

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

**Куриленко Роман Олегович**

УДК 535.012.2:535.51:517.956.328:519.6(043.3)

ДИСЕРТАЦІЯ

**ОДНОЗНАЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПОЛЯРИМЕТРІЇ ДЛЯ  
СЕРЕДОВИЩ ІЗ СКЛАДНОЮ АНІЗОТРОПІЄЮ**

Спеціальність 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

Галузь знань 10 «Природничі науки»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ Р.О. Куриленко

Науковий керівник: доктор ф.-м. наук, професор, завідувач кафедри електрофізики факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка Савенков Сергій Миколайович

Київ – 2025

## АНОТАЦІЯ

**Куриленко Р.О. Однозначність розв'язку оберненої задачі поляриметрії для середовищ із складною анізотропією – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. – Київ, 2025.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії в галузі знань 10 «Природничі науки», 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2025.

Поляризаційні властивості анізотропних середовищ є важливою темою досліджень у сучасній оптиці, зокрема в контексті аналізу зміни стану поляризації світла при поширенні через складні анізотропні середовища. Одним із ключових викликів при аналізі таких середовищ є проблема однозначності умов, за яких досліджуване середовище характеризується ортогональними власними поляризаціями, а також дослідження складних типів анізотропії: виродженої, невластного та неермітового дихроїзму. Це актуалізує необхідність аналізу різних матричних моделей опису поляризаційних властивостей середовищ, зокрема: однорідної та мультиплікативної, а також визначення їхнього фізичного змісту для дослідження властивостей реальних середовищ.

Ключовим аспектом дослідження є аналіз поляризаційних властивостей середовищ у рамках теореми полярного розкладу, яка, на відміну від альтернативних підходів, дозволяє ефективно описувати не лише прості, але й складні типи анізотропії. Вперше було комплексно досліджено роль параметра неоднорідності як індикатора ортогональності власних поляризацій та його залежність від параметрів анізотропії. Показано, що полярна модель є однозначною для середовищ із тільки фазовою або тільки амплітудною анізотропією, тоді як у випадку середовищ з кількома видами анізотропії одночасно однозначність втрачається, і параметри моделі залежать від вибору послідовності дії окремих елементів.

Особливої уваги надано аналізу поздовжньо неоднорідних закручених середовищ, які широко застосовуються в рідкокристалічних технологіях. Встановлено, що для середовищ із лінійною та циркулярною фазовою анізотропією ортогональність власних поляризацій зберігається на будь-якій товщині. Натомість у середовищах із амплітудною або комбінованою анізотропією ортогональність можлива лише за певних умов. Це дозволяє краще розуміти фізичні основи роботи оптичних елементів і вдосконалювати їх проєктування.

Дисертаційне дослідження є одним із перших, яке ґрунтовно досліджує взаємозв'язок між параметрами анізотропії, умовами ортогональності власних поляризацій і умовами, за яких реалізуються складні типи анізотропії. Запропонований підхід дозволяє здійснювати кількісну оцінку ефективності моделювання анізотропних систем та має значний потенціал для застосування в оптичних технологіях, біомедичних дослідженнях та матеріалознавстві.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості вибору таких параметрів анізотропних середовищ, які потрібні для забезпечення визначених поляризаційних властивостей у прикладних задачах, а також у розробці нових методів діагностики органічних і неорганічних матеріалів за допомогою методів поляриметрії. Результати можуть бути використані для вдосконалення методів чисельного моделювання оптичних систем, а також у навчальному процесі в галузі взаємодії, розповсюдження і розсіювання поляризованого електромагнітного випромінювання з об'єктами різної природи.

Крім того, результати дисертаційної роботи можуть використовуватися для розробки навчальних курсів для підготовки фахівців у галузі прикладної фізики.

**Ключові слова:** анізотропія, поляризація, полярна модель, однорідна модель, параметр неоднорідності, ортогональність власних поляризацій, поляриметрия, закручені середовища, фазова анізотропія, амплітудна анізотропія, матриця Мюллера, матриця Джонса, спектральна задача, спектральні параметри.

## Список публікацій здобувача

*Статті у наукових фахових виданнях України та наукових періодичних виданнях інших держав:*

1. Savenkov S, Oberemok Y, Kolomiets I, Muttiah R, Kurylenko R. Mueller-Polarimetry of Barley Leaves II: Mueller Matrix Decompositions. *Photonics*. 2024; 11(1):76. <https://doi.org/10.3390/photonics11010076>.
2. Savenkov S., Kolomiets I., Oberemok Y., Kurylenko R. Spectral Problem for the Jones Matrix in Remote Scattering. *Космічна наука і технологія*. 2025. 31, No 1 (152). <https://doi.org/10.15407/knit2025.01.027>.

*Опубліковані праці апробаційного характеру:*

1. Kurylenko R., Kolomiets I. Eigenpolarizations orthogonality conditions of homogeneous anisotropic media in the term of the polar decomposition theorem // International Conference HEUREKA, 18–20 October 2022, Lviv, Ukraine. P. B4.
2. Kurylenko R.O., Kolomiets I.S., Savenkov S.N., Oberemok Ye.A. The geometric interpretation of the inhomogeneity parameter for different anisotropic media types // International Conference on Applied Physics (ICAP), 16–20 May 2023, Kyiv, Ukraine. Pp. 21–23.
3. Kurylenko R., Kolomiets I. Comparison of the polarization properties of anisotropic media in terms of the homogeneous and multiplicative approach // International Conference HEUREKA, 16–18 May 2023, Lviv, Ukraine. P. B3. URL: <https://physics.lnu.edu.ua/conferences/heureka2023/files/Heureka2023.pdf>.

## ABSTRACT

**R.O. Kurylenko Uniqueness of the polarimetry inverse problem solution for media with complex anisotropy – Qualifying scientific work on manuscript rights. – Kyiv, 2025.**

Dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Philosophy in the field of knowledge 10 “Natural Sciences” in the specialty 105 “Applied Physics and Nanomaterials” – Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv, 2025.

The polarization properties of anisotropic media are an important topic of research in modern optics, in the context of analyzing the change in light polarization during propagation through complex anisotropic media. One of the key challenges in the analysis of such media is the problem of the uniqueness of the conditions when the medium is characterized by orthogonal eigenpolarizations, as well as the study of complex types of anisotropy: degenerate case, improper dichroism, and non-Hermitian dichroism. This actualizes the need to analyze various matrix models for describing the media polarization properties, in particular: homogeneous and multiplicative, and to determine their physical content for studying real media properties.

The key point of this work is the polarization properties analysis of media within the framework of the polar decomposition theorem, which, unlike alternative approaches, allows to describe effectively not only simple but also complex anisotropy types. The role of the inhomogeneity parameter as an indicator of the eigenpolarizations orthogonality and its dependence on the anisotropy parameters were comprehensively studied for the first time. It was shown that the polar model is unambiguous for media with only phase or only amplitude anisotropy, while in the case of media with several anisotropy types simultaneously, unambiguity is lost, and the model parameters depend on a choice of the sequence of certain elements action.

Special attention is paid to the longitudinally inhomogeneous twisted media analysis, which is widely used in liquid crystal technologies. It was established that for the media

with linear and circular phase anisotropy, the eigenpolarizations are orthogonal at any thickness. Instead, in the media with amplitude or combined anisotropy, orthogonality is possible only under certain conditions. This allows us to understand the physical basis of optical elements and improve the design process.

This dissertation is one of the first that investigates a correlation between the anisotropy parameters, the eigenpolarizations orthogonality conditions, and the conditions for complex anisotropy types realization. The proposed approach allows us to make a quantitative assessment of modeling anisotropic systems efficiency and has significant potential for use in optical technologies, biomedical research, and materials science. The practical significance of the obtained results is the ability to select such parameters of anisotropic media as are necessary to ensure certain polarization properties in applied cases, as well as to develop new methods for diagnosing organic and non-organic materials using polarimetry methods. The results can be used to improve the optical systems' numerical modeling methods, and also in the educational process in the field of interaction, propagation and scattering of polarized light with objects of different nature.

In addition, the results of the dissertation can be used to develop educational courses for specialists in the field of applied physics.

**Key words:** anisotropy, polarization, polar model, homogeneous model, inhomogeneity parameter, eigenpolarizations orthogonality, polarimetry, twisted media, phase anisotropy, amplitude anisotropy, Mueller matrix, Jones matrix, spectral problem, spectral parameters.

## The list of publications

*Articles in scientific professional journals of Ukraine  
and scientific periodicals of other countries:*

1. Savenkov S, Oberemok Y, Kolomiets I, Muttiah R, Kurylenko R. Mueller-Polarimetry of Barley Leaves II: Mueller Matrix Decompositions. *Photonics*. 2024; 11(1):76. <https://doi.org/10.3390/photonics11010076>.
2. Savenkov S., Kolomiets I., Oberemok Y., Kurylenko R. Spectral Problem for the Jones Matrix in Remote Scattering. *Космічна наука і технологія*. 2025. 31, No 1 (152). <https://doi.org/10.15407/knit2025.01.027>.

*Approbation publications:*

1. Kurylenko R., Kolomiets I. Eigenpolarizations orthogonality conditions of homogeneous anisotropic media in the term of the polar decomposition theorem // International Conference HEUREKA, 18–20 October 2022, Lviv, Ukraine. P. B4.
2. Kurylenko R.O., Kolomiets I.S., Savenkov S.N., Oberemok Ye.A. The geometric interpretation of the inhomogeneity parameter for different anisotropic media types // International Conference on Applied Physics (ICAP), 16–20 May 2023, Kyiv, Ukraine. Pp. 21–23.
3. Kurylenko R., Kolomiets I. Comparison of the polarization properties of anisotropic media in terms of the homogeneous and multiplicative approach // International Conference HEUREKA, 16–18 May 2023, Lviv, Ukraine. P. B3. URL: <https://physics.lnu.edu.ua/conferences/heureka2023/files/Heureka2023.pdf>.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	10
РОЗДІЛ 1. МАТРИЧНА ПОЛЯРИМЕТРІЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ АНІЗОТРОПНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СЕРЕДОВИЩ.....	15
1.1. Матричні методи поляриметрії.....	15
1.2. Базові види анізотропії .....	19
1.3. Матриці Джонса (Мюллера) базових видів анізотропії .....	21
1.4. Узагальнена теорема еквівалентності .....	23
1.5. Однорідна (диференційна) модель .....	30
1.6. Теорема полярного розкладу.....	34
1.7. Однорідне анізотропне середовище .....	36
1.8. Поздовжньо неоднорідне анізотропне середовище.....	38
1.9. Параметр неоднорідності анізотропного середовища.....	38
Висновки до розділу 1.....	41
РОЗДІЛ 2. НЕОДНОЗНАЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПОЛЯРИМЕТРІЇ НА ОСНОВІ ОДНОРІДНОЇ ТА МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ МОДЕЛЕЙ .....	42
2.1. Співвідношення між розв'язками полярної та однорідної моделі.....	43
2.2. Порівняння підходів мультиплікативної моделі.....	48
2.3. Дослідження поляризаційних властивостей середовищ із трьома видами анізотропії в рамках полярної моделі.....	54
2.4. Поляризаційні властивості довільного однорідного анізотропного середовища в полярній моделі .....	60
Висновки до розділу 2.....	61
РОЗДІЛ 3. РОЗВ'ЯЗОК СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПОЛЯРИМЕТРІЇ В РАМКАХ ПОЛЯРНОЇ МОДЕЛІ.....	63
3.1. Умови ортогональності власних поляризацій середовищ у термінах полярної моделі.....	63

3.2. Вироджена анізотропія в рамках полярної моделі .....	65
3.3. Дослідження поляризаційних властивостей середовищ зі складною анізотропією.....	68
3.4. Геометричний зміст параметра неоднорідності для різних класів анізотропних середовищ.....	79
3.5. Аналіз параметра неоднорідності для різних власних станів поляризації анізотропного середовища .....	100
3.6. Використання параметра неоднорідності для аналізу ортогональності власних станів поляризації закручених середовищ.....	108
Висновки до розділу 3.....	126
<b>РОЗДІЛ 4. НЕОДНОЗНАЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПОЛЯРИМЕТРІЇ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ АНІЗОТРОПНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ПРИРОДНИХ ОБ'ЄКТІВ.....</b>	<b>128</b>
4.1. Геометрія експерименту і аналіз експериментальних матриць Мюллера .....	129
4.2. Опис зразків .....	138
4.3. Результати дослідження.....	139
Висновки до розділу 4.....	151
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>152</b>
<b>ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ .....</b>	<b>154</b>
<b>ДОДАТОК А.....</b>	<b>165</b>
<b>ДОДАТОК Б.....</b>	<b>169</b>

## ВСТУП

Сучасна оптична поляриметрія є високоінформативним, високочутливим та неруйнуючим методом дослідження поляризаційних властивостей різних класів анізотропних і деполаризуючих середовищ [1-41]. Водночас поляризаційні властивості середовищ [28-33], які характеризуються декількома видами анізотропії [42-71], зокрема неоднорідних анізотропних середовищ, є об'єктом дослідження в поляриметрії протягом достатньо тривалого часу [11,12,14-16,33-35,53,64-69].

Для опису поляризаційних властивостей середовищ в поляриметрії використовуються матричні формалізми Джонса та Мюллера [6,7,59-79]. Для класів середовищ з одним видом анізотропії побудовані загальні матричні моделі, що однозначно та адекватно описують їхні властивості [7,8,23,24]. Однак існують класи середовищ, які характеризуються декількома (двома, трьома та, у загальному випадку, чотирма) видами анізотропії одночасно (далі – середовища зі складною анізотропією) [4,9,10,41-43,80-99]. Для опису їх поляризаційних властивостей застосовуються переважно два підходи. Перший – однорідний (адитивний), базується на використанні диференційних матриць Мюллера (Джонса) [44-46]. Адитивність виражається у тому, що диференційна матриця середовища зі складною анізотропією є сумою диференційних матриць складових видів анізотропії. Другий підхід – мультиплікативний, базується на представленні середовищ мінімальною послідовністю шарів (поляризаційних елементів), які характеризуються тільки одним з видів анізотропії і/або деполаризації. Мультиплікативність даного підходу полягає у тому, що загальні анізотропні властивості послідовності вказаних шарів описуються у вигляді добутку їхніх матриць Мюллера (Джонса). У рамках мультиплікативного підходу сформульовані так звані теореми еквівалентності Джонса [47,48], узагальнена теорема еквівалентності [5] та полярне розкладення, що базується на використанні теореми полярного розкладу (далі - полярна модель). [49,50]. Кожен зі згаданих підходів має низку переваг і обмежень у застосуванні. Надалі моделі, що розроблені з використанням однорідного або мультиплікативного підходів, будемо називати однорідною та мультиплікативною, відповідно.

Мультиплікативні моделі поляриметрії, незважаючи на їх широке і ефективне практичне застосування, характеризується низкою проблем, а саме: інформативність параметрів анізотропії (параметри, що характеризують анізотропію, скажімо, у полярному розкладенні [50], не мають безпосередньо електродинамічного змісту), неоднозначність розв'язку оберненої задачі поляриметрії через некомутативність матриць Мюллера (Джонса) поляризаційних елементів моделі [54]. У цьому контексті, перевагою однорідної моделі є однозначність характеризування анізотропії однорідного середовища, яке безпосередньо пов'язане з тензором діелектричної проникності [65]. Проте, однорідна модель, характеризується неоднозначністю розв'язку у випадку, коли фазовий набіг між власними хвилями в середовищі кратний  $2\pi$  на відповідній товщині середовища [52].

Отже, на сьогодні актуальною проблемою поляриметрії є необхідність пошуку зв'язку між однорідними та мультиплікативними моделями, оскільки очікувано це дозволить розв'язати проблему неоднозначності мультиплікативних моделей, які можна одразу застосовувати до експериментальних матриць Мюллера досліджуваних об'єктів [5]. Також встановлення даного зв'язку дозволить ефективні значення розв'язків мультиплікативних моделей пов'язати з реальними електродинамічними характеристиками середовища.

З іншого боку, з огляду на обмежений набір можливих типів анізотропії в оптично анізотропних середовищах, мультиплікативна модель узагальненої теореми еквівалентності є найбільш перспективною щодо пошуку згаданого зв'язку, оскільки набір параметрів, яким вона оперує для опису максимально складної оптичної анізотропії, включає параметри анізотропії всіх чотирьох типів.

У роботах [51,52] знайдено зв'язок між однорідною та мультиплікативною матричною моделями анізотропних середовищ у рамках узагальненої теореми еквівалентності.

Натомість інші моделі спираються скоріше на параметри, що описують особливості перетворення поляризації випромінювання [24-26], тому їх зв'язок з реальними електродинамічними характеристиками середовища ще складніше інтерпретувати і тому пошук цього зв'язку є вкрай актуальним.

Таким чином, *актуальність* цієї дисертаційної роботи полягає в необхідності встановлення взаємозв'язку між фізичним змістом параметрів анізотропії у рамках різних поляриметричних моделей, для різних класів однорідних анізотропних середовищ.

*Метою і задачами цієї роботи було:*

1. Дослідити поляризаційні властивості середовищ зі складною анізотропією в рамках теореми полярного розкладу.
2. Провести аналіз особливостей поширення світла в середовищах зі складною анізотропією на основі параметра неоднорідності середовища.
3. Провести порівняльний аналіз параметрів, що описують оптичну анізотропію в рамках різних підходів матричної поляриметрії.
4. Встановити умови на параметри анізотропії середовища, при виконанні яких власні поляризації, що розповсюджуються в довільному однорідному анізотропному середовищі, є ортогональними.

*Об'єкт дослідження* – взаємодія поляризованого світла з різними класами однорідних анізотропних середовищ.

*Предмет дослідження* – аналіз поляризаційних властивостей середовищ зі складною анізотропією на основі матричних методів Джонса та Мюллера.

*Методи дослідження:* у дисертаційній роботі для аналізу поляризаційних властивостей анізотропних середовищ в рамках матричних методів Джонса та Мюллера використовуються теорема полярного розкладу, узагальнена теорема еквівалентності і однорідна модель (підхід).

*Наукова новизна одержаних результатів* полягає в тому, що в роботі:

1. Вперше на основі матричних методів Мюллера та Джонса проведений порівняльний аналіз поляризаційних властивостей середовищ на основі однорідного підходу, узагальненої теореми еквівалентності та теореми полярного розкладу.
2. Вперше продемонстровано фізичний зміст параметрів анізотропії, які використовуються в теоремі полярного розкладу в рамках матричного методу Мюллера (Джонса).

3. Вперше отримані умови ортогональності власних поляризацій для довільного однорідного анізотропного середовища в рамках теореми полярного розкладу.
4. Вперше продемонстровані особливості реалізації складної анізотропії в рамках теореми полярного розкладу.
5. Вперше використано параметр неоднорідності для аналізу складної анізотропії однорідних та поздовжньо неоднорідних недеполяризуючих середовищ.

*Практичне значення одержаних результатів.* Результати, отримані в цій дисертаційній роботі, можуть бути використані для аналізу поляризаційних властивостей складних однорідних анізотропних середовищ при розв'язанні оберненої задачі поляриметрії на основі існуючих мультиплікативних теорем розкладення, синтезу середовищ (поляризаційних елементів) із заданою анізотропією, а також порівняння поляризаційних властивостей середовищ в рамках різних моделей матричної поляриметрії.

Результати, що отримані в дисертації, будуть використанні у навчальному процесі факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також для підготовки наступних кваліфікаційних робіт бакалаврів і магістрів.

*Особистий внесок здобувача.* У роботах [99,100] здобувач брав участь у моделюванні, теоретичних розрахунках, аналізі і обговоренні результатів, у роботах [101-105] брав участь у порівняльному аналізі існуючих поляризаційних моделей середовищ та розробці нової моделі, у роботах [106,107] брав участь у розробці моделі і проведенні теоретичних розрахунків на основі запропонованої моделі.

*Достовірність результатів.* Достовірність наукових висновків та результатів, отриманих в даній роботі забезпечується фізичною обґрунтованістю теоретичних і експериментальних методів і моделей, що використовуються і досліджуються, коректністю здійсненого в роботі математичного аналізу, а також, відповідністю теоретичних розрахунків результатам експериментальних досліджень.

*Апробація результатів дисертації.* Результати дисертаційної роботи доповідалися на таких міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях: International Conference of Students and Young Scientists in Theoretical and

Experimental Physics "HEUREKA-2021" (2021, м. Львів, Україна), International Conference of Students and Young Scientists in Theoretical and Experimental Physics "HEUREKA-2022" (2022, м. Львів, Україна), XXIII International Young Scientists Conference on Applied Physics (2023, м. Київ, Україна), International Conference of Students and Young Scientists in Theoretical and Experimental Physics "HEUREKA-2023" (2023, м. Львів, Україна).

*Публікації.* Основні результати дисертаційного дослідження викладені у 2 наукових статтях у виданнях, проіндексованих наукометричною базою Scopus.

*Структура та обсяг дисертаційної роботи.* Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів основного тексту, висновків, списку використаних джерел (114 посилань на 11 сторінках) і 1 додатку. Повний обсяг дисертаційної роботи складає 144 сторінки й 72 ілюстрації.

## РОЗДІЛ 1.

### МАТРИЧНА ПОЛЯРИМЕТРІЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ АНІЗОТРОПНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СЕРЕДОВИЩ

У цьому розділі розглянуті методи матричної поляриметрії, що використовуються для опису взаємодії поляризованого світла з оптично анізотропним середовищем. А саме, розглянуті матричні методи Джонса та Мюллера. Представлені базові (елементарні) види анізотропії, які пов'язані із часовою і просторовою нелокальністю відгуку середовища на дію світла і проявляються як залежність показника заломлення та коефіцієнта поглинання середовища від стану вхідної поляризації, а також виду власних поляризацій.

Розглянуті класи середовищ, які характеризуються декількома видами анізотропії одночасно. Для цих класів середовищ наведені три підходи, що описують поляризаційні властивості середовищ: мультиплікативні підходи на основі узагальненої теореми еквівалентності [5] та на основі теореми полярного розкладу [49,50] і однорідний підхід, що базується на диференційному матричному методі Мюллера і/або Джонса [44,45]. Також в цьому розділі представлені основні підходи щодо опису поздовжньо неоднорідних середовищ [68] і окремо розглянутий клас середовищ, що характеризується ортогональними власними поляризаціями [17].

#### 1.1. Матричні методи поляриметрії

Розглянемо однорідну монохроматичну плоску ТЕ хвилю, що падає на оптичну систему, яка складається з окремого поляризаційного елемента або з послідовності таких елементів. Далі розглянемо дві фіксовані в просторі правосторонні декартові системи координат  $(x, y, z)$  і  $(x', y', z')$ , що зв'язані з падаючою і вихідною плоскими хвилями, а напрямки  $z$  і  $z'$  є паралельними хвильовим векторам  $k$  і  $k'$  відповідно (див Рис.1.1) [7]:

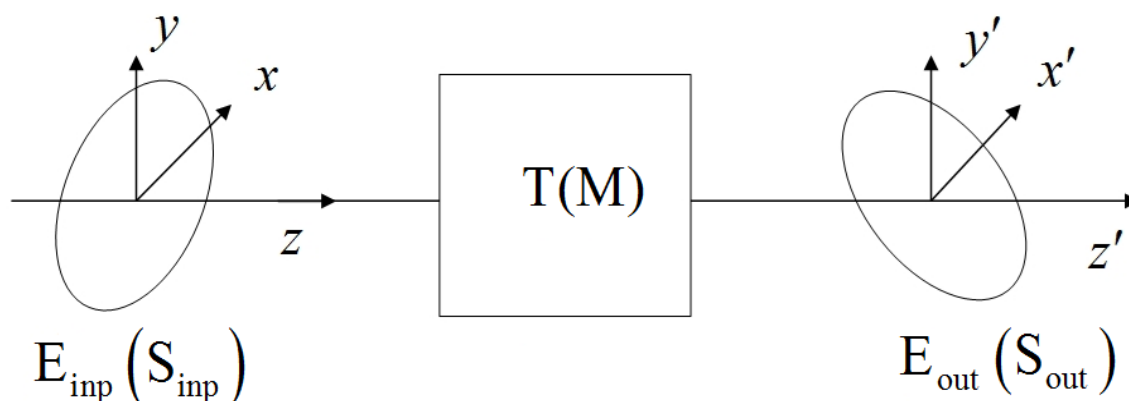


Рис.1.1. Поширення поляризованого світла, що описується вектором Джонса  $\mathbf{E}$  (Стокса  $\mathbf{S}$ ), через поляризаційний елемент, який описується матрицею Джонса  $\mathbf{T}$  (Мюллера  $\mathbf{M}$ ).

У випадку лінійної взаємодії середовища зі світлом проєкції вектору електричного поля на осі системи координат на виході з середовища  $E'_x$  і  $E'_y$  пов'язані з відповідними проєкціями на осі вхідної системи координат  $E_x$  і  $E_y$  лінійними співвідношеннями вигляду:

$$\begin{cases} E'_x = T_{11}E_x + T_{12}E_y \\ E'_y = T_{21}E_x + T_{22}E_y \end{cases} \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) можна представити в матричній формі таким чином:

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

або

$$\mathbf{E}_{out} = \mathbf{T}\mathbf{E}_{inp}, \quad (1.3)$$

де  $\mathbf{E}_{inp}$  і  $\mathbf{E}_{out}$  -  $2 \times 1$  вектори Джонса, компоненти яких є проєкціями вектору електричного поля на відповідні осі координат і описують стан поляризації світла, а також його інтенсивність і абсолютну фазу. Оскільки вектор Джонса можна представити як [7]:

$$\mathbf{E} = Ae^{i\Delta} \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\varepsilon) - i\sin(\theta)\sin(\varepsilon) \\ \sin(\theta)\cos(\varepsilon) + i\cos(\theta)\sin(\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

де  $\theta$  і  $\varepsilon$  - азимут (кут між вектором електричного поля і віссю  $x$ ) і кут еліптичності ( $\tan(\varepsilon) = e$  - еліптичність – відношення півосей еліпса поляризації),  $T$  - інтегральна матриця Джонса [7], яка пов'язує стани поляризації світла до та після його взаємодії з середовищем [40,41]. У загальному випадку елементи електричного вектору і матриці Джонса є комплексними величинами.

Співвідношення (1.3) представляє закон взаємодії падаючої хвилі з поляризаційним елементом (анізотропним середовищем) у вигляді лінійного матричного перетворення вектора Джонса цієї хвилі. Саме це співвідношення є основним рівнянням, на якому базується метод Джонса.

Важливо відмітити низку особливостей щодо використання метод Джонса. По-перше, вектором Джонса можливо описати лише повністю поляризоване світло, а матриця Джонса застосовна лише у випадку поляризаційних елементів, які характеризуються відсутністю деполіризації (зменшення ступеня поляризації світла повністю поляризованого вхідного світла). По-друге, при експериментальному вимірюванні поляризаційних характеристик світла використовуються квадратичні фотодетектори, які вимірюють не напруженість електричного поля, а усереднену в часі або просторі інтенсивність. У випадку наявності деполіризації застосовують матричний метод Мюллера [6,7], у рамках якого стан поляризації світла описується  $4 \times 1$  вектором Стокса  $S$ :

$$\mathbf{S} = [S_1, S_2, S_3, S_4]^T, \quad (1.5)$$

компоненти якого визначаються як:  $S_1 = I_x + I_y = I_{45} + I_{-45} = I_r + I_l$ ,  $S_2 = I_x - I_y$ ,  $S_3 = I_{45} - I_{-45}$ ,  $S_4 = I_r - I_l$  де  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{45}$ ,  $I_{-45}$ ,  $I_r$ ,  $I_l$  - інтенсивність світла, що пройшло через лінійний поляризатор з орієнтацією вздовж осі  $x$ ,  $y$ , під кутом  $\pm 45^\circ$  до осі  $x$ , а також через право- та лівоциркулярний поляризатор відповідно.

З іншого боку, компоненти вектора Стокса можна представити як функції від параметрів еліпса поляризації:

$$S_1 = 1, S_2 = \cos(2\varepsilon)\cos(2\theta), S_3 = \cos(2\varepsilon)\sin(2\theta), S_4 = \sin(2\varepsilon), \quad (1.6)$$

де складові рівняння (1.6) представляють вектор Стокса, нормований на перший елемент, який має зміст повної інтенсивності світла. Щодо абсолютної фази світла, то при застосуванні матричного методу Мюллера інформація про неї втрачається, оскільки компоненти вектору Стокса є усередненими в часі інтенсивностями [6,7]. Рівняння (1.6) описує повністю поляризоване світло. У випадку частково поляризованого або неполяризованого світла вводиться поняття ступеню поляризації  $p = \sqrt{S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} / S_1$ , який є відношення інтенсивності повністю поляризованої компоненти до повної інтенсивності світла, а відповідний вектор Стокса можна представити як:

$$S_1 = 1, S_2 = p \cos(2\varepsilon)\cos(2\theta), S_3 = p \cos(2\varepsilon)\sin(2\theta), S_4 = p \sin(2\varepsilon). \quad (1.7)$$

Зміна стану поляризації світла при його походженні через поляризаційний елемент в рамках методу Мюллера описується рівнянням:

$$\mathbf{S}_{out} = \mathbf{M}\mathbf{S}_{inp}, \quad (1.8)$$

де  $\mathbf{S}_{inp}$  і  $\mathbf{S}_{out}$  вектори Стокса вхідного і вихідного випромінювання,  $\mathbf{M}$  - 4x4 інтегральна матриця Мюллера [3,6,7], що описує анізотропні і деполаризуючі властивості поляризаційного елемента. У випадку, коли поляризаційний елемент не має деполаризуючих властивостей, його матриця Мюллера характеризується сімома незалежними параметрами й існує однозначний взаємозв'язок між матрицею

Мюллера та матрицею Джонса поляризаційного елементу [6,104]. У випадку присутності деполаризації кількість незалежних параметрів матриці Мюллера буде більша - до 16-ти. Елементи вектора Стокса й матриці Мюллера є дійсними величинами.

## 1.2. Базові види анізотропії

У поляриметрії та поляризаційній оптиці під анізотропією розуміється залежність матеріальних параметрів середовища (показника заломлення  $n$  і коефіцієнта поглинання  $k$ ) від напрямку розповсюдження світла в середовищі [3,4,7]. Одним з наслідків оптичної анізотропії середовища є те, що стан поляризації вхідного випромінювання, змінюється після взаємодії із середовищем.

У будь-якому анізотропному середовищі світло поширюється у вигляді двох незалежних власних хвиль [4,7,66,67]. Особливостями таких хвиль, що розповсюджуються у виділеному напрямку, є відсутність зміни стану поляризації. При цьому повна амплітуда (інтенсивність) і/або абсолютна фаза власних хвиль можуть змінюватись.

Задача пошуку поляризації власних хвиль, розрахунок зміни їх фази та амплітуди – спектральна задача [7]. Спектр матриці – її власні вектори та власні числа. Власні вектори матриці Джонса  $\chi_{e1,2}$  (комплексна змінна Пуанкаре [7], яка визначається як  $\chi = E_y / E_x$ ) описують поляризацію власних хвиль відповідного оптично анізотропного середовища (власні поляризації), а її власні числа  $V_{e1,2}$  описують перетворення фази та амплітуди власних хвиль. Під розв'язком спектральної задачі поляриметрії розуміють розрахунок власних поляризацій та власних чисел матриці Джонса (спектру цієї матриці) з подальшим їх аналізом [7].

Анізотропні середовища, згідно з класифікацією, наведеною у [45], діляться на однорідні та неоднорідні у поздовжньому напрямку (далі просто однорідні та неоднорідні середовища). Основою такої класифікації є незалежність (однорідні), та

залежність (неоднорідні) власних поляризацій від кінцевої оптичної товщини середовища.

У випадку розповсюдження поляризованого світла певної довжини хвилі  $\lambda$  в однорідних анізотропних середовищах розрізняють чотири базові види оптичної анізотропії [7,8,22]:

1) *Лінійна фазова анізотропія* (лінійне двопронезаломлення) – середовище характеризуються власними хвилями з лінійними ортогональними поляризаціями. Власні хвилі розповсюджуються з різною фазовою швидкістю, у результаті фазовий зсув між ними описується співвідношенням  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_0 - n_e)z = \delta_0 z$ , тут  $n_0$ ,  $n_e$  - показники заломлення для власних хвиль (звичайної та незвичайної),  $\delta_0$  - питома значення величини анізотропії. Ще однією характеристикою анізотропії середовища є азимут орієнтації  $\alpha$  швидкої осі анізотропії.

2) *Циркулярна фазова анізотропія* (циркулярне двопронезаломлення або оптична активність) – середовище характеризуються власними хвилями з циркулярними ортогональними поляризаціями. Власні хвилі розповсюджуються з різною фазовою швидкістю, у результаті фазовий зсув між ними описується співвідношенням  $\varphi = \frac{\pi}{\lambda}(n_l - n_r)z = \varphi_0 z$ , тут  $n_r$ ,  $n_l$  - показники заломлення для власних хвиль з правою та лівою циркулярною поляризацією,  $\varphi_0$  - питома значення величини анізотропії.

3) *Лінійна амплітудна анізотропія* (лінійний дихроїзм) – середовище характеризується власними хвилями з лінійними ортогональними поляризаціями, які по-різному поглинаються. Цей вид анізотропії характеризується наступним співвідношенням для відносного коефіцієнта поглинання  $\xi = \frac{2\pi}{\lambda}(k_0 - k_e)z = \xi_0 z$  або

$P = \frac{E_x}{E_y} = e^{-\xi}$ . Тут  $k_0$ ,  $k_e$ ,  $E_x$ ,  $E_y$  - коефіцієнти поглинання та електричні вектори

власних лінійно поляризованих хвиль (звичайної та незвичайної),  $\xi_0$  - питома

значення величини анізотропії. Ще однією характеристикою анізотропії середовища є азимут орієнтації  $\theta$  осі мінімального поглинання (максимального пропускання).

4) *Циркулярна амплітудна анізотропія* (циркулярний дихроїзм) – середовище характеризується власними хвилями з циркулярними ортогональними поляризаціями, які по-різному поглинаються. Цей вид анізотропії характеризується наступним співвідношенням для відносного коефіцієнта поглинання  $r = \frac{2\pi}{\lambda}(k_l - k_r)z = r_0 z$  або  $R = \frac{E_l - E_r}{E_l + E_r} = \tanh\left(\frac{r}{2}\right)$ .  $k_r$ ,  $k_l$ ,  $E_r$ ,  $E_l$  - коефіцієнти поглинання й електричні вектори власних хвиль з правою та лівою циркулярною поляризацією,  $r_0$  - питоме значення величини анізотропії.

Відповідно до визначення, наведені параметри анізотропії можуть змінюватись у таких межах:  $0 \leq \delta \leq 2\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq P \leq 1$  ( $0 \leq \xi \leq \infty$ ),  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $-1 \leq R \leq 1$  ( $-\infty \leq r \leq \infty$ ) [5,7,56].

### 1.3. Матриці Джонса (Мюллера) базових видів анізотропії

У рамках матричних методів Джонса та Мюллера, що наведені в пункті 1.1, для основних видів анізотропії, що представлені в пункті 1.2 [7,56] можуть бути записані такі матриці:

1) *лінійна фазова анізотропія:*

$$\mathbf{T}^{LP} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + e^{-i\delta} \sin^2(\alpha) & (1 - e^{-i\delta}) \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ (1 - e^{-i\delta}) \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + e^{-i\delta} \cos^2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{M}^{LP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha)\cos(\delta) \\ 0 & \cos(2\alpha)\sin(2\alpha)(1 - \cos(\delta)) \\ 0 & \sin(2\alpha)\sin(\delta) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos(2\alpha)\sin(2\alpha)(1 - \cos(\delta)) & -\sin(2\alpha)\sin(\delta) \\ \sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha)\cos(\delta) & \cos(2\alpha)\sin(\delta) \\ -\cos(2\alpha)\sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix},$$

2) *циркулярна фазова анізотропія:*

$$\mathbf{T}^{CP} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{M}^{CP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

3) *лінійна амплітудна анізотропія:*

$$\mathbf{T}^{LA} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + P\sin^2(\theta) & (1 - P)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ (1 - P)\cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) + P\cos^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{M}^{LA} = \begin{bmatrix} 1+P & (1-P)\cos(2\theta) \\ (1-P)\cos(2\theta) & \cos^2(2\theta)(1+P) + 2\sin^2(2\theta)\sqrt{P} \\ (1-P)\sin(2\theta) & \cos(2\theta)\sin(2\theta)(1-\sqrt{P})^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1-P)\sin(2\theta) \\ \cos(2\theta)\sin(2\theta)(1-\sqrt{P})^2 \\ \sin^2(2\theta)(1+P) + 2\cos^2(2\theta)\sqrt{P} \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{P} \end{array}$$

4) циркулярна амплітудна анізотропія:

$$\mathbf{T}^{CA} = \begin{bmatrix} 1 & -iR \\ iR & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{M}^{CA} = \begin{bmatrix} 1+R^2 & 0 & 0 & 2R \\ 0 & 1-R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-R^2 & 0 \\ 2R & 0 & 0 & 1+R^2 \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

Як можна бачити, характерною особливістю матриць Мюллера [26] фазових видів анізотропії є те, що елементи  $M_{12}, M_{21}, M_{13}, M_{31}, M_{14}, M_{41} = 0$ , тобто ці види анізотропії, не змінюють інтенсивності падаючого світла. Матриці Джонса і Мюллера фазової анізотропії є унітарними, у той час як для амплітудної анізотропії є ермітовими.

#### 1.4. Узагальнена теорема еквівалентності

Однією з важливих проблем сучасної поляриметрії залишається дослідження середовищ зі складною анізотропією, зокрема, коли анізотропія середовища

формується як результат одночасної наявності у ньому в загальному випадку всіх чотирьох вищенаведених елементарних видів анізотропії. Складність аналізу отриманих результатів для таких середовищ пов'язана з тим, що, наприклад, під дією зовнішніх факторів у середовищі може змінюватись тільки одна анізотропна компонента [5], але для її виділення необхідно коректно відокремити інші види анізотропії.

У поляриметрії в рамках матричного методу Мюллера (Джонса) існує два основних підходи для опису поляризаційних властивостей середовищ зі складною анізотропією: мультиплікативний та однорідний. У рамках мультиплікативного підходу поляризаційні властивості середовища описуються добутком матриць Мюллера (Джонса) елементарних видів анізотропії, які формують загальну складну поляризаційну поведінку середовища. Цей підхід був вперше запропонований в теоремах еквівалентності Джонса [47], і широко використовується зараз [9,10,41].

Узагальненням часткових теорем еквівалентності Джонса для випадку довільного однорідного анізотропного середовища є узагальнена теорема еквівалентності [5]. Суть цієї теореми полягає в тому, що однорідне анізотропне середовище, що характеризується чотирма базовими видами анізотропії може бути еквівалентно представлене послідовністю поляризаційних елементів, кожен з яких характеризується одним базовим видом анізотропії, як представлено на Рис.1.2 для випадку опису середовища матрицею Мюллера.

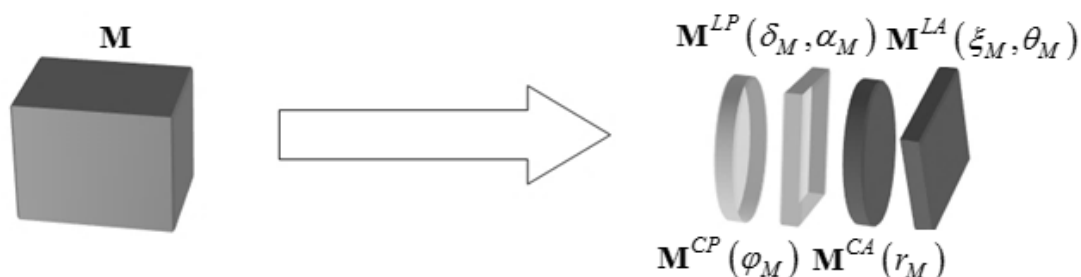


Рис.1.2. Узагальнена теорема еквівалентності.

При цьому матриця Мюллера  $\mathbf{M}$  довільного однорідного анізотропного середовища може бути еквівалентно представлена як добуток матриць Мюллера елементарних видів анізотропії (1.10), (1.12), (1.14), (1.16):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M) \mathbf{M}^{CA}(r_M) \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M). \quad (1.17)$$

Аналогічно до формули (1.17), можна представити узагальнену теорему еквівалентності в рамках методу Джонса.

Враховуючи ряд співвідношень, отриманих у [5], [47] і у [54], було показано, що непереставність матриць Мюллера (Джонса) призводить до існування двох нееквівалентних між собою послідовностей добутку матриць (розв'язків оберненої задачі):  $\mathbf{M}^{CA} \mathbf{M}^{LP} \mathbf{M}^{CP} \mathbf{M}^{LA}$  і  $\mathbf{M}^{LA} \mathbf{M}^{CP} \mathbf{M}^{LP} \mathbf{M}^{CA}$ . Ця нееквівалентність приводить до того, що підхід на основі узагальненої теореми еквівалентності є неоднозначним, а параметри анізотропії:  $\xi_M, \theta_M, r_M, \delta_M, \alpha_M, \varphi_M$ , - є ефективними величинами.

