному у Лі та ін. [179]. Детальніше ці методи розглянуті у Розділі 2.3.

Для способу запропонованого Алмгреном та ін. необхідно здійснити спостереження ціни акції через певний час після завершення виконання метаордеру. Для цього було обрано  $T_{post} = 1.35$ . Другою точкою яку використовує цей метод є середня ціна виконання метаордеру  $C$  (середня ціна за якою було куплено акцію), яка вважається відомою:

$$C \approx \int_0^T S_t dt / T \quad (Д.2)$$

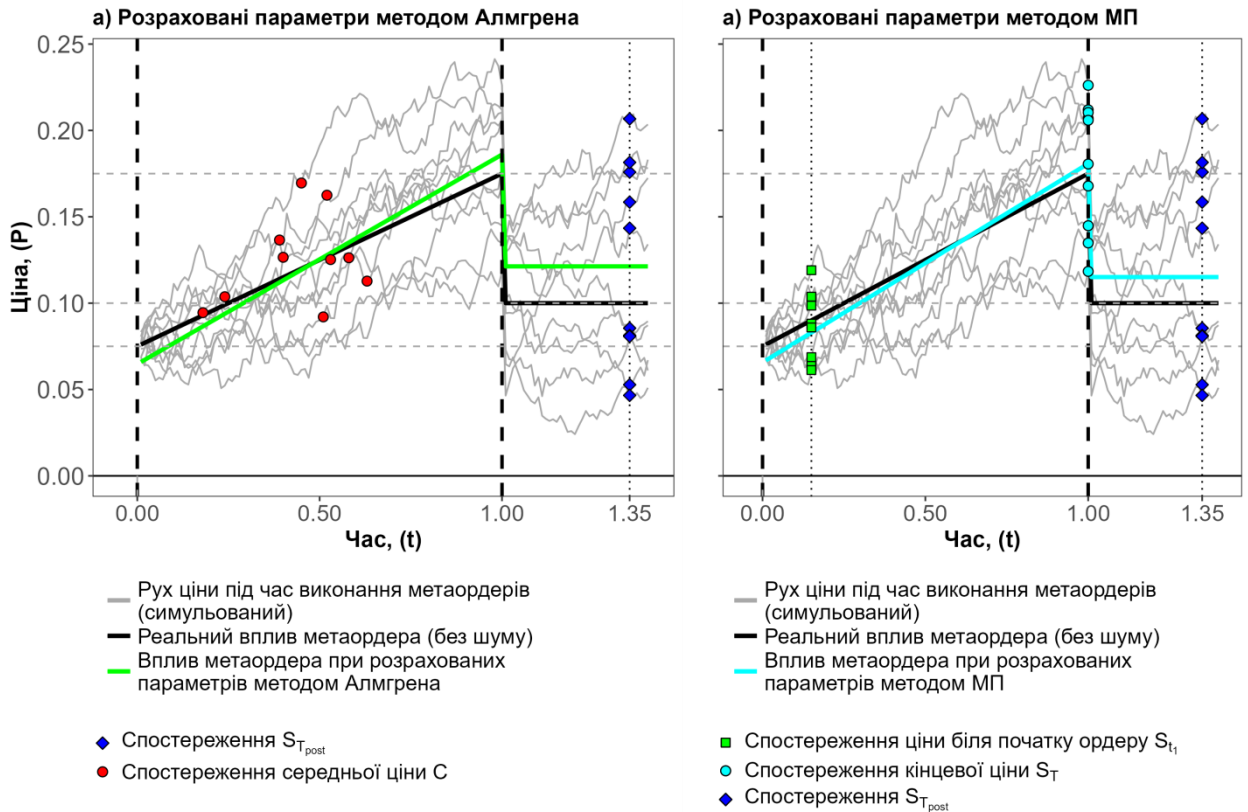
Для застосування способу максимальної правдоподібності запропонованим Лі та ін. [179], необхідні спостереження ціни у момент завершення виконання метаордеру ( $S_T$ ), трохи згодом ( $S_{T_{post}}$ ) та невдовзі після початку виконання метаордеру ( $S_{t_1}$ ). Для того, щоб відповідати методу Алмгрена,  $T_{post}$  також встановлене рівним 1.35. В свою чергу, оскільки  $t_1$  має бути меншим за  $\frac{1}{4}T$ , це значення було обрано як  $t_1 = 0.15$ .

Оскільки початкова ціна  $S_0$  у рівнянні (Д.1) лише встановлює загальний рівень цін і її значення не впливає на власне динаміку процесу зміни ціни, вирішено що  $S_0 = 0$ .

Так на рис. Д.1 наведені криві що побудовані на основі розрахованих параметрів. Він повністю відповідає на рис. 2.14 наведеному у розділі 2.3, проте, замість схематичних (формульних) позначень цін на осі  $y$ , рис. Д.1 наводить чисельні значення. Відповідно, згідно методу Алмгрена оцінка параметрів становить:  $(\hat{\gamma}, \hat{\eta}) = (1.6029, 0.6601)$ ; а відповідно до методу Фенгпея:  $(\hat{\gamma}, \hat{\eta}) = (1.3902, 0.7429)$ . Такі відмінності від реальних значень  $(\gamma, \eta) = (1, 0.75)$  обумовлені малим обсягом вибірки. Проте, як бачимо, метод максимальної правдоподібності призвів до оцінки що знаходяться ближче до бажаних значень.

