УДК 539.4:624.012

Кундрат М. М.[1], д.т.н., проф.,
Кундрат А. М.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Заблотська Ю. В.[1]

Відшарування гнучкого нерозтягливого підсилення вільного краю півбезмежної пластини

[1]Національний університет водного господарства та природокористування, 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: kundrat@i.ua

M. M. Kundrat[1], Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
A. M. Kundrat[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
Yu. V. Zablotska[1].

Exfoliation the flexible continuous reinforcements of the free edge of a semiinfinite plate

[1]National University of Water Management and Natural Resources Use, 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: kundrat@i.ua

За умов плоскої задачі термопружності досліджено відшарування розташованого на краю півбезмежної пластини нерозтягливого гнучкого нагрітого до заданої температури підсилення за ідеального теплового контакту та дії розтягуючого навантаження на пластину. Відшаруванню підсилення в околах його кінців передує розвиток локалізованих зон передруйнування (ослабленого контакту), яким можуть відповідати області накопичення пошкоджень, пластичного деформування, часткового розриву зв'язку та інше. Аналітичний розв'язок задачі приведено до задачі Коші для диференційного рівняння першого порядку, виконано його числовий аналіз. Досліджено взаємовплив силового та температурного навантажень на відшарування підсилення.
Ключові слова: *підсилення, відшарування, плоска задача, зона передруйнування.*

Exfoliation the not extensible flexible stiffener heated up to the set temperature is investigated in conditions of a plane problem thermoelasticity. The flexible stiffener is placed at edge of the semi-infinite plates in conditions ideal thermal contact and action the stretching loading on the plate. Development of localized zones of prefracture (the weakened contact) is precede to separation the stiffener in vicinities of her ends. They can correspond to regions of damages, plastic deformation, partial break of connection and another precedes. On area outside of zones of prefracture the perfect mechanical contact is remaining. The analytical decision of a problem is shown to problem Koshy for differential equation of the first order and realized its numerical analysis. Physically correct limited stresses and deformations are received in all points of a composition. Tangents stresses also satisfy to relationship of pair law. Basic part of loading from reinforcements to plate is transfer in neighbourhood of reinforcement ends. Interference of power and temperature loadings on flexible stiffener separation is investigated.
Key Words: reinforcement, exfoliation, plane problem, zone of prefracture.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Задача розрахунку підсилюючих елементів як одного із поширених засобів ремонту та відновлення працездатності інженерних конструкцій залишається на часі. Підкріплюючі елементи одночасно є й потужними концентраторами напружень і спричиняють нелінійні та пластичні деформації чи розвиток зон розпушення, що в значній мірі ускладнює прогноз граничної рівноваги системи в цілому. Розрахункова модель для аналізу напружено-деформованого стану пружного тіла з підсиленням розвинута в працях [1–3] та застосована нижче для аналізу процесу відшарування підсилення при температурному і силовому навантаженні за малої ділянки розпушення. Урахування явищ розпушення матеріалів та нелінійного їх деформування, що передують безпосередньо руйнуванню, дає можливість більш точно прогнозувати і раціонально використати несучу здатність елементів конструкцій.

Постановка задачі

В умовах плоскої задачі теорії термопружності розглядаємо півбезмежну пластину, що розтягується на нескінченності зусиллями інтенсивності $\sigma_{xx}^{\infty} = q$ паралельно до її краю (рис. 1). Пластина підкріплена гнучким нагрітим до температури T_1 підсиленням завдовжки $2a$. Тепловий контакт між підсиленням та пластиною ідеальний, а температура вільного краю пластини дорівнює T_0. Вважатимемо, що підсилення абсолютно гнучке, тобто перебуває в одновісному напруженому стані і під ним діють лише тангенціальні контактні напруження. Осі декартової системи координат xOy збігаються з осями геометричної симетрії композиції.