Окремими випадками узагальненої теореми еквівалентності Джонса є часткові теореми еквівалентності [47]. Перші дві теореми еквівалентності пов'язані із класом середовищ, що характеризується двома видами анізотропії.

Суть першої теореми еквівалентності Джонса полягає в тому, що довільна комбінація оптичних елементів з лінійною (LP) та циркулярною (CP) фазовою анізотропією може бути еквівалентно представлена двома оптичними елементами, які характеризуються лише лінійною або циркулярною фазовою анізотропією. На Рис.1.3 графічно представлено зміст першої теореми еквівалентності Джонса.

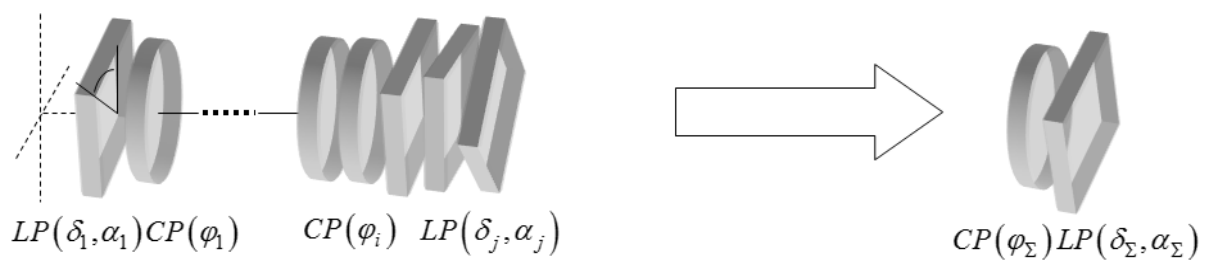


Рис.1.3. Перша теорема еквівалентності Джонса.

Перша теорема еквівалентності Джонса описує поляризаційні властивості середовищ, які складають основу кристалооптики в області прозорості (без поглинання). Математична інтерпретація першої теореми еквівалентності полягає в тому, що довільна послідовна взаємодія світла із середовищами із лінійної та циркулярної фазовою анізотропією які описуються матрицями Джонса (1.9), (1.11), може бути еквівалентно представлена матрицею Джонса, що знаходиться як добутком матриць (1.9) і (1.11). З іншого боку, матриці (1.9) і (1.11) не комутують, а отже існує два варіанти (дві послідовності) добутку [54], які пов'язані таким співвідношенням:

$$\mathbf{T}^{LP}(\delta, \alpha) \mathbf{T}^{CP}(\varphi) = \mathbf{T}^{CP}(\varphi) \mathbf{T}^{LP}(\delta, \alpha + \varphi). \quad (1.18)$$

Аналізуючи (1.18) можна бачити, що параметри анізотропії  $\delta$  та  $\varphi$  є інваріантами відносно варіанту добутку, тоді як азимут  $\alpha$  змінюється на величину параметра  $\varphi$ .

Нижче наведено наслідки першої теореми еквівалентності Джонса, які мають практичне використання.

1) Послідовність з  $n$  оптичних елементів, що характеризуються циркулярною фазовою анізотропією з параметром  $\varphi_i$ , може бути еквівалентно представлена одним елементом що характеризуються циркулярною фазовою анізотропією, з параметром

$$\varphi_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

2) Послідовність з  $n$  оптичних елементів, що характеризуються лінійною фазовою анізотропією з параметром  $\delta_i$  і однаковою орієнтацією  $\alpha$ , може бути еквівалентно представлена одним елементом, що характеризується лінійною

$$\text{фазовою анізотропією, з параметром } \delta_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \delta_i.$$

3) Послідовність з  $n$  оптичних елементів що характеризуються лінійною фазовою анізотропією з параметром  $\delta_i$  і різною орієнтацією  $\alpha_i$ , може бути еквівалентно представлена послідовністю з двох елементів, що характеризуються

лінійною та циркулярною фазовою анізотропією відповідно. За певних умов ці два оптичних елементи, можуть бути представлені одним оптичним елементом, що характеризується лінійною або циркулярною фазовою анізотропією.

Суть другої теореми еквівалентності Джонса полягає в тому, що довільна комбінація оптичних елементів, що характеризуються лінійною (LA) або циркулярною (CA) амплітудною та циркулярною фазовою (CP) анізотропією може бути еквівалентно представлена двома оптичними елементами, які характеризуються лише лінійною (циркулярною) амплітудною та циркулярною фазовою анізотропією. На Рис.1.4 графічно представлено суть другої теореми еквівалентності Джонса.

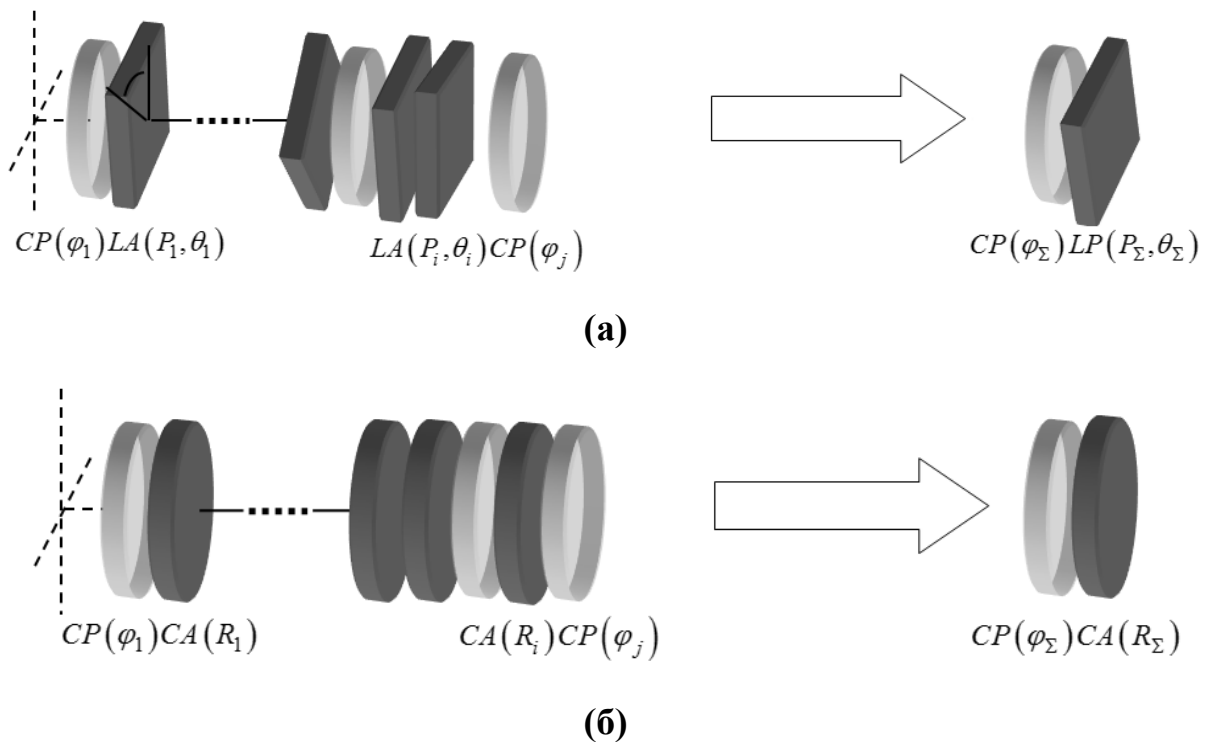


Рис.1.4. Друга теорема еквівалентності Джонса: а) випадок лінійної амплітудної та циркулярної фазової анізотропії, б) випадок циркулярних фазової та амплітудної анізотропії.

Математичний запис другої теореми еквівалентності дає два таких варіанти матриці Джонса (Мюллера) (дві послідовності):

$$\mathbf{T}^{LA}(P, \theta) \mathbf{T}^{CP}(\varphi) = \mathbf{T}^{CP}(\varphi) \mathbf{T}^{LA}(P, \theta + \varphi), \quad (1.19)$$

$$\mathbf{T}^{CA}(R)\mathbf{T}^{CP}(\varphi) = \mathbf{T}^{CP}(\varphi)\mathbf{T}^{CA}(R). \quad (1.20)$$

У випадку середовищ, анізотропія яких може бути описана в рамках другої теореми еквівалентності Джонса (у порівнянні з першою теоремою), можуть бути реалізовані неортогональні власні поляризації та випадок виродженої анізотропії (випадок співпадіння власних поляризацій і чисел). Оскільки, в співвідношення (1.19)-(1.20) правий та лівий добутки є ідентичними, отже на Рис.1.4(б) слід

вважати:  $\varphi_{\Sigma} = \sum_{j=1}^m \varphi_j$ ,  $\prod_{j=1}^n \mathbf{T}^{CA}(R_j) = \mathbf{T}^{CA}(R')$ , де  $R'_j = (R_j - R'_{j-1}) / (1 + R_j R'_{j-1})$ .

Разом із другою теоремою еквівалентності Джонса розглядають випадок довільної послідовності середовищ, що характеризуються лінійною фазовою або лінійною амплітудною анізотропією у випадку співпадіння осей двопронезаломлення та дихроїзму  $\alpha = \theta$  або їх ортогональності, що представлено на Рис.1.5. Така послідовність може бути представлена двома поляризаційними елементами, що характеризуються лінійною фазовою та амплітудною анізотропією відповідно.

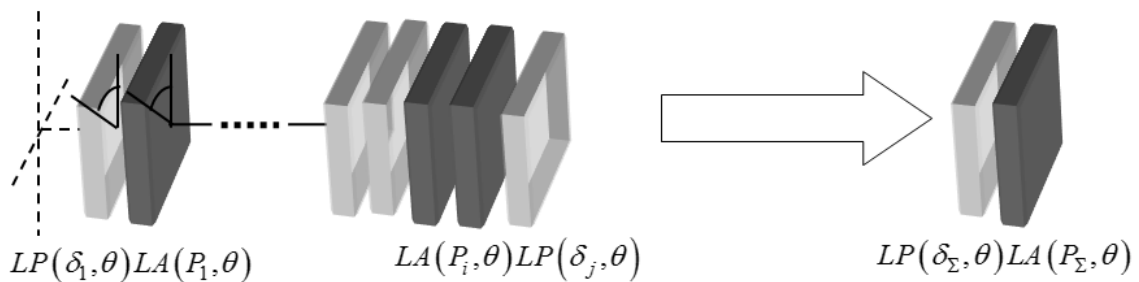


Рис.1.5. Випадок послідовності середовищ із лінійною фазовою або амплітудною анізотропією для випадку співпадіння осей анізотропії.

Для даного класу середовищ математичне формулювання теореми можна записати в наступному вигляді:

$$\mathbf{T}^{LA}(P, \theta)\mathbf{T}^{LP}(\delta, \theta) = \mathbf{T}^{LP}(\delta, \theta)\mathbf{T}^{LA}(P, \theta), \quad (1.21)$$

тобто, лівий та правий варіанти добутку є ідентичними подібно до (1.20). Крім того, легко показати, що на Рис.1.5  $\delta_\Sigma = \sum_{j=1}^m \delta_j$ ,  $P_\Sigma = \prod_{i=1}^n P_i$ . Аналогічний результат можна отримати і для випадку  $\alpha = \theta + \pi / 2$ .

Згідно з третьою теоремою еквівалентності Джонса [40] будь-яка комбінація оптичних елементів з лінійними, або циркулярними фазовою та амплітудною анізотропіями (LP, CP, LA, CA) може бути еквівалентно представлена набором з чотирьох оптичних елементів: одного з циркулярною фазовою анізотропією, двох з лінійною фазовою анізотропією (з різними значеннями фазового зсуву  $\delta$  і орієнтацією  $\alpha$ ) та одного з лінійною амплітудною анізотропією (з азимутом орієнтації в лабораторній системі координат  $\theta = 0$ ). На Рис.1.6 графічно представлений зміст третьої теореми еквівалентності Джонса.

Незважаючи на те, що дана теорема описує випадок довільного середовища (є загальною), пряма інтерпретація фізичних параметрів середовища з її допомогою ускладнена, оскільки в ній у явному вигляді відсутня циркулярна амплітудна анізотропія (CA), присутні два елементи з лінійною фазовою анізотропією, а лінійна амплітудна анізотропія має фіксовану орієнтацію. У результаті, на практиці, третю теорему еквівалентності на сьогодні майже не використовують.

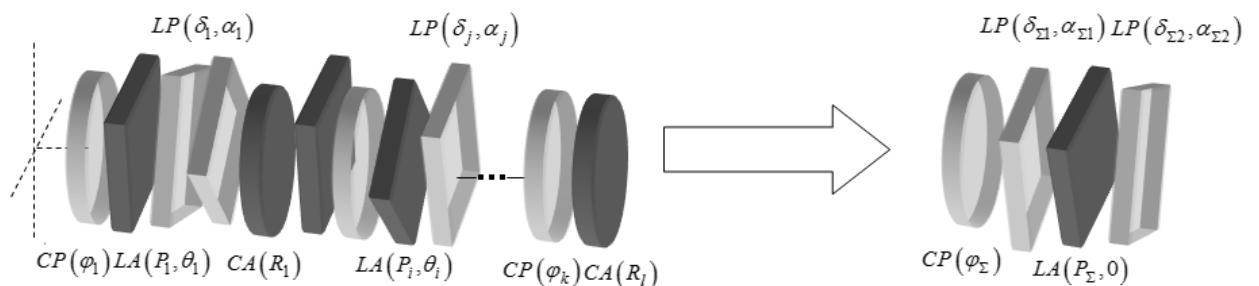


Рис.1.6. Третя теорема еквівалентності Джонса.

З іншого боку, третя теорема еквівалентності Джонса є варіантом теореми сингулярного розкладу [25]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_U \mathbf{M}_{RD} \mathbf{M}_V^T, \quad (1.22)$$

де  $\mathbf{M}_U$  і  $\mathbf{M}_V$  - матриці Мюллера елементів з лінійною фазовою анізотропією ( $\mathbf{M}^{LP}(\delta_1, \alpha_1)$  і  $\mathbf{M}^{LP}(\delta_2, \alpha_2)$ ),  $\mathbf{M}_{RD}$  - матриця Мюллера комбінації елементів з горизонтально або вертикально орієнтованою лінійною амплітудною анізотропією ( $\mathbf{M}^{LA}(P, 0)$ , або  $\mathbf{M}^{LA}(P, 90^\circ)$ ) і горизонтально орієнтованою лінійною фазовою анізотропією ( $\mathbf{M}^{LP}(\delta_3, 0)$ ).

### 1.5. Однорідна (диференційна) модель

Для подолання неоднозначності мультиплікативного підходу на основі узагальненої теореми еквівалентності був запропонований однорідний підхід. Цей підхід базується на тому, що поляризаційні властивості середовищ зі складною анізотропією представляються як одночасна дія на поляризоване (частково поляризоване або неполяризоване) світло складових видів анізотропії.

У рамках однорідного підходу поляризаційні властивості анізотропних середовищ описуються так званими диференційними матрицями Джонса (Мюллера) [44,45].

Розглянемо розповсюдження поляризованого світла в анізотропному середовищі в напрямку осі  $z$  правої прямокутної декартової системи координат. Виділимо в цьому середовищі шар товщиною  $\Delta z$ , обмежений двома паралельними площинами із координатами  $z_1$  і  $z_2$  (див. Рис.1.7).

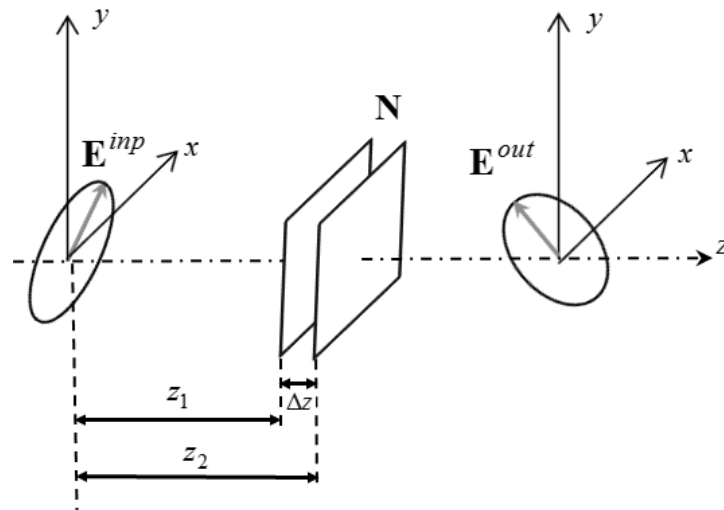


Рис.1.7. Взаємодія поляризованого світла з нескінченно тонким шаром анізотропного середовища.

У межах шарів між площинами середовище є однорідним, а в додатному напрямку вісі  $z$  анізотропні властивості середовища можуть змінюватись. Еволюція стану поляризації світла в шарі середовища товщиною  $\Delta z$  описується векторним рівнянням переносу, що має вигляд [7,44]:

$$\frac{d\mathbf{E}(z)}{dz} = \mathbf{N}(z)\mathbf{E}(z). \quad (1.23)$$

У співвідношенні (1.23)  $\mathbf{N}(z)$  - диференційна матриця Джонса, яка описує поляризаційні властивості фізично нескінченно тонкого шару середовища [7,44,65], що характеризується всіма анізотропними властивостями шару цього ж середовища макроскопічної товщини. Матриця Джонса у співвідношенні (1.18) є матрицею Джонса для шару середовища скінченної товщини  $\Delta z$  і називається інтегральною матрицею Джонса  $\mathbf{T}_{\Delta z}$ . Для розрахунку диференційної матриці Джонса з відповідної їй інтегральної матриці Джонса середовища можна скористатись наступним співвідношенням:

$$\mathbf{N} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}_{\Delta z} - I}{\Delta z}, \quad (1.24)$$

де  $I$  - одинична матриця  $2 \times 2$ . Інші варіанти розрахунку диференційних матриць Джонса наведено в [14,19,22].

Зазначимо, що векторне рівняння переносу є системою двох скалярних диференційних рівнянь відносно вектора Джонса, коефіцієнти яких визначаються елементами диференційної матриці Джонса  $N_{ij}$ .

У межах матричного методу Мюллера для опису поляризаційних і деполаризуючих властивостей фізично нескінченно тонкого шару середовища використовується диференційна матриця Мюллера  $\mathbf{m}$ , що визначається як [45]:

$$\mathbf{m}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}(z, \Delta z) - I}{\Delta z}, \quad (1.25)$$

Векторне рівняння переносу для вектора Стокса має вигляд [45]:

$$\frac{d\mathbf{S}(z)}{dz} = \mathbf{m}(z)\mathbf{S}(z). \quad (1.26)$$

У цьому випадку векторне рівняння переносу (1.26) описує еволюцію стану поляризації, ступеня поляризації та інтенсивності повністю поляризованого, частково поляризованого або неполяризованого світла при його розповсюдженні у відповідному анізотропному деполаризуючому середовищі.

У випадку, коли середовище недеполаризуюче, а світло повністю поляризоване, між диференційними матрицями Джонса  $\mathbf{N}$  та Мюллера  $\mathbf{m}$  існує взаємно однозначний зв'язок [45], аналогічний тому, що має місце для відповідних інтегральних матриць  $\mathbf{T}$  та  $\mathbf{M}$  [7]. Диференційні матриці Джонса та Мюллера для базових видів анізотропії представлені наведеними далі формулами:

1) *лінійна фазова анізотропія:*

$$\mathbf{N}^{LP} = \begin{bmatrix} -i\delta_0 \sin^2 \alpha & i\delta_0 \cos \alpha \sin \alpha \\ i\delta_0 \cos \alpha \sin \alpha & -i\delta_0 \cos^2 \alpha \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{m}^{LP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_0 \sin(2\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \delta_0 \cos(2\alpha) \\ 0 & \delta_0 \sin(2\alpha) & -\delta_0 \cos(2\alpha) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

2) циркулярна фазова анізотропія:

$$\mathbf{N}^{CP} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_0 \\ -\varphi_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

$$\mathbf{m}^{CP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varphi_0 & 0 \\ 0 & -2\varphi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

3) лінійна амплітудна анізотропія:

$$\mathbf{N}^{LA} = \begin{bmatrix} -\xi_0 \sin^2 \theta & \xi_0 \cos \theta \sin \theta \\ \xi_0 \cos \theta \sin \theta & -\xi_0 \cos^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{m}^{LA} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_0 \cos(2\theta) & \xi_0 \sin(2\theta) & 0 \\ \xi_0 \cos(2\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \xi_0 \sin(2\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

4) циркулярна амплітудна анізотропія:

$$\mathbf{N}^{CA} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{ir_0}{2} \\ \frac{ir_0}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

$$\mathbf{m}^{CA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & r_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Як можна бачити, характерною особливістю диференційних матриць Мюллера [45] є те, що різні види анізотропії входять в різні елементи такої матриці.

Як показано в роботах [74,75], диференційна матриця Джонса або Мюллера середовища зі складною анізотропією є сумою диференційних матриць складових видів анізотропії. Таким чином, на відміну від мультиплікативного підходу, у рамках однорідного підходу проблема неоднозначності представлення поляризаційних властивостей середовища зникає, а параметри анізотропії  $\xi$ ,  $\theta$ ,  $r$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi$  є величинами, що характеризують фізичні властивості середовищ. Однак, на відміну від мультиплікативного підходу, методика застосування однорідного підходу до аналізу експериментальних матриць Мюллера з'явилась відносно нещодавно, а тому не має такої кількості практичних застосувань.

Питання, пов'язанні з порівнянням однорідного та мультиплікативного підходів, були детально розглянуті в [51,52,68-79,108,109].

### 1.6. Теорема полярного розкладу

Ще одним варіантом аналізу властивостей недеполяризуючих однорідних середовищ зі складною анізотропією в рамках мультиплікативного підходу є використання відомої алгебраїчної теореми полярного розкладу [27,49,50]. Виходячи із цієї теореми, матриця Мюллера  $\mathbf{M}$  (Джонса) довільного однорідного анізотропного недеполяризуючого середовища може бути представлена у вигляді:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D \mathbf{M}_R = \mathbf{M}_R \mathbf{M}_D', \quad (1.35)$$

де  $\mathbf{M}_R$  - унітарна полярна форма,  $\mathbf{M}_D$ ,  $\mathbf{M}_D'$  - ермітові полярні форми.

Матриця  $\mathbf{M}_R$  - описує фазову анізотропію:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{m}_R \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{m}_R)_{ij} = \delta_{ij} \cos(R) + a_i a_j (1 - \cos(R)) + \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sin(R), \quad (1.36)$$

$$i, j = 1, 2, 3,$$

де  $\vec{0}$  - 3x1 вектор з нульовими елементами,  $R$  - параметр фазової затримки,  $(1, a_1, a_2, a_3)^T$  - вектор Стокса власної поляризації,  $\vec{R}^T = (R_H, R_{45}, R_C) = (Ra_1, Ra_2, Ra_3)$  - вектор фазової затримки.

Матриця  $\mathbf{M}_D$  ( $\mathbf{M}'_D$ ) описує амплітудну анізотропію з ортогональними власними поляризаціями, є ермітовою й може бути представлена у вигляді:

$$\mathbf{M}_D = T_u \begin{bmatrix} 1 & \vec{D}^T \\ \vec{D} & \mathbf{m}_D \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{m}_D = \sqrt{1 - D^2} \mathbf{I} + (1 - \sqrt{1 - D^2}) \left( \frac{\vec{D}}{D} \right) \left( \frac{\vec{D}^T}{D} \right),$$

де  $\mathbf{I}$  - 3x3 одинична діагональна матриця,  $D$  параметр деагенюації,  $(1, d_1, d_2, d_3)^T$  - вектор Стокса власної поляризації,  $\vec{D}^T = (D_H, D_{45}, D_C) = (Dd_1, Dd_2, Dd_3)$  - вектор деагенюації.

Отже, виходячи із теореми полярного розкладу, завжди можна розділити фазову та амплітудну анізотропії (див. Рис.1.8), а поляризаційні властивості середовища із чотирма видами анізотропії можуть бути представлені послідовною дією двох поляризаційних елементів, що характеризується узагальненою фазовою та амплітудною анізотропією.

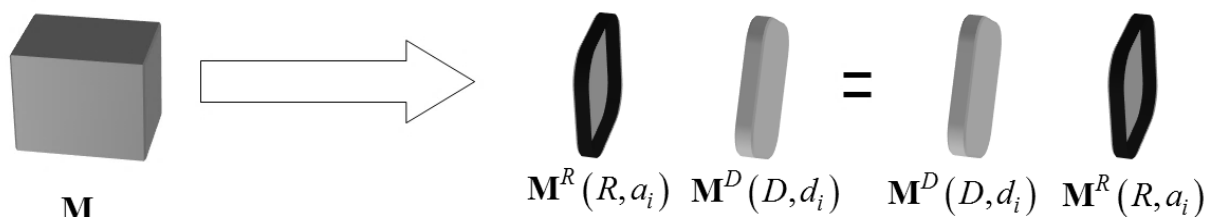


Рис.1.8. Теорема полярного розкладу.

У рівнянні (1.22)  $\mathbf{M}_D \mathbf{M}_R$  і  $\mathbf{M}_R \mathbf{M}'_D$  називають правою та лівою полярними формами [49,50], оскільки ці добутки приводять до різних матриць Мюллера. Отже, як і у випадку узагальненої теореми еквівалентності, полярна форма характеризується неоднозначністю представлення поляризаційних властивостей середовищ. Проте внаслідок того, що в рамках підходу на основі теореми полярного розкладення достатньо просто може бути виділена ефективна фазова та амплітудна анізотропія, дана модель застосовується значно частіше, ніж підхід на основі узагальненої теореми еквівалентності або ж однорідний підхід.

### 1.7. Однорідне анізотропне середовище

Припустимо, що у нас є анізотропне середовище зі складною анізотропією. Таке середовище доцільно описати в рамках однорідного (диференційного) підходу. Цей підхід є нічим іншим, як одночасною дією на поляризоване світло всіх складових видів анізотропії, присутніх у такому середовищі. В основі однорідного підходу лежить використання диференційних матриць. Як це було показано в підрозділі 1.4., виділимо в середовищі, яке описується інтегральною матрицею Джонса, тонкий шар, товщиною  $\Delta z$ . Даний шар буде обмежений площинами  $z_1$  і  $z_2$ . У межах кожної з цих площин середовище однорідне, а в напрямку осі  $z$  анізотропні властивості можуть змінюватись. У цьому випадку еволюція стану поляризації, описана в рамках матричного методу Джонса, буде описуватись векторним рівнянням переносу (1.23).

Для того, щоб отримати диференційну матрицю Джонса  $N$  для шару  $\Delta z$  з інтегральної матриці Джонса  $T(z)$ , потрібно використати співвідношення [44]:

$$N(z) = \frac{dT(z)}{dz} T^{-1}(z) \quad (1.38)$$

Як випливає з рівняння переносу (1.23) і (1.26), диференційна матриця Джонса (Мюллера) є оператором, що перетворює вектор Джонса (Стокса) на його похідну від цього вектора  $\frac{d\vec{E}}{dz} \left( \frac{d\vec{S}}{dz} \right)$  у напрямку поширення світлової вздовж додатної осі  $z$ . Разом з цим, диференційна матриця Джонса є оператором, що перетворює інтегральну матрицю Джонса на похідну від цієї матриці по координаті  $z$ :

$$\frac{dT(z)}{dz} = N(z)T(z) \quad (1.39)$$

Залежно від поляризаційних властивостей анізотропного середовища вздовж осі поширення світла  $z$ , середовища розділяють на поздовжньо однорідні та поздовжньо неоднорідні [45]. У поздовжньо однорідних (або просто однорідних) середовищ елементи диференційної матриці Джонса не залежать від координати  $z$  ( $N_{ij} \neq f(z)$ ). У поздовжньо неоднорідних середовищ елементи диференційної матриці Джонса залежать від  $z$  ( $N_{ij} = f(z)$ ). У випадку однорідних середовищ диференційну матрицю Джонса можна визначати зі співвідношень (1.24), (1.38), а розв'язок векторного рівняння (1.39) матиме такий вигляд:

$$T = e^{Nz} \quad (1.40)$$

У випадку неоднорідних середовищ загального розв'язку векторного рівняння (1.39) не існує і співвідношення (1.24) не виконується. При цьому для знаходження диференційної матриці Джонса має бути використане лише співвідношення (1.38).

### 1.8. Поздовжньо неоднорідне анізотропне середовище

Розглянемо клас середовищ, у яких елементи диференційної матриці Джонса або Мюллера  $N$  чи  $m$ , відповідно, залежать від координати  $z$  в напрямку поширення світлової хвилі [11,12,15,16,44,45,68]. Тут векторне рівняння переносу має аналітичний розв'язок лише для певних класів таких середовищ.

У таких середовищах еволюція стану поляризації на основі рівняння переносу та з використанням комплексної змінної  $\chi$ , що описує власні стани поляризації, матиме вигляд [44,45]:

$$\frac{d\chi}{dz} = -N_{12}\chi^2 + (N_{22} - N_{11})\chi + N_{21}, \quad (1.41)$$

де  $N_{ij}$  - елементи диференційної матриці Джонса,  $i = j = \overline{1,2}$ . Розв'язок рівняння (1.41)  $\chi(z, \chi_0)$ , де  $\chi_0$  - відношення проєкцій вектора Джонса для вхідного стану поляризації, описує еволюцію стану поляризації світлової хвилі в середовищі з координатою  $z$ . У випадку довільної залежності  $N_{ij}$  від  $z$  аналітичного розв'язку (1.41) не існує. Проте його можна знайти чисельно. При певних залежностях  $N_{ij}$  від  $z$  аналітичний розв'язок відшукати вдається. Одним з таких випадків є середовище, у якому присутні дві власні поляризації.

### 1.9. Параметр неоднорідності анізотропного середовища

Розглянемо однорідне середовище, яке описується матрицею Джонса. Власні поляризації досліджуваного середовища задовольняють таким виразам [56,57]:

$$\begin{aligned} T\chi_1 &= V_1\chi_1 \\ T\chi_2 &= V_2\chi_2 \end{aligned} \quad (1.42)$$

За визначенням, маємо:

$$\chi_1^\dagger \chi_2 = 0, \quad (1.43)$$

де символ  $\dagger$  позначає ермітову спряженість.

З виразів (1.42) та (1.43) слідує, що таке середовище змінює стан поляризації падаючої світлової хвилі, окремо змінюючи його амплітуду і фазу. Амплітудна й фазова складові поляризаційних властивостей однорідного середовища характеризуються параметрами деатенюації (затухання) та фазової затримки (сповільнення), які описуються наступними виразами відповідно [3,49,50]:

$$D(T) = \frac{\left| |\xi_q|^2 - |\xi_r|^2 \right|}{|\xi_q|^2 + |\xi_r|^2} \quad (1.44)$$

$$R(T) = \left| \delta_q - \delta_r \right|$$

Деатенюація є мірою залежності пропускання поляризаційного елемента від вхідного стану поляризації. Фазова затримка є мірою залежності довжини оптичного шляху поляризаційного елемента від стану поляризації падаючого світла. Таким чином, однорідний поляризаційний елемент може мати як фазову затримку, так і деатенюацію. Дані параметри пов'язані із матрицею Джонса середовища такими виразами:

$$D = \sqrt{1 - \frac{4|\det T|^2}{\left[ \operatorname{tr}(T^\dagger T) \right]^2}}, \quad (1.45)$$

$$R = 2 \arccos \left( \frac{\operatorname{tr} T + \frac{\det T}{|\det T|} \operatorname{tr} T^\dagger}{2\sqrt{\operatorname{tr}(T^\dagger T) + 2|\det T|}} \right). \quad (1.46)$$

З виразів (1.45) та (1.46) стає очевидним, що параметри деатенюації та фазової затримки не є незалежними, а, отже, задати кожен із них окремо неможливо.

Як зазначено в [57], якщо середовище характеризується ортогональними власними поляризаціями, то таке середовище називається однорідним; якщо середовище характеризується неортогональними власними поляризаціями, то таке середовище називається неоднорідним; частинним випадком неоднорідного середовища є середовище з виродженою анізотропією [24], яке характеризується власними поляризаціями і числами, які співпадають. Для кількісної характеристики однорідності та неоднорідності середовища вводиться параметр неоднорідності [50]. Цей параметр визначається як абсолютне значення наступного добутку власних поляризацій в термінах комплексної змінної Пуанкаре [57]:

$$\eta = \left| \chi_1^\dagger \chi_2 \right| \quad (1.47)$$

та змінюється в межах  $0 \leq \eta \leq 1$ .

Якщо параметр неоднорідності набуває значення 0, тоді середовище є однорідним. Якщо параметр неоднорідності набуває значення 1, тоді середовище є виродженим. У решті випадків середовище є неоднорідним. Цей параметр також можна записати як функцію елементів матриці Джонса. Тоді вираз для параметра неоднорідності матиме вигляд [57]:

$$\eta^2 = \frac{\operatorname{tr}(T^\dagger T) - \frac{1}{2} |\operatorname{tr} T|^2 - \frac{1}{2} |(\operatorname{tr} T)^2 - 4 \det T|}{\operatorname{tr}(T^\dagger T) - \frac{1}{2} |\operatorname{tr} T|^2 + \frac{1}{2} |(\operatorname{tr} T)^2 - 4 \det T|}. \quad (1.48)$$

Ще однією формою представлення параметра неоднорідності є вираз для геометричного представлення [57]:

$$\eta = \cos \frac{\Theta_{1,2}}{2}, \quad (1.49)$$

де  $\Theta_{1,2}$  є кутом, між власними поляризаціями середовища.

## Висновки до розділу 1

У рамках матричних методів Джонса та Мюллера можуть бути описані різні класи однорідних та неоднорідних недеполяризуючих середовищ. Для випадку середовища, що характеризується одним видом анізотропії, відомі матриці Джонса та Мюллера, що дозволяють однозначно описати їх поляризаційні властивості.

У випадку, коли середовище характеризується декількома видами анізотропії одночасно, існує три основних підходи для опису поляризаційних властивостей середовища: однорідний підхід, підхід на основі узагальненої теореми еквівалентності і підхід на основі теореми полярного розкладу. Два перших підходи були широко досліджені, і на основі їхнього порівняння було зроблено висновок про неоднозначність підходу на основі узагальненої теореми еквівалентності і ефективності параметрів анізотропії в рамках цієї моделі. Однак, найбільш використовуваним для експериментальних досліджень в поляриметрії є підхід на основі теореми полярного розкладу.

Також у цьому розділі наведено ряд характеристик, які дозволяють проаналізувати особливості власних поляризацій, що розповсюджуються в середовищі. Зокрема, такою характеристикою є параметр неоднорідності та кут між власними поляризаціями, які дають геометричні уявлення як про ортогональність власних поляризацій, так і про можливість існування складних видів анізотропії.

Наступні розділи роботи присвячені дослідженню таких питань як порівняння підходу на основі теореми полярного розкладу з іншими підходами, а також дослідженню особливостей ортогональності власних поляризацій та реалізації складної анізотропії із використанням підходу на основі теореми полярного розкладу.

## РОЗДІЛ 2.

### НЕОДНОЗНАЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПОЛЯРИМЕТРІЇ НА ОСНОВІ ОДНОРІДНОЇ ТА МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ МОДЕЛЕЙ

Проблема неоднозначності розв'язку оберненої задачі поляриметрії для анізотропних середовищ на основі мультиплікативних моделей, особливо у випадку наявності деполаризації, спонукає розробляти нові їх варіанти [24-26]. У випадку ж недеполаризуючих середовищ як вихідні можна вважати два підходи. Перший – оснований на теоремах еквівалентності Джонса, другий підхід – оснований на теоремі полярного розкладення [49,50]. Відмітимо, що модель довільного анізотропного середовища, що ґрунтується на третій теоремі Джонса строго кажучи є трансцедентною [3] і, очевидно, саме тому й не отримала широкого застосування в поляриметрії. Оскільки зазначена особливість відсутня в теоремі еквівалентності [5], яка є природним узагальненням двох перших часткових теорем еквівалентності Джонса, за вихідну будемо вважати саме її, а відповідну модель середовища будемо називати узагальненою мультиплікативною моделлю. Модель середовища, побудовану на основі полярного розкладення, далі називатимемо полярною мультиплікативною моделлю.

Розв'язок проблеми неоднозначності оберненої задачі поляриметрії, яка зумовлена існуванням вищезгаданих мультиплікативних моделей, на наш погляд, лежить у встановленні як їхнього взаємного зв'язку, так і зв'язку з однорідною (диференційною) моделлю [51].

Зв'язок між розв'язками, отриманими в рамках узагальненої моделі та однорідної моделі анізотропного середовища був встановлений у [108,109]. Зокрема, був знайдений явний вигляд співвідношень між параметрами анізотропії:  $\delta_M, \alpha_M, \varphi_M, \xi_M, \theta_M, r_M$  узагальненої моделі та параметрами анізотропії:  $\delta, \alpha, \varphi, \xi, \theta, r$ , однорідної моделі. У цьому розділі будуть досліджені співвідношення між розв'язками оберненої задачі на основі однорідної та полярної моделей.

## 2.1. Співвідношення між розв'язками полярної та однорідної моделі

Як було зазначено в розділі 1, унітарна матриця (унітарна полярна форма)  $\mathbf{M}^R$  у полярному розкладенні є ні чим іншим як матрицею Мюллера, що описує фазову, у загальному випадку еліптичну, анізотропію середовища. Водночас, еліптична фазова анізотропія в однорідній моделі описується матрицею Мюллера [52]:

$$\mathbf{M}^{EP} = \frac{1}{\Delta_0^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left( (\delta_0^2 (1 - c_{4\alpha}) + 8\varphi_0^2) c_\Delta + 2\delta_0^2 c_{2\alpha}^2 \right) / 2 \\ 0 & \delta_0^2 s_{4\alpha} s_{\Delta/2}^2 - 2\varphi_0 \Delta_0 s_\Delta \\ 0 & \delta_0 \left( 4\varphi_0 c_{2\alpha} s_{\Delta/2}^2 + \Delta_0 s_{2\alpha} s_\Delta \right) \\ & \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \delta_0^2 s_{4\alpha} s_{\Delta/2}^2 + 2\varphi_0 \Delta_0 s_\Delta & \delta_0 \left( 4\varphi_0 c_{2\alpha} s_{\Delta/2}^2 - \Delta_0 s_{2\alpha} s_\Delta \right) \\ \left( (\delta_0^2 (1 + c_{4\alpha}) + 8\varphi_0^2) c_\Delta + 2\delta_0^2 s_{2\alpha}^2 \right) / 2 & \delta_0 \left( 4\varphi_0 s_{2\alpha} s_{\Delta/2}^2 + \Delta_0 c_{2\alpha} s_\Delta \right) \\ \delta_0 \left( 4\varphi_0 s_{2\alpha} s_{\Delta/2}^2 - \Delta_0 c_{2\alpha} s_\Delta \right) & 4\varphi_0^2 + \delta_0^2 c_\Delta \end{array} \right\} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

де  $\Delta = z\sqrt{\delta_0^2 + 4\varphi_0^2} = z\Delta_0$  - фазовий зсув між двома еліптичними власними поляризаціями середовища.

Ермітова матриця (ермітова полярна форма)  $\mathbf{M}^D$  у полярному розкладенні - матриця Мюллера, що описує амплітудну, у загальному випадку еліптичну, анізотропію середовища з ортогональними власними поляризаціями. В однорідній моделі еліптична амплітудна анізотропія описується матрицею [52]:

$$\mathbf{M}^{EA} = \frac{1}{\kappa_0} \begin{pmatrix} 1 & \xi_0 c_{2\theta} th(\kappa) \\ \xi_0 c_{2\theta} th(\kappa) & (\xi_0^2 c_{2\theta}^2 + sh(\kappa)(r_0^2 + \xi_0^2 s_{2\theta}^2)) / \kappa_0 \\ \xi_0 s_{2\theta} th(\kappa) & (\xi_0^2 sh(\kappa) s_{4\theta} sh_{\kappa/2}^2) / \kappa_0 \\ r_0 th(\kappa) & (2\xi_0 r_0 c_{2\theta} sh(\kappa) sh_{\kappa/2}^2) / \kappa_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 s_{2\theta} th(\kappa) & r_0 th(\kappa) \\ (\xi_0^2 sh(\kappa) s_{4\theta} sh_{\kappa/2}^2) / \kappa_0 & (2\xi_0 r_0 c_{2\theta} sh(\kappa) sh_{\kappa/2}^2) / \kappa_0 \\ (\xi_0^2 s_{2\theta}^2 + sh(\kappa)(r_0^2 + \xi_0^2 c_{2\theta}^2)) / \kappa_0 & (2\xi_0 r_0 s_{2\theta} sh(\kappa) sh_{\kappa/2}^2) / \kappa_0 \\ (2\xi_0 r_0 s_{2\theta} sh(\kappa) sh_{\kappa/2}^2) / \kappa_0 & (r_0^2 + \xi_0^2 sh(\kappa)) / \kappa_0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

де  $\kappa = z\sqrt{\xi_0^2 + r_0^2} = z\kappa_0$  - відносне поглинання між двома еліптичними власними поляризаціями середовища. У співвідношеннях (2.1), (2.2) використані такі позначення:  $c(x) = \cos(x)$ ,  $s(x) = \sin(x)$ ,  $sh(x) = \sinh(x)$ ,  $th(x) = \tanh(x)$ .