Проте, рис. Д.1 надає результат лише однієї симуляції, відносний результат якої цілком може бути випадковим. Для того, щоб довести що

метод максимальної правдоподібності буде кращим за метод Алмгрена, необхідно показати що він буде кращим у великій кількості випадків. Для цього було здійснено 1000 симуляцій торгівлі 10 метаордерів та порівняно отримані з цих даних 1000 пар оцінок  $(\hat{\gamma}, \hat{\eta})$  здійснених обома методами.



**Рис. Д.1 Порівняння результуючої функції ринкового впливу для однієї симуляції при розрахунку параметрів методами Р. Алмгрена і максимальної правдоподібності Ф. Лі**

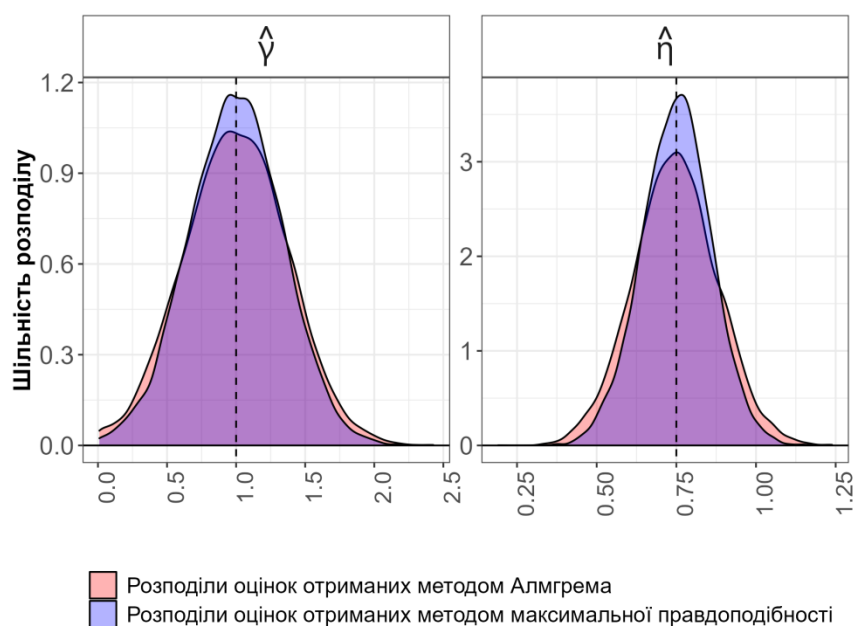
Джерело: Розраховано автором на основі методів описаних у [172] та [179]

**Таблиця Д.1**

**Моменти розподілів отриманих оцінок після 1000 симуляцій**

	$\hat{\gamma}$			$\hat{\eta}$				
	$E[\hat{\gamma}]$	Стандартна плхібка $SE[\hat{\gamma}]$	Коефіцієнт асиметрії	Коефіцієнт ексцесу	$E[\hat{\eta}]$	Стандартна плхібка $SE[\hat{\eta}]$	коефіцієнт асиметрії	коефіцієнт ексцесу
Оцінки отримані методом Алмгрена	1.00	<b>0.37</b>	0.02	2.88	0.75	<b>0.13</b>	0.04	3.02
Оцінки отримані методом МП	1.00	<b>0.34</b>	0.00	2.96	0.75	<b>0.11</b>	-0.03	3.05

Джерело: Розраховано автором на основі симульованих даних та методів описаних у [172] та [179]



**Рис. Д.2 Розподіли отриманих оцінок після 1000 симуляцій**

Джерело: Побудовано автором на основі симульованих даних та методів описаних у [172] та [179]

Розподіли числових значень цих оцінок наведені на рис. Д.2. В свою чергу, табл. Д.1 надає обчислені характеристики результуючих розподілів.

Як можна побачити, обидва методи призводять до незміщених оцінок: математичне очікування обох параметрів дорівнює «справжнім» значенням  $\gamma$  та  $\eta$  (стовпчики  $E[\hat{\gamma}]$  та  $E[\hat{\eta}]$  у табл. Д.1). Проте, метод Алмгрена призводить до дещо більш «широкого» розподілу (рис. Д.2). Наслідком цього є вища стандартна похибка (підкреслені значення у табл. Д.1). А отже, у середньому, параметри оцінені цим способом більше відхиляються від свої справжніх значень.

Таким чином, на основі симуляцій, було продемонстровано що метод максимальної правдоподібності Лі та ін. [179] у середньому є більш точним за метод Алмгрена та ін. [172].

## Додаток Е

У цьому додатку здійснено порівняння точності розрахунку параметрів моделі Обіжаєвої-Ванга, при використанні різної кількості спостережень з кожного метаордеру за допомогою методу максимальної правдоподібності [179].

Була здійснена симуляція торгівлі метаордерів відповідно до динаміки ринкового впливу у рівнянні (Е.2). Вважалося, що інвестор володіє інформацією щодо волатильності акції і вона становить  $\sigma = 0.15$ . Згідно цього значення, у одиницю часу (що відповідає тривалості виконання метаордера) ціна на акцію, за умови відсутності зовнішнього впливу, не зміниться більше ніж на  $0.30\$$  з 95% рівнем надійності.