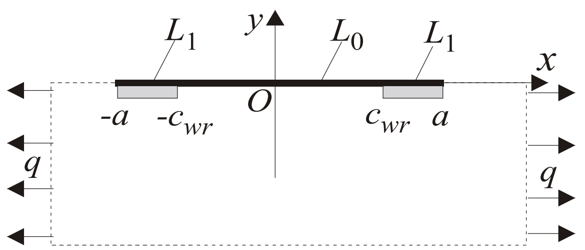

Рис. 1. Схема задачі

Аналіз плоского напруженого стану такої композиції показує, що максимальні дотичні напруження $\tau_{\max}$ мають місце в околах кінців підсилення уздовж його межі з пластиною. Вважаємо, що саме тут відбувається відшарування (втрата зв'язку) підсилення від пластини, просуваючись від країв до центральної частини уздовж межі. При цьому відшаруванню підсилення передує розвиток зон передруйнування (ослабленого контакту), яким можуть відповідати області накопичення пошкоджень, пластичного деформування (проковзування), часткового розриву зв'язку між пластиною й підсиленням та інше. Довжину підсилення без відшарованих на кінцях частин позначаємо через $2a_{wr}$ і називаємо його робочою довжиною (рис. 2). На ділянках $a_{wr} < |x| \le a$, де пройшло відшарування підсилення, зв'язок з пластиною відсутній.

Приймаємо, що енергія відшарування підсилення на одиницю довжини є величиною сталою та відомою і знайдемо аналітичні залежності зміни робочої довжини підсилення a_{wr} від силового та температурного навантажень, міцнісних та пружних характеристик композиції.

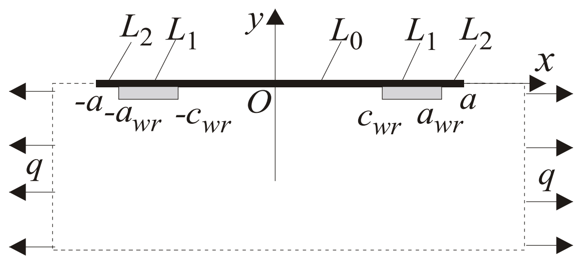

Рис. 2. Відшарування підсилення

Крайові умови задачі

Відповідну крайову задачу термопружності сформулюємо наступним чином. Ділянка $c_{wr} < |x| < a_{wr}$ (рис. 2) відповідає зоні передруйнування, на берегах якої діють дотичні напруження

$$\sigma_{xy} = \tau_s^* \operatorname{sign}(x) \quad \left(x \in L_1\right), \tag{1}$$

де: τ_s^* – адгезійна зсувна міцність контактної межі пластина-підсилення, а при пластичному деформуванні – її зсувний поріг пластичності; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $\operatorname{sign}(x) =$ {1 для $x > 0$; -1 для $x < 0$; 0 для $x = 0$ }.

На ділянці $|x| < c_{wr}$ зберігається ідеальний контакт підсилення з пластиною і тому поздовжні деформації на ній рівні

$$\partial u(x)/\partial x = T_1 \alpha_{\text{p}} \quad \left(x \in L_0\right), \tag{2}$$

де α_p – температурний коефіцієнт лінійного видовження матеріалу підсилення.

Температура підсилення та вільного краю

$$T(x) = \begin{cases} T_1 & \left(|x| < a_{wr},\ y = 0\right), \\ T_0 & \left(|x| > a_{wr},\ y = 0\right). \end{cases} \tag{3}$$

Напруження на нескінченності

$$\sigma_{xx}^{\infty} = q\,. \tag{4}$$

Оскільки підсилення вважається абсолютно гнучким, то нормальні контактні зусилля під ним відсутні. А оскільки вільний край пластини теж не навантажений, то по всьому краю $(y = 0)$ пластини $\sigma_{yy} = 0$.

Розв'язання крайової задачі

Для розв'язання задачі використаємо відомі [4, 5] подання для напружень і деформацій

$$\begin{gathered} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\operatorname{Re}\Phi(z), \\ \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2G(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \beta\Psi_0(z), \end{gathered} \tag{5}$$

де: $\beta = 4G\alpha_0$, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напруженого стану; $\beta = 4G(1+\nu)\alpha_0$, $\kappa = 3-4\nu$ в умовах плоскої деформації; α_0, G, ν – температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини. Зауважимо, що при плоскому напруженому стані вільні поверхні півплощини вважаються теплоізольованими.