Для встановлення зв'язку між однорідною та полярною моделлю до матриць Мюллера (2.1), (2.2) було застосоване полярне розкладення та відповідно до [50] з нього знайдені розв'язки оберненої задачі:

$$R = \arccos\left(\frac{Tr(\mathbf{M}^{EP})}{2} - 1\right), \quad a_i = \frac{1}{2\sin(R)} \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{M}_{jk}^{EP}, \quad i=1,3, \quad (2.3)$$

$$D = \sqrt{D_H^2 + D_{45}^2 + D_R^2}, \quad d_1 = D_H / D, \quad d_2 = D_{45} / D, \quad d_3 = D_R / D,$$

$$D_H = \mathbf{M}_{12}^{EA} / \mathbf{M}_{11}^{EA}, \quad D_{45} = \mathbf{M}_{13}^{EA} / \mathbf{M}_{11}^{EA}, \quad D_R = \mathbf{M}_{14}^{EA} / \mathbf{M}_{11}^{EA}.$$

У результаті був отриманий зв'язок, що представлений на Рис.2.1 – 2.2

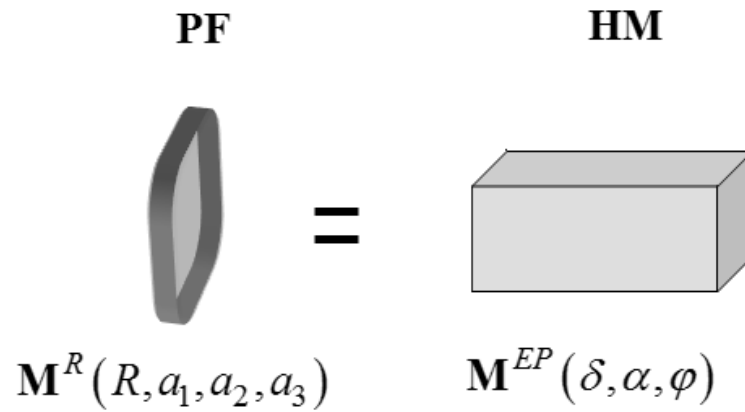


Рис.2.1. Порівняння полярної моделі на основі полярної форми (PF – Polar Form) та однорідної моделі (HM – Homogeneous Model) для класу середовищ з еліптичною фазовою анізотропією.

і такими співвідношеннями:

- для унітарної полярної форми ( $\mathbf{M}^R$ ):

$$R = \sqrt{\delta^2 + 4\varphi^2} = \Delta, \quad a_1 = \frac{\delta \cos(2\alpha)}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\delta \sin(2\alpha)}{\Delta}, \quad a_3 = \frac{2\varphi}{\Delta}, \quad (2.4)$$

- для ермітової полярної форми ( $\mathbf{M}^D$ ):

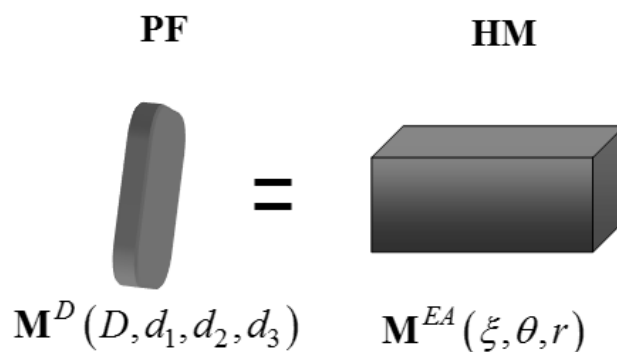


Рис.2.2. Порівняння полярної моделі на основі ермітової полярної форми (PF – Polar Form) та однорідної моделі (HM – Homogeneous Model) для класу середовищ з еліптичною амплітудною анізотропією і ортогональними власними поляризаціями.

$$D = \tanh\left(\sqrt{\xi^2 + r^2}\right) = \tanh(\kappa), \quad d_1 = \frac{\xi \cos(2\theta)}{\kappa}, \quad d_2 = \frac{\xi \sin(2\theta)}{\kappa}, \quad d_3 = \frac{r}{\kappa}. \quad (2.5)$$

Отже, з Рис.2.1 і співвідношень (2.4) випливає, що матриця Мюллера унітарної полярної форми  $\mathbf{M}^R$  співпадає з матрицею Мюллера еліптичної фазової анізотропії  $\mathbf{M}^{EP}$  ( $\mathbf{M}^R(R, a_1, a_2, a_3) = \mathbf{M}^{EP}(\delta, \alpha, \varphi)$ ), а фізичний зміст параметрів унітарної полярної форми такий:  $R = \Delta$  - фазовий зсув між двома еліптичними власними поляризаціями середовища – величина еліптичної фазової анізотропії,  $a_1$  - внесок величини компоненти лінійної фазової анізотропії з орієнтацією  $0$  ( $90^\circ$ ) у величину еліптичної фазової анізотропії,  $a_2$  - внесок величини компоненти лінійної фазової анізотропії з орієнтацією  $45$  ( $-45^\circ$ ) у величину еліптичної фазової анізотропії,  $a_3$  - внесок величини циркулярної фазової анізотропії у величину еліптичної фазової анізотропії. Таким чином, внесок величини лінійної фазової анізотропії у величину еліптичної фазової анізотропії  $a_{LP}$ : можна розрахувати як:

$$a_{LP} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad (2.6)$$

Зі співвідношень (2.4), (2.6) можна отримати зворотній зв'язок між параметрами анізотропії однорідної моделі та моделі на основі полярної форми, який для унітарної форми має вигляд:

$$\begin{aligned} \delta &= a_{LP}\Delta, \\ \varphi &= a_3\Delta / 2, \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

З Рис.2.2. і співвідношень (2.5) випливає, що матриця Мюллера ермітової полярної форми  $\mathbf{M}^D$  співпадає з матрицею Мюллера еліптичної амплітудної анізотропії з ортогональними власними поляризаціями  $\mathbf{M}^{EA}$

( $\mathbf{M}^D(D, d_1, d_2, d_3) = \mathbf{M}^{EA}(\xi, \theta, r)$ ), а фізичний зміст параметрів ермітової полярної форми такий:  $D = \tanh(\kappa)$  - гіперболічний тангенс від відносного поглинання між двома еліптичними власними поляризаціями середовища, величина еліптичної амплітудної анізотропії,  $d_1$  - внесок величини лінійної амплітудної анізотропії з орієнтацією  $0$  ( $90^\circ$ ) у величину еліптичної амплітудної анізотропії,  $d_2$  - внесок величини лінійної амплітудної анізотропії з орієнтацією  $45$  ( $-45^\circ$ ) у величину еліптичної амплітудної анізотропії,  $d_3$  - внесок величини циркулярної амплітудної анізотропії у величину еліптичної амплітудної анізотропії. Таким чином, внесок величини лінійної амплітудної анізотропії у величину еліптичної амплітудної анізотропії  $d_{LP}$ : можна розрахувати як:

$$d_{LP} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \quad (2.8)$$

а зворотній зв'язок між параметрами анізотропії однорідної моделі та моделі на основі теореми полярного розкладу для ермітової полярної форми можна отримати зі співвідношень (2.5), (2.8):

$$\begin{aligned} \xi &= d_{LP}\kappa, \\ r &= d_3\kappa / 2, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{d_2}{d_1}\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отже, матриці Мюллера унітарної та ермітової полярної форми описують класи середовищ, що характеризується лише фазовою або лише амплітудною анізотропією [99,100].

## 2.2. Порівняння підходів мультиплікативної моделі

Порівняння полярної та однорідної моделей дозволило отримати зв'язок між параметрами анізотропії цих моделей для класу середовищ, що характеризуються лише фазовою або лише амплітудною анізотропією.

Для порівняння підходів на основі полярної та узагальненої [5] моделі слід розглянути класи середовищ, що характеризуються одночасно як фазовою, так і амплітудною анізотропією. Почнемо аналіз з класів середовищ з двома видами анізотропії. Для цього в рамках полярної моделі потрібно розглянути загальний випадок матриці Мюллера, що є добутком унітарної  $\mathbf{M}_R$  та ермітової  $\mathbf{M}_D$  ( $\mathbf{M}'_D$ ) матриць Мюллера й описується рівняннями (1.13). Далі, враховуючи рівняння (2.3), слід розглянути всі можливі варіанти двох (одного фазового та одного амплітудного) видів анізотропії. Для аналізу класів середовищ з двома видами анізотропії в рамках узагальненої моделі необхідно розглянути матриці Мюллера, які є добутком двох матриць, що описують один з базових видів анізотропії (рівняння (1.10), (1.12), (1.14), (1.16)).

Використовуючи рівняння (2.3), було зроблено порівняння матриць Мюллера в рамках полярної та узагальненої моделей, що описують середовища з двома видами анізотропії. Для цього розраховувалась різниця між матрицею Мюллера в рамках теореми полярного розкладу, яка була перерахована в параметрах теореми еквівалентності на основі рівнянь (2.3), та матрицею Мюллера в рамках теореми еквівалентності для усіх класів середовищ з двома видами анізотропії. Результати цього порівняння представлені на Рис.2.3-2.6.

Співвідношення між параметрами анізотропії полярної та мультиплікативної моделі для класів середовищ, що розглянуті на Рис.2.3-2.6, такі:

1) *Для середовища, що характеризується комбінацією циркулярної фазової та лінійної амплітудної анізотропії (Рис.2.3):*

$$R = \varphi_M = \Delta, \quad a_3 = 1, \quad (2.10)$$

$$D = \tanh(\xi_M) = \tanh(\kappa), d_1 = \frac{\xi_M \cos(2\theta_M)}{\kappa}, d_2 = \frac{\xi_M \sin(2\theta_M)}{\kappa} \quad (2.11)$$

2) Для середовища, що характеризується комбінацією циркулярної амплітудної та лінійної фазової анізотронії (Рис.2.4):

$$R = \delta_M = \Delta, a_1 = \frac{\cos(2\alpha_M)}{\Delta}, a_2 = \frac{\sin(2\alpha_M)}{\Delta}, \quad (2.12)$$

$$D = \tanh(r_M) = \tanh(\kappa), d_3 = 1. \quad (2.13)$$

3) Для середовища, що характеризується комбінацією циркулярної фазової та амплітудної анізотронії (Рис.2.5):

**PF**
**MM**

$$\mathbf{M}^R(R, a_3) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) = \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M)$$

(a)

**PF**
**MM**

$$\mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) \mathbf{M}^R(R, a_3) = \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M) \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M)$$

(б)

Рис.2.3. Порівняння підходу на основі полярної моделі (PF – Polar Form) та підходу на основі узагальненої моделі (MM – Multiplicative Model) для класу середовищ з циркулярною фазовою та лінійною амплітудною анізотропією: а) базис  $\mathbf{M}^R\mathbf{M}^D$ , б) базис  $\mathbf{M}^D\mathbf{M}^R$ .

**PF**
**MM**

$$\mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) \mathbf{M}^D(D, d_3) = \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M) \mathbf{M}^{CA}(r_M)$$

(a)

**PF**
**MM**

$$\mathbf{M}^D(D, d_3) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) = \mathbf{M}^{CA}(r_M) \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M)$$

**(б)**

Рис.2.4. Порівняння підходу на основі полярної моделі (PF – Polar Form) та підходу на основі узагальненої моделі (MM – Multiplicative Model) для класу середовищ з лінійною фазовою та циркулярною амплітудною анізотропією: а) базис  $\mathbf{M}^R\mathbf{M}^D$ , б) базис  $\mathbf{M}^D\mathbf{M}^R$ .

**PF**
**PF**
**MM**
**MM**
**HM**

$$\mathbf{M}^R(R, a_3) \mathbf{M}^D(D, d_3) = \mathbf{M}^D(D, d_3) \mathbf{M}^R(R, a_3) = \mathbf{M}^{CA}(r_M) \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) = \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \mathbf{M}^{CA}(r_M) = \mathbf{M}^{CPCA}(\varphi, r)$$

Рис.2.5. Порівняння підходу на основі полярної моделі (PF – Polar Form) та підходу на основі узагальненої моделі (MM – Multiplicative Model) для класу середовищ з циркулярною фазовою та амплітудною анізотропією.

**PF**
**MM**

$$\mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) = \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M) \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M)$$

**(а)**

**PF**
**MM**

$$\mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) = \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M) \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M)$$

(б)

$$\mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) = \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) = \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M) \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \theta_M) = \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \theta_M) \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M) = \mathbf{M}^{LALP}(\xi, \theta, \delta)$$

(в)

Рис.2.6. Порівняння на основі полярної моделі (PF – Polar Form) та підходу на основі узагальненої моделі (MM – Multiplicative Model) для класу середовищ з лінійною фазовою та амплітудною анізотропією: а) базис  $\mathbf{M}^R \mathbf{M}^D$  для випадку  $\alpha \neq \theta$ , б) базис  $\mathbf{M}^D \mathbf{M}^R$  для випадку  $\alpha \neq \theta$ , в) випадок  $\alpha = \theta$ .

$$R = \varphi_M = \Delta, \quad a_3 = 1, \quad (2.14)$$

$$D = \tanh(r_M) = \tanh(\kappa), \quad d_3 = 1. \quad (2.15)$$

4) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної фазової та амплітудної анізотронії,

а) для випадку  $\alpha_M \neq \theta_M$  (Рис. (2.6а,б)):

$$R = \delta_M = \Delta, \quad a_1 = \frac{\cos(2\alpha_M)}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\sin(2\alpha_M)}{\Delta}, \quad (2.16)$$

$$D = \tanh(\xi_M) = \tanh(\kappa), \quad d_1 = \frac{\xi_M \cos(2\theta_M)}{\kappa}, \quad d_2 = \frac{\xi_M \sin(2\theta_M)}{\kappa} \quad (2.17)$$

б) для випадку  $\alpha_M = \theta_M$  (Рис. (2.6в)):

$$R = \delta_M = \Delta, a_1 = \frac{\cos(2\theta_M)}{\Delta}, a_2 = \frac{\sin(2\theta_M)}{\Delta}, \quad (2.18)$$

$$D = \tanh(\xi_M) = \tanh(\kappa), d_1 = \frac{\xi_M \cos(2\theta_M)}{\kappa}, d_2 = \frac{\xi_M \sin(2\theta_M)}{\kappa} \quad (2.19)$$

Отже, як випливає з Рис.2.3-2.6 і співвідношень (2.10)-(2.19), для класу середовищ з двома видами анізотропії, що характеризуються фазовою і амплітудною анізотропією, полярна форма та підхід на основі узагальненої теореми еквівалентності дають ідентичні матриці Мюллера. Тобто отримуємо такий результат:

1) Для середовища, що характеризується комбінацією циркулярної фазової та лінійної амплітудної анізотропії (Рис.2.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_3) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) &= \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M), \\ \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) \mathbf{M}^R(R, a_3) &= \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M) \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \end{aligned} \quad (2.20)$$

2) Для середовища, яке характеризується комбінацією циркулярної амплітудної та лінійної фазової анізотропії (Рис.2.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) \mathbf{M}^D(D, d_3) &= \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M) \mathbf{M}^{CA}(r_M), \\ \mathbf{M}^D(D, d_3) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) &= \mathbf{M}^{CA}(r_M) \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M) \end{aligned} \quad (2.21)$$

3) Для середовища, що характеризується комбінацією циркулярної фазової та амплітудної анізотропії (Рис.2.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_3) \mathbf{M}^D(D, d_3) &= \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \mathbf{M}^{CA}(r_M), \\ \mathbf{M}^D(D, d_3) \mathbf{M}^R(R, a_3) &= \mathbf{M}^{CA}(r_M) \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \end{aligned} \quad (2.22)$$

4) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної фазової та амплітудної анізотропії,

а) для випадку  $\alpha_M \neq \theta_M$  (Рис. 2.6(а,б)):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) &= \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M) \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M), \\ \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) &= \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M) \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M); \end{aligned} \quad (2.23)$$

б) для випадку  $\alpha_M = \theta_M$  (Рис. 2.6(в)):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) &= \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \theta_M) \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M), \\ \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) &= \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M) \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \theta_M); \end{aligned} \quad (2.24)$$

Таким чином, представлення поляризаційних властивостей розглянутих класів середовищ в рамках полярної моделі є еквівалентним аналогічному представленню в рамках узагальненої моделі [99,100,105].

### 2.3. Дослідження поляризаційних властивостей середовищ із трьома видами анізотропії в рамках полярної моделі

Як було показано в попередніх пунктах, якщо середовище характеризується двома видами анізотропії, серед яких лише фазова або лише амплітудна анізотропія, матриця Мюллера, яка може бути отримана в рамках полярної моделі, співпадає з матрицею Мюллера, яка може бути отримана в рамках однорідної моделі. З іншого боку, якщо середовище характеризується двома видами анізотропії, серед яких є як фазова, так і амплітудна анізотропія, то матриця Мюллера, що може бути отримана в рамках полярної моделі, співпадає з матрицею Мюллера, яка може бути отримана в рамках узагальненої моделі.

При аналізі поляризаційних властивостей класу середовищ, що характеризуються трьома видами анізотропії, урахування результатів двох

попередніх пунктів приводять до співвідношень між матрицями Мюллера в рамках різних підходів, що представлені на Рис.2.7-2.10 та виразами:

1) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної та циркулярної фазової, і лінійної амплітудної анізотронії (Рис.2.7):

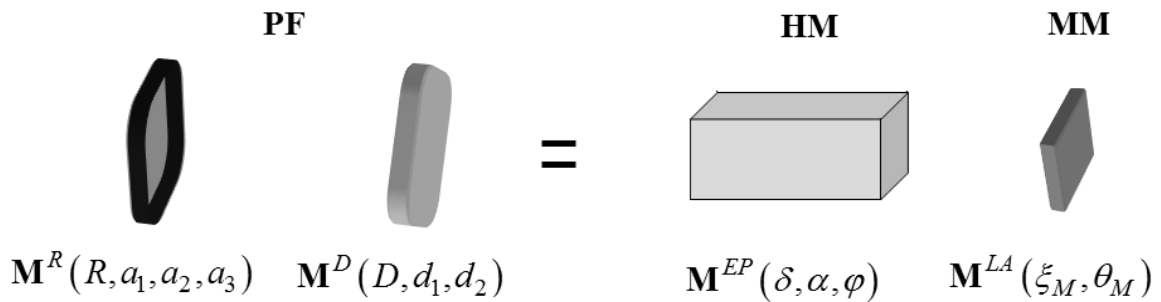
$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2, a_3) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) &= \mathbf{M}^{EP}(\delta, \alpha, \varphi) \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M), \\ \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2, a_3) &= \mathbf{M}^{LA}(\xi_M, \theta_M) \mathbf{M}^{EP}(\delta, \alpha, \varphi) \end{aligned} \quad (2.25)$$

2) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної та циркулярної фазової, і циркулярної амплітудної анізотронії (Рис.2.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2, a_3) \mathbf{M}^D(D, d_3) &= \mathbf{M}^{EP}(\delta, \alpha, \varphi) \mathbf{M}^{CA}(r_M), \\ \mathbf{M}^D(D, d_3) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2, a_3) &= \mathbf{M}^{CA}(r_M) \mathbf{M}^{EP}(\delta, \alpha, \varphi) \end{aligned} \quad (2.26)$$

3) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної та циркулярної амплітудної, і лінійної фазової анізотронії (Рис.2.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2, d_3) &= \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M) \mathbf{M}^{EA}(\xi, \theta, r), \\ \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2, d_3) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) &= \mathbf{M}^{EA}(\xi, \theta, r) \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M) \end{aligned} \quad (2.27)$$



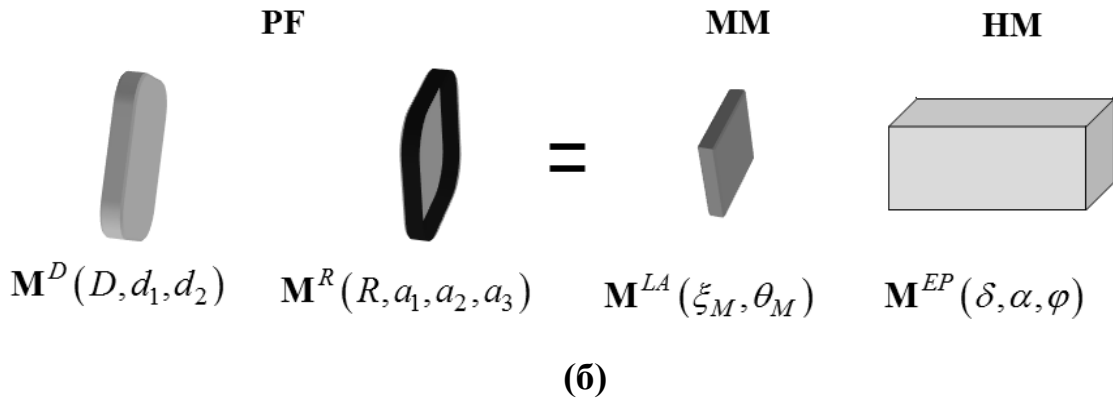
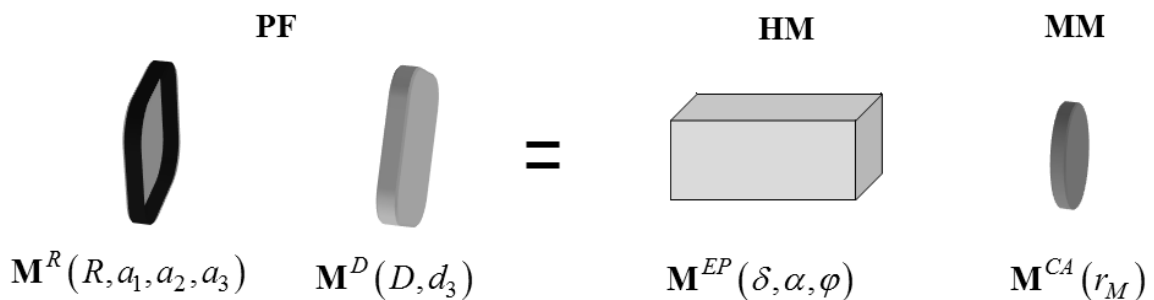


Рис.2.7. Порівняння підходу на основі полярної моделі (PF – Polar Form), однорідної моделі (HM – Homogeneous Model) та підходу на основі узагальненої моделі (MM – Multiplicative Model) для класу середовищ з лінійною та циркулярною фазовою і лінійною амплітудною анізотропією: а) базис  $\mathbf{M}^R \mathbf{M}^D$ , б) базис  $\mathbf{M}^D \mathbf{M}^R$ .

4) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної та циркулярної амплітудної, і циркулярної фазової анізотропії (Рис.2.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_3) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2, d_3) &= \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \mathbf{M}^{EA}(\xi, \theta, r), \\ \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2, d_3) \mathbf{M}^R(R, a_3) &= \mathbf{M}^{EA}(\xi, \theta, r) \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Отже, як можна бачити з Рис.2.7-2.10 і співвідношень (2.25)-(2.28), у рамках полярної моделі всі класи середовищ із трьома видами анізотропії можуть бути представлені відповідною комбінацією матриць Мюллера, що отримані як з однорідної, так і з мультиплікативної моделі.



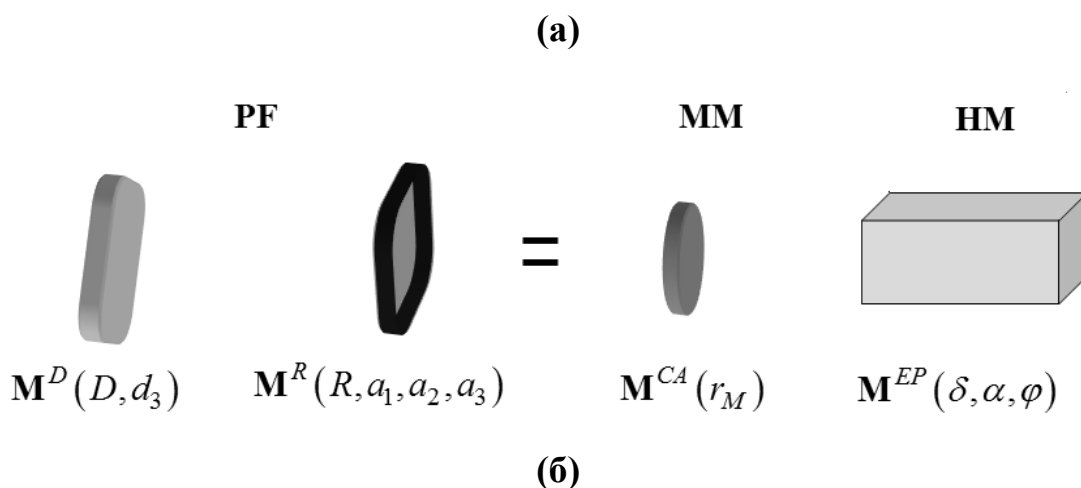
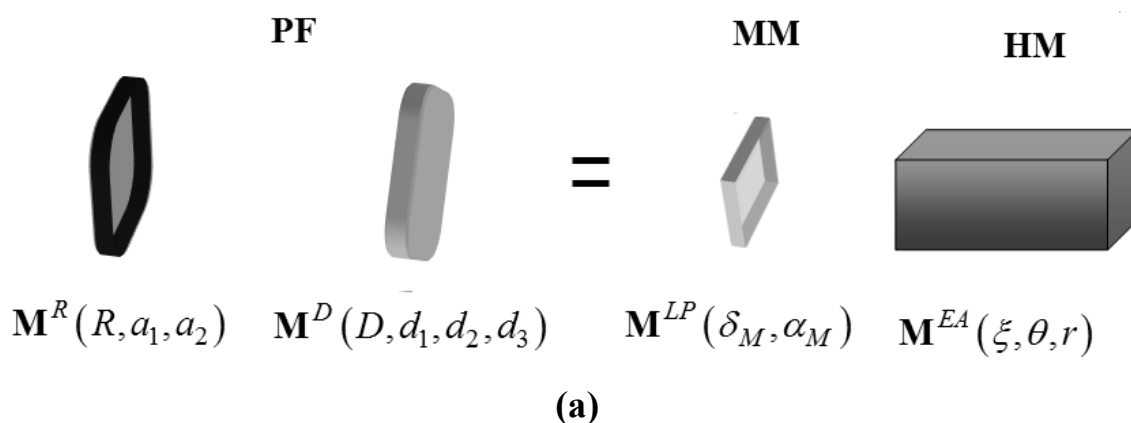


Рис.2.8. Порівняння підходу на основі полярної моделі (PF – Polar Form), однорідної моделі (HM – Homogeneous Model) та підходу на основі узагальненої моделі (MM – Multiplicative Model) для класу середовищ з лінійною й циркулярною фазовою і циркулярною амплітудною анізотропією: а) базис  $\mathbf{M}^R\mathbf{M}^D$ , б) базис  $\mathbf{M}^D\mathbf{M}^R$ .

Також слід зазначити, що для усіх класів середовищ з трьома видами анізотропії матриці Мюллера, що можуть бути отримані в рамках однорідної моделі:  $\mathbf{M}^{LPCPLA}(\delta, \alpha, \varphi, \xi, \theta)$ ,  $\mathbf{M}^{LPCPCA}(\delta, \alpha, \varphi, r)$ ,  $\mathbf{M}^{LACALP}(\xi, \theta, r, \delta, \alpha)$ ,  $\mathbf{M}^{LACALP}(\xi, \theta, r, \varphi)$ , - та матриці Мюллера, які можуть бути отримані для всіх інших (окрім (2.25)-(2.28)) комбінацій у рамках узагальненої моделі полярна модель не має аналогів.

Співвідношення між параметрами анізотропії, що представлені на Рис.2.7-2.10 і співвідношеннях (2.25)-(2.28), такі:



$$\mathbf{M}^D(D, d_1, d_2, d_3) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2) = \mathbf{M}^{EA}(\xi, \theta, r) \mathbf{M}^{LP}(\delta_M, \alpha_M) \quad (\text{б})$$

Рис.2.9. Порівняння підходу на основі полярної моделі (PF – Polar Form), однорідної моделі (HM – Homogeneous Model) та підходу на основі узагальненої моделі (MM – Multiplicative Model) для класу середовищ з лінійною та циркулярною амплітудною і лінійною фазовою анізотропією: а) базис  $\mathbf{M}^R \mathbf{M}^D$ , б) базис  $\mathbf{M}^D \mathbf{M}^R$ .

1) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної та циркулярної фазової, і лінійної амплітудної анізотропії (Рис.2.7):

$$R = \sqrt{\delta^2 + 4\varphi^2} = \Delta, a_1 = \frac{\delta \cos(2\alpha)}{\Delta}, a_2 = \frac{\delta \sin(2\alpha)}{\Delta}, a_3 = \frac{2\varphi}{\Delta}, \quad (2.29)$$

$$D = \tanh(\xi_M) = \tanh(\kappa), d_1 = \frac{\xi_M \cos(2\theta_M)}{\kappa}, d_2 = \frac{\xi_M \sin(2\theta_M)}{\kappa}$$

2) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної та циркулярної фазової, і циркулярної амплітудної анізотропії Рис.2.8:

$$\mathbf{M}^R(R, a_3) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2, d_3) = \mathbf{M}^{CP}(\varphi_M) \mathbf{M}^{EA}(\xi, \theta, r) \quad (\text{а})$$

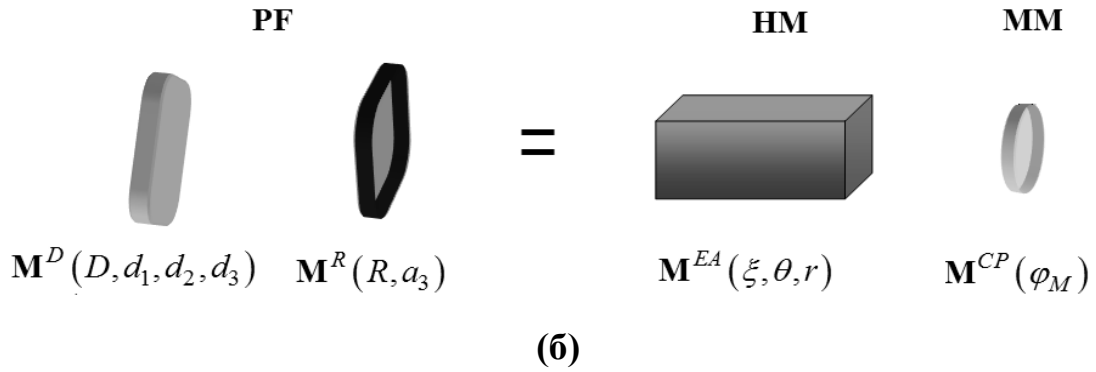


Рис.2.10. Порівняння підходу на основі полярної моделі (PF – Polar Form), однорідної моделі (HM – Homogeneous Model) та підходу на основі узагальненої моделі (MM – Multiplicative Model) для класу середовищ з лінійною та циркулярною амплітудною і циркулярною фазовою анізотропією: а) базис  $\mathbf{M}^R\mathbf{M}^D$ , б) базис  $\mathbf{M}^D\mathbf{M}^R$ .

$$R = \sqrt{\delta^2 + 4\varphi^2} = \Delta, a_1 = \frac{\delta \cos(2\alpha)}{\Delta}, a_2 = \frac{\delta \sin(2\alpha)}{\Delta}, a_3 = \frac{2\varphi}{\Delta}, \quad (2.30)$$

$$D = \tanh(r_M) = \tanh(\kappa), d_3 = 1.$$

3) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної та циркулярної амплітудної, і лінійної фазової анізотропії (Рис.2.9):

$$D = \tanh\left(\sqrt{\xi^2 + r^2}\right) = \tanh(\kappa), d_1 = \frac{\xi \cos(2\theta)}{\kappa}, d_2 = \frac{\xi \sin(2\theta)}{\kappa}, d_3 = \frac{r}{\kappa}, \quad (2.31)$$

$$R = \delta_M = \Delta, a_1 = \frac{\cos(2\alpha_M)}{\Delta}, a_2 = \frac{\sin(2\alpha_M)}{\Delta},$$

4) Для середовища, що характеризується комбінацією лінійної та циркулярної амплітудної, і циркулярної фазової анізотропії (Рис.2.10):

$$D = \tanh\left(\sqrt{\xi^2 + r^2}\right) = \tanh(\kappa), d_1 = \frac{\xi \cos(2\theta)}{\kappa}, d_2 = \frac{\xi \sin(2\theta)}{\kappa}, d_3 = \frac{r}{\kappa}, \quad (2.32)$$

$$R = \varphi_M = \Delta, a_3 = 1,$$

Порівнюючи рівняння (2.29)-(2.32) із аналогічними співвідношеннями із пункту 2.1 і 2.2 маємо, що параметрами анізотропії полярної моделі є комбінація параметрів анізотропії однорідної та узагальненої моделі [99,100,105].

#### **2.4. Поляризаційні властивості довільного однорідного анізотропного середовища в полярній моделі**

Найбільш загальним випадком однорідного анізотропного недеполяризуючого середовища є середовище з усіма чотирма базовими видами анізотропії [7]. Детальний аналіз поляризаційних властивостей таких середовищ у рамках однорідної та мультиплікативної моделі (узагальнена теорема еквівалентності) був зроблений у [52] і [5], відповідно. Для порівняння представлення в рамках полярної моделі зі однорідною моделлю та узагальненою моделлю для довільного однорідного анізотропного середовища слід використати результати пункту 2.1. Аналіз цього питання представлений на Рис.2.11 і таким співвідношенням:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2, a_3) \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2, d_3) &= \mathbf{M}^{EP}(\delta, \alpha, \varphi) \mathbf{M}^{EA}(\xi, \theta, r), \\ \mathbf{M}^D(D, d_1, d_2, d_3) \mathbf{M}^R(R, a_1, a_2, a_3) &= \mathbf{M}^{EA}(\xi, \theta, r) \mathbf{M}^{EP}(\delta, \alpha, \varphi) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Таким чином, як випливає з Рис.2.11 і співвідношення (2.33), для довільного однорідного анізотропного середовища полярна модель може бути представлена послідовною дією двох шарів з загальною (еліптичною) фазовою й амплітудною анізотропією, матриці Мюллера яких розраховуються в рамках однорідної моделі, а загальна матриця Мюллера є добутком матриць Мюллера (2.1), (2.2).

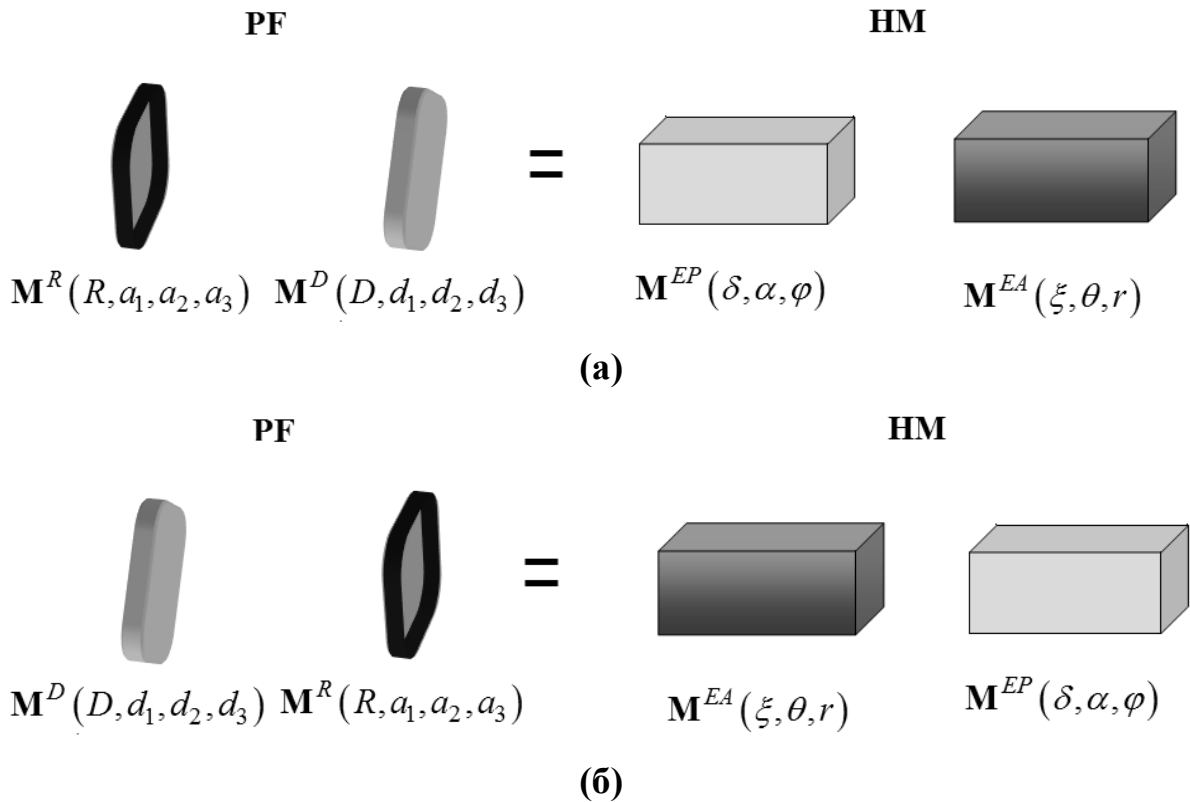


Рис.2.11. Порівняння підходу на основі полярної моделі (PF – Polar Form), однорідної моделі (HM – Homogeneous Model) та підходу на основі узагальненої моделі (MM – Multiplicative Model) для довільного однорідного анізотропного середовища: а) базис  $\mathbf{M}^R\mathbf{M}^D$ , б) базис  $\mathbf{M}^D\mathbf{M}^R$ .

Варіантів порядку слідування відповідних шарів - два (див. Рис. (2.11а,б)). З позиції методу Мюллера це означає, що обидва варіанти добутку матриць унітарної та ермітової полярної форми рівні добуткам матриць Мюллера із загальною фазовою та амплітудною анізотропією, які розраховуються в рамках однорідної моделі [99,100,105].

## Висновки до розділу 2

Співвідношення між параметрами, що характеризують анізотропні властивості середовища, у рамках полярної й однорідної моделі визначаються рівняннями (2.4) і (2.5). Таким чином, представлення властивостей довільного анізотропного

середовища в рамках полярної моделі є комбінацією однорідного підходу (оскільки матрицями в добутку є матриці еліптичних фазової та амплітудної анізотропії в рамках однорідного підходу) та мультиплікативного підходу (оскільки, загальна матриця є добутком матриць Мюллера фазової та амплітудної анізотропії). Отже, у загальному випадку детермінованого середовища представлення матрицею Мюллера (Джонса) в рамках полярної моделі не може бути зведене ні до матриці Мюллера (Джонса) в рамках однорідного підходу, ні до матриці Мюллера (Джонса) в рамках мультиплікативного підходу (узагальнена теорема еквівалентності).

Оскільки фазова і амплітудна полярні форми, що описуються матрицями Мюллера (Джонса) (1.22), для довільного однорідного анізотропного середовища не комутують між собою, представлення поляризаційних властивостей середовищ на основі полярної моделі, як і у випадку узагальненої моделі, є неоднозначним. Таким чином, параметри анізотропії довільного однорідного анізотропного середовища в рамках полярної моделі є деякими ефективними величинами і мають чіткий фізичний зміст лише у випадку присутності в середовищі лише фазової або лише амплітудної анізотропії.

### РОЗДІЛ 3.

## РОЗВ'ЯЗОК СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПОЛЯРИМЕТРІЇ В РАМКАХ ПОЛЯРНОЇ МОДЕЛІ

Важливою характеристикою будь-якого оптично анізотропного недеполяризуючого середовища є власні хвилі [3,4]. Особливістю таких хвиль є те, що їх стан поляризації не змінюється при поширенні в даному середовищі. Далі в тексті, замість терміну - «стани поляризації власних хвиль», будемо для скорочення використовувати термін - «власні поляризації». Велика кількість анізотропних середовищ характеризується ортогональними власними поляризаціями [41]. Однак, як було показано в рамках однорідної та узагальненої моделі, для ортогональності власних поляризацій у середовищі має існувати певне співвідношення між видами та параметрами анізотропії [52,55]. Якщо ці співвідношення не виконуються, власні поляризації є неортогональними [42,43]. У цьому розділі питання ортогональності та неортогональності власних поляризацій анізотропних середовищ розглядаються у термінах полярної моделі.