Вважалося що інвестор володіє вибіркою з  $M = 10$  метаордерів, що виконувалися протягом  $T = 1$  одиниці часу (1 години). Протягом цього періоду, кожен з них торгувався з постійною інтенсивністю  $v = 5\%$ .

Інвестор вважав що ринковий вплив змінювався відповідно до моделі Обіжаєвої-Ванга [133] (з лінійним постійним впливом), згідно якій ціна при виконанні метаордеру змінюється відповідно до виразу:

$$S_t = S_0 + c \int_0^t v_s ds + \mu \int_0^t v_s e^{-\rho(t-s)} ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (\text{Е.1})$$

За умови постійної інтенсивності виконання мета ордеру, можна було використати дещо спрощену форму цього виразу:

$$\begin{aligned} t \leq T: \quad S_t &= S_0 + cvt + \mu v \frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho t}) + \sigma \int_{t_1}^{t_2} dW_s \\ t > T: \quad S_t &= S_0 + cvT + \mu v \frac{1}{\rho} e^{-\rho t} (1 - e^{-\rho T}) + \sigma \int_{t_1}^{t_2} dW_s \end{aligned} \quad (\text{Е.2})$$

На основі історичних даних про попередні метаордери інвестор прагнув оцінити параметри у цій моделі:  $c$ ,  $\mu$  та  $\rho$ . Справжні значення цих величин становили:  $\mu = 100$ ,  $c = 0.5$ ,  $\rho = 7.5$ . Параметр  $\rho = 7.5$  приблизно відповідає періоду напіврозпаду  $t_{1/2} = 0.1$

Для знаходження цих трьох значень, інвестор використав метод максимальної правдоподібності, запропонований Ф. Лі та ін. [179].

Детальніше цей метод розглянуто у Розділі 2.3. Він полягає у формуванні вибірки з довільної кількості спостережень зміни у ціні акції в процесі торгівлі метаордеру. У дослідженні Ф. Лі та ін. [179] доводять, що чим більше точок вибрано на кривій ціни (з певними виключеннями, які наведені у Розділі 2.3), тим точнішою буде оцінка невідомих параметрів.

Вважалося, що інвестор прагнув переконатися у цьому твердженні, і тому здійснив 3 різні оцінки:

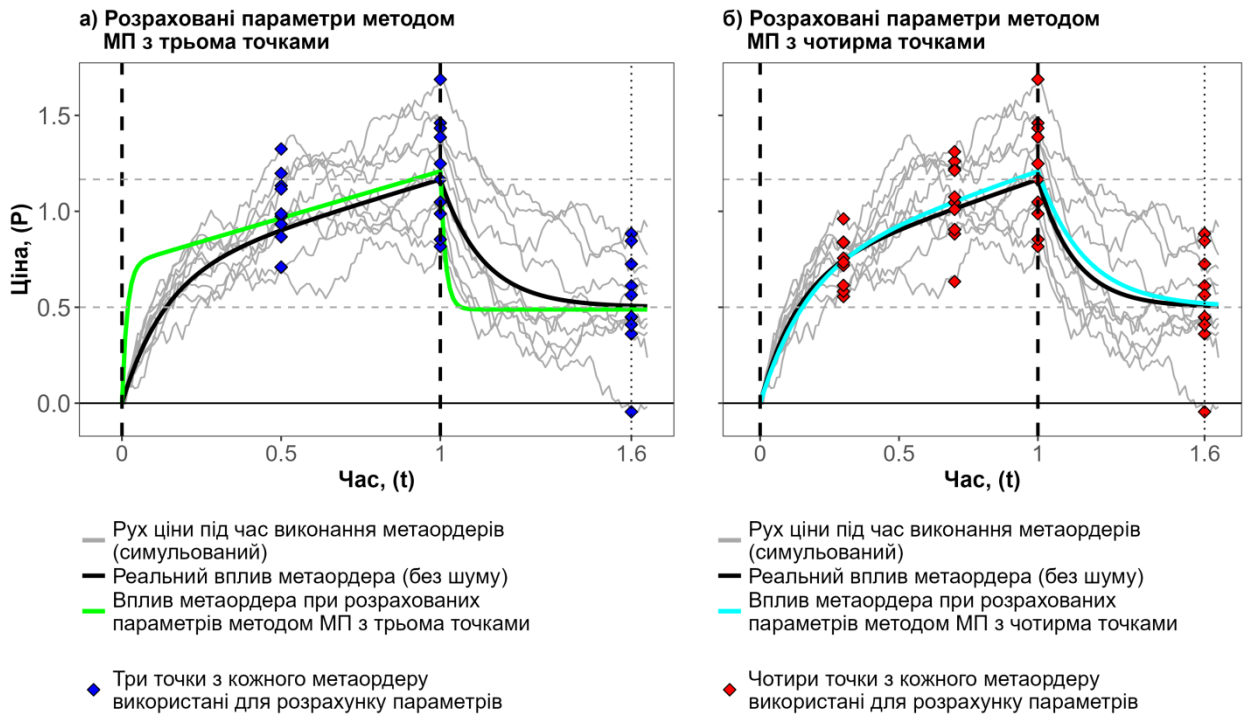
1) в першій він використовував три спостереження на кожний мета ордер, здійснені у моменти  $\tau = \{T/2, T, T_{post}\} = \{0.5, 1, 1.6\}$