Невідома функція $\Psi_0(z)$ визначається співвідношеннями [4, 5]:

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2}T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2\pi i}\ln\frac{z + a_{wr}}{z - a_{wr}}, \qquad (6)$$

Функцію напружень $\Phi(z)$ знайдемо після підставляння формул (5) у крайові умови (1)–(2). З урахуванням результату (6) та умови на нескінченності (4) загальним розв'язком крайової задачі теорії пружності буде функція

$$\Phi(z) = 0{,}5 f_0^T(z) + \left(\tau_s^*/2\pi\right)\ln\left[\zeta^-(z)/\zeta^+(z)\right], \qquad (7)$$

де: $f_0^T(x) = 2\left[G\alpha_p T_1 - \beta\,\mathrm{Re}\,\Psi_0^+(x)\right]$,

$$\zeta^\pm(z) = a_{wr}\sqrt{z^2 - c_{wr}^2} \pm z\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}.$$

Формули (5)–(7) цілком описують поля напружень та деформацій у пластині з підсиленням і дають можливість дослідити умови його відшарування.

Відшарування підсилення

Нехай γ_τ^* – енергія, необхідна для відшарування підсилення на одиницю довжини – стала характеристика композиції. Для зменшення робочої довжини підсилення на деяку малу величину Δa_{wr} необхідно виконати роботу

$$\gamma_\tau^* \Delta a_{wr} = \int_{a_{wr}-\Delta a_{wr}}^{a_{wr}-d-\Delta a_{wr}} \sigma_{xy}(x)\left[u(x, a_{wr} - \Delta a_{wr}) - u(x, a_{wr})\right]dx,$$

де $d = a_{wr} - c_{wr}$.

Знехтуємо доданками порядку $(\Delta a_{wr})^2$ і подамо функцію $u(x, a_{wr} - \Delta a_{wr})$ в ряд Тейлора за степенями Δa_{wr} та спрямуємо Δa_{wr} до нуля, вважаючи, що параметр a_{wr} залежить від навантаження. Тоді після перетворень отримаємо, що

$$\gamma_\tau^* = \tau_s^*\left[\frac{d}{da_{wr}}\int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} u(x, a_{wr})dx - u(a_{wr}, a_{wr})\right],$$

де: $u(x, a_{wr}) = T_1\alpha_p x + \dfrac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G}\left\{a_{wr}\ln\left[\eta^-(x)/\eta^+(x)\right] - x\ln\left[\zeta^-(x)/\zeta^+(x)\right]\right\}$,

$$\eta^\pm(x) = \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} \pm \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}.$$

Переміщення точок пластини біля вершини робочої частини підсилення

$$u(a_{wr}, a_{wr}) = \lim_{x \to a_{wr}} u(x, a_{wr}) = T_1\alpha_p a_{wr} + \frac{2\kappa\tau_s^* a_{wr}}{\pi G(\kappa+1)}\ln\frac{a_{wr}}{c_{wr}},$$

а залежність між довжиною зони передруйнуванням та навантаженням

$$\sqrt{a^2 - c^2} - a \cdot th(H) = 0,$$

де $H = \dfrac{\pi}{2\tau_s^*}\left[\dfrac{q}{2} - \dfrac{T_1}{\kappa+1}\left(4G\alpha_p - \beta\right)\right]$.

Зауважимо, що за умови $4G\alpha_p = \beta$ (чи при плоскому напруженому стані $\alpha_p = \alpha_0$) температура нагріву підсилення не впливає на розмір зони передруйнування. Але переміщення точок матеріалу пластини під підсиленням залежні від T_1.

З урахуванням поданих виразів дисипація енергії відшарування підсилення

$$\gamma_\tau^* = a_{wr}\tau_s^*\left\{T_1\alpha_p\left[th^2(H) - 1\right] + \frac{2(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G}\left[\ln ch(H) - H \cdot th(H)\right] + a_{wr}\left[T_1\alpha_p\frac{th(H)}{ch^2(H)} + \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G}\left(th(H) - \frac{H}{ch^2(H)}\right)\right]\frac{dH}{da_{wr}}\right\}.$$

Введемо безрозмірну робочу довжину підсилення

$$\lambda = (\kappa+1)\tau_s^{*2} a_{wr}\big/\left(2\pi G\gamma_\tau^*\right)$$

і зафіксуємо її значення ($\lambda = \lambda_0$) при відомому (для простоти можна нульовому) значенні параметра навантаження $H = H_0$. Отримуємо задачу Коші для диференційного рівняння першого порядку, яка описує зміну робочої довжини підсилення у залежності від навантаження:

$$\frac{d\lambda}{dH} = 0{,}5\frac{\lambda^2\left[th(H) + \left(2S \cdot th(H) - H\right)/ch^2(H)\right]}{1 + \lambda\left[H \cdot th(H) - \ln ch(H) + S/ch^2(H)\right]}, \qquad (8)$$

$$\lambda(H_0) = \lambda_0,$$

де: $S = 2\pi T_1 \alpha_p G \Big/ \big[(\kappa+1)\tau_s^*\big]$.