### 3.1. Умови ортогональності власних поляризацій середовищ у термінах полярної моделі

Знайдемо, які співвідношення між параметрами полярних форм полярної моделі анізотропних середовищ мають виконуватись, щоб їх власні поляризації були ортогональними. У загальному випадку необхідною умовою ортогональності власних поляризацій у середовищі, що описується деякою матрицею Мюллера  $\mathbf{M}$ , є рівність елементів першого стовпця й рядка матриці [55]:

$$m_{12} = m_{21}; m_{13} = m_{31}; m_{14} = m_{41}; \quad (3.1)$$

З огляду на (3.1), застосовуючи умови (2.33) до правої та лівої полярної форми (1.22), умова ортогональності власних поляризацій для довільного однорідного анізотропного середовища у термінах параметрів полярної моделі має вигляд:

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm d_1 \\ a_2 &= \pm d_2 \\ a_3 &= \pm d_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

З (3.2) випливає, що для забезпечення ортогональності власних поляризацій вектори Стокса власних поляризацій унітарної полярної форми повинні збігатися з відповідними векторами ермітової полярної форми полярної моделі:

$$\mathbf{S}_{1,2e} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Слід зазначити, що отримана умова (3.3) є однаковою для лівої та правої полярних форм. Також однаковою для обох полярних форм є матриця Мюллера, що описує середовище з ортогональними власними поляризаціями:

$$\mathbf{M}_{Eigen} = \begin{bmatrix} 1 & D_H & D_{45} & D_R \\ D_H & \frac{D_H^2 + A(D_{45}^2 + D_R^2)C}{D^2} & \frac{D_{45}D_H + A(DD_R S - D_{45}D_H C)}{D^2} & \frac{D_R D_H - A(DD_{45} S + D_R D_H C)}{D^2} \\ D_{45} & \frac{D_{45}D_H - A(DD_R S + D_{45}D_H C)}{D^2} & \frac{D_{45}^2 + A(D_{45}^2 + D_R^2)C}{D^2} & \frac{D_R D_{45} + A(DD_H S - D_R D_{45} C)}{D^2} \\ D_R & \frac{D_R D_H + A(DD_{45} S - D_R D_H C)}{D^2} & \frac{D_R D_{45} - A(DD_H S + D_R D_{45} C)}{D^2} & \frac{D_R^2 + A(D_{45}^2 + D_R^2)C}{D^2} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

де  $C = \cos(R)$ ,  $S = \sin(R)$ .

Отже, у випадку ортогональних власних поляризацій представлення поляризаційних властивостей середовищ на основі полярної моделі є однозначним з позиції оберненої задачі поляриметрії (розрахунку параметрів анізотропії середовища на основі вимірної матриці Мюллера) [56].

Підставляючи умову ортогональності (3.2) у рівняння (2.7), (2.9), отримуємо, що азимути орієнтації осей лінійного двопроменезаломлення та дихроїзму мають співпадати [103]:

$$\alpha = \theta . \quad (3.5)$$

Отриманий висновок аналогічний результату для однорідної моделі [52]. Проте, як впливає з аналізу моделі на основі узагальненої теореми еквівалентності [55], паралельність (ортогональність) осей лінійних дихроїзму і двопроменезаломлення не є необхідною умовою ортогональності власних поляризацій середовища.

### 3.2. Вироджена анізотропія в рамках полярної моделі

Одним з цікавих випадків складної анізотропії, що реалізується в середовищах, які характеризується декількома видами анізотропії одночасно, є вироджена анізотропія. Це випадок, коли власні числа ( $V_{e1} = V_{e2}$ ) та власні поляризації ( $\chi_{e1} = \chi_{e2}$ ) в середовищі співпадають. Тобто падаюче на середовище випромінювання збуджує у ньому власні хвилі з однаковою поляризацією. Аналіз характеристик виродженої анізотропії в термінах узагальненої та однорідної моделі був виконаний в [51] і [55]. У цій роботі досліджена вироджена анізотропія в рамках полярної моделі. Для реалізації виродженої анізотропії в середовищі має виконуватись умова [7]:

$$(T_{22} - T_{11})^2 + 4T_{12}T_{21} = 0 , \quad (3.6)$$

де  $T_{ij}$  - елементи матриці Джонса середовища.

Застосуємо співвідношення (3.6) до матриці Джонса для унітарної і ермітової полярних форми [50]. Таким чином, отримуємо умови в термінах полярної моделі, за виконання яких довільне однорідне середовище характеризується виродженою анізотропією:

$$\left(2C_1C_3 + 2iC_2C_4(R_H D_H + R_{45}D_{45} + R_C D_C)\right)^2 - 4(C_1^2 + C_2^2 R^2)(C_3^2 - C_4^2 D^2) = 0, \quad (3.7)$$

де

$$C_1 = \cos\left(\frac{R}{2}\right), C_2 = \frac{\sin\left(\frac{R}{2}\right)}{R}, C_3 = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right), C_4 = \frac{\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{D}, \alpha = \operatorname{arctanh}(D). \quad (3.8)$$

Слід зазначити, що отримані умови (3.7) є однаковими для правої та лівої полярної форми у випадку виродженої анізотропії.

При цьому співвідношення для власних чисел:

$$V_{e1} = V_{e2} = C_1C_3 + iC_2C_4(R_H D_H + R_{45}D_{45} + R_C D_C), \quad (3.9)$$

яке було отримане на основі відомого виразу  $V_{1,2} = \frac{1}{2}\left(T_{22} + T_{11} \pm \sqrt{(T_{22} - T_{11})^2 + 4T_{12}T_{21}}\right)$  [7], також є однаковим для правої та лівої полярних форм у такому випадку.

Водночас, умова виродженості анізотропії (3.7) для правої та лівої полярної форми реалізується за різних власних поляризацій, що можна розрахувати за співвідношеннями:

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{T_{22} - T_{11} \pm \sqrt{(T_{22} - T_{11})^2 + 4T_{12}T_{21}}}{T_{21}}. \quad (3.10)$$

Зокрема, для правої полярної форми це співвідношення набуває вигляду:

$$\chi_{e1} = \chi_{e2} = \frac{C_2C_3R_H - iC_4(C_1D_H - C_2D_C R_{45} + C_2D_{45}R_C)}{C_1C_4(D_C + iD_{45}) - C_2(C_3 - C_4D_H)(R_{45} - iR_C) - C_2C_4R_H(D_{45} - iD_C)}, \quad (3.11)$$

для лівої полярної форми відповідно:

$$\chi_{e1} = \chi_{e2} = \frac{C_2 C_3 R_H - i C_4 (C_1 D_H + C_2 D_C R_{45} - C_2 D_{45} R_C)}{C_1 C_4 (D_C + i D_{45}) - C_2 (C_3 + C_4 D_H) (R_{45} - i R_C) + C_2 C_4 R_H (D_{45} - i D_C)}. \quad (3.12)$$

На Рис.3.1 продемонстровано приклад вигляду еліпсів виродженої власної поляризації для анізотропного середовища при описі його а) правою полярною формою та б) лівою полярною формою, для яких виконується умова (3.7).

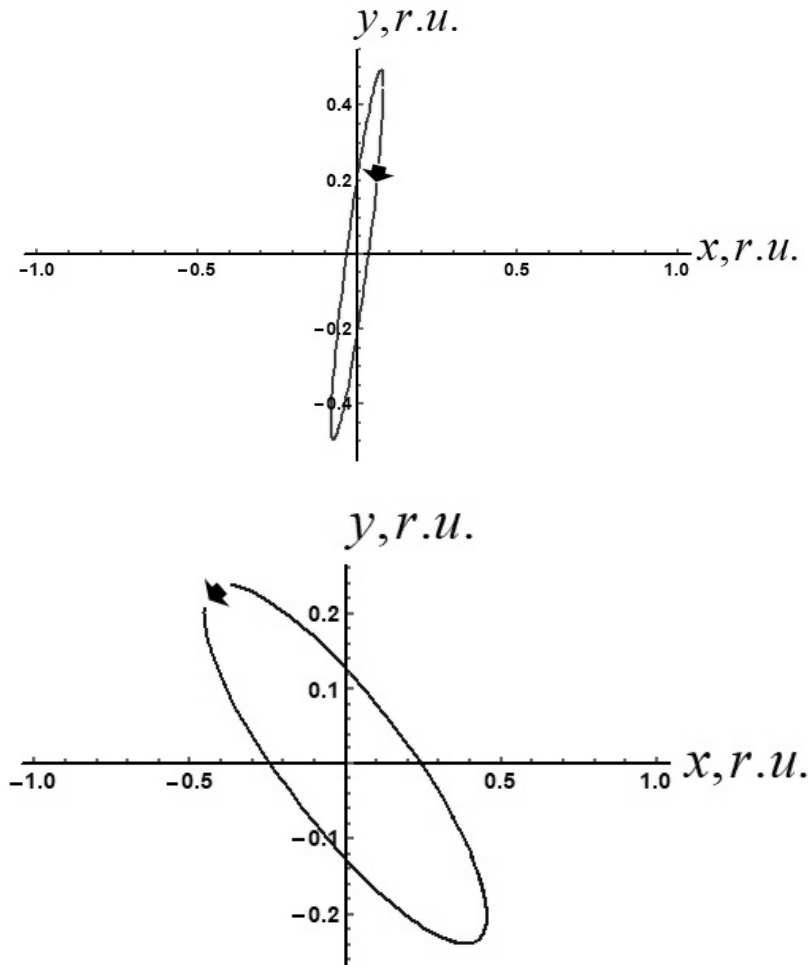


Рис.3.1. Еліпси власної поляризації для правої а)  $\mathbf{T}_R \mathbf{T}_D$  і лівої б)  $\mathbf{T}_D \mathbf{T}_R$  полярних форм середовища з виродженою анізотропією при  $R_{45} = 15^\circ$ ,  $R_C = 12^\circ$ ,  $D_{45} = 0.3$ ,  $D_C = 0$ .

Як можна бачити з Рис.3.1, у цьому випадку власна поляризація в правій і лівій полярній формі може відрізнятися азимутом, кутом еліптичності й напрямком обертання еліпса поляризації [101].

### 3.3. Дослідження поляризаційних властивостей середовищ зі складною анізотропією

Як показано в роботі [51,55], для середовищ зі складною анізотропією, крім випадків ортогональних власних поляризацій та виродженої анізотропії, також характерними є випадки неермітового та невластного дихроїзму [55]. Неермітовий дихроїзм виражається у тому, що дві власні хвилі розповсюджуються в середовищі з різними коефіцієнтами поглинання, тобто власні числа матриці Джонса середовища – різні амплітудні множники. При невластному дихроїзмі дві власні хвилі мають різну фазову швидкість, проте характеризуються однаковим поглинанням, а хвилі з іншими поляризаціями розповсюджуються з однаковою фазовою швидкістю, але різним поглинанням. Неермітовий та невластний дихроїзм також характеризуються неортогональними власними поляризаціями, а отже, у рамках полярної моделі, можуть бути реалізовані для трьох класів середовищ з двома видами анізотропії: середовище з лінійною амплітудною та циркулярною фазовою анізотропією, середовище з лінійною фазовою та циркулярною амплітудною анізотропією, середовище з лінійною фазовою та амплітудною анізотропією.

Для аналізу складної анізотропії в рамках полярної моделі найбільш актуальним в цьому контексті, є клас середовищ з лінійною амплітудною та циркулярною фазовою анізотропією. У рамках мультиплікативного підходу цей клас середовищ описується другою теоремою еквівалентності Джонса [47].

Для аналізу анізотропії таких середовищ зручним інструментом є дослідження залежності модуля відношення власних чисел  $|V_1/V_2|$  від параметрів анізотропії середовища [51,55]. Щоб розрахувати відношення власних чисел можна застосувати рівняння (3.9) до обох варіантів полярної моделі (1.22). Зокрема, для даного класу середовищ з урахуванням умов (3.6)-(3.8), при:  $D_C = R_H = 0$ , отриманий результат представлений на Рис.3.2.

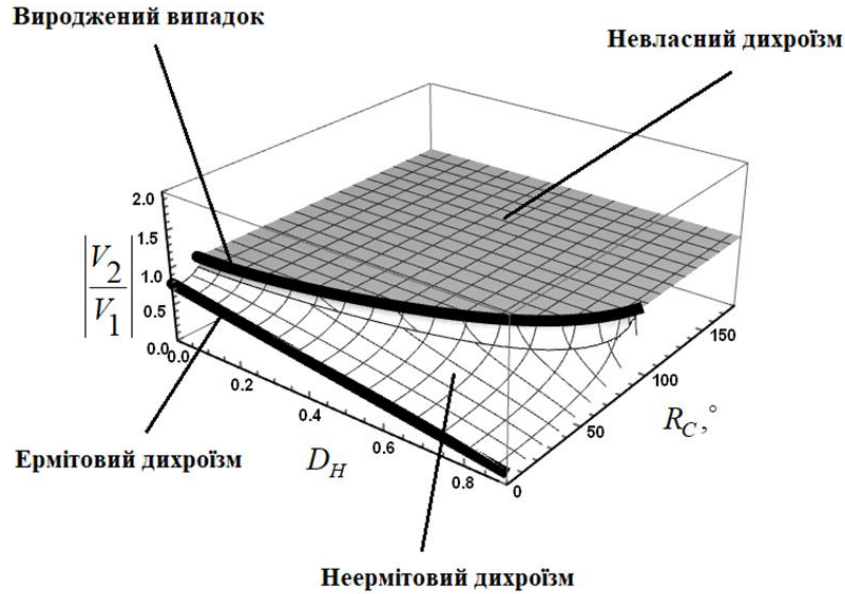


Рис.3.2. Залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотропії  $R_C$  і  $D_H$  при  $D_{45}=0.3$  для середовища з циркулярною фазовою і лінійною амплітудною анізотропією ( $D_C = R_H = R_{45} = 0$ ) у рамках полярної моделі.

Як можна бачити з Рис.3.2, у цьому класі середовищ реалізуються три комплексних види анізотропії. Зокрема:

1) випадок неермітового дихроїзму. Матриця Джонса для опису цього класу середовищ є неермітовою, на відміну від відповідної матриці для лінійної або циркулярної амплітудної анізотропії. Неермітовий дихроїзм реалізується, коли модуль відношення власних чисел не дорівнює 1 і виконується за умови:

$$R_C < \left[ \arccos \left[ \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{1}{\sqrt{D_{45}^2 - D_H^2}} \right) \operatorname{sech} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{D_{45}^2 - D_H^2} \right) \right) \right] \right]; \quad (3.13)$$

2) випадок невластного дихроїзму, який реалізується, коли модуль відношення власних чисел дорівнює 1, і виконується за умови:

$$R_C > \left| \arccos \left[ \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{1}{\sqrt{D_{45}^2 - D_H^2}} \right) \operatorname{sech} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{D_{45}^2 - D_H^2} \right) \right) \right] \right|; \quad (3.14)$$

3) вироджений випадок, який реалізується коли модуль відношення власних чисел дорівнює 1, і виконується за умови:

$$R_C = \left| \arccos \left[ \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{1}{\sqrt{D_{45}^2 - D_H^2}} \right) \operatorname{sech} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{D_{45}^2 - D_H^2} \right) \right) \right] \right|. \quad (3.15)$$

Слід зазначити, що як Рис.3.2, так і співвідношення (3.13)-(3.15) є однаковими для обох варіантів полярної форми (1.22). Бачимо також, що геометричне місце точок на Рис.3.2., яке характеризує вироджену анізотропію, є межею між невластним і неермітовим дихроїзмом.

Аналогічно дослідимо залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотропії для середовища з лінійною фазовою та циркулярною амплітудною анізотропією, що можна отримати з урахуванням умов  $R_C = D_H = 0$ . Для цього класу середовищ отриманий результат представлений на Рис.3.3.

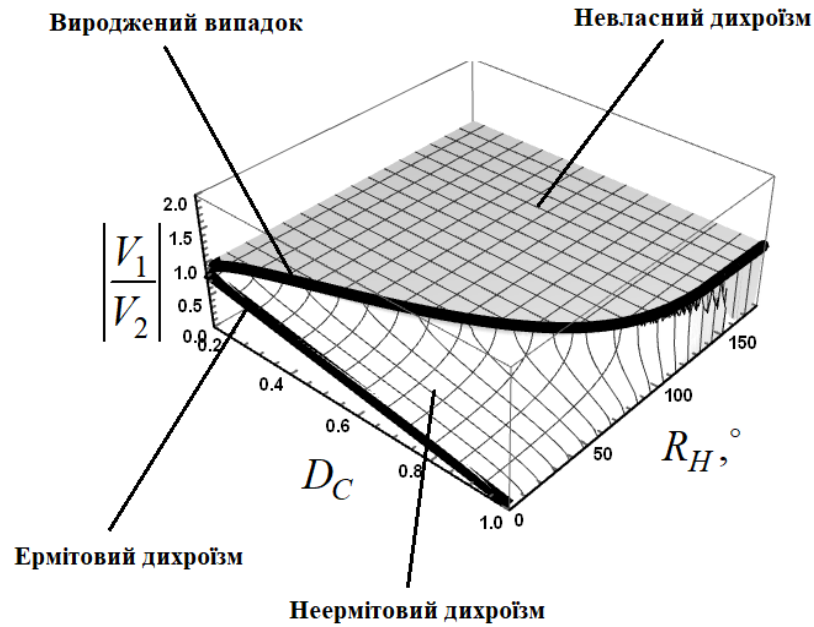


Рис.3.3. Залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотропії  $D_C$  і  $R_H$  при  $R_{45} = 10^\circ$  для середовища з циркулярною амплітудною і лінійною фазовою анізотропією ( $R_C = D_H = D_{45} = 0$ ) у рамках полярної моделі.

Як можна бачити з Рис.3.3, у досліджуваному класі середовищ також реалізуються три комплексних види анізотропії. Зокрема:

1) випадок неермітового дихроїзму, коли виконується умова:

$$R_H < \sqrt{-R_{45}^2 + \arccos \left[ \left( \frac{-4 + 3D_C^2 + 4\sqrt{1 - D_C^2}}{D_C^2} \right)^2 \right]}; \quad (3.16)$$

2) випадок невідласного дихроїзму, коли виконується умова:

$$R_H > \sqrt{-R_{45}^2 + \arccos \left[ \left( \frac{-4 + 3D_C^2 + 4\sqrt{1 - D_C^2}}{D_C^2} \right)^2 \right]}; \quad (3.17)$$

3) вироджений випадок, коли виконується умова:

$$R_H = \left| \sqrt{-R_{45}^2 + \arccos \left[ \left( \frac{-4 + 3D_C^2 + 4\sqrt{1 - D_C^2}}{D_C^2} \right)^2 \right]} \right|. \quad (3.18)$$

Слід зазначити, що як Рис.3.3, так і співвідношення (3.16)-(3.18) є однаковими для обох варіантів полярної форми (1.22). Геометричне місце точок на Рис.3.3, які характеризують вироджену анізотропію, є межею між невластним і неермітовим дихроїзмом.

Наступний клас середовищ, який ми розглядаємо, - середовища з лінійною фазовою та амплітудною анізотропією у випадку не співпадіння осей анізотропії власних поляризацій окремих видів анізотропії в рамках полярної моделі. Використаємо умови (3.9) для обох базисів полярної форми (1.22). Зокрема, для цього класу середовищ з урахуванням умов (3.6)-(3.8) при  $D_C = R_C = 0$  залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотропії середовища представлена на Рис.3.4.

Аналізуючи Рис.3.4, бачимо, що в цьому випадку власні числа не є ані фазовими, ані амплітудними множниками, а є комплексними множниками. Тому не реалізуються ані невластний, ані неермітовий дихроїзм. При цьому реалізується випадок, коли власні хвилі розповсюджуються з різними фазовими швидкостями і по-різному поглинаються.

Також цікавим є випадок виродженої анізотропії, який реалізується за умови, коли величина амплітудної анізотропії рівна нулю і середовище є ідеальним поляризатором. Також слід зазначити, що Рис.3.4 є однаковими для обох варіантів полярної форми (1.22).

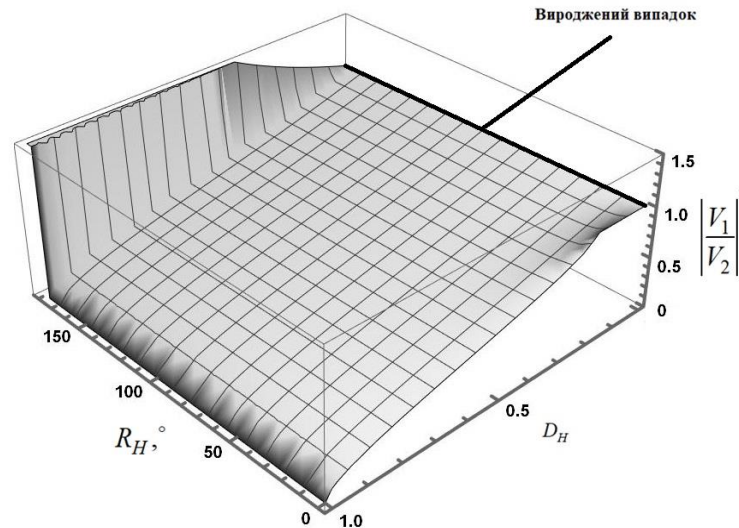


Рис. 3.4. Залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотропії  $R_H$  і  $D_H$  при  $R_{45} = 10^\circ, D_{45} = 0$  для середовища з лінійною фазовою та амплітудною анізотропією ( $R_C = D_C = 0$ ) у рамках полярної моделі.

Тепер розглянемо класи середовищ з трьома видами анізотропії. Почнемо з середовища, яке одночасно характеризується комбінацією лінійної фазової, амплітудної та циркулярної фазової анізотропії. Підставляючи елементи матриці полярної форми (1.22) з урахуванням умови  $D_C = 0$  у рівняння (3.6)-(3.9), отримуємо Рис.3.5.

Як можна бачити з Рис.3.5, у цьому класі середовищ реалізуються три комплексних види анізотропії. Зокрема:

1) випадок неермітового дихроїзму, коли виконується умова:

$$D_H < \frac{2 \left( 4 \sqrt{R_C^2 C_1 (C_2 - R_C^2 C(\sqrt{C_1}))^2} S^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{C_1} \right) - 2 R_H \sqrt{C_1} (R_C^2 + C_3 C(\sqrt{C_1})) S(\sqrt{C_1}) \right)}{19 R_C^4 + 20 R_C^2 R_H^2 + 4 R_H^4 - 4 R_C^2 C_2 C(\sqrt{C_1}) + C_3^2 C(2\sqrt{C_1})}; \quad (3.19)$$

2) випадок невласного дихроїзму, коли реалізується умова:

$$D_H > \frac{2 \left( 4 \sqrt{R_C^2 C_1 (C_2 - R_C^2 C(\sqrt{C_1}))^2} S^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{C_1} \right) - 2 R_H \sqrt{C_1} (R_C^2 + C_3 C(\sqrt{C_1})) S(\sqrt{C_1}) \right)}{19 R_C^4 + 20 R_C^2 R_H^2 + 4 R_H^4 - 4 R_C^2 C_2 C(\sqrt{C_1}) + C_3^2 C(2\sqrt{C_1})}; \quad (3.20)$$

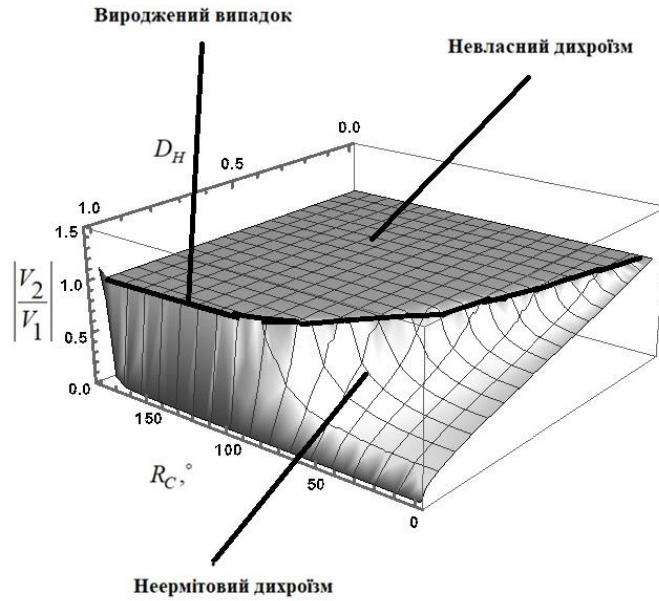


Рис.3.5. Залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотронії  $R_C$  і  $D_H$  при  $R_{45} = D_{45} = 0$ ,  $R_H = 16^\circ$  для середовища з лінійною фазовою, амплітудною та циркулярною фазовою анізотронією ( $D_C = 0$ ) у рамках полярної моделі.

3) вироджений випадок, коли виконується умова:

$$D_H = \frac{2 \left( 4 \sqrt{R_C^2 C_1 (C_2 - R_C^2 C(\sqrt{C_1}))^2} S^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{C_1} \right) - 2 R_H \sqrt{C_1} (R_C^2 + C_3 C(\sqrt{C_1})) S(\sqrt{C_1}) \right)}{19 R_C^4 + 20 R_C^2 R_H^2 + 4 R_H^4 - 4 R_C^2 C_2 C(\sqrt{C_1}) + C_3^2 C(2\sqrt{C_1})}. \quad (3.21)$$

Тут використані заміни  $C(x) = \cos(x)$ ,  $S(x) = \sin(x)$ ,  $C_1 = R_C^2 + R_H^2$ ,  $C_2 = 3R_C^2 + 2R_H^2$ ,  $C_3 = R_C^2 + 2R_H^2$ . Слід зазначити, що Рис.3.5, як і співвідношення (3.19)-(3.21), є однаковими для обох варіантів полярної форми (1.22).

Наступний клас середовищ з комбінацією лінійної фазової, амплітудної та циркулярної амплітудної анізотронії. Підставляючи елементи матриці полярної

форми (1.22) з урахуванням умови  $R_C = 0$  в рівняння (3.6)-(3.9), отримуємо залежність, зображену на Рис.3.6.

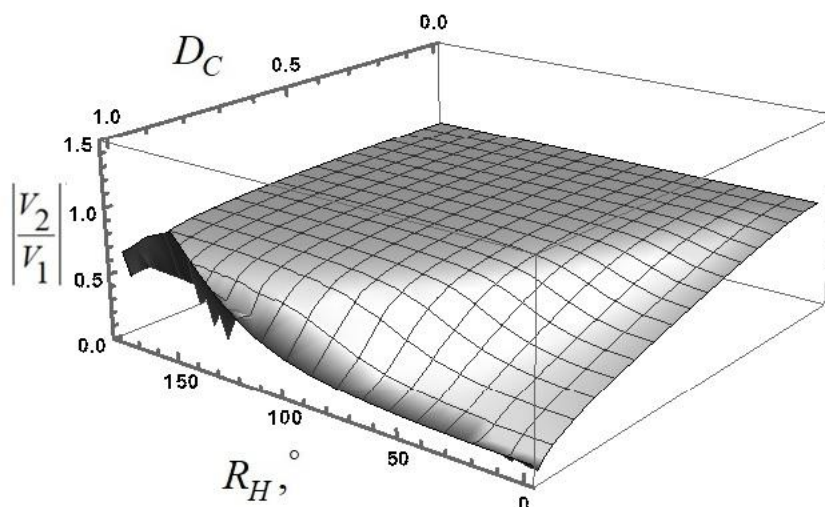


Рис.3.6. Залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотропії  $D_C$  і  $R_H$  при  $R_{45} = D_{45} = 0$ ,  $D_H = 0,2^\circ$  для середовища з лінійною фазовою та амплітудною й циркулярною амплітудною анізотропією. ( $R_C = 0$ ) у рамках полярної моделі.

Як можна бачити з Рис.3.6, у цьому класі середовищ, як і у середовищі з лінійними видами анізотропії, не реалізуються три комплексних види анізотропії: неермітовий дихроїзм, невласний дихроїзм і вироджений випадок (відношення власних чисел не досягає значення одиниці за жодних ненульових значень параметрів анізотропії). Слід зазначити, що Рис.3.6. є однаковими для обох базисів полярної форми (1.22).

Далі розглянемо середовища з комбінацією циркулярної фазової амплітудної та лінійної фазової анізотропії. Підстановкою елементів матриці полярної форми (1.22) з урахуванням умови  $D_H = 0$  в рівняння (3.6)-(3.9) була отримана залежність на Рис.3.7.

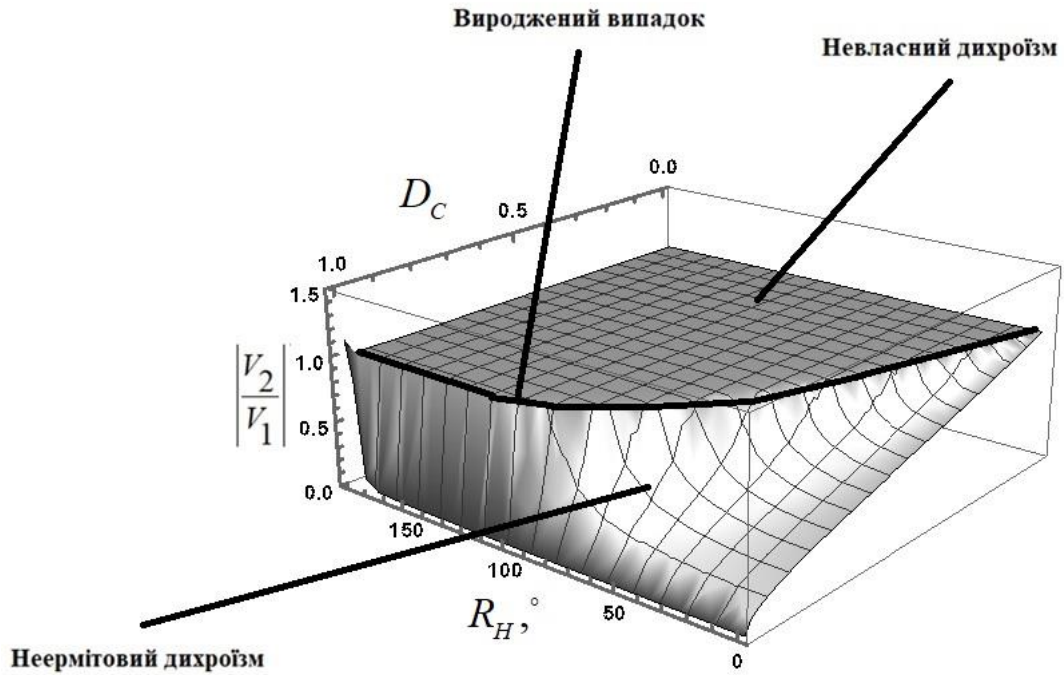


Рис.3.7. Залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотронії  $D_C$  і  $R_H$  при  $R_{45} = D_{45} = 0$ ,  $R_C = 16^\circ$  для середовища з циркулярною фазовою, амплітудною та лінійною фазовою анізотронією ( $D_H = 0$ ) у рамках полярної моделі.

Як можна бачити з Рис.3.7, у цьому класі середовищ реалізуються три комплексних види анізотронії. Зокрема:

1) випадок неермітового дихроїзму, коли виконується умова:

$$D_C < \frac{4\sqrt{R_H^2 C_1 C_2 S^2(\sqrt{C_1}/2)} - 2R_C \sqrt{C_1} (R_H^2 + (2R_C^2 + R_H^2)C(\sqrt{C_1})) S(\sqrt{C_1})}{C_2^2 - 4R_C^2 C_1 S^2(\sqrt{C_1})}; \quad (3.22)$$

2) випадок невластного дихроїзму, коли реалізується умова:

$$D_C > \frac{4\sqrt{R_H^2 C_1 C_2 S^2(\sqrt{C_1}/2)} - 2R_C \sqrt{C_1} (R_H^2 + (2R_C^2 + R_H^2)C(\sqrt{C_1})) S(\sqrt{C_1})}{C_2^2 - 4R_C^2 C_1 S^2(\sqrt{C_1})}; \quad (3.23)$$

3) вироджений випадок, коли виконується умова:

$$D_C = \frac{4\sqrt{R_H^2 C_1 C_2 S^2(\sqrt{C_1}/2)} - 2R_C \sqrt{C_1} (R_H^2 + (2R_C^2 + R_H^2)C(\sqrt{C_1})) S(\sqrt{C_1})}{C_2^2 - 4R_C^2 C_1 S^2(\sqrt{C_1})}. \quad (3.24)$$

Тут використані заміни  $C(x) = \cos(x)$ ,  $S(x) = \sin(x)$ ,  $C_1 = R_C^2 + R_H^2$ ,  $C_2 = 2R_C^2 + 3R_H^2 - R_H^2 C(\sqrt{C_1})$ . Відзначимо, що Рис.3.7, як і співвідношення (3.22)-(3.24) є однаковими для обох базисів полярної форми (1.22).

Останній клас середовищ з трьома видами анізотропії – це середовища з комбінацією циркулярної фазової, амплітудної та лінійної амплітудної анізотропії. Підстановкою елементів матриці полярної форми (1.22) з урахуванням умови  $R_H = 0$  в рівняння (3.6)-(3.9) була отримана залежність на Рис.3.8.

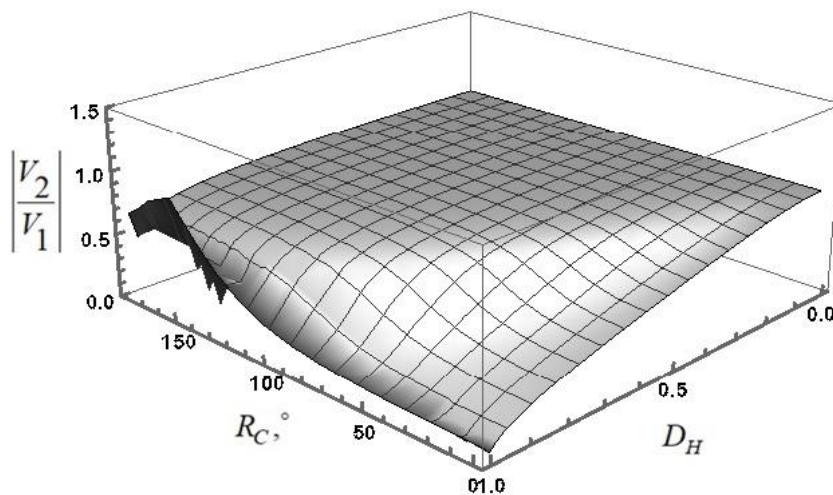


Рис.3.8. Залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотропії  $R_C$  і  $D_H$  при  $R_{45} = D_{45} = 0$ ,  $D_C = 0.2$  для середовища з циркулярною фазовою, амплітудною та лінійною амплітудною анізотропією ( $R_H = 0$ ) у рамках полярної моделі.

Як можна бачити з Рис.3.8, у цьому класі середовищ, як і у класі середовищ із лінійними видами анізотропії та класі середовищ із комбінацією лінійної фазової амплітудної і циркулярної амплітудної анізотропії, не реалізуються три комплексних типи анізотропії: неермітовий дихроїзм, невластний дихроїзм і вироджений випадок (відношення власних чисел не досягає значення одиниці за жодних ненульових значень параметрів анізотропії). Слід зазначити, що Рис.3.8 є однаковим для обох базисів полярної форми (1.22).

Для узагальнення отриманих результатів розглянемо випадок довільного однорідного анізотропного середовища, яке одночасно характеризується комбінацією усіх чотирьох базових видів анізотропії. У цьому випадку елементи матриці полярної форми (1.22) були підставлені в рівняння (3.6)-(3.9). Результуючу залежність наведено на Рис.3.9.

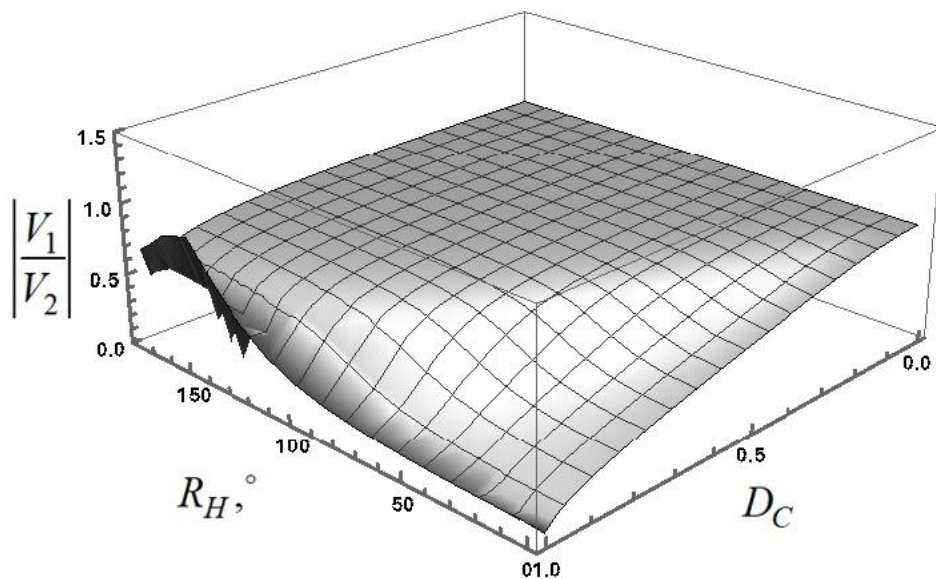


Рис.3.9. Залежність модуля відношення власних чисел від параметрів анізотропії  $R_H$  і  $D_C$  при  $R_{45} = D_{45} = 0$ ,  $D_H = 0.2$ ,  $R_C = 16^\circ$  для довільного однорідного анізотропного середовища у рамках полярної моделі.

Як можна бачити з Рис.3.9, у випадку середовища, яке одночасно характеризується чотирма базовими видами анізотропії, як і у класі середовищ із

лінійними видами анізотропії, класі середовищ із комбінацією лінійної фазової амплітудної і циркулярної амплітудної анізотропії і класі середовищ із комбінацією циркулярної фазової, амплітудної і лінійної фазової анізотропії, не реалізуються три комплексних види анізотропії: неермітовий дихроїзм, невластний дихроїзм і вироджений випадок (відношення власних чисел не досягає значення одиниці за жодних ненульових значень параметрів анізотропії). Слід зазначити, що Рис.3.9 є однаковими для обох базисів полярної форми (1.22).

Таким чином, можна бачити, що у середовищах, які характеризуються декількома видами анізотропії, у рамках полярної моделі випадки виродженої анізотропії, невластного дихроїзму і неермітового дихроїзму реалізуються лише для певних класів середовищ [102,105].

### **3.4. Геометричний зміст параметра неоднорідності для різних класів анізотропних середовищ**

Для геометричної інтерпретації результату, отриманого в попередньому підрозділі для полярної моделі та порівняння його із результатом в рамках однорідного підходу та підходу на основі узагальненої теореми еквівалентності використаємо вираз для параметра неоднорідності (1.35) та вираз для кута між власними поляризаціями (1.36).

Спершу скористаємось полярною моделлю і підставимо елементи відповідної матриці Джонса (1.22)-(1.24) в рівняння (1.35), (1.36). У результаті зможемо отримати залежності параметра неоднорідності  $\eta$  від параметрів полярної моделі в кожному з розглянутих раніше випадків анізотропії середовища. При використанні однорідної [52] та узагальненої [5] моделі будемо підставляти (1.9), (1.11), (1.13), (1.15) у рівняння (1.36). Оскільки інтерпретація виразів для параметра неоднорідності та кута між власними поляризаціями є якісно еквівалентною для обох полярних форм (1.22), далі наведено результати лише для правої полярної форми. Зокрема:

1) Середовище з комбінацією лінійної амплітудної та циркулярної фазової анізотронії.

На Рис.3.10 представлено результати, отримані в представленні середовища полярною моделлю.