2) у другій – чотири спостереження:  $\tau = \{0.3T, 0.7T, T, T_{post}\} = \{0.3, 0.7, 1, 1.6\}$ ;

3) і в третій, відповідно - п'ять:  $\tau = \{\frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T, T, T_{post}\} = \{0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.6\}$

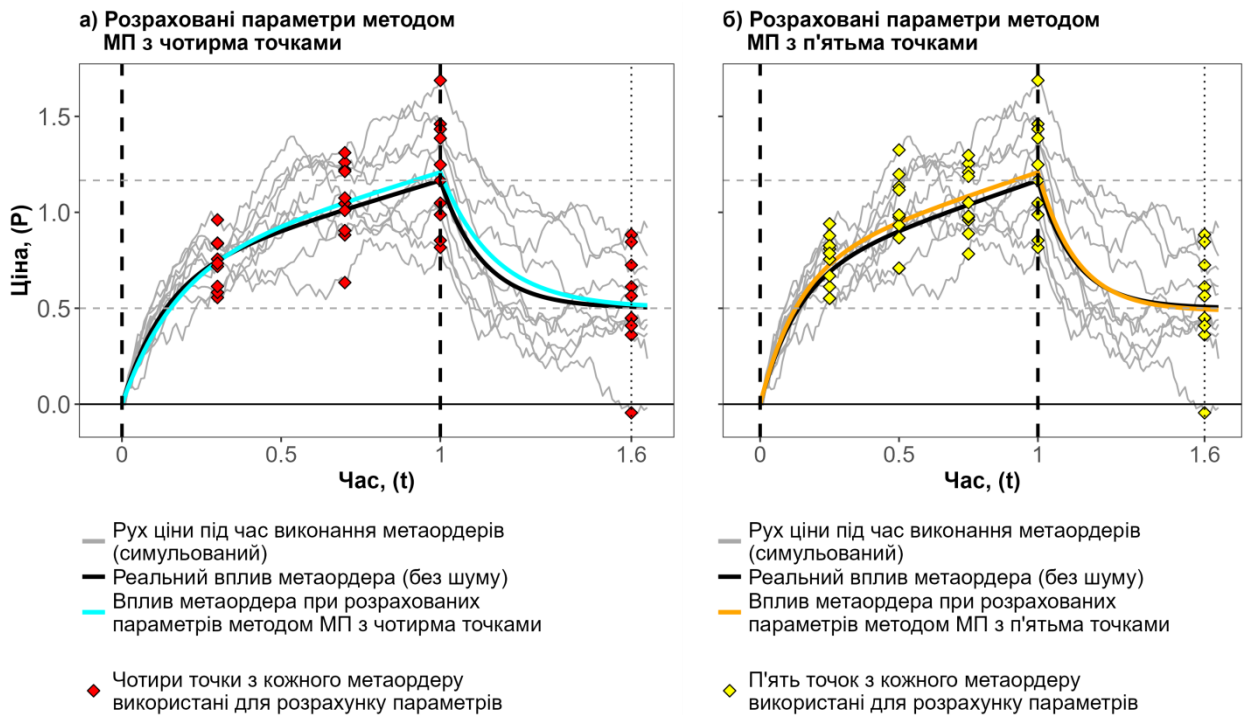
На рис. Е.1 та рис. Е.2 наведені криві очікуваного ринкового впливу, побудовані за допомогою розрахованих параметрів  $(c, \mu, \rho)$  у одній з симуляцій. Використання методу максимальної правдоподібності з трьома точками привело до оцінки  $(\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c}) = (902.9, 62.68, 0.4884)$ ; той самий метод прикладений до 4 спостережень з кожного мета ордеру надав значення параметрів  $(\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c}) = (84.62, 5.96, 0.5007)$ ; і нарешті, метод максимальної правдоподібності з п'ятьма спостереженнями ціни у кожному метаордері призвів до оцінки  $(\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c}) = (104.95, 7.25, 0.4852)$ .

Проте, приклад лише однієї симуляції в якому твердження Ф. Лі та ін. [179] справджується, не є переконливим. Для того, щоб довести його (принаймні у поставленій в цьому додатку задачі), необхідно довести що в середньому більше спостережень призводять до кращої оцінки.