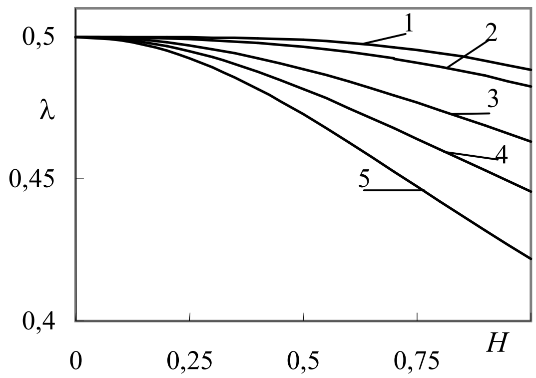

Рис.3. Робоча довжина підсилення

На рис. 3 подано залежність знерозміреної робочої довжини підсилення λ від навантаження за фіксованої початкової довжини $\lambda_0 = 0{,}5$ та різних значень S, отримані з числового розв'язку задачі Коші (8) методом Рунге-Кутта: для лінії *1* параметр $S = 0$; *2* – $S = 0{,}1$; *3* – $S = 0{,}5$; *4* – $S = 1{,}0$; *5* – $S = 2{,}0$; пружні та міцнісні параметри композиції враховані через змінні λ та H. Зростання параметра S збільшує довжину відшарованої ділянки підсилення за інших однакових умов.

За одночасної дії температурного та силового навантажень залежно від фізико-механічних характеристик композиції можливий як їх взаємно підсилювальний так і послаблювальний вплив на відшарування підсилення. Чим менша робоча довжина підсилення, тим більше навантаження необхідне для його відшарування.

Список використаних джерел

1. *Кундрат М. М.* Гранична рівновага та локальне руйнування пластини з накладкою / М. М. Кундрат // Вісник Рівненського держ. техн. ун-ту. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – 1999. – С. 200-204.
2. *Кундрат А. М.* Руйнування в з'єднанні двох накладок / А.М. Кундрат // Вісник Рівненського держ. техн. ун-ту. Збірник наук. праць. – 2001. – Вип. 3 (10). – С. 205-210.
3. *Сулим Г. Т.* Термопружна рівновага пів безмежної пластини з жорсткою гнучкою накладкою / Г.Т Сулим., М.М. Кундрат // Тези доп. П'ятого українсько-польського наукового симпозіуму "Актуальні задачі механіки неоднорідних структур", 18–23 вересня 2003 р., – Львів-Луцьк. – 2003. – С. 54–55.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
5. *Прусов И.А.* Некоторые задачи термо-упругости / И.А. Прусов – Минск: Изд-во БГУ, 1972. – 200 с.

References

1. KUNDRAT, M. M. (1999) Limit equilibrium and local fracture the lining plate with reinforcement. *Bulletin Rivne State Technical University. Water conservation and hydraulic construction*. p.p. 200–204.
2. KUNDRAT, A. M. (2001) The fracture in connecting two reinforcements. In *Journal of Rivne state Sc. Univ. Collection of Science. works*. (3). p.p. 205-210.
3. SULYM G. T., KUNDRAT M. M. (2003) Termopruzhna rivnovaha piv bezmezhnoyi plastyny z zhorstkoyu hnuchkoyu nakladkoyu. In *Tezy dop. P'yatoho ukrayins'ko-polskoho naukovoho sympozyumu "Aktual'ni zadachi mekhaniky neodnoridnykh struktur", 18–23 veresnya 2003 r., – L'viv-Luts'k*, p.p. 54–55.
4. MUSKHELISHVILI N. I. (1966) *Nekotorye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. Moskva: Nauka.
5. PRUSOV I. A. (1972) *Nekotorye zadachi termouprugosti*. Minsk: Beloruskiy universitet.

Надійшла до редколегії 29.05.19