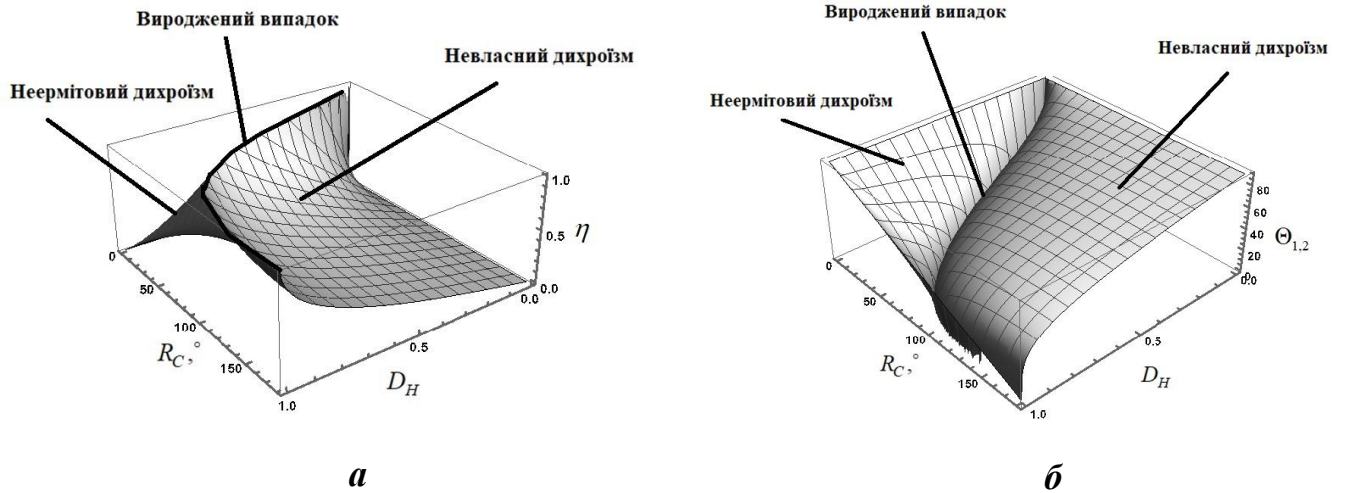


Рис.3.10. Залежність (а) параметра неоднорідності, що описується рівнянням (3.25) і (б) кута між власними поляризаціями від параметрів анізотронії для класу середовищ з лінійною амплітудною та циркулярною фазовою анізотронією при  $D_C = R_H = R_{45} = D_{45} = 0$  у рамках полярної моделі.

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{2L_1}{L_1 - 4 \left| \cos\left(\frac{R_C}{2}\right) \cosh\left(\frac{\text{Arc Tanh}(D_H)}{2}\right) \right|^2 + \frac{4}{\sqrt{1-D_H^2}}}}; \quad (3.25)$$

де використано позначення:  $L_1 = \left| \frac{1}{\sqrt{1-D_H^2}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-D_H^2}}\right) \cos(R_C) - 3 \right|$ .

Аналізуючи Рис.3.10, бачимо, що стан, коли параметр неоднорідності  $\eta = 1$ , а кут між власними поляризаціями  $\Theta_{1,2} = 0$ , відповідає виродженій анізотронії, яка реалізується за умови (3.15), тоді як стан  $\eta = 0$ ,  $\Theta_{1,2} = 90^\circ$  відповідає ортогональним

власним поляризаціям, які реалізуються в цьому класі середовищ за відсутності одного з видів анізотропії. Усі проміжні значення параметрів  $0 < \eta < 1$  та  $0 < \Theta_{1,2} < 90^\circ$  стосуються випадків неермітового дихроїзму (3.13) і невластного дихроїзму (3.14).

Для порівняння, на Рис.3.11 наведено графік залежності, аналогічний 3.10а, для даного класу середовищ в рамках однорідної та узагальненої моделей.

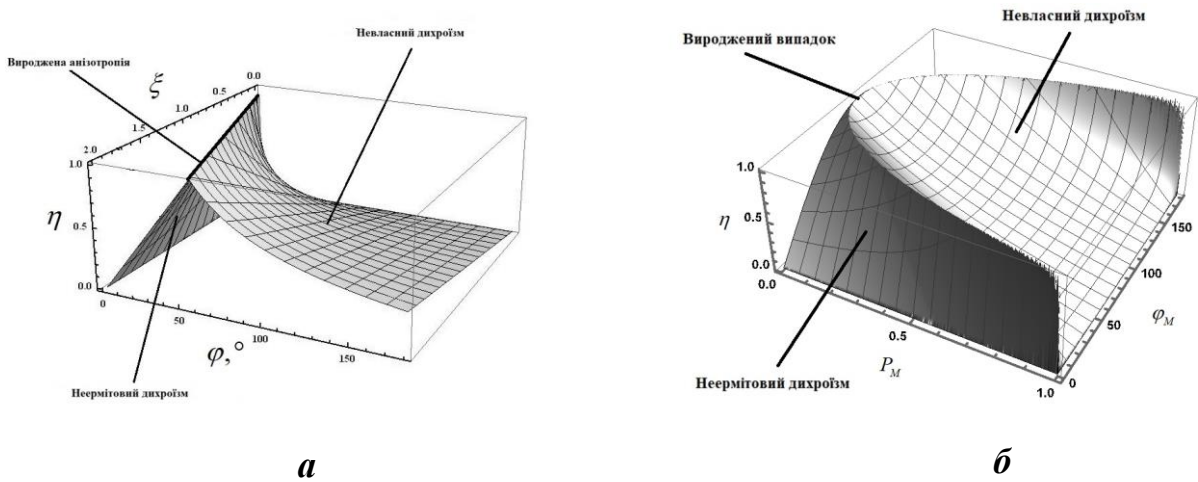


Рис.3.11. Залежність параметра неоднорідності від параметрів анізотропії для класу середовищ з лінійною амплітудною та циркулярною фазовою анізотропією: а) у рамках однорідного підходу при  $\theta = 12^\circ$ , що описується співвідношенням (3.25), б) у рамках узагальненої теореми еквівалентності при  $\theta_M = 12^\circ$ , що описується співвідношенням (3.26).

$$\eta = \sqrt{\frac{B(Csh(\sqrt{A})-1) - 2\sqrt{A^2}Csh(\sqrt{A}) + |A|(Csh(\sqrt{A})+1)}{B(Csh(\sqrt{A})-1) - 2\sqrt{A^2}C(\sqrt{A}) + |A|(Csh(\sqrt{A})+1)}}; \quad (3.26)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2(2+2P^2 - |(1+P)C(\varphi)|^2) - |1+P(P-6) + (1+P)^2 C(2\varphi)|}{2(2+2P^2 - |(1+P)C(\varphi)|^2) + |1+P(P-6) + (1+P)^2 C(2\varphi)|}}; \quad (3.27)$$

де  $C(x) = \cos(x)$ ,  $S(x) = \sin(x)$ ,  $Csh(x) = \text{Cosh}(x)$ ,  $A = \xi_0^2 - 4\varphi_0^2$ ,  $B = \xi_0^2 + \varphi_0^2$ .

Аналізуючи Рис.3.11, можна бачити, що в цьому класі середовищ три види складної анізотропії реалізуються в рамках усіх трьох моделей, однак при різних умовах на параметри анізотропії. Для випадку представлення в рамках однорідної (Рис.3.11а) і узагальненої моделі (Рис.3.11б) стан  $\eta = 0$  (ортогональні власні поляризації) реалізується при відсутності одного з видів анізотропії.

Для перевірки отриманої теоретичної залежності (3.26) було використано результати експериментальних досліджень з [51]. Зокрема, у [51] наведені експериментальні матриці Мюллера, виміряні для синтезованого середовища зі змінними значеннями  $P$  лінійної амплітудної анізотропії та змінними значеннями кута повороту  $\varphi$  циркулярної фазової анізотропії. Дане середовище було утворене послідовністю зі стосу нахилених кварцових пластин, кут нахилу яких дозволяв змінювати величину лінійної амплітудної анізотропії  $P$ , та набору кювет з розчинами цукрози різної концентрації, що дозволяли отримувати різні значення  $\varphi$ . Таке середовище органічно представляється у рамках мультиплікативної моделі, що розглядається. Застосувавши вираз (3.26) до експериментальних матриць [51], отриманих для різних значень параметрів анізотропії  $P$  та  $\varphi$ , ми отримали ряд експериментальних значень параметра неоднорідності  $\eta$ , які співвідносяться з відповідною теоретичною залежністю (3.26) так, як це відображено на графіках Рис.3.12.

На Рис.3.12 розмір довірчих інтервалів для експериментальних точок відповідають розміру символів. Як можна бачити на Рис.3.12, експериментальні значення параметра неоднорідності  $\eta$  добре якісно та кількісно узгоджуються з отриманою теоретичною залежністю (3.26), що є підтвердженням її вірності.

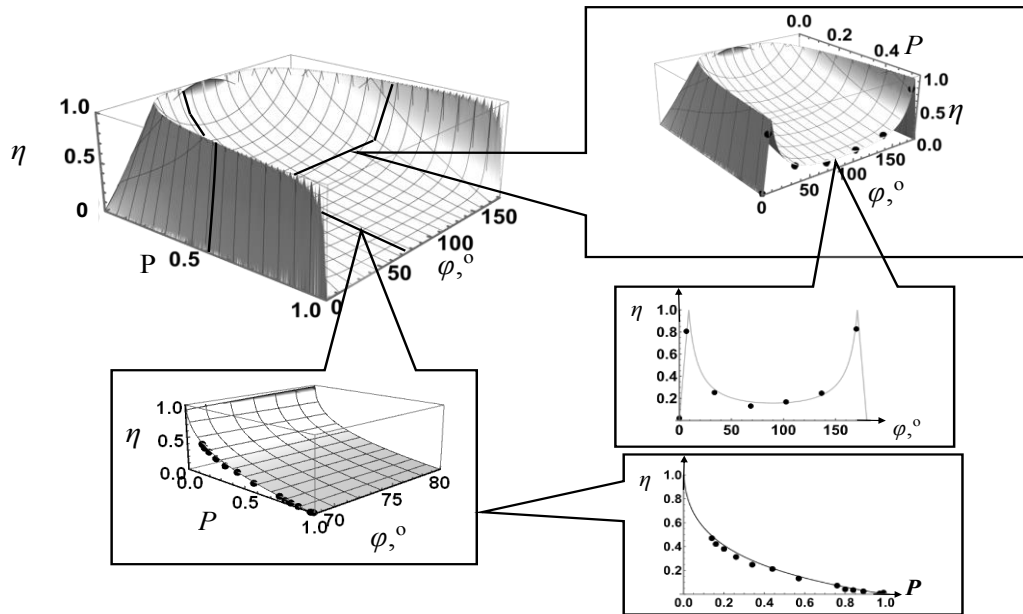


Рис.3.12. Співвідношення між експериментальною (зображено точками) та теоретичною (зображено суцільними поверхнями та кривими) залежністю параметра неоднорідності  $\eta$  від значень параметрів анізотропії  $P$  та  $\varphi$  для середовища з лінійною амплітудною та циркулярною фазовою анізотропією при  $\theta_M = 12^\circ$ .

2) Середовище з комбінацією лінійною фазової та циркулярної амплітудної анізотропії.

Результати, отримані для цього класу середовищ в рамках полярної моделі, представлені на Рис.3.13.

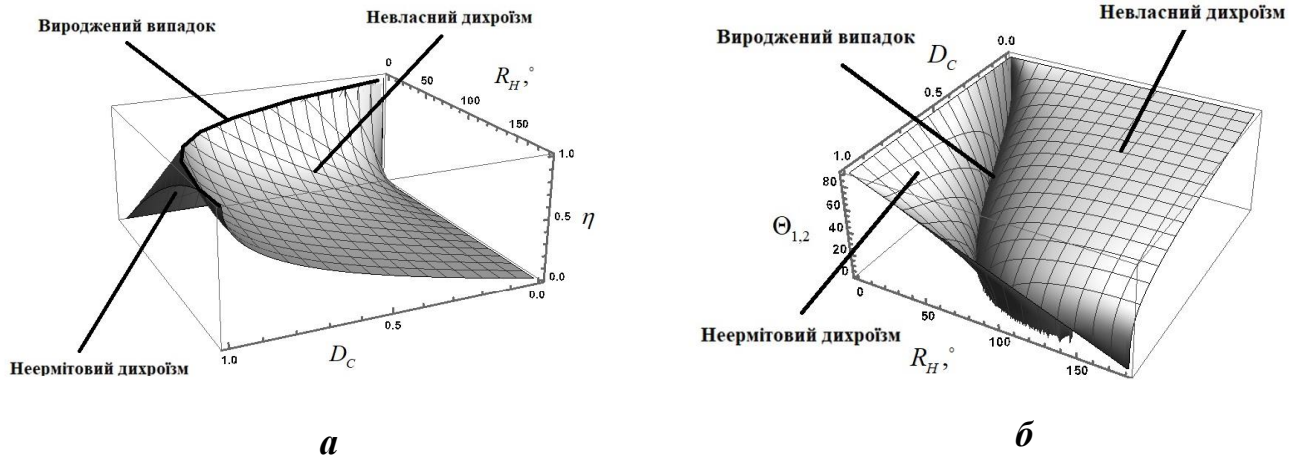


Рис.3.13. Залежність параметра неоднорідності (а) і кута між власними поляризаціями (б) від параметрів анізотропії для класу середовищ з лінійною фазовою та циркулярною амплітудною анізотропією при  $R_C = D_H = R_{45} = D_{45} = 0$  в термінах полярної моделі.

Проаналізувавши Рис.3.13, маємо, що стан, коли параметр неоднорідності  $\eta = 1$ , а кут між власними поляризаціями  $\Theta_{1,2} = 0$ , відповідає виродженій анізотропії, яка реалізується за умови (3.18), тоді як стан  $\eta = 0$ ,  $\Theta_{1,2} = 90^\circ$  відповідає ортогональним власним поляризаціям, які реалізуються в цьому класі середовищ за відсутності одного з видів анізотропії. Усі проміжні значення параметрів  $0 < \eta < 1$  та  $0 < \Theta_{1,2} < 90^\circ$  стосуються випадків неермітового дихроїзму (3.16) і невластного (3.17) дихроїзму.

Для порівняння на Рис.3.14 представлено графік, аналогічний 3.12а для цього класу середовищ в рамках однорідної та узагальненої моделей.

Аналізуючи Рис.3.14, можна бачити, що в згаданому класі середовищ три види складної анізотропії реалізуються в рамках усіх трьох підходів, однак при різних умовах щодо параметрів анізотропії. Для випадку представлення в рамках однорідної моделі Рис.3.14а та моделі на основі узагальненої теореми еквівалентності Рис.3.14б умова  $\eta = 0$  (ортогональні власні поляризації) реалізується при відсутності одного з видів анізотропії.

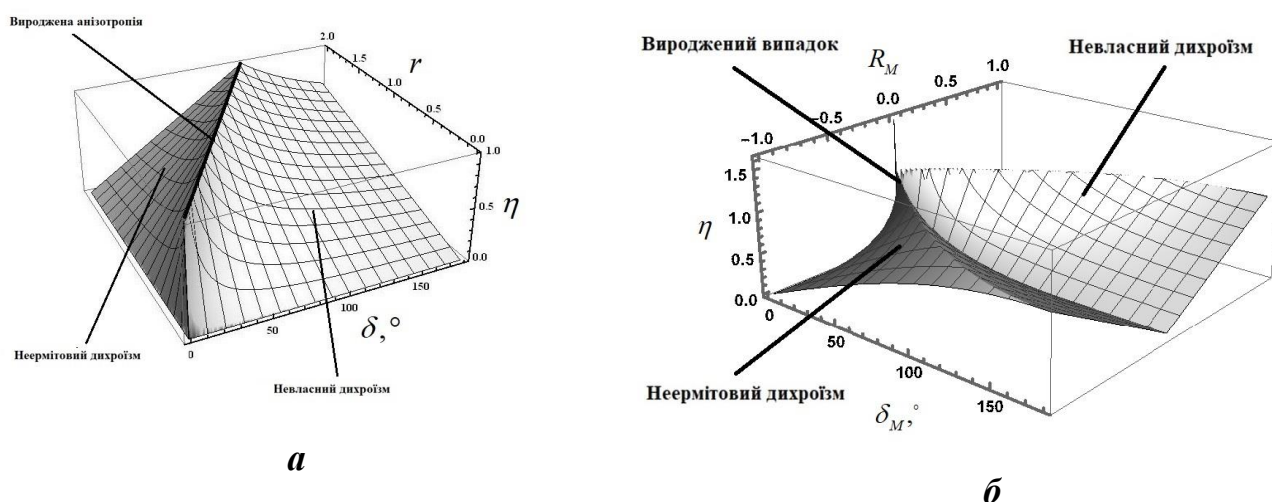


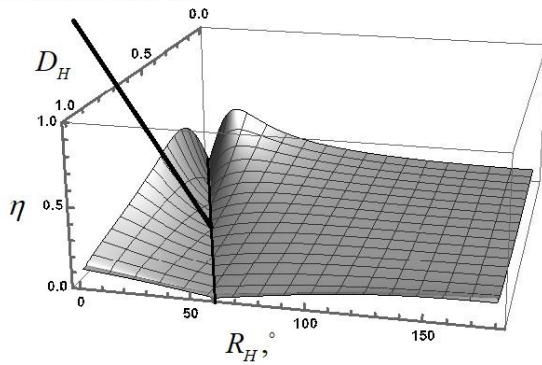
Рис.3.14. Залежність параметра неоднорідності від параметрів анізотропії для класу середовищ з лінійною фазовою та циркулярною амплітудною анізотропією: а) в рамках однорідної моделі при  $\alpha = 12^\circ$ , б) в рамках узагальненої моделі при  $\alpha_M = 12^\circ$ .

### 3) Середовище з комбінацією лінійною фазової та амплітудної анізотропії.

Результати, отримані для даного класу середовищ в рамках теореми полярного розкладу, представлені на Рис.3.15.

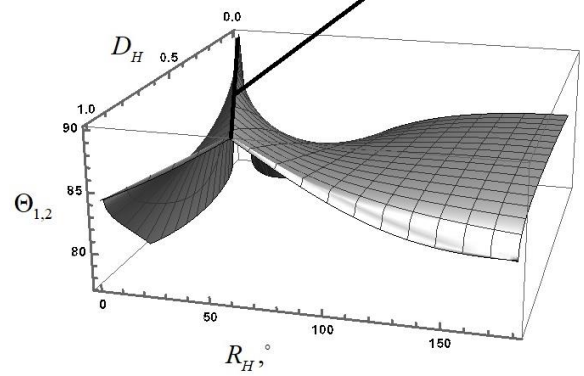
Аналізуючи Рис.3.15, маємо, що для даного класу середовищ параметр неоднорідності не досягає значення 1 ( $\eta \neq 1$ ), а кут між власними поляризаціями не досягає значення 0 ( $\Theta_{1,2} \neq 0$ ) за жодних значень параметрів анізотропії. Отже, як і у випадку представленому на Рис.3.4, у цьому класі середовищ не реалізуються три складних типи анізотропії. Також, як можна бачити, стан  $\eta = 0$ ,  $\Theta_{1,2} = 90^\circ$ , що відповідає ортогональним власним поляризаціям, у цьому класі середовищ може реалізуватись у випадку наявності обох видів анізотропії – це випадок співпадіння азимутів власних поляризацій матриць Джонса окремих видів анізотропії (єрмітової і унітарної). Усі інші значення параметрів  $0 < \eta$ ,  $\Theta_{1,2} < 90^\circ$  належать до випадків, коли в середовищі власні хвилі розповсюджуються із різними швидкостями і по-різному поглинаються одночасно.

Ортогональні поляризації



**a**

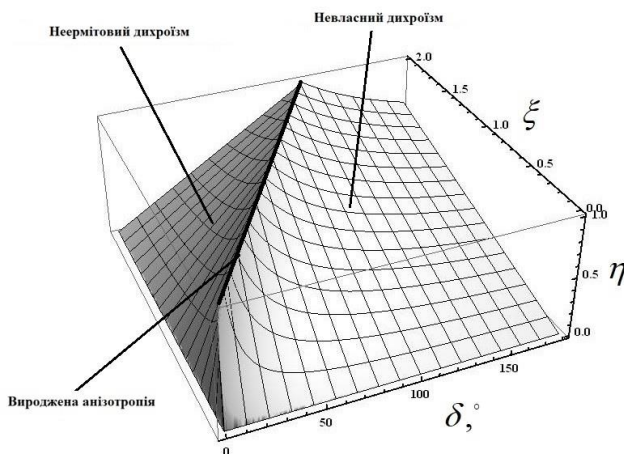
Ортогональні поляризації



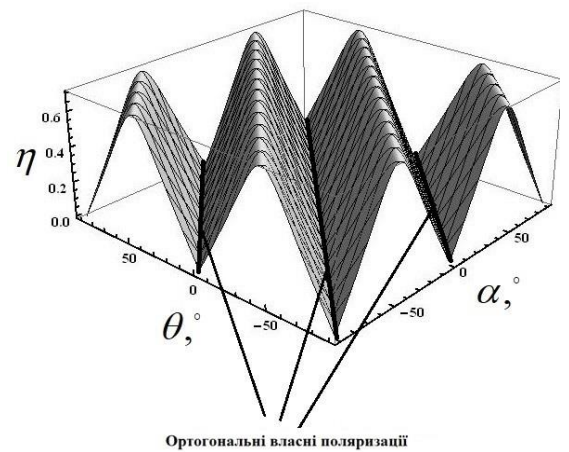
**б**

Рис.3.15. Залежність параметра неоднорідності (а) і кута між власними поляризаціями (б) від параметрів анізотронії для класу середовищ з лінійною фазовою та амплітудною анізотронією при  $D_C = R_C = 0, R_{45} = 12^\circ, D_{45} = 0.2$  в рамках полярної моделі.

Для порівняння на Рис.3.16 представлені залежності, аналогічні представленим на Рис.3.15а для даного класу середовищ у рамках однорідної та узагальненої моделей.



**a**



**б**

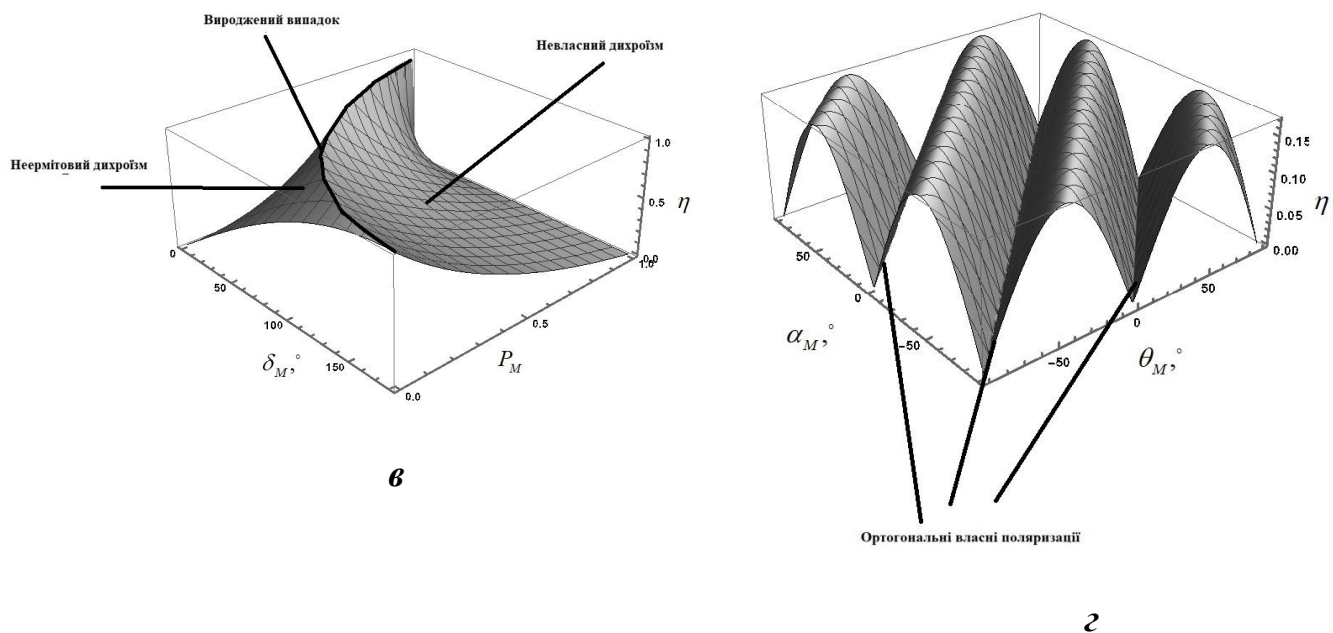


Рис.3.16. Залежність параметра неоднорідності від параметрів анізотронії для класу середовищ з лінійною фазовою та амплітудною анізотронією: а) у рамках однорідного підходу при  $\alpha = 55^\circ, \theta = 10^\circ$ , б) у рамках однорідної моделі при  $\alpha = \theta = 10^\circ$ , в) у рамках узагальненої моделі при  $\alpha_M = 55^\circ, \theta_M = 10^\circ$ , що задається рівнянням (3.28), г) в рамках узагальненої моделі при  $\alpha_M = \theta_M = 10^\circ$ .

Аналізуючи Рис.3.16, можна бачити, що в цьому класі середовищ у випадку різних кутів орієнтації фазової та амплітудної анізотронії в рамках однорідної та узагальненої моделей реалізуються три види складної анізотронії (Рис.16а,б). (на відміну від полярної моделі, Рис.3.14а). У випадку ж, коли в даному класі середовищ однакові кути орієнтації фазової та амплітудної анізотронії, в однорідній і узагальненій моделях реалізуються ортогональні власні поляризації (Рис.16б,г), так само як і у випадку полярної моделі (Рис.3.15б).

4) Середовище з комбінацією лінійною фазовою, амплітудною та циркулярною амплітудною анізотронією.

Результати, отримані для даного класу середовищ в рамках полярної моделі, представлені на Рис.3.17.

$$\eta = \frac{K - 2\sqrt[4]{B_1} \left( 1 + e^{2\sqrt[4]{B_1} C \left( \frac{\text{Arg}(A)}{2} \right)} \right) \left( \sqrt[4]{B_1} \right)^*}{\sqrt{K - 2\sqrt[4]{B_1} \left( e^{\sqrt[4]{B_1} e^{i \left( \frac{\text{Arg}(A)}{2} \right)}} + e^{-i \left( \frac{\text{Arg}(A)}{2} \right)} \right) \left( \sqrt[4]{B_1} \right)^* \left( \sqrt[4]{B_1} \right)^*}}; \quad (3.27)$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2 \left| 4e^{-i\delta} P - \frac{1}{4} e^{-i2\delta} \left( (e^{i\delta} + 1)(P+1) - (e^{i\delta} - 1)(P-1) C^2(2(\alpha - \theta)) \right) \right|}{8(8P^2 + 1) - \left| (e^{i\delta} + 1)(P+1) - (e^{i\delta} - 1)(P-1) C^2(2(\alpha - \theta)) \right|}}}} - 1; \quad (3.28)$$

де

$$C(x) = \cos(x), K = \sqrt{B} \left( e^{\frac{\sqrt[4]{B}}{\sqrt{\text{Sign}(A)}}} + 1 \right) \left( e^{\sqrt[4]{B} \sqrt{\text{Sign}(A)}} + 1 \right) + \left( e^{\frac{\sqrt[4]{B}}{\sqrt{\text{Sign}(A)}}} - 1 \right) \left( e^{\sqrt[4]{B} \sqrt{\text{Sign}(A)}} - 1 \right) (\delta_0^2 + \xi_0^2),$$

$$A_1 = \xi_0^2 - \delta_0^2 - i \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \delta_0 \xi_0 + \xi_0^2, B_1 = \xi_0^4 - \delta_0^4 - \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1) \delta_0^2 \xi_0^2 + \xi_0^4.$$

Аналізуючи Рис.3.17, маємо, що в даному класі середовищ параметр неоднорідності не досягає значення 1 ( $\eta \neq 1$ ), а кут між власними поляризаціями не досягає значення 0 ( $\Theta_{1,2} \neq 0$ ) за жодних значень параметрів анізотропії. Отже, у цьому класі середовищ не реалізуються три складних типи анізотропії. Також, як можна бачити, випадок  $\eta = 0$ ,  $\Theta_{1,2} = 90^\circ$ , що відповідає ортогональним власним поляризаціям, у зазначеному класі середовищ не може реалізуватись за наявності усіх видів анізотропії. Усі інші значення параметрів  $0 < \eta$ ,  $\Theta_{1,2} < 90^\circ$  можуть бути віднесені до випадків, коли в середовищі власні хвилі одночасно розповсюджуються із різною швидкістю і по-різному поглинаються.

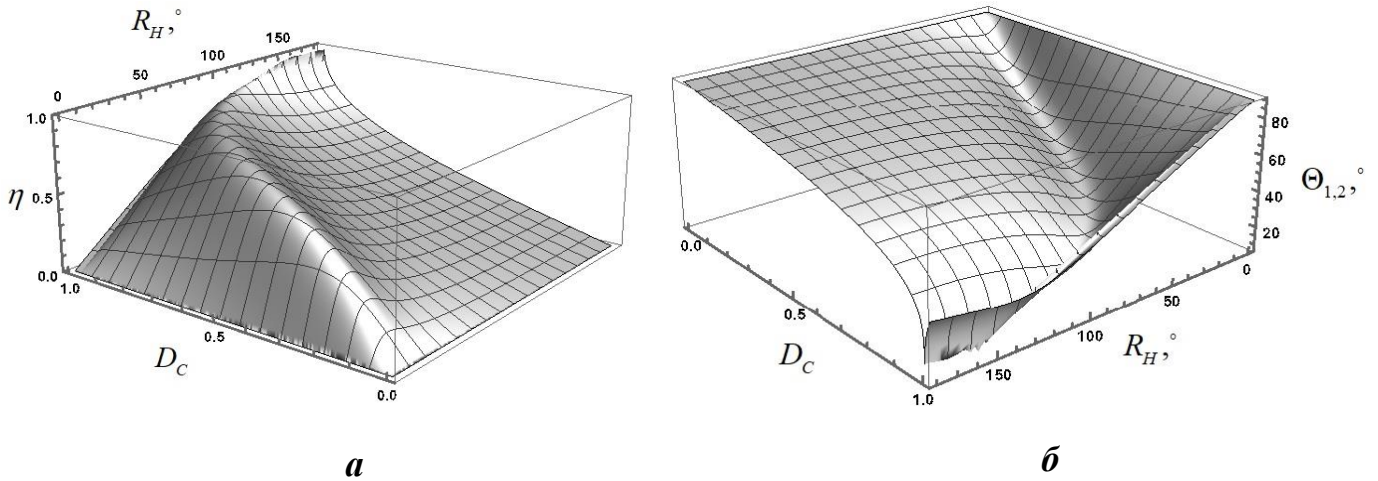


Рис.3.17. Залежність параметра неоднорідності (а) і кута між власними поляризаціями (б) від параметрів анізотропії для класу середовищ з лінійною фазовою, амплітудною та циркулярною амплітудною анізотропією при  $R_C = R_{45} = D_{45} = 0, D_H = 0.2$  в полярній моделі.

Для порівняння, на Рис.3.18 представлений графік, аналогічний 3.16а для даного класу середовищ у рамках однорідної та узагальненої моделей.

Аналізуючи Рис.3.18, можна бачити, що в цьому класі середовищ у випадку різних кутів орієнтації фазової та амплітудної анізотропії в рамках однорідної та узагальненої моделі не реалізуються три види складної анізотропії. Однак, у рамках узагальненої моделі Рис.3.18б реалізується випадок ортогональних власних поляризацій, що відповідає умовам, представленим у [54]:

$$\begin{cases} \varphi_M = 0, \pi \\ \alpha_M = \theta_M \pm \frac{\pi}{4} \\ \delta_M = 2 \arctan \left[ \frac{R_M (\mp(1 - P_M))}{1 + P_M} \right] \end{cases} \quad (3.29)$$

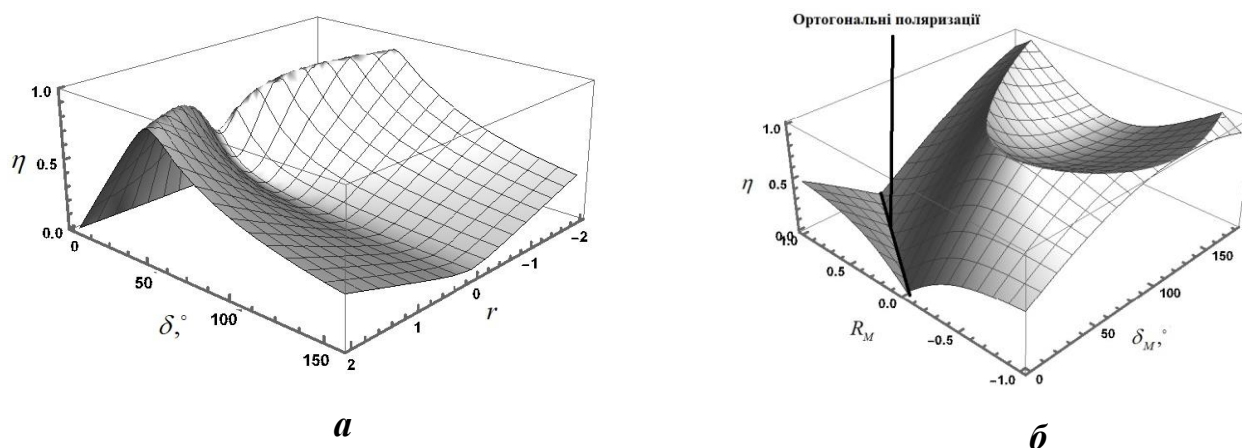


Рис.3.18. Залежність параметра неоднорідності від параметрів анізотропії для класу середовищ з лінійною фазовою, амплітудною та циркулярною амплітудною анізотропією: а) у рамках однорідної моделі при  $\alpha = 12^\circ, \theta = 35^\circ, \xi = 0.3$ , б) у рамках узагальненої моделі при  $\alpha_M = 10^\circ, \theta_M = 55^\circ, P = 0.3$ .

Тобто, можна бачити, що ортогональність власних поляризацій у цьому класі середовищ реалізується лише в рамках узагальненої моделі і не реалізується в двох інших підходах.

5) Середовище, що характеризується комбінацією лінійної фазової, амплітудної та циркулярної фазової анізотропії.

Результати, отримані для даного класу середовищ в рамках полярної моделі, представлені на Рис.3.19.

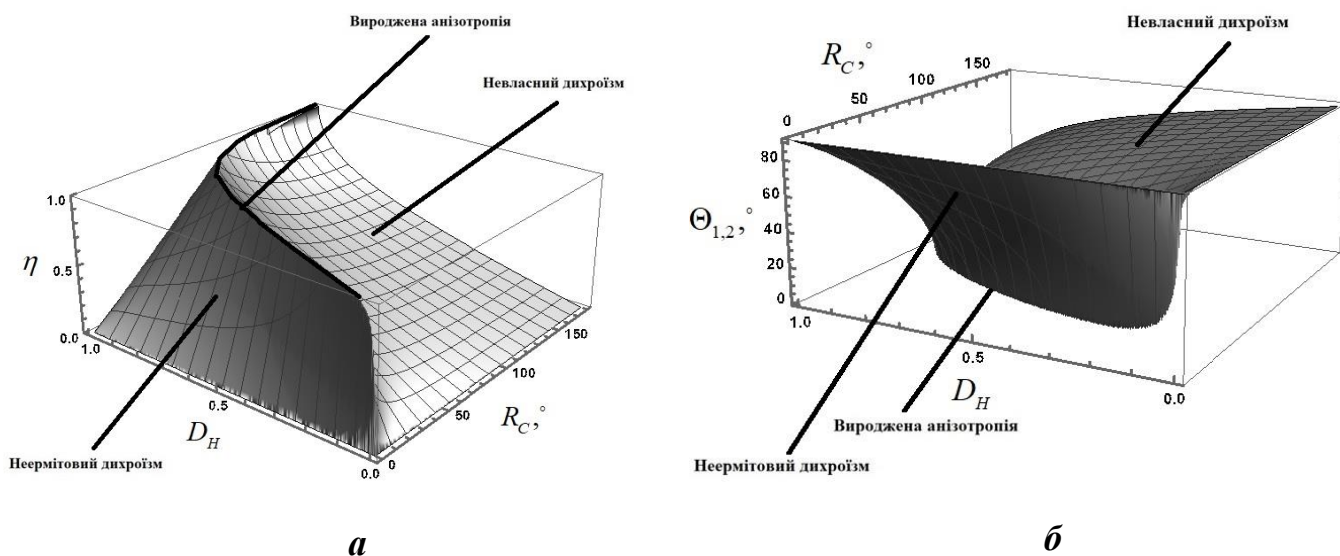


Рис.3.19. Залежність параметра неоднорідності (а) і кута між власними поляризаціями (б) від параметрів анізотропії для класу середовищ з лінійною фазовою, амплітудною та циркулярною фазовою анізотропією при  $D_C = R_{45} = D_{45} = 0, R_H = 16^\circ$  у рамках полярної моделі.

Аналізуючи Рис.3.19, маємо, що випадок, коли параметр неоднорідності  $\eta = 1$ , а кут між власними поляризаціями  $\Theta_{1,2} = 0$ , відповідає виродженій анізотропії, яка реалізується за умови (3.21). Усі проміжні значення параметрів  $0 < \eta < 1$ ,  $0 < \Theta_{1,2} < 90^\circ$  належать до випадків неермітового дихроїзму (3.19) і невласного (3.20) дихроїзму.

Для порівняння, на Рис.3.20 представлений графік, аналогічний 3.18а для даного класу середовищ в рамках однорідної та узагальненої моделей.

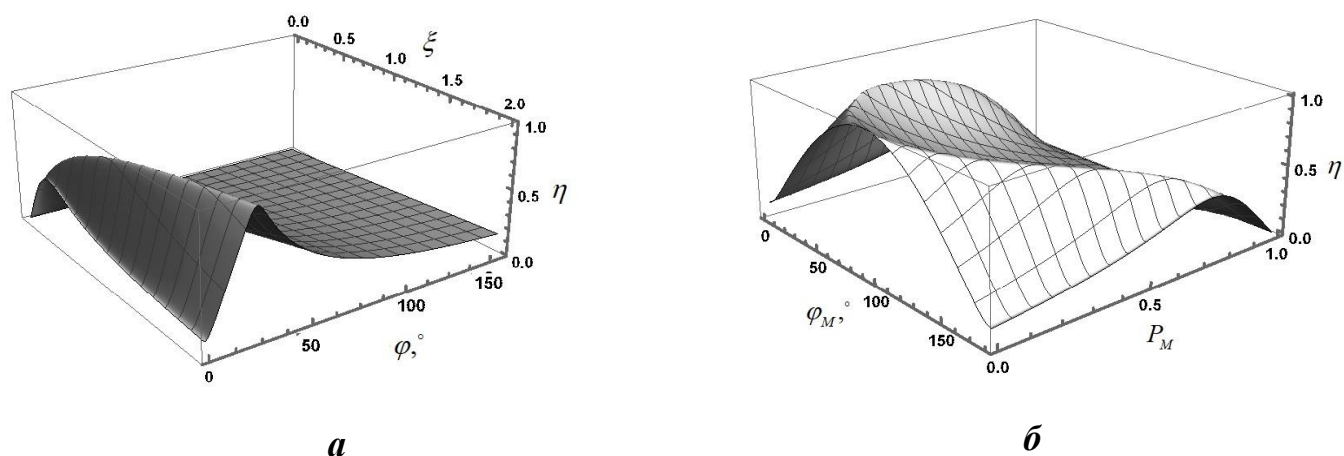


Рис.3.20. Залежність параметра неоднорідності від параметрів анізотропії для класу середовищ з лінійною фазовою, амплітудною та циркулярною фазовою анізотропією: а) у рамках однорідної моделі при  $\alpha = 12^\circ, \theta = 35^\circ, \delta = 17^\circ$ , б) у рамках узагальненої моделі при  $\alpha_M = 12^\circ, \theta_M = 35^\circ, \delta_M = 17^\circ$ .

Аналізуючи Рис.3.20, можна бачити, що в досліджуваному класі середовищ в рамках однорідної та узагальненої моделей не реалізуються три види складної анізотропії, на відміну від полярної моделі, де ці три види складної анізотропії реалізуються.

б) Середовище з комбінацією циркулярної фазової, амплітудною та лінійною фазової анізотропії.

Результати, отримані для даного класу середовищ в рамках полярної моделі, представлені на Рис.3.21.

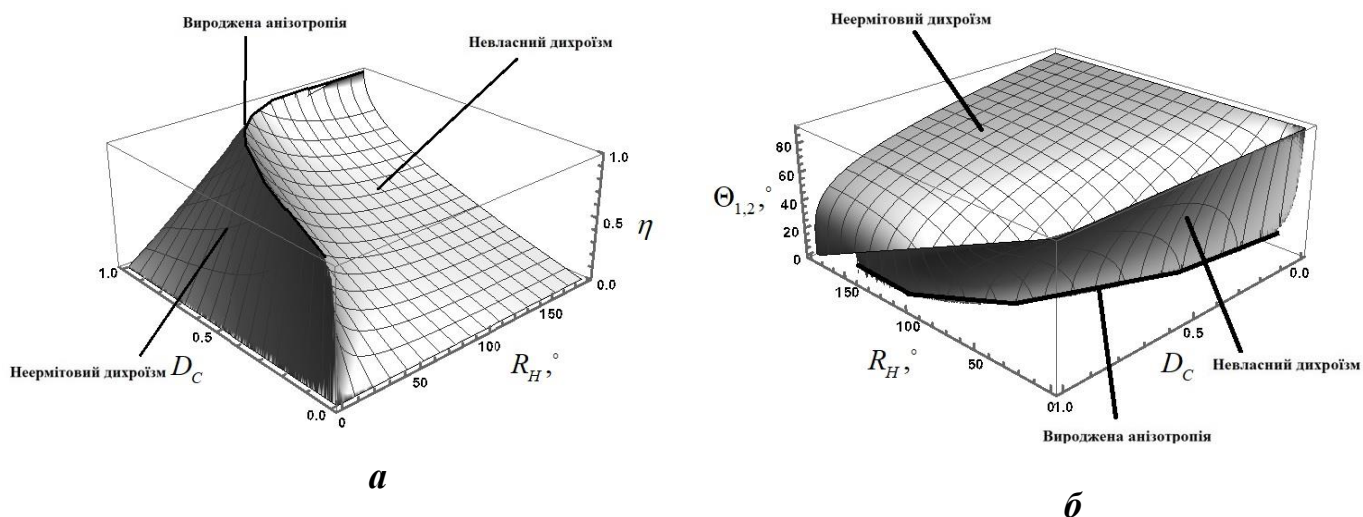


Рис.3.21. Залежність параметра неоднорідності (а) і кута між власними поляризаціями (б) від параметрів анізотропії для класу середовищ з циркулярною фазовою, амплітудною та лінійною фазовою анізотропією при  $D_H = R_{45} = D_{45} = 0, R_C = 17^\circ$  у рамках полярної моделі.