**Рис. Е.1 Результуюча функції ринкового впливу при розрахунку параметрів методом МП для трьох та чотирьох точок**

*Джерело: розраховано автором на основі методу описаного у [179]*

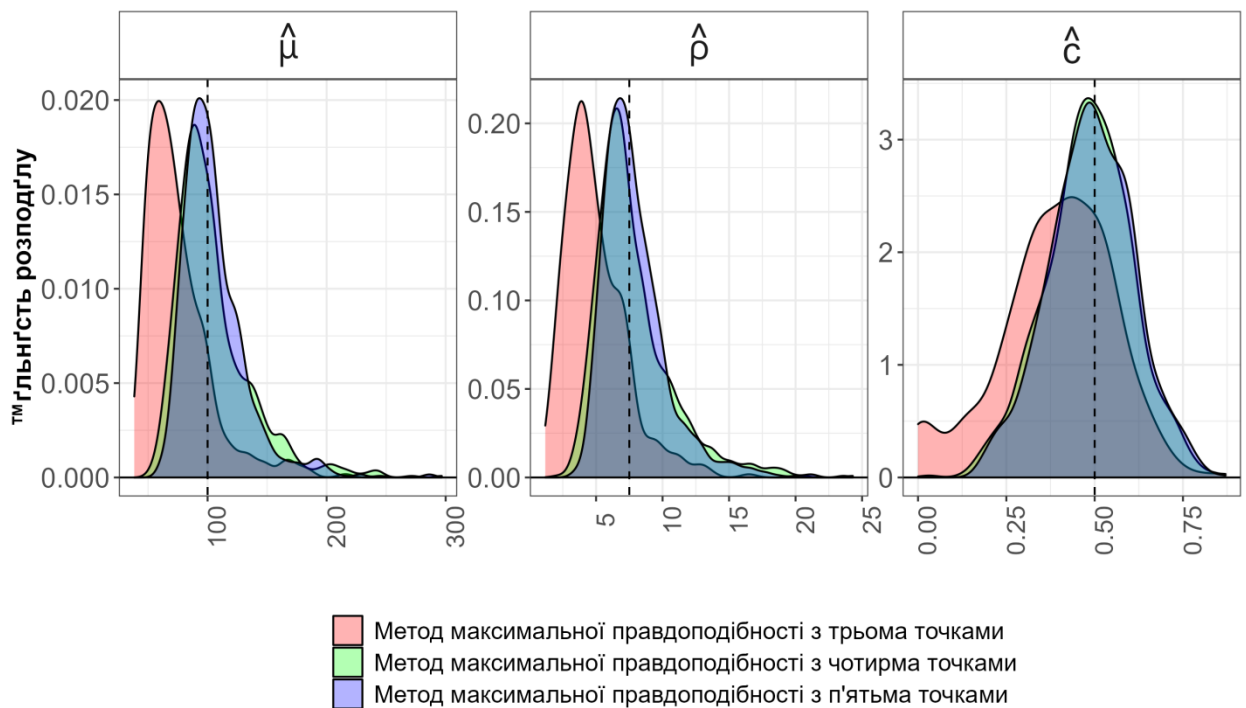


**Рис. Е.2 Результуюча функції ринкового впливу при розрахунку параметрів методом МП для чотирьох та п'яти точок**

*Джерело: розраховано автором на основі методу описаного у [179]*

Для цього було здійснено 1000 симуляцій торгівлі 10 метаордерів відповідно до зазначених вище припущень, у кожній з яких параметри були розраховані на основі вибірки з трьох, чотирьох та п'яти точок на кожний метаордер.

Розподіл цих оцінок представлений на рис. Е.. Табл. Е.1 надає агреговані статистики цих розподілів.



**Рис. Е.3 Розподіли отриманих оцінок після 1000 симуляцій**

*Джерело: побудовано автором на основі симульованих даних та методу у [179]*

Можна спостерігати, що чим більшою є кількість використаних спостережень (точок), тим меншою є стандартна похибка оцінок – що відповідає твердженню у [179].

Крім того, варто зазначити, що тепер третій і четверті моменти розподілів не рівні нулю та 3 відповідно – це обумовлено тим, що функціональна форма моделі обумовлює вищий зв'язок між параметрами  $\mu$  та  $\rho$ . Так у формулі, (Е.2)  $\mu/\rho$  можна розглядати як один параметр. Внаслідок цього, необхідна значно більша кількість спостережень для того, щоб розділити ефекти параметрів  $\mu$  та  $\rho$ .

Таблиця Е.1

## Моменти розподілів отриманих оцінок після 1000 симуляцій

	$\hat{\mu}$				$\hat{\rho}$				$\hat{c}$			
	$E[\hat{\mu}]$	Стандартна пхибка $SE[\hat{\mu}]$	Коефіцієнт асиметрії	Коефіцієнт ексцесу	$E[\hat{\rho}]$	Стандартна пхибка $SE[\hat{\rho}]$	коефіцієнт асиметрії	коефіцієнт ексцесу	$E[\hat{c}]$	Стандартна пхибка $SE[\hat{c}]$	коефіцієнт асиметрії	коефіцієнт ексцесу
Метод МП з 3 точками	110.47	<b>138.72</b>	3.39	13.09	8.03	<b>12.08</b>	3.44	13.57	0.4013	<b>0.1634</b>	-0.46	3.12
Метод МП з 4 точками	104.95	<b>32.98</b>	1.90	8.53	7.82	<b>2.92</b>	1.62	6.63	0.4827	<b>0.1222</b>	-0.14	3.08
Метод МП з 5 точками	105.29	<b>27.05</b>	1.91	9.46	7.91	<b>2.50</b>	1.76	8.08	0.4910	<b>0.1197</b>	-0.04	2.88

Джерело: Побудовано автором на основі симульованих даних та методу у [179]

## Додаток Є

У цьому додатку наведені числові значення для прикладу оцінки параметрів моделі Обіжаєвої-Ванга з лінійним постійним впливом та змінною інтенсивністю торгівлі що зображені на рис. 2.16.

Сама модель представлена у рівнянні (2.74) являє собою наступний вираз:

$$S_t = S_0 + c \int_0^t v_s ds + \mu \int_0^t v_s e^{-\rho(t-s)} ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (\text{Є.1})$$

Припускалося, що волатильність акції становить  $\sigma = 0.15$ , а «справжнє» значення параметрів моделі:  $(\mu, \rho, c) = (100, 7.5, 0.5)$ .