Аналізуючи Рис.3.21, маємо, що стан, коли параметр неоднорідності  $\eta = 1$ , а кут між власними поляризаціями  $\Theta_{1,2} = 0$  відповідає виродженій анізотропії, яка реалізується за умови (3.24). Також, як можна бачити, стан  $\eta = 0$ ,  $\Theta_{1,2} = 90^\circ$ , який відповідає ортогональним власним поляризаціям у цьому класі середовищ, може реалізуватись за відсутності циркулярної фазової або амплітудної анізотропії. Усі інші значення параметрів  $0 < \eta < 1$ ,  $0 < \Theta_{1,2} < 90^\circ$  відносяться до випадків неермітового дихроїзму (3.22) і невластого (3.23) дихроїзму.

Для порівняння, на Рис.3.22 наведено графік, аналогічний 3.20а для даного класу середовищ у рамках однорідної та узагальненої моделей.

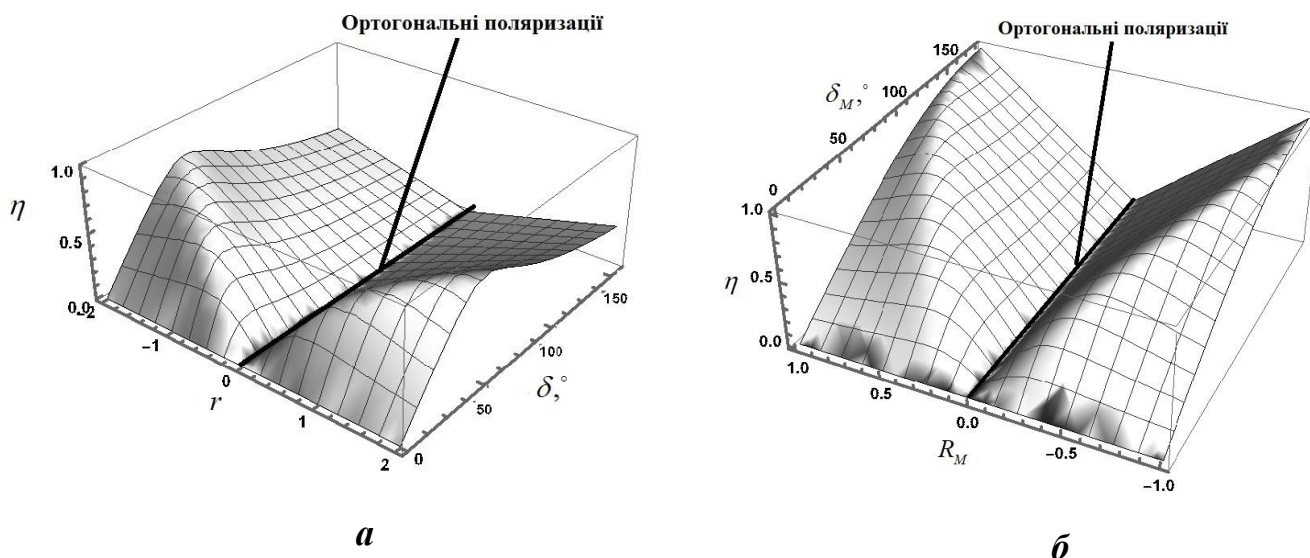


Рис.3.22. Залежність параметра неоднорідності від параметрів анізотропії для класу середовищ з циркулярною фазовою, амплітудною та лінійною анізотропією: а) у рамках однорідної моделі при  $\alpha = 12^\circ, \varphi = 17^\circ$ , б) у рамках узагальненої моделі при  $\alpha_M = 12^\circ, \varphi_M = 17^\circ$ .

Аналізуючи Рис.3.22, можна бачити, що в цьому класі середовищ в рамках однорідної та узагальненої моделей не реалізуються три види складної анізотропії, на відміну від полярної моделі, де ці три види складної анізотропії реалізуються. Також можна бачити, що в даному класі середовищ у рамках однорідної та узагальненої моделей, у випадку відсутності циркулярної фазової або амплітудної анізотропії, реалізуються ортогональні власні поляризації  $\eta = 0$ , як і в рамках полярної моделі.

7) Середовище з комбінацією циркулярної фазової, амплітудною та лінійною амплітудної анізотропії.

Результати, отримані для цього класу середовищ в рамках полярної моделі, наведено на Рис.3.23.

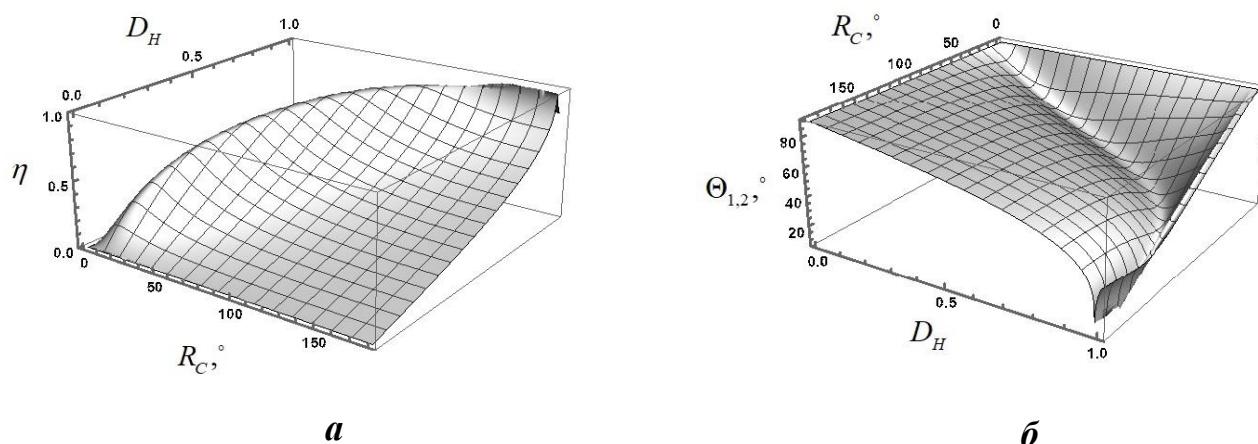


Рис.3.23. Залежність параметра неоднорідності (а) і кута між власними поляризаціями (б) від параметрів анізотропії для класу середовищ з циркулярною фазовою, амплітудною та лінійною амплітудною анізотропією при  $R_H = R_{45} = D_{45} = 0, D_C = 0.2$  у термінах полярної моделі.

Аналізуючи Рис.3.23, маємо, що в даному класі середовищ параметр неоднорідності не досягає значення 1 ( $\eta \neq 1$ ), а кут між власними поляризаціями не досягає значення 0 ( $\Theta_{1,2} \neq 0$ ), за жодних значень параметрів анізотропії. Отже, у зазначеному класі середовищ не реалізуються три складних типи анізотропії. Також, як можна бачити, стан  $\eta = 0, \Theta_{1,2} = 90^\circ$ , який відповідає ортогональним власним поляризаціям, у цьому класі середовищ не може реалізуватись у відсутності лінійної амплітудної, або ж циркулярної фазової анізотропії, у присутності усіх видів анізотропії. Усі інші значення параметрів  $0 < \eta, \Theta_{1,2} < 90^\circ$  належать до випадків, коли в середовищі власні хвилі розповсюджуються із різною власною швидкістю і по-різному поглинаються.

Для порівняння, на Рис.3.24 представлений графік, аналогічний 3.23а для даного класу середовищ в рамках однорідної та узагальненої моделей.

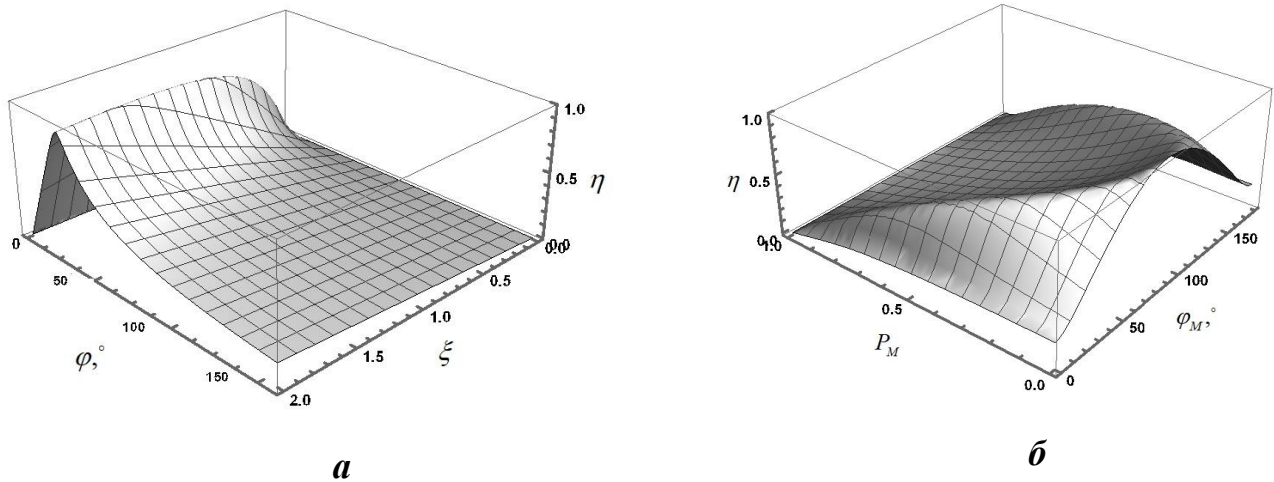


Рис.3.24. Залежність параметра неоднорідності від параметрів анізотропії для класу середовищ з циркулярною фазовою, амплітудною та лінійною амплітудною анізотропією: а) у рамках однорідної моделі при  $\theta = 35^\circ, r = 0.2$ , б) у рамках узагальненої моделі при  $\theta_M = 12^\circ, R_M = 0.2$ .

Аналізуючи Рис.3.24, можна бачити, що в даному класі середовищ у рамках однорідної та узагальненої моделей не реалізуються три види складної анізотропії, як і у випадку теореми полярного розкладу. Також можна бачити, що в цьому класі середовищ в рамках однорідної моделі у випадку відсутності циркулярної фазової або лінійної амплітудної анізотропії реалізуються ортогональні власні поляризації  $\eta = 0$ , тоді як в рамках узагальненої моделі ортогональні власні поляризації реалізуються лише у випадку відсутності лінійної амплітудної анізотропії ( $P_M = 1$ ).

8) Довільне однорідне анізотропне середовище.

Тепер розглянемо найбільш загальний випадок довільного однорідного анізотропного середовища, яке характеризується усіма чотирма базовими видами анізотропії. Результати, отримані для такого класу середовищ в рамках полярної моделі, наведено на Рис.3.25.

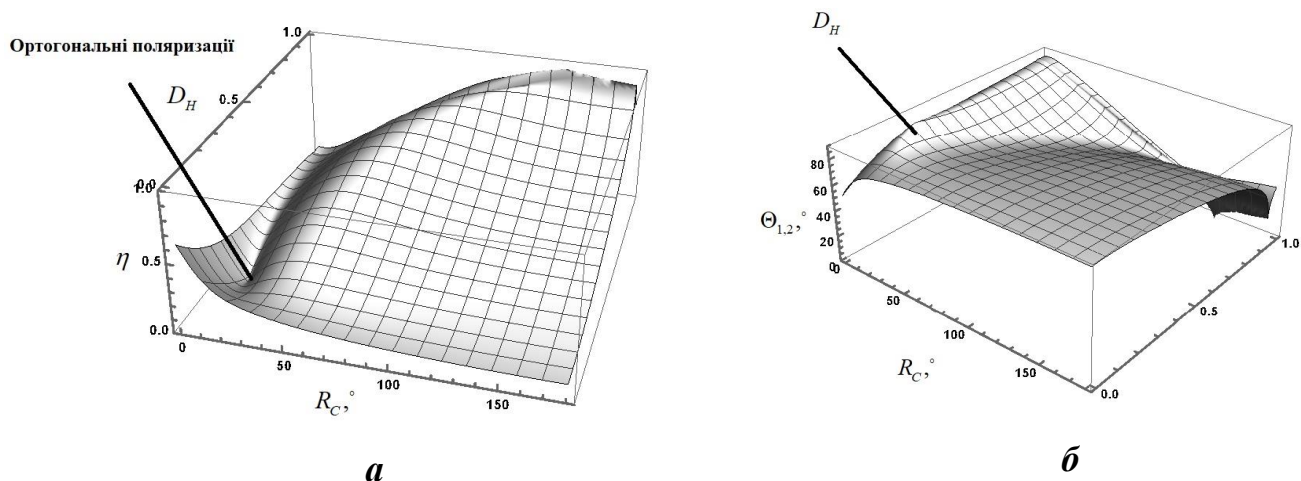


Рис.3.25. Залежність параметра неоднорідності (а) і кута між власними поляризаціями (б) від параметрів анізотропії для довільного однорідного анізотропного середовища при  $R_H = 16^\circ$ ,  $R_{45} = 12^\circ$ ,  $D_{45} = 0.2$ ,  $D_C = 0.2$  у рамках полярної моделі.

Аналізуючи Рис.3.25, маємо, що в цьому класі середовищ параметр неоднорідності не досягає значення 1 ( $\eta \neq 1$ ), а кут між власними поляризаціями не досягає значення 0 ( $\Theta_{1,2} \neq 0$ ) за жодних значень параметрів анізотропії. Тому в цьому класі середовищ не реалізуються три складних типи анізотропії. Також, як можна бачити, стан  $\eta = 0$ ,  $\Theta_{1,2} = 90^\circ$ , який відповідає ортогональним власним поляризаціям в даному класі середовищ, може бути реалізованим при виконанні умов ортогональності (3.2). Усі інші значення параметрів  $0 < \eta$ ,  $\Theta_{1,2} < 90^\circ$  стосуються випадків, коли в середовищі власні хвилі розповсюджуються із різною фазовою швидкістю і по різному поглинаються.

Для порівняння, на Рис.3.26 представлений графік, аналогічний 3.24а для даного класу середовищ в рамках однорідної та узагальненої моделей.

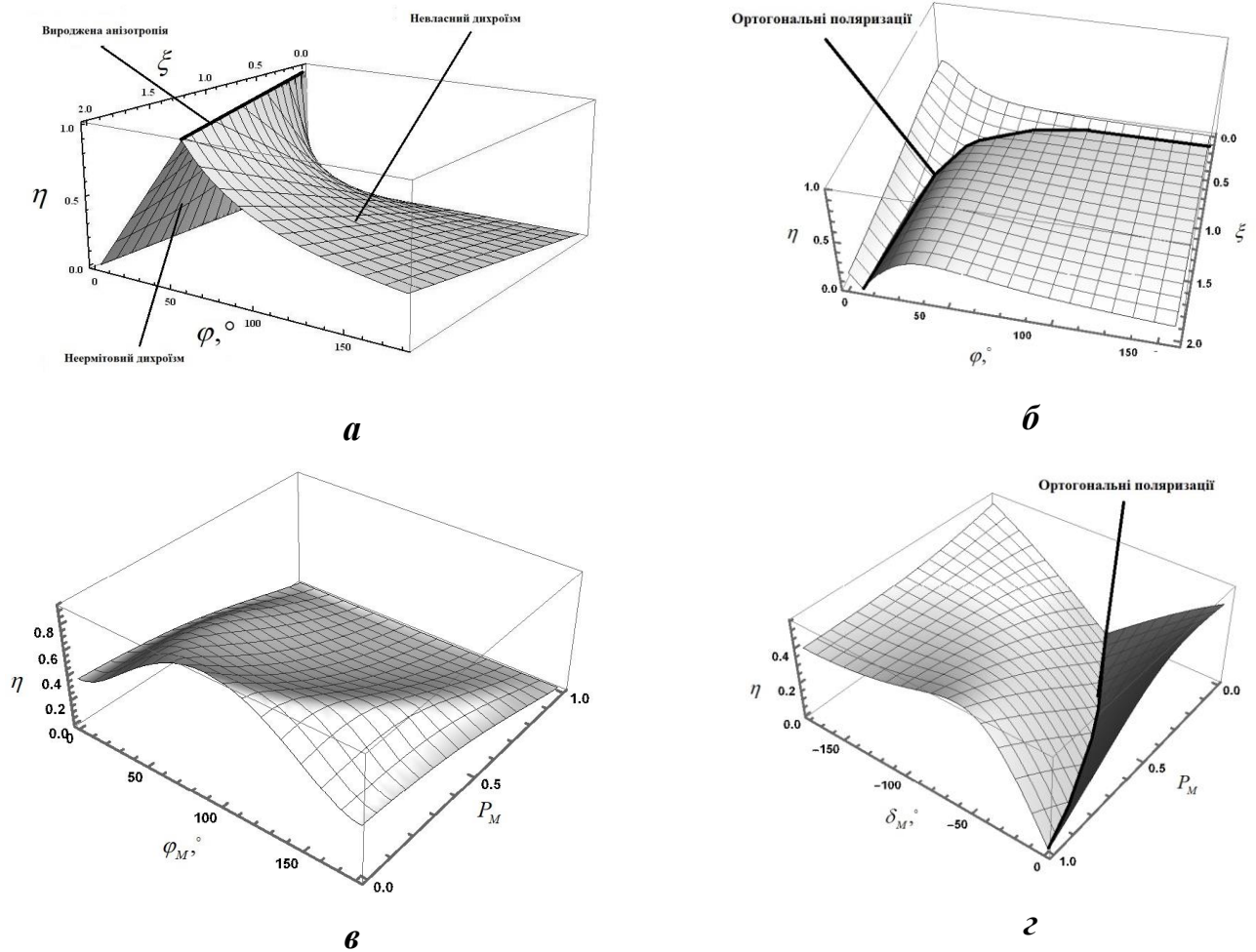


Рис.3.26. Залежність параметра неоднорідності від параметрів анізотропії для довільного однорідного анізотропного середовища: а) у рамках однорідної моделі при  $\alpha = 12^\circ, \theta = 32^\circ, r = 0.8, \delta$  визначається співвідношенням (3.26), б) у рамках однорідної моделі при  $\alpha = \theta = 12^\circ, r = 1.5, \delta = 38^\circ$ , в) у рамках узагальненої моделі при  $\alpha_M = 12^\circ, \theta_M = 18^\circ, R_M = 0.4, \delta_M = 17^\circ$ , г) у рамках узагальненої моделі при  $\alpha_M = 12^\circ, \theta_M = 34^\circ, R_M = 0.4, \varphi$  визначається співвідношенням (3.30).

Аналізуючи Рис.3.26а, можна бачити, що в довільному однорідному анізотропному середовищі в рамках однорідної моделі за виконання умови [52]:

$$\delta < -\frac{2r\varphi \sec(2(\alpha - \theta))}{\xi} \quad (3.28)$$

реалізується неермітовий дихроїзм;

за виконання умови:

$$\delta > -\frac{2r\varphi \sec(2(\alpha - \theta))}{\xi} \quad (3.29)$$

реалізується невласний дихроїзм;

за виконання умови:

$$\delta = -\frac{2r\varphi \sec(2(\alpha - \theta))}{\xi} \quad (3.30)$$

реалізується випадок виродженої анізотропії.

Як можна бачити з Рис.3.26б, у довільному однорідному анізотропному середовищі в рамках однорідної моделі, за виконання умови [52]:

$$\begin{cases} \delta = \frac{2\varphi\xi}{r} \\ \alpha = \theta \end{cases} \quad (3.31)$$

власні поляризації є ортогональними.

Аналізуючи Рис.3.26в, можна бачити, що в довільному однорідному анізотропному середовищі в рамках узагальненої моделі не реалізуються три типи складної анізотропії, як і у випадку полярної моделі. Як можна бачити з Рис.3.26г, у довільному однорідному анізотропному середовищі у термінах узагальненої моделі за виконання умови [54]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_M = \Delta \mp \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{(R_M^2 + 1) \cos(2\Delta)}{(R_M^2 - 1)} \right) \\ \delta_M = -2 \arctan \left( \frac{(P_M - 1) \left( (R_M^2 + 1) \sin(2\Delta) + (R_M^2 - 1) \sin(2(\Delta - \varphi_M)) \right)}{2R_M (P_M + 1)} \right) \\ \Delta = \alpha_M - \theta_M \end{array} \right. \quad (3.32)$$

власні поляризації є ортогональними. Таким чином, ортогональність власних поляризацій у довільному однорідному анізотропному середовищі реалізується в рамках будь-якої з трьох моделей, що розглядається, однак ця ортогональність реалізується за різних співвідношень між параметрами анізотропії.

### 3.5. Аналіз параметра неоднорідності для різних власних станів поляризації анізотропного середовища

Для того, щоб підсумувати результати, отримані в пунктах 3.1-3.4, варто проаналізувати залежність величини параметра неоднорідності  $\eta$  від власних станів поляризації  $\mathbf{E}_{e1}$  і  $\mathbf{E}_{e2}$ , які характеризують анізотропне середовище. Така залежність задається співвідношенням [57]:

$$\eta = \left| \mathbf{E}_{e1}^\dagger \mathbf{E}_{e2} \right|, \quad (3.33)$$

де  $\dagger$  - операція ермітового спряження, що позначає послідовну дію операторів комплексного спряження “\*” та транспонування “T”.

Загальний вигляд вектора Джонса для довільного еліптичного стану поляризації представлений співвідношенням (1.4), яке, без врахування абсолютної фази світлової хвилі, може бути представлене у вигляді:

$$\mathbf{E} = A \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\varepsilon) - i\sin(\theta)\sin(\varepsilon) \\ \sin(\theta)\cos(\varepsilon) + i\cos(\theta)\sin(\varepsilon) \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Далі, будемо вважати, що амплітуда власних поляризацій  $A$  завжди є однаковою і рівна одиниці [17].

Нехай власні поляризації описуються векторами Джонса  $\mathbf{E}_{e1}$  і  $\mathbf{E}_{e2}$ . Розглянемо, як параметр неоднорідності  $\eta$  середовищ залежить від вигляду їх власних поляризацій.

1) *Середовище з двома лінійними власними поляризаціями з довільними значеннями азимута  $\theta_{e1}$  і  $\theta_{e2}$ .*

На основі співвідношення (3.34), такі середовища описуються векторами Джонса:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{e1} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{e1}) \\ \sin(\theta_{e1}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_{e2} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{e2}) \\ \sin(\theta_{e2}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Підставляючи рівняння (3.35) в рівняння (3.33), для параметра неоднорідності середовища отримуємо:

$$\eta = \cos(\theta_{e1} - \theta_{e2}). \quad (3.36)$$

Графічна інтерпретація отриманої залежності (3.36) представлена на Рис.3.27.

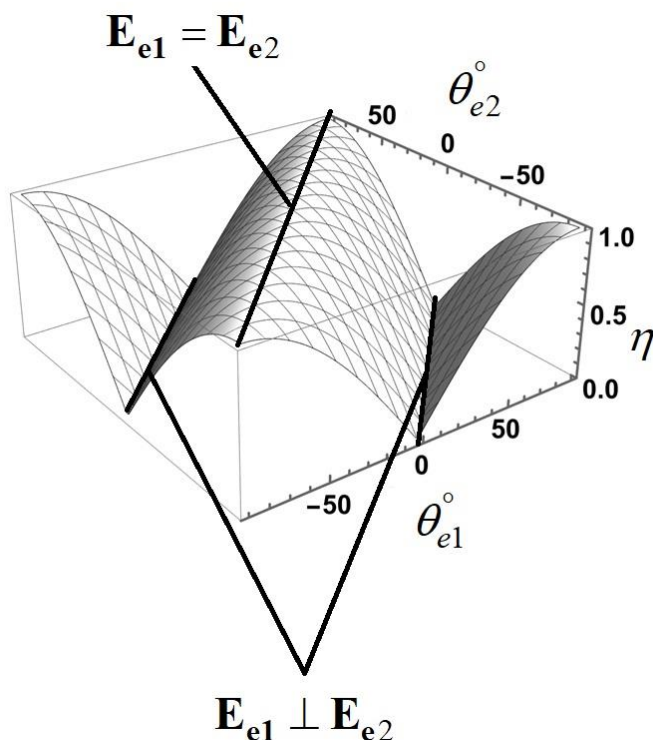


Рис.3.27. Залежність параметра неоднорідності середовища від азимутів його лінійних власних поляризацій.

Як можна бачити зі співвідношення (3.36) і Рис.3.27, параметр неоднорідності  $\eta = 0$ , коли власні лінійні поляризації середовища є ортогональними ( $\theta_{e1} - \theta_{e2} = \pm 90^\circ$ );  $\eta = 1$  у випадку співпадіння азимутів власних поляризацій  $\theta_{e1} - \theta_{e2} = 0$  (середовище з виродженою анізотропією). Для випадку, коли власні поляризації не є ортогональними ( $\theta_{e1} - \theta_{e2} \neq 90^\circ$ ) та не співпадають ( $\theta_{e1} - \theta_{e2} \neq 0$ ), а отже, можуть бути реалізовані ефекти невластного і не ермітового дихроїзму, параметр неоднорідності  $0 < \eta < 1$ .

2) *Середовище з двома циркулярними власними поляризаціями.*

Базуючись на співвідношенні (3.34), отримуємо вектори Джонса для даного випадку:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{e1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_{e2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.37)$$

де  $\mathbf{E}_{e1}$  і  $\mathbf{E}_{e2}$  - вектор Джонса для правої та лівої циркулярної поляризації відповідно.

Підставляючи рівняння (3.37) в рівняння (3.33), отримуємо:

$$\eta = 0. \quad (3.38)$$

Дійсно, поляризації (3.37) є ортогональними, що й забезпечує рівність (3.38).

3) *Середовище з двома еліптичними власними поляризаціями, азимут та кут еліптичності яких  $\theta_{e1}$ ,  $\varepsilon_{e1}$  і  $\theta_{e2}$ ,  $\varepsilon_{e2}$  відповідно.*

Вектори Джонса таких поляризацій, відповідно до (3.34), мають вигляд:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{e1} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{e1})\cos(\varepsilon_{e1}) - i\sin(\theta_{e1})\sin(\varepsilon_{e1}) \\ \sin(\theta_{e1})\cos(\varepsilon_{e1}) + i\cos(\theta_{e1})\sin(\varepsilon_{e1}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_{e2} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{e2})\cos(\varepsilon_{e2}) - i\sin(\theta_{e2})\sin(\varepsilon_{e2}) \\ \sin(\theta_{e2})\cos(\varepsilon_{e2}) + i\cos(\theta_{e2})\sin(\varepsilon_{e2}) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.39)$$

Підставляючи рівняння (3.39) в рівняння (3.33), отримуємо:

$$\eta = \sqrt{\cos(\varepsilon_{e1} - \varepsilon_{e2})^2 \cos(\theta_{e1} - \theta_{e2})^2 + \sin(\varepsilon_{e1} + \varepsilon_{e2})^2 \sin(\theta_{e1} - \theta_{e2})^2}. \quad (3.40)$$

Графічна інтерпретація залежності (3.40) представлена на Рис.3.28.

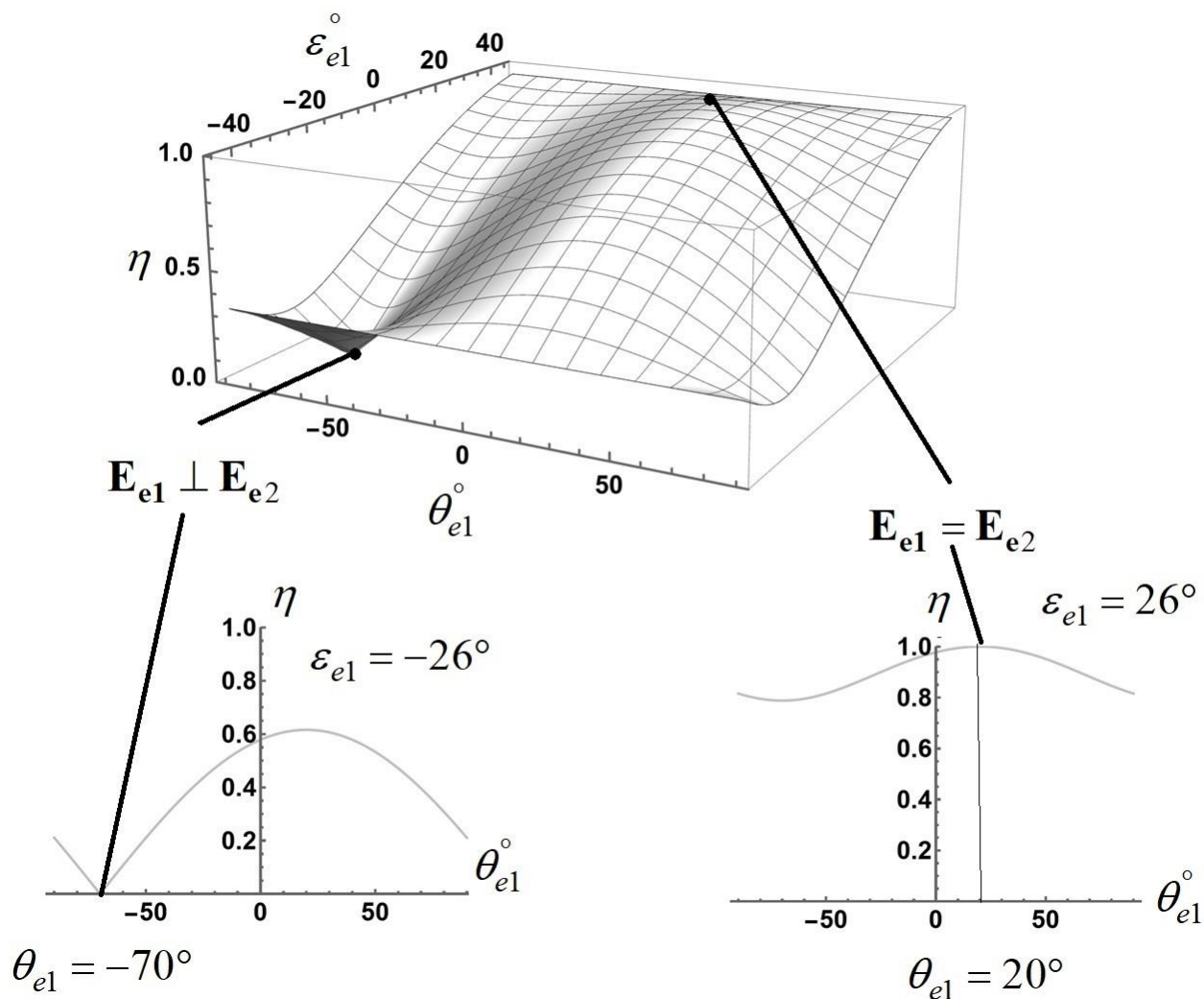


Рис.3.28. Залежність параметра неоднорідності середовища від азимута та кута еліптичності власної поляризації  $\mathbf{E}_{e1}$  при значеннях параметрів власної поляризації  $\mathbf{E}_{e2}$ :  $\theta_{e2} = 20^\circ$  і  $\varepsilon_{e2} = 26^\circ$  відповідно.

Аналізуючи співвідношення (3.40) і Рис.3.28, можна бачити, що для класу середовищ з еліптичними власними поляризаціями: параметр неоднорідності  $\eta = 0$  у випадку ортогональних власних поляризацій ( $\theta_{e1} = -70^\circ$ ,  $\varepsilon_{e1} = -26^\circ$ ,  $\theta_{e2} = 20^\circ$ ,  $\varepsilon_{e2} = 26^\circ$ );  $\eta = 1$  у випадку співпадіння власних поляризацій, тобто випадку виродженої анізотропії ( $\theta_{e1} = 20^\circ$ ,  $\varepsilon_{e1} = 26^\circ$ ,  $\theta_{e2} = 20^\circ$ ,  $\varepsilon_{e2} = 26^\circ$ ). В інших випадках  $0 < \eta < 1$ .

4) Середовище з еліптичною і лінійною власними поляризаціями зі значеннями азимута і кута еліптичності  $\theta_{e1}, \varepsilon_{e1}$  і  $\theta_{e2}, \varepsilon_{e2} = 0$  відповідно.

Вектори Джонса таких поляризацій мають вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{e1} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{e1})\cos(\varepsilon_{e1}) - i\sin(\theta_{e1})\sin(\varepsilon_{e1}) \\ \sin(\theta_{e1})\cos(\varepsilon_{e1}) + i\cos(\theta_{e1})\sin(\varepsilon_{e1}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_{e2} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{e2}) \\ \sin(\theta_{e2}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Підставляючи рівняння (3.41) в рівняння (3.33), отримуємо:

$$\eta = \sqrt{2 + \cos(2(\varepsilon_{e1} + \theta_{e1} - \theta_{e2})) + \cos(2(\varepsilon_{e1} - \theta_{e1} + \theta_{e2}))}. \quad (3.42)$$

Графічна інтерпретація отриманої залежності (3.42) представлена на Рис.3.29.

Аналізуючи співвідношення (3.42) і Рис.3.29, можна бачити, що для класу середовищ з еліптичною та лінійною власними поляризаціями: параметр неоднорідності  $\eta = 0$  у випадку ортогональних власних поляризацій ( $\theta_{e1} = -70^\circ, \varepsilon_{e1} = 0$ );  $\eta = 1$  у випадку співпадіння власних поляризацій, тобто випадку виродженої анізотропії ( $\theta_{e1} = 20^\circ, \varepsilon_{e1} = 0$ ). При усіх інших значеннях параметрів  $\theta_{e1}, \varepsilon_{e1}$ ,  $0 < \eta < 1$ .

5) Середовище з право- (ліво-) циркулярною і лінійною власною поляризацією.

Зазначені середовища описуються таким чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{e1} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{e1}) \\ \sin(\theta_{e1}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_{e2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

де знак  $\pm$  у векторі Джонса  $\mathbf{E}_{e2}$  задає праву або ліву циркулярну поляризацію, відповідно. Підставляючи рівняння (3.43) в рівняння (3.33), отримуємо:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.44)$$

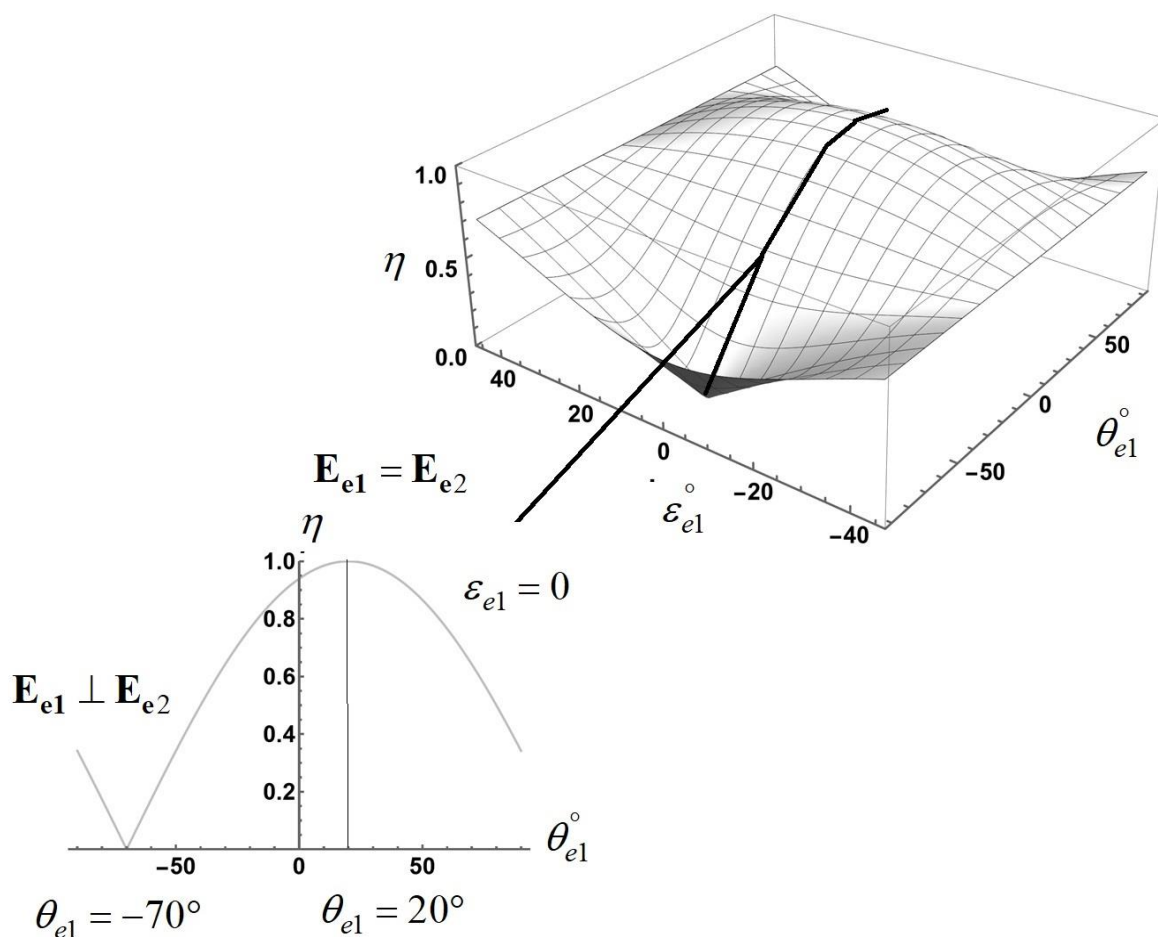


Рис.3.29. Залежність параметра неоднорідності середовища від азимута та кута еліптичності власної поляризації із вектором Джонса  $\mathbf{E}_{e1}$  при значенні азимута власної поляризації із вектором Джонса  $\mathbf{E}_{e2}$ :  $\theta_{e2} = 20^\circ$ .

Отже, у класі середовищ із правою (лівою) циркулярною і лінійною власними поляризаціями параметр неоднорідності не залежить від азимута лінійної власної поляризації і завжди рівний константі, оскільки в цьому класі середовищ не можуть бути реалізовані ні ортогональні власні поляризації, ні вироджена анізотропія.

б) Середовище з правою (лівою) циркулярною і еліптичною власною поляризацією з довільними значеннями азимута і кута еліптичності  $\theta_{e1}$ ,  $\varepsilon_{e1}$ .

Ці середовища описуємо таким чином:

$$\mathbf{E}_{e1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{e1})\cos(\varepsilon_{e1}) - i\sin(\theta_{e1})\sin(\varepsilon_{e1}) \\ \sin(\theta_{e1})\cos(\varepsilon_{e1}) + i\cos(\theta_{e1})\sin(\varepsilon_{e1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$
(3.45)

Підставляючи рівняння (3.41) в рівняння (3.33), отримуємо:

$$\eta = \sqrt{\frac{1 \pm \sin(2\varepsilon_{e1})}{2}}.$$
(3.46)

Графічна інтерпретація отриманої залежності (3.44) представлена на Рис.3.30.

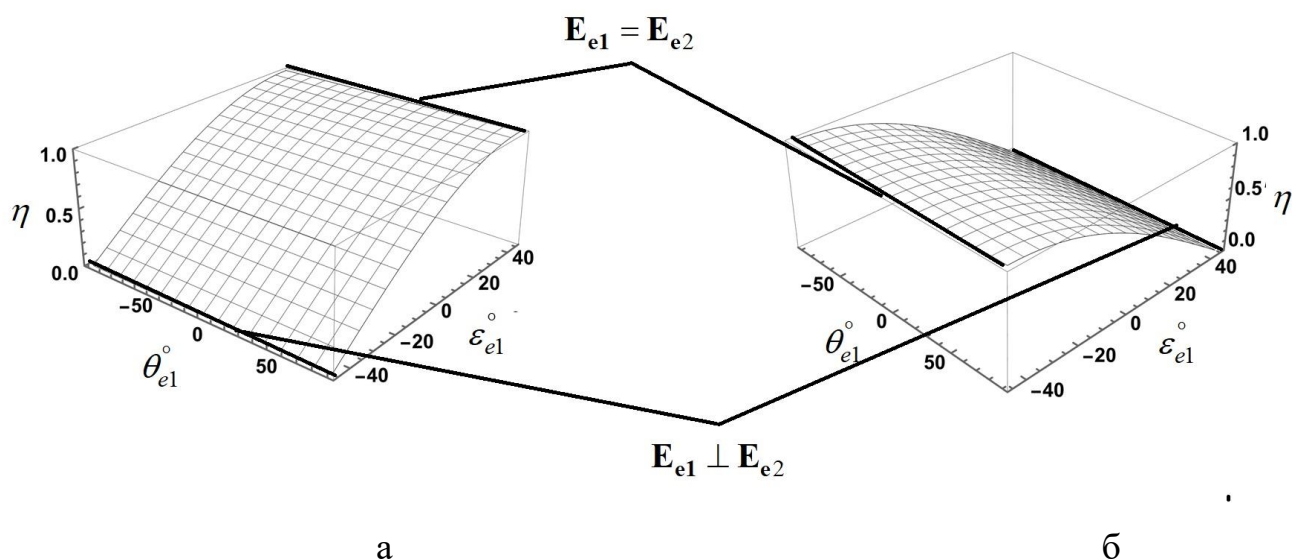


Рис.3.30. Залежність параметра  $\eta$  від азимута та кута еліптичності власної поляризації із вектором Джонса  $\mathbf{E}_{e1}$  для випадку коли вектор Джонса  $\mathbf{E}_{e2}$  описує: а) праву циркулярну поляризацію, б) ліву циркулярну поляризацію.

Аналізуючи співвідношення (3.46) і Рис.3.30, можна бачити, що для класу середовищ з право- (ліво-) циркулярною і еліптичною власними поляризаціями: параметр неоднорідності  $\eta = 0$  у випадку ортогональних власних поляризацій при а)  $\varepsilon_{e1} = -45^\circ$  та б)  $\varepsilon_{e1} = 45^\circ$ ;  $\eta = 1$  у випадку співпадіння власних поляризацій, тобто випадку виродженої анізотропії при а) при  $\varepsilon_{e1} = 45^\circ$  та б)  $\varepsilon_{e1} = -45^\circ$ , при цьому, величина параметра неоднорідності не залежить від азимута еліптичної власної поляризації  $\theta_{e1}$ . В інших випадках  $0 < \eta < 1$  [102,104,107].

### **3.6. Використання параметра неоднорідності для аналізу ортогональності власних станів поляризації закручених середовищ**

У підпункті 3.4. були розглянуті різні класи анізотропних недеполяризуючих середовищ, які, згідно класифікації, представленій у [45], називаються однорідними анізотропними середовищами. Термін «однорідність» у цьому випадку не має жодного відношення до параметра неоднорідності, який розглядається в розділі 3. Під однорідністю в [45] розуміється незмінність параметрів оптичної анізотропії середовища вздовж напрямку поширення світла, тобто вздовж осі  $z$  (поздовжня однорідність). Як показано в [45], елементи диференційної матриці Джонса (Мюллера) таких середовищ не залежать від  $z$ . В пункті 1.8 та в [45], також, розглядаються неоднорідні середовища, у яких параметри анізотропії змінюються вздовж напрямку поширення світла, а, отже, елементи диференційної матриці Джонса (Мюллера) залежать від координати  $z$ , тобто має місце поздовжня неоднорідність.

Розглянемо поздовжньо неоднорідні середовища, у яких азимут лінійної фазової (лінійної амплітудної) анізотропії  $\alpha(\theta)$  залежить від  $z$ . Прикладом таких середовищ можуть бути кручені нематерики та холестерики - рідкі кристали [68], [69], що широко використовуються при побудові рідкокристалічних дисплеїв та індикаторних пристроїв. Молекули цих кристалів мають видовжену форму і групуються в мономолекулярні шари, утворені сукупністю молекул з однаковою

орієнтацією. Напрямок, вздовж якого молекули вирівнюються в шарі, визначає вісь анізотропії цього шару як оптичного елемента. Внаслідок мономолекулярності означені шари виявляють однакову за значенням оптичну анізотропію, однак вісь анізотропії у кожному наступному шарі повернута по відношенню до осі попереднього шару на деякий фіксований кут  $\alpha_0(\theta_0)$ . Таким чином, вісь анізотропії у середовищі закручується вдовж напрямку, перпендикулярному площині шарів. Якщо розглядати поширення випромінювання вздовж цього напрямку закручування, матимемо середовище, яке в літературі отримало назву «поздовжньо неоднорідне закручене анізотропне середовище». Хоча значення анізотропії в описаному типі середовища не залежить від координати  $z$ , однак орієнтація осі анізотропії – залежить, що і робить середовище поздовжньо неоднорідним.

Далі, для уникнення плутанини щодо розуміння терміну «неоднорідність», розглянуті поздовжньо неоднорідні закручені середовища будемо називати «закрученими середовищами».

Для правильної роботи пристроїв, побудованих на основі закручених середовищ, важливо, щоб ці середовища мали ортогональні власні поляризації. Проте наявність або відсутність ортогональності буде залежати від характеру анізотропії молекулярних шарів середовищ. Оскільки параметр неоднорідності  $\eta$  є числовим індикатором ортогональності власних поляризацій середовищ, його зручно використати для дослідження залежності ступеня ортогональності поляризацій від характеру анізотропії шарів у закручених середовищах.

Розглянемо клас закручених середовищ молекулярні шари, яких характеризуються різними видами анізотропії.

#### 1) *Закручене середовище з лінійною фазовою анізотропією*

У цьому класі середовищ кожен молекулярний шар характеризується лінійною фазовою анізотропією. Якщо таке середовище розглядати як суцільне в напрямку  $z$ , його анізотропію можна характеризувати деяким питомим значенням фазового

зсуву  $\delta_0$  і питомим значенням повороту осі анізотропії  $\alpha_0$  на одиницю товщини  $z$  (Рис.3.31) [68].

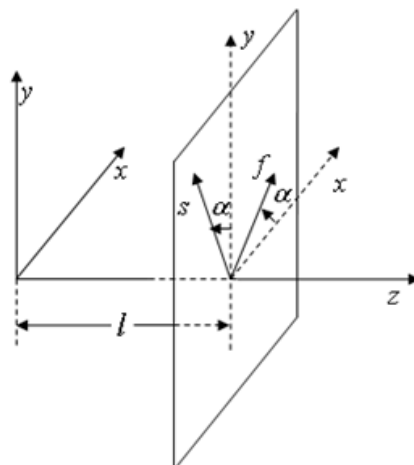


Рис.3.31. Закручене середовище з лінійною фазовою анізотропією. Орієнтацію осі анізотропії середовища на відстані  $l$  від вхідної площини можна визначити як  $\alpha = \alpha_0 z (z=l)$ .  $f$  і  $s$  - швидка та повільна осі анізотропії.

Для опису анізотропних властивостей даного середовища на будь-якій відстані  $z$  від вхідної площини може бути використана така диференційна матриця Джонса [45]:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & i\frac{1}{2}\delta_0 e^{2i\alpha_0 z} \\ i\frac{1}{2}\delta_0 e^{-2i\alpha_0 z} & 0 \end{bmatrix} \dots \quad (3.47)$$

Зазначимо, що матриця (3.47) записана в циркулярному базисі [7].

Дане закручене середовище також може бути еквівалентно представлене послідовністю лінійних фазових пластинок  $LP$ , з фазовим зсувом  $\delta_0$ , повернутих одна відносно одної на кут  $\alpha_0$  Рис.3.32.

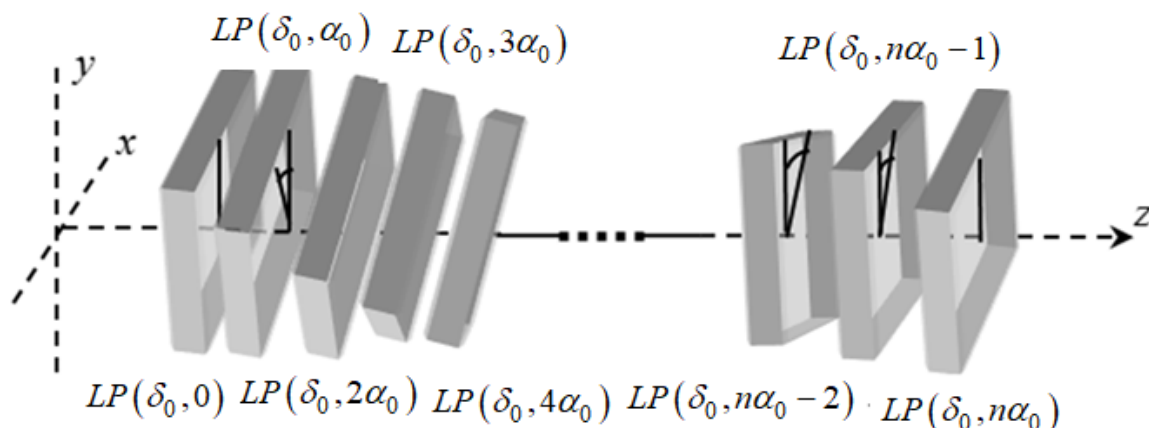


Рис.3.32. Еквівалентне представлення закрученого середовища із лінійною фазовою анізотропією послідовністю фазових пластинок.

Поляризаційні властивості середовища Рис.3.32 можуть бути описані інтегральною матрицею Джонса (3.48), розрахованою із диференційної матриці Джонса (3.47) за допомогою методу, представленого [12]:

$$T = \frac{1}{A_1} \begin{bmatrix} A_1 c_{\alpha_0 z} c_{zA_1/2} + (i\delta_0 c_{\alpha_0 z} + 2\alpha_0 s_{\alpha_0 z}) s_{zA_1/2} \\ A_1 c_{zA_1/2} s_{\alpha_0 z} + (i\delta_0 s_{\alpha_0 z} - 2\alpha_0 c_{\alpha_0 z}) s_{zA_1/2} \\ -A_1 c_{zA_1/2} s_{\alpha_0 z} + (i\delta_0 s_{\alpha_0 z} + 2\alpha_0 c_{\alpha_0 z}) s_{zA_1/2} \\ A_1 c_{\alpha_0 z} c_{zA_1/2} + (-i\delta_0 c_{\alpha_0 z} + 2\alpha_0 s_{\alpha_0 z}) s_{zA_1/2} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

де використано наступні заміни:  $A_1 = \sqrt{-(\delta_0^2 + 4\alpha_0^2)}$ ,  $c_x = \cos(x)$ ,  $s_x = \sin(x)$ .

Для вивчення еволюції параметра неоднорідності середовища  $\eta$  вздовж координати  $z$  у залежності від питомих значень  $\delta_0$  та  $\alpha_0$  маємо підставити елементи інтегральної матриці Джонса (3.48) у рівняння (1.35). Геометрична інтерпретація отриманої залежності представлена на Рис.3.33.

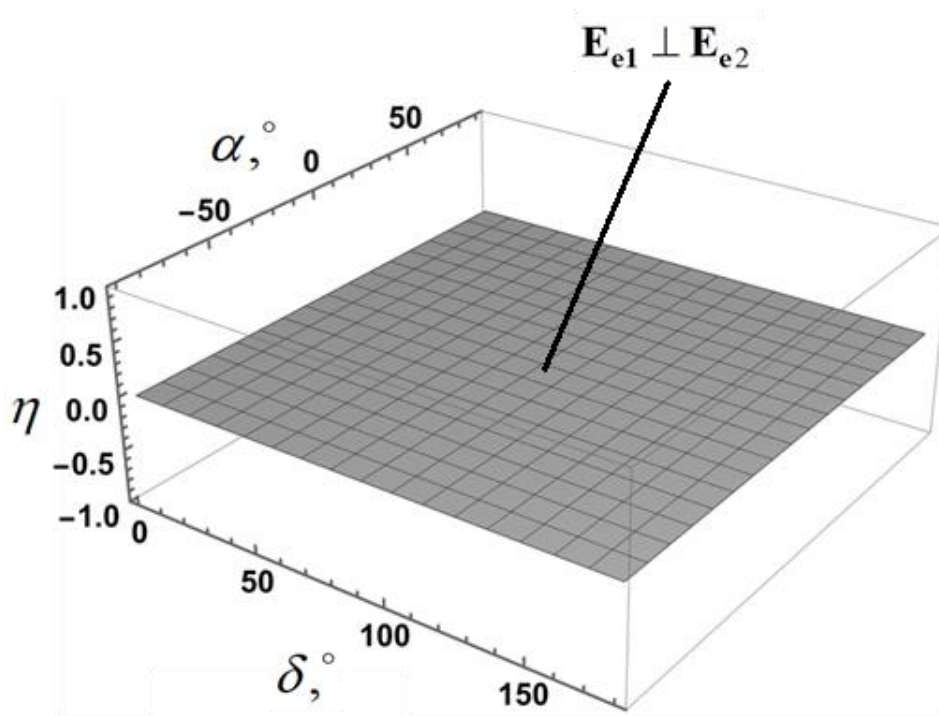


Рис.3.33. Геометрична інтерпретація залежності параметра неоднорідності від параметрів анізотропії закрученого середовища із лінійною фазовою анізотропією. Тут враховано, що  $\delta = \delta_0 z$ ,  $\alpha = \alpha_0 z$ .

Як можна бачити із Рис.3.33, в даному класі середовищ параметр неоднорідності  $\eta = 0$  при будь-яких значеннях параметрів анізотропії середовища на довільній його товщини. Отже, даний клас закручених середовищ завжди характеризуватиметься ортогональними власними поляризаціями.

## 2) Закручене середовище з еліптичною фазовою анізотропією.

У цьому класі середовища молекулярні шари характеризуються одночасно наявністю лінійної і циркулярної фазової анізотропії. Тобто, загальна анізотропія середовища буде еліптичною, з еліптичними власними поляризаціями. Питома величина еліптичної фазової анізотропії середовища визначатиметься як  $\Delta_0 = \sqrt{\delta_0^2 + 4\varphi_0^2}$ , де  $\delta_0$  та  $\varphi_0$  - питоми параметри лінійної та циркулярної частин

загальної еліптичної анізотропії середовища. Питомий поворот осі анізотропії середовища -  $\alpha_0$  (Рис.3.31).

Як і в попередньому випадку, для опису анізотропних властивостей досліджуваного середовища на деякій відстані  $z$  від вхідної площини може бути використана диференціальна матриця Джонса, яка у цьому випадку набуде вигляду:

$$N = \begin{bmatrix} -i\varphi_0 & i\frac{1}{2}\delta_0 e^{2i\alpha_0 z} \\ i\frac{1}{2}\delta_0 e^{-2i\alpha_0 z} & i\varphi_0 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Зазначимо, що матриця (3.49) записана в циркулярному базисі [7].

Аналогічно до першого випадку, середовище даного класу може бути еквівалентно представлене послідовністю еліптичних фазових пластинок  $EP$ , з фазовим зсувом  $\Delta_0$ , повернутих одна відносно одної на кут  $\alpha_0$  (Рис.3.34).

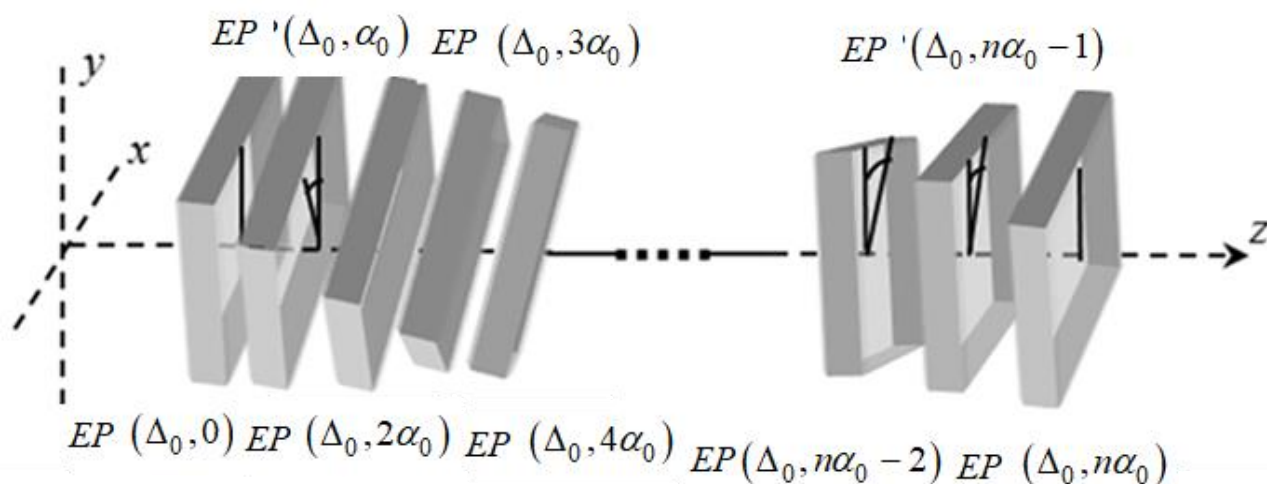


Рис.3.34. Еквівалентне представлення закрученого середовища з еліптичною фазовою анізотропією послідовністю еліптичних фазових пластинок.

Поляризаційні властивості середовища Рис.3.34 можуть бути описані інтегральною матрицею Джонса, отриманою із диференційної матриці (3.49) за допомогою методу [12]:

$$T = \frac{1}{A_2} \begin{bmatrix} A_1 c_{\alpha_0 z} c_{zA_2/2} + (i\delta_0 c_{\alpha_0 z} + 2(\alpha_0 + \varphi_0) s_{\alpha_0 z}) s_{zA_2/2} \\ A_1 c_{zA_2/2} s_{\alpha_0 z} + (i\delta_0 s_{\alpha_0 z} - 2(\alpha_0 + \varphi_0) c_{\alpha_0 z}) s_{zA_2/2} \\ -A_2 c_{zA_2/2} s_{\alpha_0 z} + (i\delta_0 s_{\alpha_0 z} + 2(\alpha_0 + \varphi_0) c_{\alpha_0 z}) s_{zA_2/2} \\ A_2 c_{\alpha_0 z} c_{zA_2/2} + (-i\delta_0 c_{\alpha_0 z} + 2(\alpha_0 + \varphi_0) s_{\alpha_0 z}) s_{zA_2/2} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

де використано наступні заміни:

$$A_2 = \sqrt{-(\delta_0^2 - 4(\varphi_0 + \alpha_0)^2)}, \quad c_x = \cos(x), \quad s_x = \sin(x).$$

Підставивши елементи інтегральної матриці Джонса (3.50) у рівняння (1.35), оцінюємо еволюцію параметра неоднорідності середовища  $\eta$  вздовж координати  $z$  залежно від питомих значень  $\delta_0$  та  $\alpha_0$ . Геометрична інтерпретація отриманої залежності представлена на Рис.3.35.

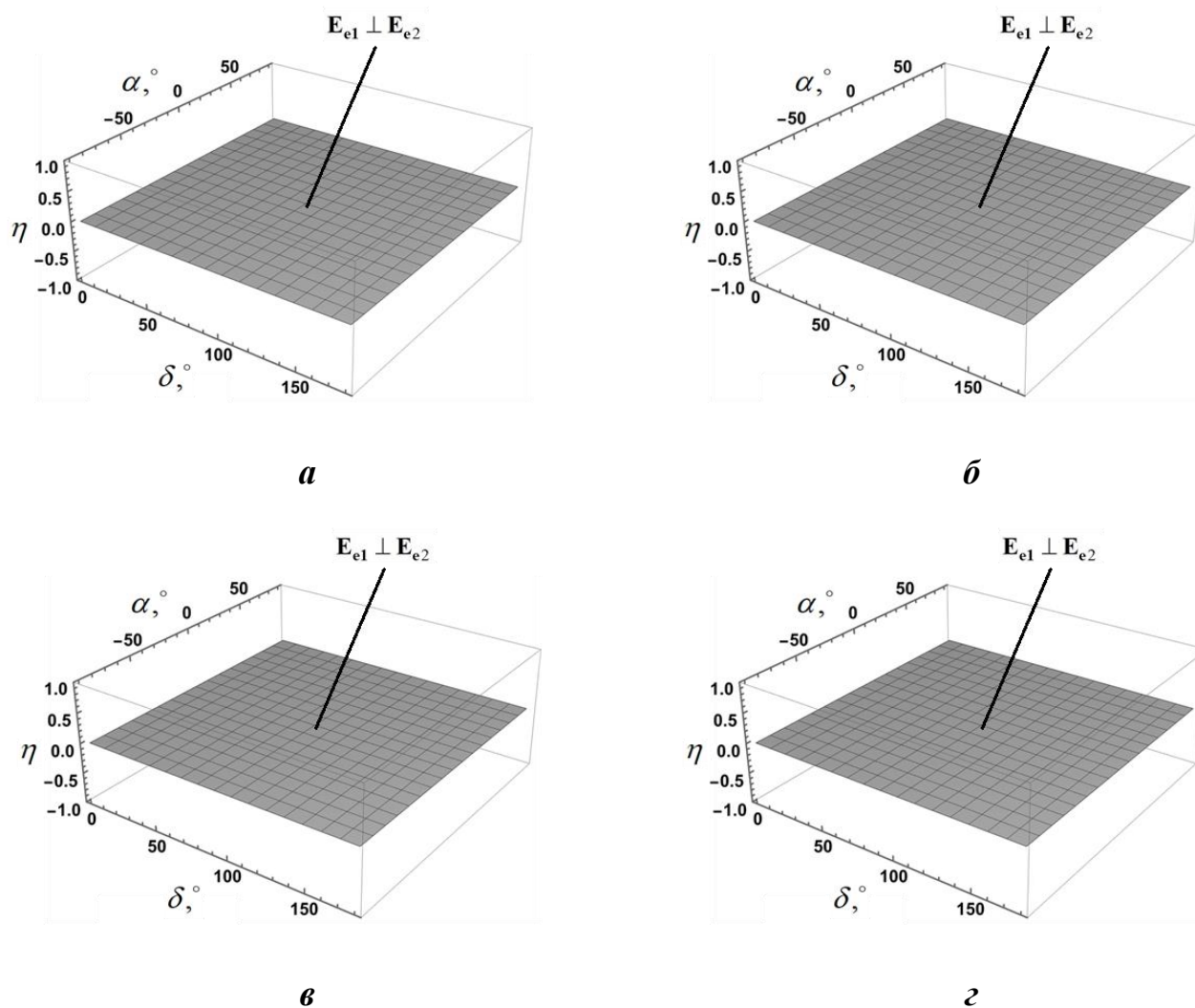


Рис.3.35. Геометрична інтерпретація залежності параметра неоднорідності від параметрів анізотропії закрученого середовища з еліптично фазовою анізотропією для випадку: а)  $\varphi_0 = 10^\circ$ , б)  $\varphi_0 = 36^\circ$ , в)  $\varphi_0 = 117^\circ$ , г)  $\varphi_0 = 152^\circ$ . Тут враховано, що  $\delta = \delta_0 z$ ,  $\alpha = \alpha_0 z$ .

Як можна бачити із Рис.3.35, у цьому класі середовищ, так само як і для закручених середовищ з лінійною фазовою анізотропією, параметр неоднорідності  $\eta = 0$  при будь-яких значеннях параметрів анізотропії середовища на довільній його товщині. Отже, досліджуваний клас закручених середовищ завжди характеризується ортогональними власними поляризаціями.

1) *Закручене середовище з лінійною амплітудною анізотропією.*

Даний клас середовищ характерний тим, що його молекулярні шари мають лінійну амплітудну анізотропію. Загальну анізотропію такого середовища можна описати питомим відносним поглинанням  $\xi_0$  і питомим кутом повороту осі анізотропії  $\theta_0$  [53] (Рис.3.35).

Для опису поляризаційних властивостей цього середовища на відстані  $z$  від вхідної площини може бути використана така диференціальна матриця Джонса [53]:

$$N = \frac{1}{2} \xi_0 \begin{bmatrix} 0 & e^{2i\theta_0 z} \\ e^{-2i\theta_0 z} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Матриця (3.51) записана в циркулярному базисі [7].

Представивши дане середовище еквівалентною послідовністю лінійних поляризаторів  $LA$  з відносним поглинанням  $\xi_0$ , повернутих один відносно одного на кут  $\theta_0$  (Рис.3.36-3.37) з використанням (3.51), отримаємо інтегральну матрицю Джонса (3.52).

$$T = \frac{1}{A_3} \begin{bmatrix} A_3 c_{\theta_0 z} c_{zA_3/2} + (\xi_0 c_{\theta_0 z} + 2\theta_0 s_{\theta_0 z}) s_{zA_3/2} \\ A_3 c_{zA_3/2} s_{\theta_0 z} + (\xi_0 s_{\theta_0 z} - 2\theta_0 c_{\theta_0 z}) s_{zA_3/2} \\ -A_3 c_{zA_3/2} s_{\theta_0 z} + (\xi_0 s_{\theta_0 z} + 2\theta_0 c_{\theta_0 z}) s_{zA_3/2} \\ A_3 c_{\theta_0 z} c_{zA_3/2} + (-\xi_0 c_{\theta_0 z} + 2\theta_0 s_{\theta_0 z}) s_{zA_3/2} \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

де використано заміни:  $A_1 = \sqrt{\xi_0^2 - 4\theta_0^2}$ ,  $c_x = \cos(x)$ ,  $s_x = \sin(x)$ .

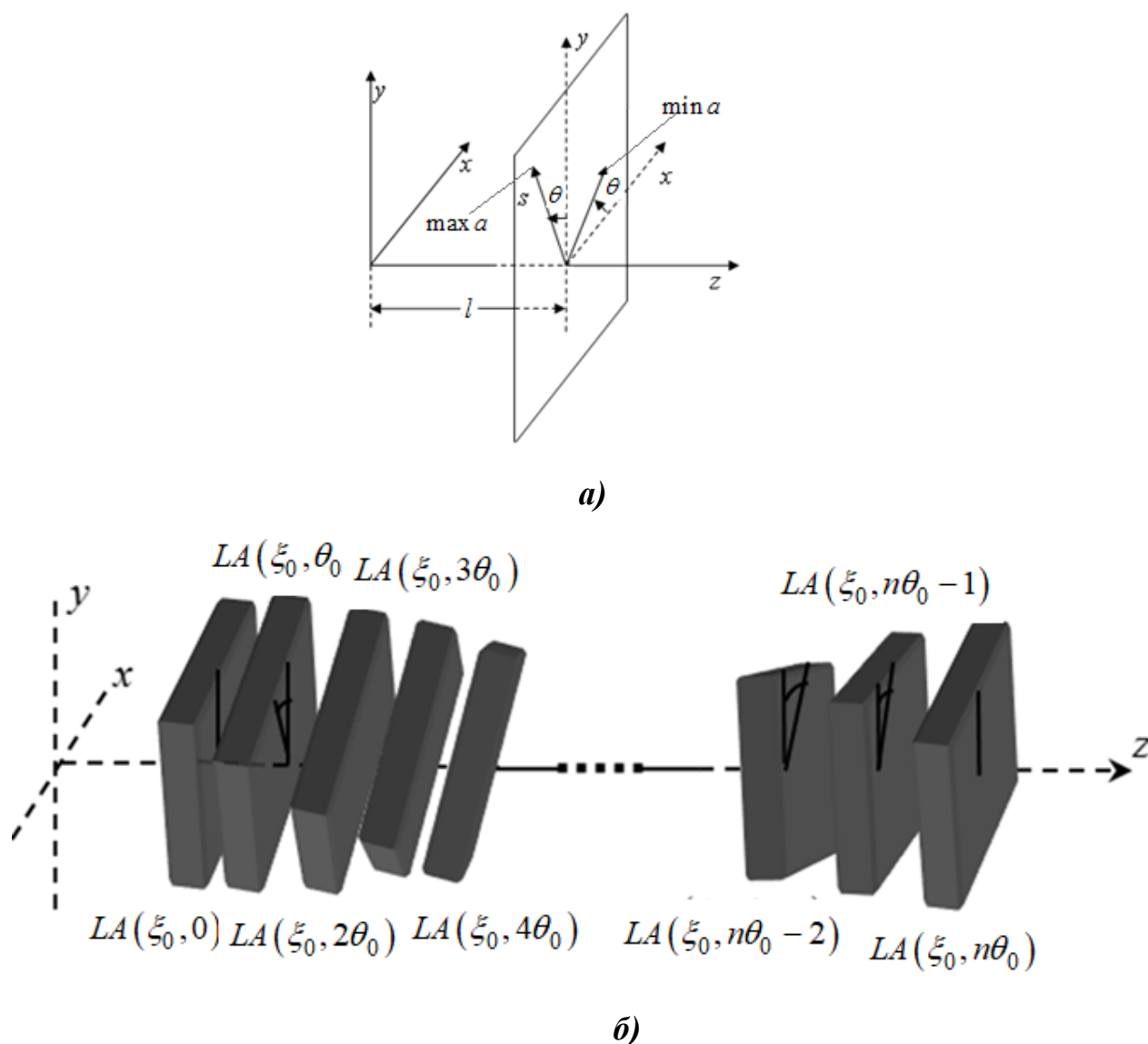


Рис.3.36. Еквівалентне представлення закрученого середовища із лінійною амплітудною анізотропією: а) один мономолекулярний шар на відстані  $l$  від вхідної площини, де орієнтацію осі анізотропії можна визначити як  $\theta = \theta_0 z$ ,  $\max \alpha$  і  $\min \alpha$  - осі найбільшого й найменшого поглинання середовища у цій площині, б) послідовність лінійних поляризаторів.

На основі інтегральної матриці Джонса (3.52) та (1.35) оцінюємо еволюцію параметра неоднорідності середовища вздовж координати  $z$  залежно від питомих значень  $\xi_0$  та  $\theta_0$ . Геометрична інтерпретація отриманої залежності представлена на Рис.3.37.

Як можна бачити із Рис.3.37, у цьому класі середовищ власні поляризації є ортогональними тільки у деяких точках, положення яких визначаються конкретними питомими значеннями параметрів анізотропії.

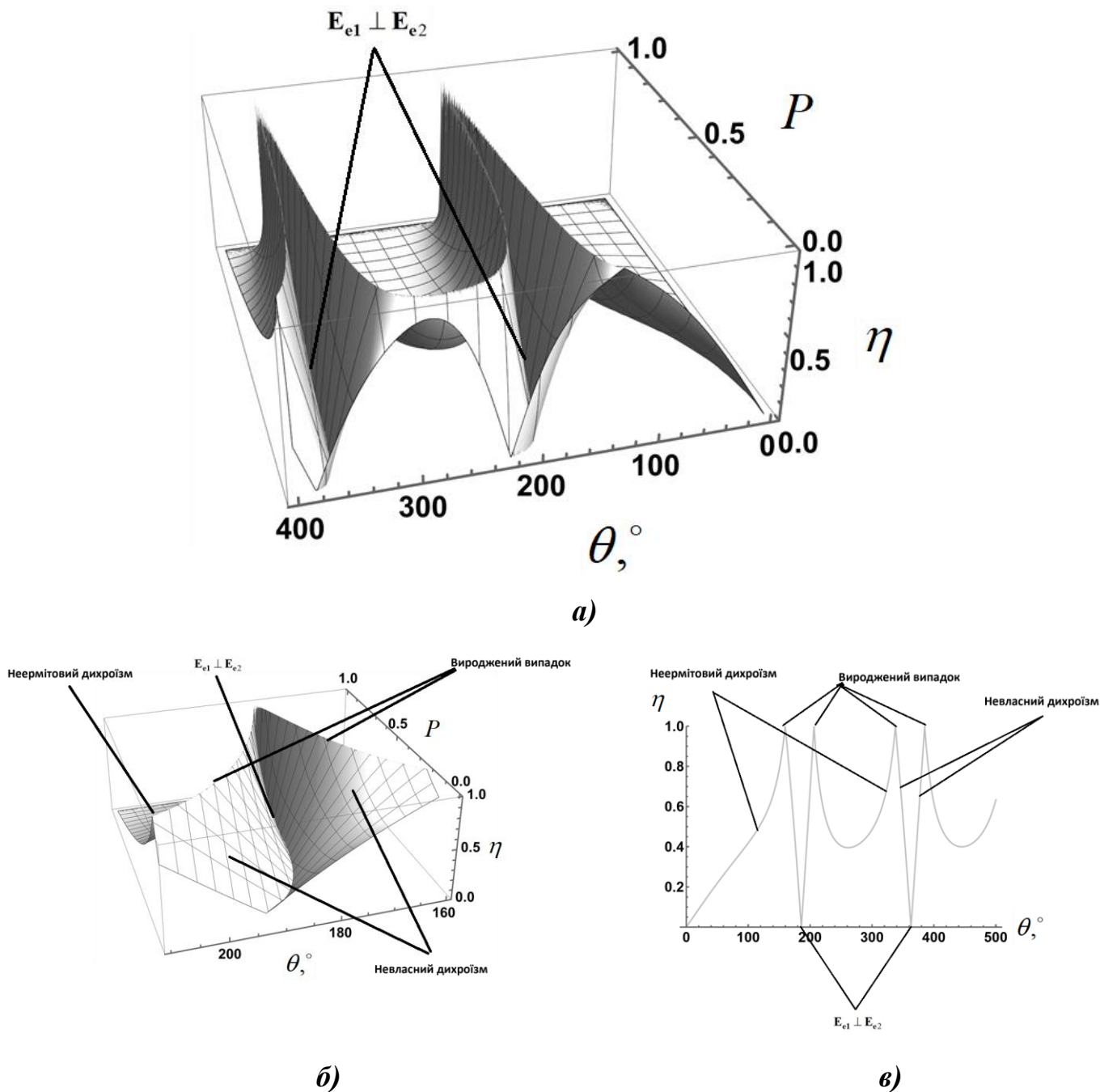


Рис.3.37. Геометрична інтерпретація залежності параметра неоднорідності від параметрів анізотропії закрученого середовища із лінійною амплітудною анізотропією. а) на відстані  $z$ , на якій закручена структура середовища має більше двох повних обертів, б) детальний аналіз складної анізотропії, в) випадок  $P = 0,2$ . Тут враховано, що  $\xi_0 z = -\ln(P)$ ,  $\alpha = \alpha_0 z$ .

Загалом можна виділити такі характерні чотири випадки: а) ортогональні власні поляризації при  $\eta = 0$ , б) випадок виродженої анізотропії при  $\eta = 1$ , в) випадок невласного дихроїзму, г) випадок неермітового дихроїзму.

Зазначимо, що випадки закручених середовищ зі складною анізотропією молекулярних шарів були досліджені раніше в [53]. Зокрема, у [53] аналізувалися модуль відношення власних чисел, а також азимути й кути еліптичності власних поляризацій як функції параметрів анізотропії середовища. Однак, аналіз зазначених співвідношень в [53] не дав можливості виявити випадок ортогональних власних поляризацій, що підкреслює цінність параметра неоднорідності для аналізу власних поляризацій середовищ.

2) *Закручене середовище з еліптичною амплітудною анізотропією.*

У зазначеному класі середовищ молекулярні шари характеризуються одночасно наявністю лінійної і циркулярної амплітудної анізотропії, що загалом робить середовище еліптично амплітудною анізотропним. Питоме значення анізотропії (відносне поглинання) при цьому визначається як  $\kappa_0 = \sqrt{\xi_0^2 + r_0^2}$ , де  $\xi_0$  і  $r_0$  - відносне поглинання лінійної та циркулярної частини анізотропії середовища, відповідно. Питомий поворот осі анізотропії середовища -  $\theta_0$  (Рис.3.35).

Диференційна матриця Джонса даного середовища матиме вигляд [53]:

$$N = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -r_0 & \xi_0 e^{2i\theta_0 z} \\ \xi_0 e^{-2i\theta_0 z} & r_0 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

Яка записана в циркулярному базисі [7].

Представляючи дане середовище послідовністю еліптичних поляризаторів (поляризаційних пристроїв, які пропускають одну еліптичну поляризацію і поглинають іншу), з відносним поглинанням  $\kappa_0$ , і повернутих один відносно одного на кут  $\theta_0$  (Рис.3.38), можемо отримати інтегральну матрицю Джонса (3.54).

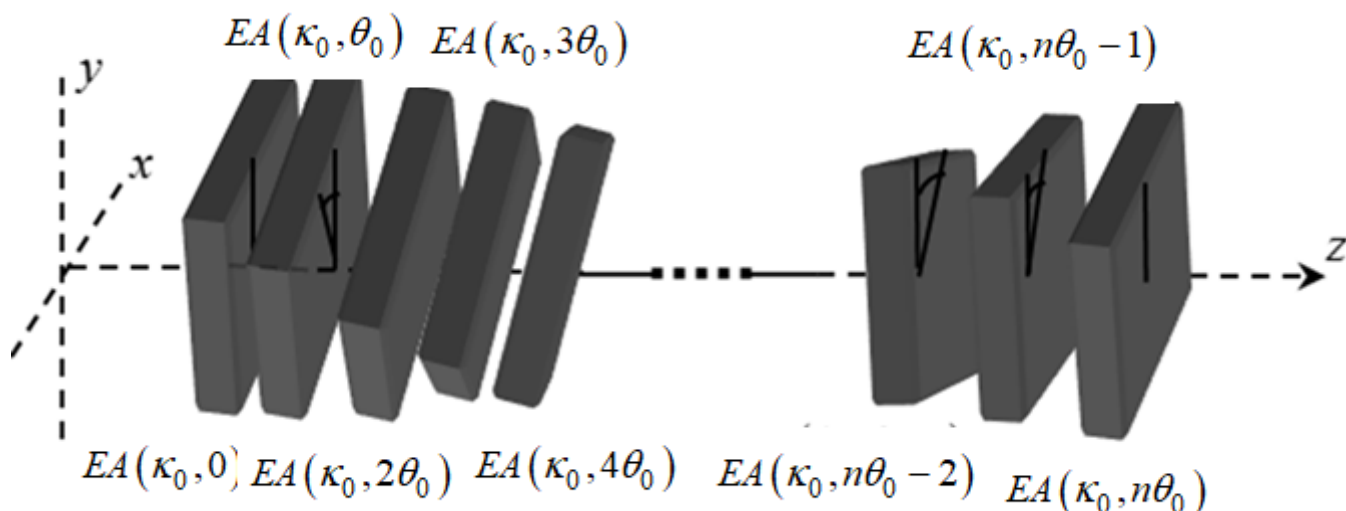


Рис.3.38. Еквівалентне представлення закрученого середовища з еліптичною амплітудною анізотропією послідовністю еліптичних поляризаторів.

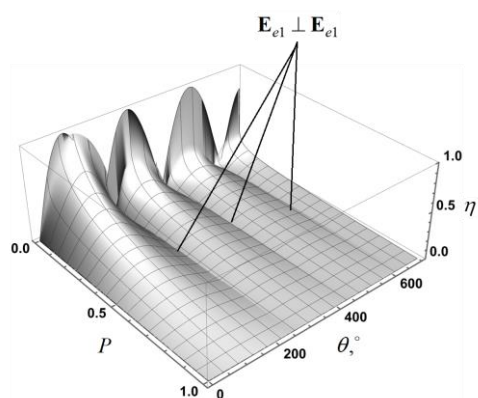
$$T = \frac{1}{A_4} \begin{bmatrix} A_4 c_{\theta_0 z} c_{zA_4/2} + (\xi_0 c_{\theta_0 z} + (-ir_0 + 2\theta_0) s_{\theta_0 z}) s_{zA_4/2} \\ A_4 c_{zA_4/2} s_{\theta_0 z} + (\xi_0 s_{\theta_0 z} + i(r_0 + 2i\theta_0) c_{\theta_0 z}) s_{zA_4/2} \\ -A_4 c_{zA_4/2} s_{\theta_0 z} + (\xi_0 s_{\theta_0 z} + (-ir_0 + 2\theta_0) c_{\theta_0 z}) s_{zA_4/2} \\ A_4 c_{\theta_0 z} c_{zA_4/2} - (\xi_0 c_{\theta_0 z} + i(r_0 + 2i\theta_0) s_{\theta_0 z}) s_{zA_4/2} \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

де використано наступні заміни:  $A_4 = \sqrt{\xi_0^2 + 4(r_0 + i\theta_0)^2}$ ,  $c_x = \cos(x)$ ,  $s_x = \sin(x)$ .

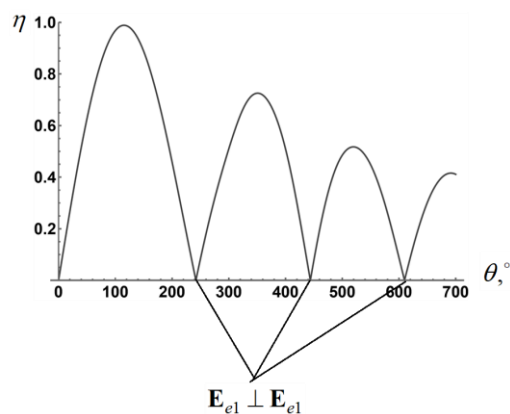
На основі інтегральної матриці Джонса (3.54) та (1.35) оцінюємо еволюцію параметра неоднорідності середовища вздовж координати  $z$  залежно від питомих значень  $\kappa_0$  та  $\theta_0$ . Геометрична інтерпретація отриманої залежності представлена на Рис.3.39.