Нехай інвестор виконав  $M = 10$  метаордерів, кожен з яких торгувався протягом  $T = 1$  (одиниці часу). Внаслідок певних зовнішніх обставин, інтенсивність торгівлі змінювалася впродовж процесу виконання:

- першу третину часу виконання мета ордеру вона становила 5% відсотків:  $v_t = 5\%, t \in \left[0, \frac{1}{3}T\right)$ ;

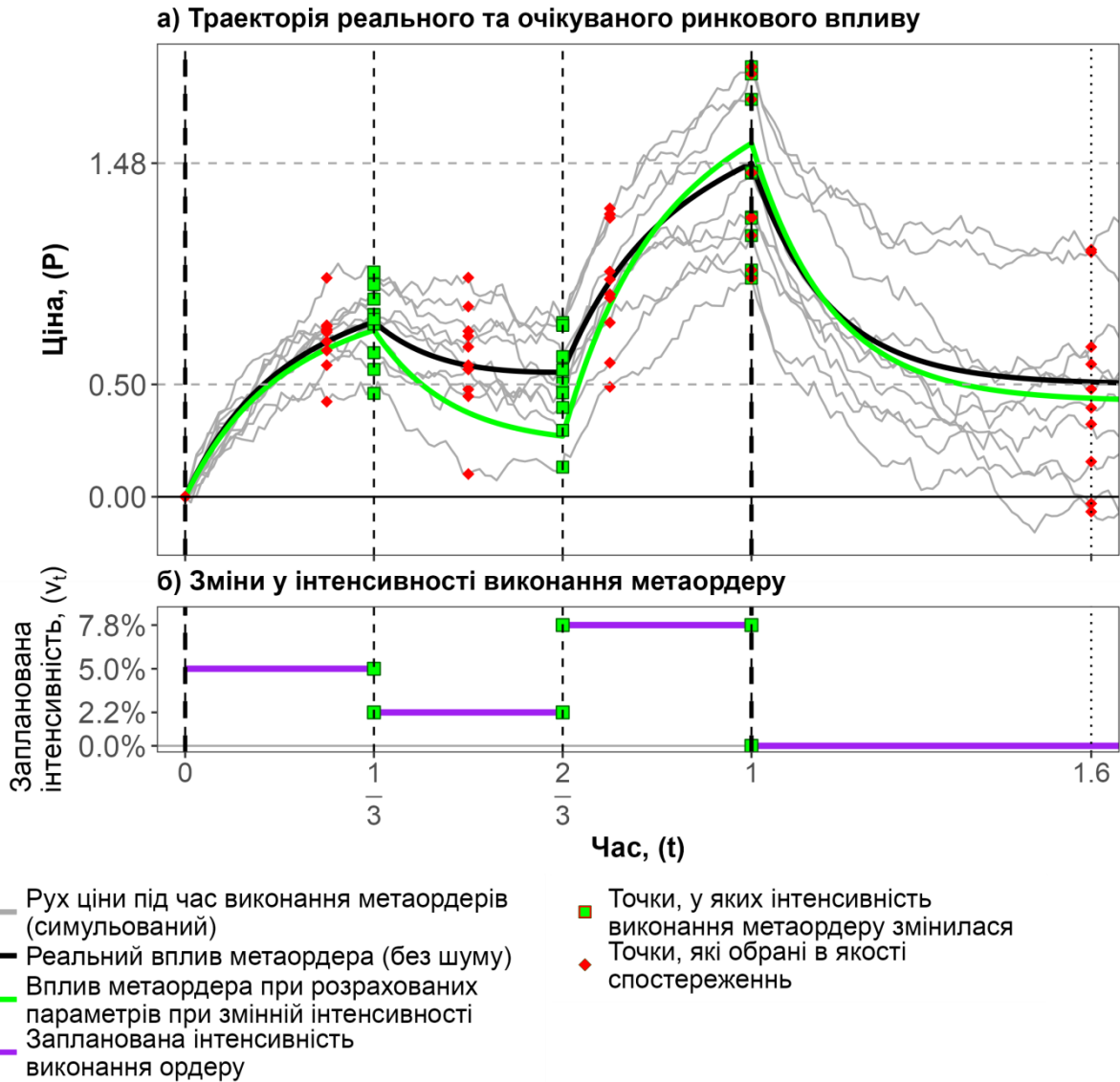
- наступну третину вона зменшилася до 2.2% відсотків:  $v_t = 2.2\%, t \in \left[\frac{1}{3}T, \frac{2}{3}T\right)$ ;

- останню третину часу виконання мета ордеру прискорилося, і швидкість становила 7.8%:  $v_t = 7.8\%, t \in \left[\frac{2}{3}T, T\right)$ ;

Таким чином, середня інтенсивність виконання мета ордеру впродовж всієї його тривалості становила 5%.

Нехай виконавець цих метаордерів хотів розрахувати значення параметрів  $\mu$ ,  $\rho$  та  $c$  на основі цієї вибірки мета ордерів за допомогою методу максимальної правдоподібності, наведеного у розділі 2.3.

Для цього він сформував множину спостережень щодо ціни акції на різному етапі виконання меордеру. Припускалося, що він використовував емпіричні значення ціни  $y_t$  у моменти  $t = \left\{\frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T, T, 1.6T\right\}$ . Таким з чином формується вибірка яка складається з п'яти спостережень ціни акції з кожного метаордеру.



**Рис. Є.1** Результуюча функція ринкового впливу на основі розрахованих параметрів методом максимальної правдоподібності

*Джерело: Розраховано автором*

Оцінка параметрів відбувалася за допомогою формули (2.89). Внаслідок цих розрахунків, отримані значення становлять:  $(\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c}) = (95.91, 7.29, 0.42)$ . Очікувана функція впливу за умови запланованої зміни у інтенсивності торгівлі мета ордеру та оцінених значень параметрів  $\mu, \rho$  та  $c$  зображена зеленою лінією на рис. Є.1.

## Додаток Ж

У цьому додатку розглянуті припущення і значення використані при побудові графіку на рис. 2.17 (який наведений з числовими значеннями на рис. Ж.).

Як і у попередніх випадках, припускалося, що існує вибірка яка складається з ( $M = 20$ ) метаордерів, виконання кожного з яких планується протягом однієї одиниці часу ( $T = 1$ ) з постійною інтенсивністю  $v_t = v = 5\%$ .

Вважається, що ціна змінюється відповідно до моделі Обіжаєвої-Ванга з лінійним постійним впливом:

$$S_t = S_0 + c \int_0^t v_s ds + \mu \int_0^t v_s e^{-\rho(t-s)} ds + \sigma \int_0^t dW_s \quad (\text{Ж.1})$$

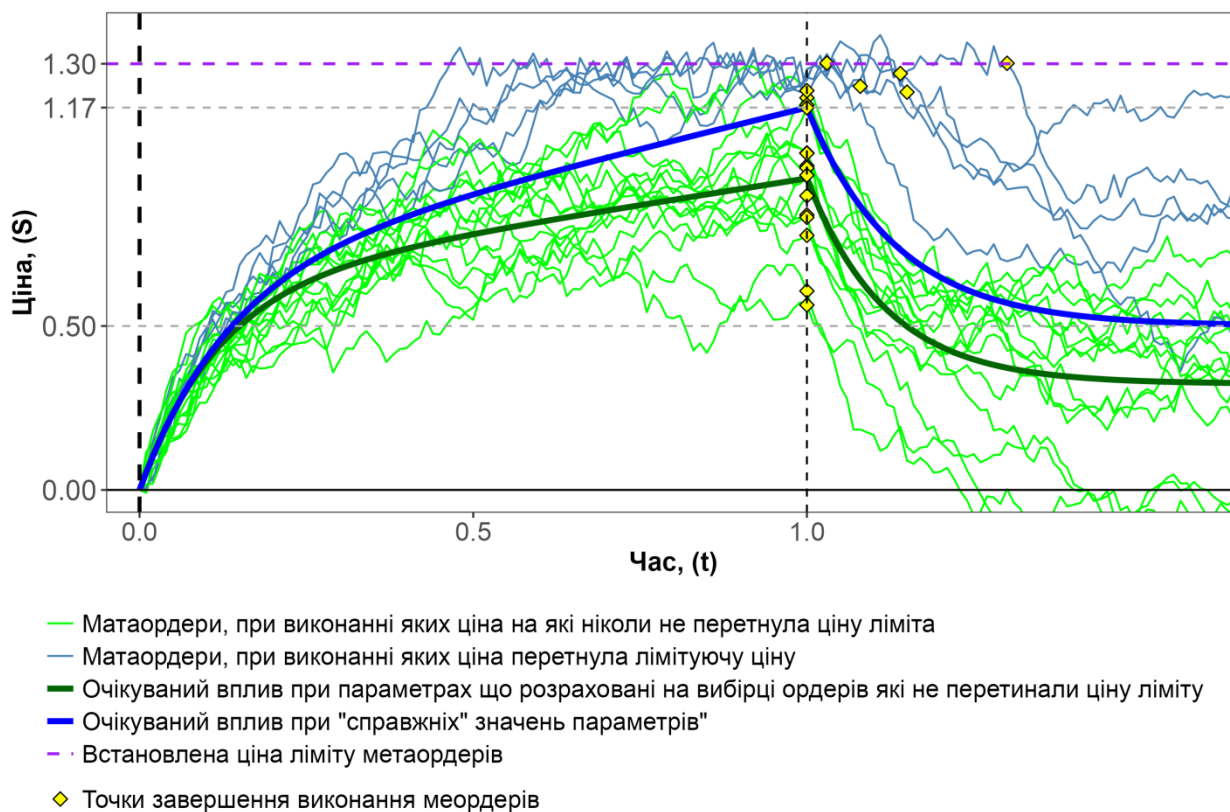
Значення волатильності ціни та параметрів моделі залишається таким самим, як і у попередніх прикладах:  $\sigma = 0.15$  та  $(\mu, \rho, c) = (100, 7.5, 0.5)$ .

Проте, у цей раз вважається що інвестор встановили лімітуючи ціну на виконання метаордеру яка становить  $S_{Limit} = 1.3$ . Відповідно, якщо ціна процесу стає більшою за лімітуючу ( $S_t > S_{Limit}$ ), торгівля метаордеру зупиняється. В такому випадку, виконавець чекає поки ціна знову не повернеться у дозволених межі щоб продовжити здійснювати торгівлю.

Це сповільнює виконання мета ордеру – час, поки ціна знаходиться вище ціни ліміту, метаордер «простоює». Внаслідок цього, його завершення відтягується на цей період. Метаордер вважається виконаним коли він торгувався сумарно одну одиницю часу не враховуючи час вимушених зупинок (це відповідатиме повному виконанню обсягу заявки).

Зауважимо, що за таких умов, очікуваний максимальний ринковий вплив вплив одного мета ордеру без наявності ліміту становить  $\max_t E[S_t] \approx 1.17$ . Таким чином, ціна може перетнути лімітуючи лише внаслідок несприятливого руху обумовленим «шумом» у динаміці ціни. Це є достатня умова для того, щоб стверджувати що будь-який метаордер буде рано чи пізно виконаний (очікуваний час виконання є меншим за нескінченність).

З  $M = 20$  симульованих метаордерів, у 5 з них ціна перетнула лімітуючу. У цьому прикладі вважалося, що дослідник прагнув отримати оцінку параметрів  $(\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c})$  та використав метод максимальної правдоподібності [179] лише для тих 15 ордерів, які не перетнули лімітуючу ціну (аргументуючи це тим що для них вона не відіграла жодної ролі).



**Рис. Ж.1 Приклад отримання занижених оцінок внаслідок видалення з вибірки ордерів які перетнули ціну ліміту**

*Джерело: розраховано автором*

Задля покращення точності оцінки дослідник використав по 20 спостережень з кожного метаордера, здійснених розподілених рівномірно протягом часового періоду  $t \in [0, 2T]$ . Таким чином, він володів значеннями ціни і під час торгівлі метаордеру, і опісля. Отже, вибірка становила набір значень  $y_t$  де  $t = \{0, 0.1T, 0.2T, \dots, T, 1.1T, \dots, 2T\}$  ( $20 \times 15$  спостережень всього).

На основі цих значень дослідник отримав оцінки параметрів  $(\hat{\mu}, \hat{\rho}, \hat{c}) = (106.43, 8.15, 0.39)$  що є набагато гіршим ніж той самий метод у Додатку Е,

прикладений до меншої кількості ордерів (10) з меншою кількістю спостережень на один метаордер (5).

Це свідчить про те, що отримані оцінки є зміщеними та несумісними. Оскільки мета цього додатку лише підкреслити цю проблему, він не ставить на меті довести це твердження з усією математичною точністю.

### Додаток 3

У цьому додатку наведені значення вхідних даних які були використані у симуляції в Розділі 3.3, а якій інвестор розв'язував проблему формування оптимального інвестиційного портфеля за умови наявності трансакційних витрат ринкового впливу.

Так, інвестор розглядав  $N = 5$  акцій для інвестування. Стандартне відхилення цих інструментів було змодельоване як п'ять випадкових значень взятих з рівномірного розподілу, що визначений на проміжку від 0.15 до 0.3 ( $U[0.15, 0.3]$ ) (з зерном 1). В результаті, вони становили:

$$\sigma = [0.1898; 0.2058; 0.2359; 0.2862; 0.1803] \quad (3.1)$$

Дохідність цих фінансових інструментів визначалося як добуток стандартного відхилення та випадкової величини з проміжку  $U[-3, 3]$  (з зерном 2). Таким чином, абсолютна величина прибутковості акції не могла перевищувати 3-ох стандартних відхилень. Відповідно, дохідності цих акцій становлять:

$$R = [-0.3589; 0.2499; 0.1038; -0.5700; 0.4801] \quad (3.2)$$

Оскільки матриця кореляцій між акціями завжди має певні властивості (є додатньо визначеною та симетричною відносно своєї діагоналі), то для її симуляції були використані складніші методи. У даному випадку, було застосовано метод описаний у [189] та використано за допомогою бібліотеки `randcorr` [191] у середовищі програмування R (з зерном 3). В результаті була отримана наступна матриця:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.5133 & 0.1633 & -0.1446 & 0.6007 \\ 0.5133 & 1 & 0.0385 & -0.6142 & 0.7756 \\ -0.1446 & -0.6142 & -0.5877 & 1 & -0.6635 \\ 0.6007 & 0.7756 & 0.5227 & -0.6635 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Було здійснено припущення що кожна акція також має свою унікальну пару коефіцієнтів  $\gamma$  та  $\eta$  у моделі Алмгрена-Кріса (3.64). Їх значення були симульовані наступним чином.

Вектор параметрів  $\gamma$  був взятий як випадкова величина з рівномірного розподілу між числами 0.5 та 1.5:  $\gamma \sim U[0.5, 1.5]$  (з зерном 6). Внаслідок цього, отримано:

$$\gamma = [1.1063, 1.4376, 0.7644, 0.8801, 1.3075] \quad (3.4)$$

Припускалося що коефіцієнти  $\eta$  слідуєть такому самому розподілу на проміжку від 0.25 до 1.25, тобто  $\eta \sim U[0.25, 1.25]$  (7 взято за значення зерна). В результаті:

$$\eta = [1.2389, 0.6477, 0.3657, 0.3197, 0.4937] \quad (3.5)$$