Як можна бачити із Рис.3.39а, у цьому класі середовищ за певних значень параметрів анізотропії (на певній відстані  $z$  від початкової площини при заданому значенні  $P$  і  $R$ ) реалізуються випадок ортогональних власних поляризацій. З Рис.3.39б випливає, що збільшення величини параметра  $P$  призводить до того, що коливання параметра неоднорідності з координатою  $z$  асимптотично прямують до

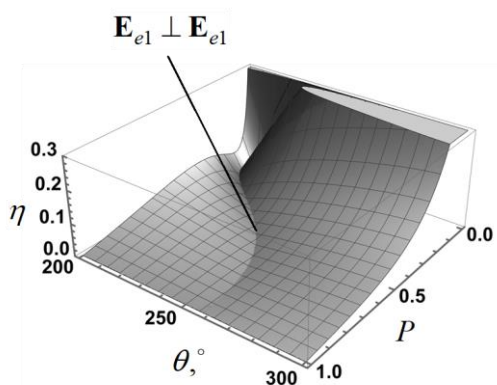
значення  $\eta = 0$ , яке реалізується при  $P = 1$  (випадок відсутності лінійної амплітудної анізотропії). Це випадок однорідного середовища з циркулярною амплітудною анізотропією і ортогональними власними поляризаціями. З Рис.3.39в-е випливає, що збільшення величини  $R$  призводить, до того, що геометричне місце точок залежності  $\eta = f(P, \theta)$ , яке відповідає ортогональним власним поляризаціям, перетворюється із кривої в пряму, а отже, параметр неоднорідності  $\eta$  не залежить від  $P$  при  $R = \pm 1$ .



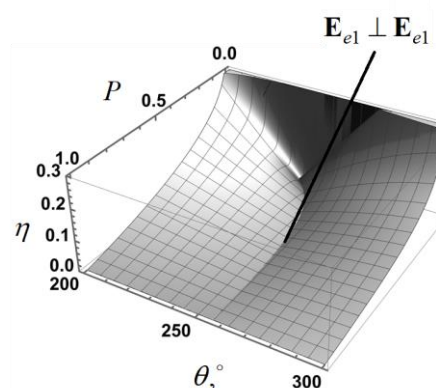
а)



б)



в)



г)

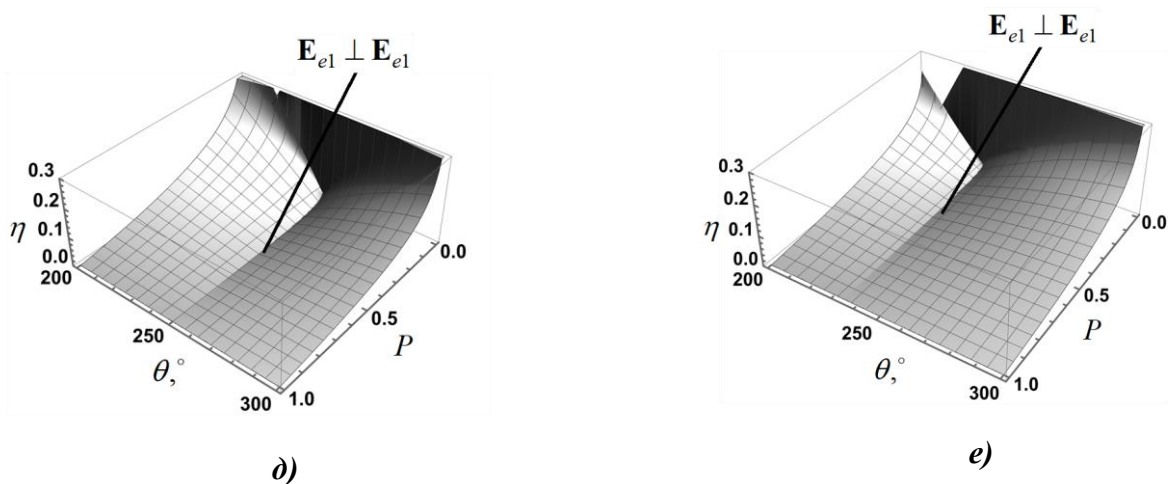


Рис.3.39. Залежності параметра неоднорідності від параметрів анізотропії закрученого середовища з еліптичною амплітудною анізотропією: а) на відстані  $z$ , на якій закручена структура середовища має більше двох повних обертів при  $R=0,3$ , б) випадок  $P=0,001, R=0,3$  в) випадок  $R=0,1$ , г)  $R=0,3$ , д)  $R=0,6$ , е)  $R=0,9$ . Тут враховано, що  $\xi_0 z = -\ln(P)$ ,  $r_0 z = 2 \operatorname{arcth}(R)$ ,  $\alpha = \alpha_0 z$ .

3) *Закручене середовище з лінійною фазовою та амплітудною анізотропією.*

У такому випадку загальна анізотропія середовища формується закрученими шарами з одночасно лінійною фазовою та амплітудною анізотропією. При цьому питома значення фазової анізотропії -  $\delta_0$ , а питома відносна поглинання амплітудної анізотропії -  $\xi_0$ . У загальному випадку осі фазової та амплітудної анізотропії не співпадають ( $\alpha_0 \neq \theta_0$ ), однак, як показано в [53], розрахувати інтегральну матрицю Джонса для даного класу середовищ можливо лише у випадку, коли осі фазової і амплітудної анізотропії співпадають ( $\alpha_0 = \theta_0$ ). Тому далі аналізуватимемо саме цей випадок Рис.3.35.

Поляризаційні властивості даного середовища описуються диференційною матрицею Джонса [53]:

$$N = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (i\delta_0 + \xi_0)e^{2i\theta_0 z} \\ (i\delta_0 + \xi_0)e^{-2i\theta_0 z} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

яка записана в циркулярному базисі [7].

Еквівалентне представлення середовища послідовністю елементів *LPLA*, що характеризуються властивостями лінійної фазової пластинки з відносним фазовим зсувом  $\delta_0$ , і лінійного поляризатора з відносним поглинанням  $\xi_0$ , осі анізотропії яких співпадають, але повертаються для кожного наступного елемента на кут  $\theta_0$ , наведено на Рис.3.40.

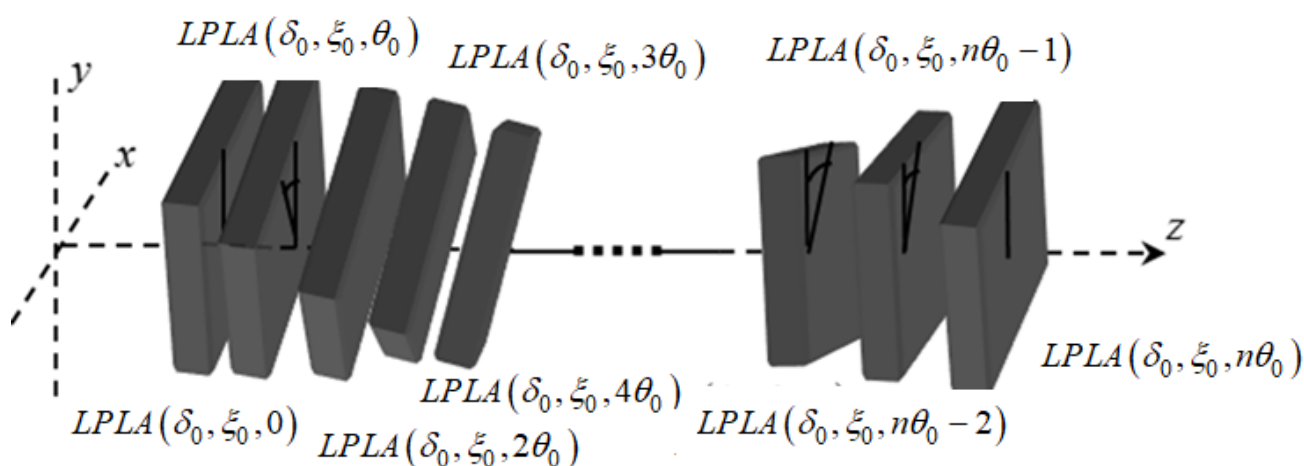


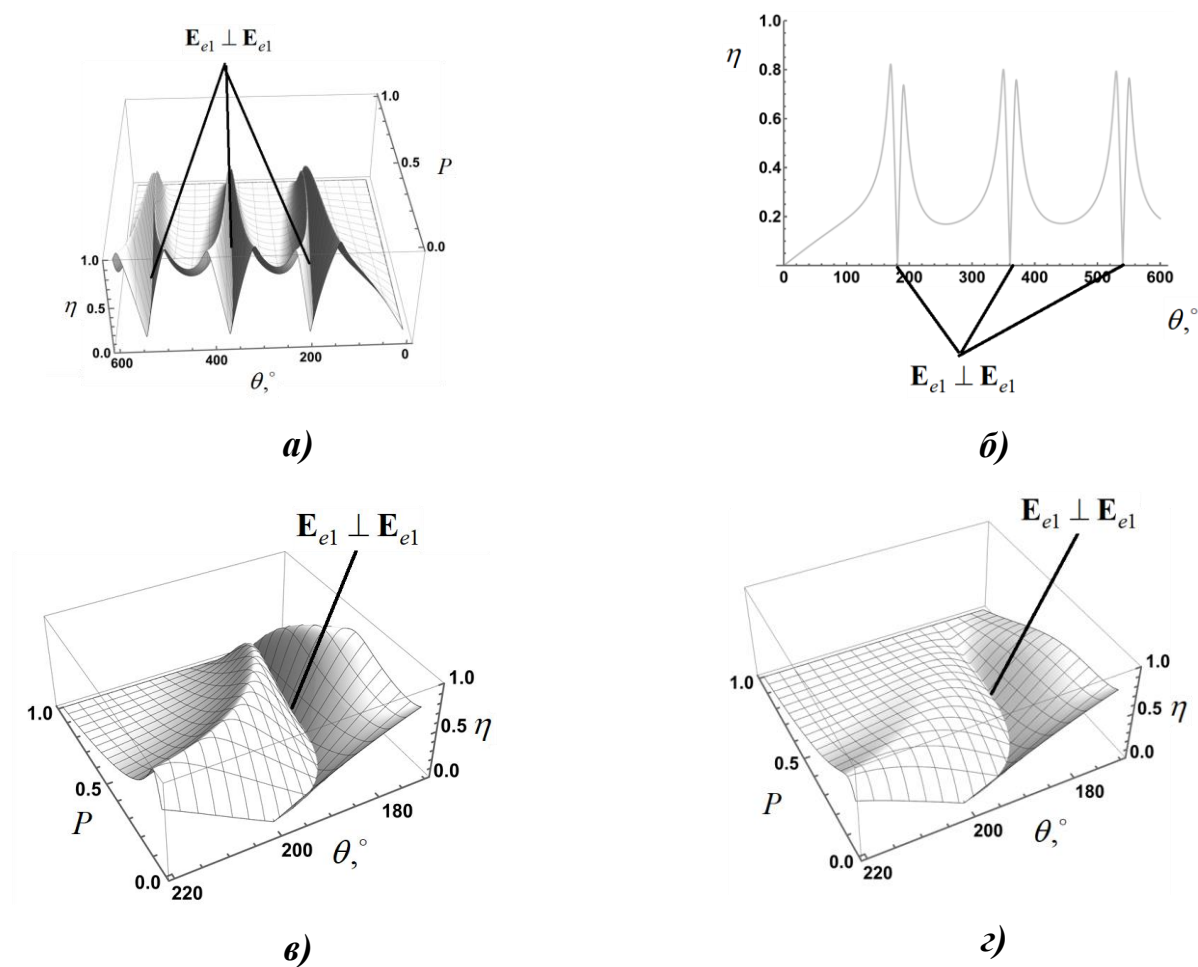
Рис.3.40. Еквівалентне представлення закрученого середовища із лінійною фазовою та амплітудною анізотропією послідовністю елементів, що являють собою одночасно фазову пластинку і поляризатор.

Інтегральна матриця Джонса, яка розраховується із диференційної матриці (3.55) за допомогою методу [12] має вигляд:

$$T = \frac{1}{A_5} \begin{bmatrix} A_5 c_{\theta_0 z} c_{zA_5/2} + \left( (i\delta_0 + \xi_0) c_{\theta_0 z} + 2\theta_0 s_{\theta_0 z} \right) s_{zA_5/2} \\ A_5 c_{zA_5/2} s_{\theta_0 z} - i \left( (i\delta_0 + \xi_0) s_{\theta_0 z} - 2\theta_0 c_{\theta_0 z} \right) s_{zA_5/2} \\ -A_5 c_{zA_5/2} s_{\theta_0 z} + i \left( (i\delta_0 + \xi_0) s_{\theta_0 z} + 2\theta_0 c_{\theta_0 z} \right) s_{zA_5/2} \\ A_5 c_{\theta_0 z} c_{zA_5/2} - \left( -(i\delta_0 + \xi_0) c_{\theta_0 z} + 2\theta_0 s_{\theta_0 z} \right) s_{zA_5/2} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

де використано наступні заміни:  $A_5 = \sqrt{-\left( (\delta_0 - i\xi_0)^2 + 4\theta_0^2 \right)}$ ,  $c_x = \cos(x)$ ,  $s_x = \sin(x)$ .

Як і у попередніх випадках, підставимо елементи інтегральної матриці Джонса (3.56) у рівняння (1.35) для параметра неоднорідності  $\eta$ . Геометрична інтерпретація залежності еволюції параметра неоднорідності середовища вздовж координати  $z$  від питомих значень  $\delta_0$ ,  $\xi_0$  та  $\theta_0$ , представлена на Рис.3.41.



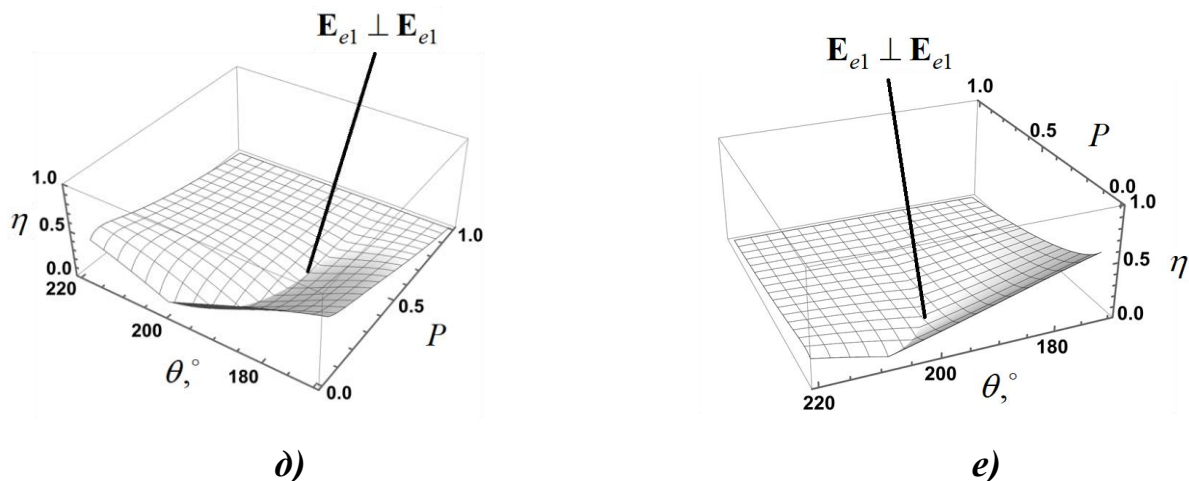


Рис.3.41. Геометрична інтерпретація залежності параметра неоднорідності від параметрів анізотропії закрученого середовища із лінійною фазовою та амплітудною анізотропією: а) на відстані  $z$ , на якій закручена структура середовища має більше двох повних обертів при  $\delta = 10^\circ$ , б) випадок  $\delta = 10^\circ, P = 0,5$  в) випадок  $\delta = 10^\circ$ , г)  $\delta = 40^\circ$ , д)  $\delta = 80^\circ$ , е)  $\delta = 160^\circ$ . Тут враховано, що  $\xi_0 z = -\ln(P)$ ,  $\delta = \delta_0 z$ ,  $\alpha = \alpha_0 z$ .

Як можна бачити із Рис.3.41а, у цьому класі середовищ за певних значень параметрів анізотропії (на певній відстані  $z$  від початкової площини при заданому значенні  $P$  і  $\delta$ ) реалізуються випадок ортогональних власних поляризацій. З Рис.3.41б впливає, що збільшення величини параметра  $P$  призводить до того, що коливання параметра неоднорідності з координатою  $z$  асимптотично прямують до значення  $\eta = 0$ , яке реалізується при  $P = 1$  (випадок відсутності лінійної амплітудної анізотропії). Це випадок однорідного середовища з лінійною фазовою анізотропією і ортогональними власними поляризаціями. З Рис.3.39в-е впливає, що збільшення величини  $\delta$  призводить, до того, що геометричне місце точок залежності  $\eta = f(P, \theta)$ , яке відповідає ортогональним власним поляризаціям, перетворюється із кривої в пряму, а отже, параметр неоднорідності  $\eta$  не залежить від  $P$  при  $\delta = 180^\circ$  [102,104,107].

### Висновки до розділу 3

Аналіз властивостей довільного анізотропного середовища у термінах полярної моделі показав, що для ортогональності його власних поляризацій повинна виконуватись умова (3.2). Фізичний зміст цієї умови полягає в тому, що для її виконання власні поляризації ермітової полярної форми (описує еліптичний дихроїзм або амплітудну анізотропію середовища) та унітарної полярної форми (описує еліптичне двопронезаломлення або фазову анізотропію середовища) мають бути однаковими, тобто, як наслідок, необхідно, щоб були паралельними осі еліптичного дихроїзму та еліптичного двопронезаломлення (3.5). Наведений висновок справджується як для лівої, так і для правої форми полярної моделі. Подібний висновок має місце при представленні середовища в рамках однорідної моделі. Зокрема, в однорідній моделі мова йде про паралельність осей анізотропії лінійного дихроїзму та лінійного двопронезаломлення. При описі середовища в рамках узагальненої моделі паралельність осей лінійного дихроїзму та лінійного двопронезаломлення не є необхідною для ортогональності власних поляризацій середовища.

Таким чином, як полярна, так і однорідна моделі однозначно описують властивості анізотропних середовищ з ортогональними власними поляризаціями.

Встановлено, що для середовища з виродженою анізотропією виконується умова (3.7). При цьому права та ліва форми полярної моделі для середовища з виродженою анізотропією характеризуються однаковим власним числом (3.10), але різними власними поляризаціями (див. (3.11), (3.12), а також, Рис. 3.1). Отже, середовище з виродженою анізотропією неоднозначно описується у термінах полярної моделі.

Аналіз модуля відношення власних чисел як функції параметрів анізотропії середовища показав, що як в рамках полярної моделі, так і в рамках однорідної та узагальненої моделей, можуть бути описані середовища з неермітовим і невласним дихроїзмом.

Геометричний аналіз параметра неоднорідності та кута між власними поляризаціями як функцій параметрів анізотропії середовища дозволив встановити і порівняти умови існування неермітового, невласного дихроїзмів та виродженої анізотропії, а також умови ортогональності власних поляризацій. Зокрема, зазначений аналіз дозволив показати, що у класі середовищ з двома видами анізотропії в рамках підходу на основі теореми полярного розкладу у середовищі із комбінацією лінійної фазової та амплітудної анізотропії не реалізується три складних типи анізотропії на відміну від однорідного підходу та підходу на основі узагальненої теореми еквівалентності. Однак, за умов співпадіння осей анізотропії в усіх трьох підходах реалізуються ортогональні власні поляризації.

Було показано, що для класу середовищ із трьома видами анізотропії три складних типи анізотропії не реалізуються в рамках однорідного підходу та підходу на основі узагальненої теореми еквівалентності, тоді як у рамках підходу на основі теореми полярного розкладу існує два класи середовищ, у яких реалізуються три складних типи анізотропії. Однак, лише для підходу на основі узагальненої теореми еквівалентності для класу середовищ з трьома видами анізотропії реалізується випадок ортогональних власних поляризацій. У випадку довільного однорідного анізотропного середовища в жодному підході не реалізуються три складних типи анізотропії, однак реалізуються випадки ортогональних власних поляризацій.

## РОЗДІЛ 4.

### НЕОДНОЗНАЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПОЛЯРИМЕТРІЇ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ АНІЗОТРОПНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ПРИРОДНИХ ОБ'ЄКТІВ

Матрична оптична поляриметрия останнім часом привернула значну увагу завдяки своєму потенціалу бути ефективним інструментом діагностики з можливим застосуванням у різноманітних біомедичних дослідженнях [109,110]. У цьому контексті дуже важливо дослідити неоднозначність розв'язку оберненої задачі при кількісній оцінці поляризаційних властивостей різних класів середовищ зі складною анізотропією.

У цьому розділі розглядаються особливості неоднозначності розв'язку оберненої задачі поляриметрії на основі полярної моделі [57] і узагальненої теореми еквівалентності [55] для низки класів природних об'єктів. Об'єктами в цьому дослідженні були листя ячменю, які розрізнялися умовами вирощування, освітлення і ще одна група рослин була генно модифікованою (опис зразків наведений в пункті 4.2). Важливим у цьому випадку було те, що структурні і морфологічні зміни у вказаних груп рослин не ідентифікувалися візуально.

Відмітимо, що за наявності лише якогось одного з видів анізотропії обидва методи дають однакову інформацію про досліджуваний об'єкт. Така ситуація спостерігається і у випадку еліптичної фазової анізотропії (перша часткова теорема еквівалентності Джонса [47]). Виникнення неоднозначності слід очікувати за наявності одночасно як фазової, так і амплітудної анізотропії.

Хоча поляризаційні параметри, отримані за допомогою обох методів розкладання експериментальних матриць Мюллера, можна використовувати як корисні метрики для характеристики різних оптичних середовищ і їхніх станів, у випадку складних анізотропних середовищ, таких як біологічні тканини, подібний порівняльний аналіз може надати додаткову і більш детальну інформацію.

Крім того, дане дослідження підтверджує використання матричної поляриметрії з відповідною технікою розкладання як ефективного інструменту діагностики та визначення характеристик у сфері біомедичних досліджень і різних інших дисциплін.

#### 4.1. Геометрія експерименту і аналіз експериментальних матриць Мюллера

Схема Мюллер-поляриметра, який використовується в цьому експерименті, представлена на рисунку 4.1. Пучки світла від лінійно поляризованого He-Ne лазера ( $\lambda = 632,8 \text{ нм}$ ) проходять через генератор поляризаційного стану (ГПС), який дозволяє отримувати задані стани поляризації зондуючого світла, що нормально падає на досліджуваний зразок. Світло з обраною поляризацією взаємодіє з листком, у результаті чого розсіюється в задній і, проходячи листок, у передній півпростори. Розсіяне світло потрапляє у аналізатор стану поляризації (АСП) і вимірюється детектором.

АСП – це поляриметр Стокса, що дозволяє вимірювати як повний вектор Стокса, так і його окремі параметри. ГПС і АСП складаються з керованих фазових пластинок та ідеальних лінійних поляризаторів, які здатні аналізувати стан поляризації розсіяного випромінювання.

Більш детальну інформацію про Мюллер-поляриметр, що використовується у цьому експерименті, можна знайти в [30,31].

Похибка визначення елементів матриці Мюллера оцінювалась експериментально під час калібрування поляриметра і упродовж проведення експерименту. З цією метою здійснювалися порівняння виміряних елементів матриць Мюллера з їх табличними значеннями в так званому безоб'єктному режимі вимірювання. Це пов'язано з тим, що матриця Мюллера, що вимірюється в цьому режимі, є діагональною матрицею, яка відома з максимально можливою точністю. Крім того, для калібрування і оцінки точності вимірювалися матриці Мюллера інших тестових об'єктів, які відомі з високою точністю: призмові поляризатори та фазові пластинки промислового виробництва [4,5].

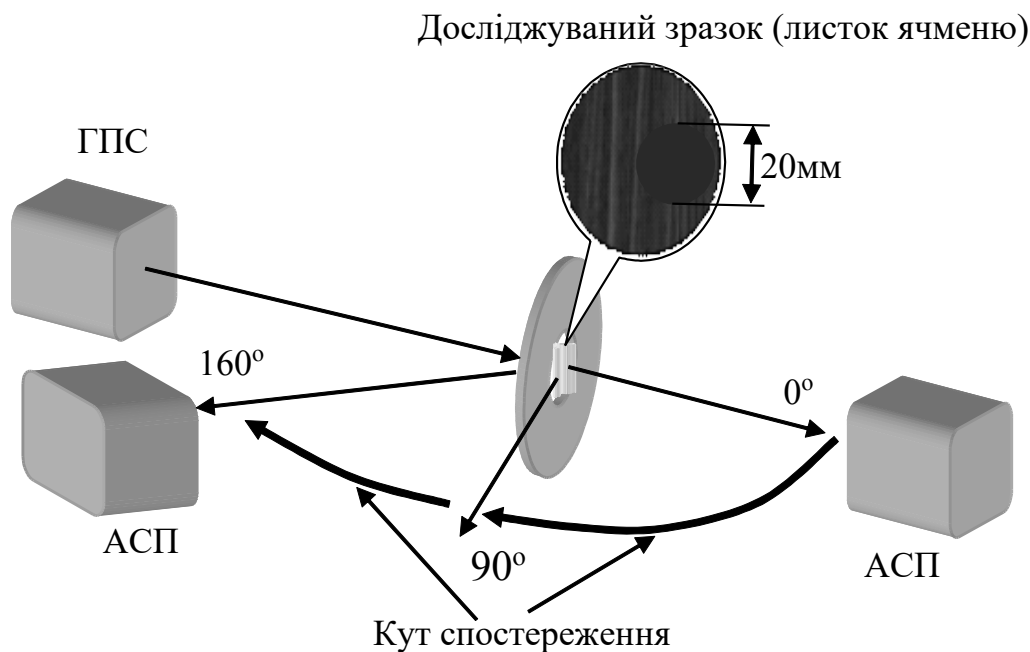


Рис.4.1. Геометрія експерименту.

Похибка вимірювання матриці Мюллера  $\delta\mathbf{M}$  оцінювалася за формулою:

$$\delta\mathbf{M} = \frac{\|\mathbf{M}_{theor} - \mathbf{M}_{exp}\|}{\|\mathbf{M}_{theor}\|}, \quad (4.1)$$

де  $\mathbf{M}_{theor}$  і  $\mathbf{M}_{exp}$  - точно відомі (табличні) й виміряні (нормовані на елемент  $m_{11}$ ) матриці Мюллера відповідного тестового об'єкта;  $\|\cdot\|$  - метрична норма [7] виду

$$\|\mathbf{M}\| = \left( \sum_{i,j} |m_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

Похибка в нашому експерименті не перевищувала 2 %.

Використовуючи Мюллер-поляриметр, наведений вище, були здійснені вимірювання повних матриць Мюллера для всіх трьох груп листків ячменю, описаних у пункті 4.2. Вхідний лазерний промінь був розширений до діаметра 20 мм

(див. Рис. 4.1), щоб виключити вплив локальної неоднорідності поверхні зразків на розсіювання світла, а також можливий термічний вплив світла на зразки. Останнє підтверджується розрахунковими оцінками освітленості поверхні листка та експериментально [110]. Зондування зразків під час вимірювання матриць Мюллера проводилося з боку адаксіальної поверхні листків, як це відбувається при освітленні сонячним випромінюванням. При цьому зразок був орієнтований в поляриметрі як показано на Рис. 4.1.

Особливий інтерес для вирішення задач цього розділу представляє аналіз детермінованих матриць Мюллера, які отримуються у розкладеннях (4.6), (4.7) та (4.9). Цей інтерес ґрунтується на нерівності діагональних елементів та ненульових значеннях недиагональних матричних елементів  $m_{12}$ ,  $m_{21}$ ,  $m_{23}$ ,  $m_{32}$ ,  $m_{34}$  та  $m_{43}$  (див. Рис. А.1 і А.2), і, як наслідок, залежності вихідної інтенсивності від вхідної поляризації. На Рис. 4.2, як приклад, наведені залежності вихідної інтенсивності від вхідного стану поляризації світла листком ячменю звичайного (*Hordeum vulgare*) сорту *Cesaer* [110].

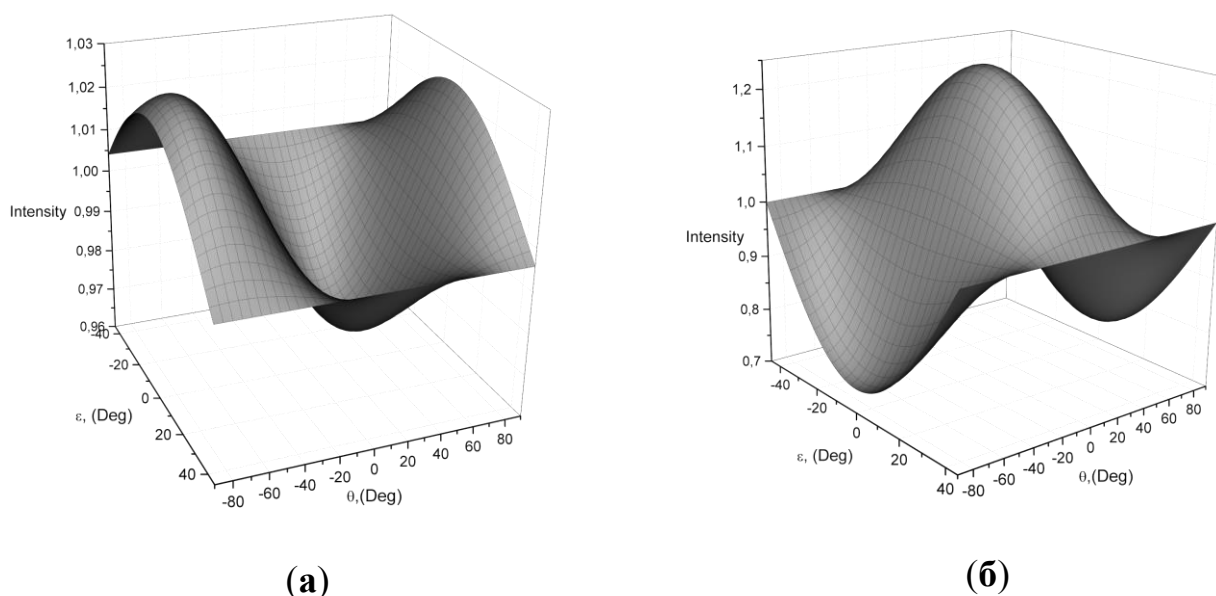


Рис.4.2. Залежність інтенсивності розсіяного світла генномодифікованим листком ячменю звичайного (*Hordeum vulgare*) сорту *Cesaer*: а) – пряме розсіювання (кут спостереження  $0^\circ$ ), б) – зворотне розсіювання (кут спостереження  $120^\circ$ ).

У розділі 1 дисертації ми розглянули методи матричної поляриметрії у випадку, коли при взаємодії поляризованого світла з досліджуваним об'єктом не виникає деполаризації. Проте відомо [36], що рослинні листки сильно деполаризують вхідне світло. На Рис 4.3 як приклад, що яскраво ілюструє цей факт, наведені залежності ступеню деполаризації  $DoP$  розсіяного світла листком ячменю звичайного (*Hordeum vulgare*) сорту *Cesaer* [110].

Далі в цьому пункті коротко розглянута Мюллер-поляриметрія деполаризуючих об'єктів з метою продемонструвати як з матриці Мюллера деполаризуючого об'єкту може бути отримана детермінована матриця Мюллера, що описує анізотропні властивості цього об'єкту.

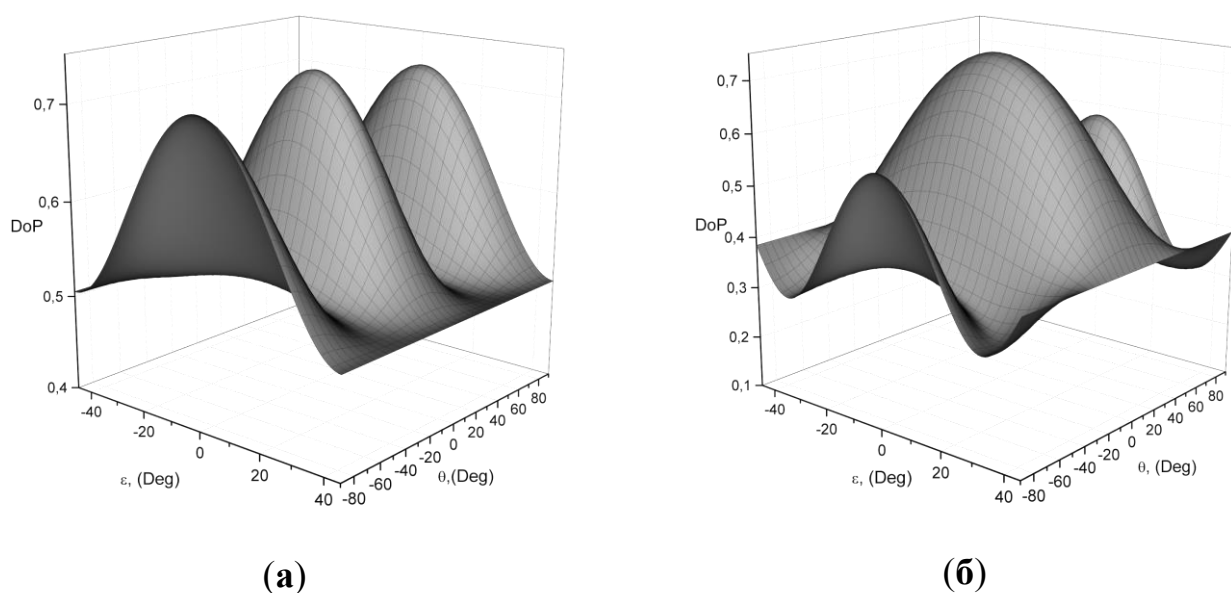


Рис. 4.3. Залежність ступеня деполаризації розсіяного світла генномодифікованим листком ячменю звичайного (*Hordeum vulgare*) сорту *Cesaer*: а) – пряме розсіювання (кут спостереження  $0^\circ$ ), б) – зворотне розсіювання (кут спостереження  $120^\circ$ ).

Перший варіант адитивного розкладення експериментальної деполаризуючої матриці Мюллера був запропонований на основі концепції матриці когерентності Клауда [111]. На сьогодні концепція матриці когерентності широко та ефективно використовується в різних задачах сучасної поляриметрії [112,113]. Ця концепція

виявилася особливо перспективною, коли деполяризуючу матрицю Мюллера доцільно представити у вигляді опуклої суми зважених детермінованих (недеполяризуючих) матриць Мюллера.

Матриця когерентності Клауда  $\mathbf{J}$  може бути отримана з відповідної матриці Мюллера  $\mathbf{M}$  таким чином [111]:

$$\begin{aligned}
 j_{11} &= 1/4(m_{11} + m_{22} + m_{33} + m_{44}); & j_{22} &= 1/4(m_{11} + m_{22} - m_{33} - m_{44}); \\
 j_{33} &= 1/4(m_{11} - m_{22} + m_{33} - m_{44}); & j_{44} &= 1/4(m_{11} - m_{22} - m_{33} + m_{44}) \\
 j_{14} &= 1/4(m_{14} - i m_{23} + i m_{32} + m_{41}); & j_{23} &= 1/4(i m_{14} + m_{23} + m_{32} - i m_{41}); \\
 j_{32} &= 1/4(-i m_{14} + m_{23} + m_{32} + i m_{41}); & j_{41} &= 1/4(m_{14} + i m_{23} - i m_{32} + m_{41}); \\
 j_{12} &= 1/4(m_{12} + m_{21} - i m_{34} + i m_{43}); & j_{21} &= 1/4(m_{12} + m_{21} + i m_{34} - i m_{43}); \\
 j_{34} &= 1/4(i m_{12} - i m_{21} + m_{34} + m_{43}); & j_{43} &= 1/4(-i m_{12} + i m_{21} + m_{34} + m_{43}) \\
 j_{13} &= 1/4(m_{13} + m_{31} + i m_{24} - i m_{42}); & j_{31} &= 1/4(m_{13} + m_{31} - i m_{24} + i m_{42}) \\
 j_{24} &= 1/4(-i m_{13} + i m_{31} + m_{24} + m_{42}); & j_{42} &= 1/4(i m_{13} - i m_{31} + m_{24} + m_{42}) .
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Можна бачити, що матриця когерентності  $\mathbf{J}$  є за визначенням ермітовою і, отже, завжди має чотири дійсні власні значення. Останнє визначає умову фізичної відтворюваності матриці Мюллера  $\mathbf{M}$ , а саме, для цього матриця когерентності  $\mathbf{J}$ , яка отримана з даної  $\mathbf{M}$ , повинна мати всі чотири невід'ємні власні значення  $\lambda_i$  [18].

Тоді вихідну довільну деполяризуючу матрицю Мюллера  $\mathbf{M}$  можна представити як

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k \mathbf{M}_k, \tag{4.4}$$

де  $\mathbf{M}_k$  детерміновані (недеполяризуючі) матриці Мюллера, які можуть бути отримані з відповідних матриць Джонса [3,19,20],  $\lambda_k$  - власні числа матриці когерентності Клауда  $\mathbf{J}$ .

Рівняння (4.4) і є так зване адитивне розкладення Клауда довільної матриці Мюллера.

Матриці Джонса, що відповідають детермінованим матрицям Мюллера в рівнянні (4.4), можна отримати як:

$$\begin{aligned} t_{11}^{(k)} &= \Psi_1^{(k)} + \Psi_2^{(k)}, & t_{12}^{(k)} &= \Psi_3^{(k)} - i\Psi_4^{(k)} \\ t_{21}^{(k)} &= \Psi_3^{(k)} + i\Psi_4^{(k)}, & t_{22}^{(k)} &= \Psi_1^{(k)} - \Psi_2^{(k)} \end{aligned}, \quad (4.5)$$

де  $\Psi^{(k)} = (\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \Psi_3 \quad \Psi_4)_k^T$  -  $k$ -й власний вектор матриці когерентності  $\mathbf{J}$ .

Рівняння (4.4) доцільно переписати в такому вигляді [3]:

$$\mathbf{M} = \lambda_1 \mathbf{M}_1 + \sum_{k=2}^4 \lambda_k \mathbf{M}_k = \mathbf{M}_0 + \Delta \mathbf{M}, \quad (4.6)$$

що дозволяє просту фізичну інтерпретацію адитивного розкладення Клауда. Дійсно, матриця  $\mathbf{M}_0$ , що відповідає максимальному власному значенню  $\lambda_{\max}$ , є детермінованою частиною вихідної матриці  $\mathbf{M}$ , яка характеризує анізотропні властивості досліджуваного об'єкта і в загальному випадку містить сім незалежних параметрів. Матриця  $\Delta \mathbf{M}$  є деполаризаційною частиною вихідної матриці  $\mathbf{M}$ , що в загальному випадку містить дев'ять незалежних параметрів [20], які повністю характеризують деполаризацію. Таким чином, у загальному випадку матриця Мюллера має 16 незалежних параметрів, які повністю характеризують анізотропні та деполаризаційні властивості досліджуваного зразка.

Варіант мультиплікативного розкладення довільної деполаризуючої матриці Мюллера, який є природним узагальненням детермінованого полярного розкладення (1.35), був запропонований у [50]. Згідно з [50], полярне розкладення довільної деполаризуючої матриці Мюллера можна представити таким чином:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_\Delta \mathbf{M}_R \mathbf{M}_D, \quad (4.7)$$

де  $\mathbf{M}_R$  і  $\mathbf{M}_D$  – матриці Мюллера унітарної та ермітової полярних форм (див. розділ 1),  $\mathbf{M}_\Delta$  - матриця Мюллера деполяризатора.

Ще раз підкреслимо, що матриці Мюллера унітарної та ермітової полярних форм є детермінованими і характеризуються ортогональними власними поляризаціями та в загальному випадку характеризуються сімома незалежними параметрами. Дійсно, кожна з матриць  $\mathbf{M}_R$  та  $\mathbf{M}_D$  характеризується трьома незалежними параметрами, а також додається параметр, що описує загальну інтенсивність. Відмітимо, що порядок слідування матриць, які описують фазову і амплітудну анізотропію в (4.7) і в розкладенні (1.17) по відношенню до напрямку розповсюдження вхідного світла, є однаковим. Матриця Мюллера деполяризатора  $\mathbf{M}_\Delta$  містить в загальному випадку дев'ять незалежних параметрів.

Явний вид матриць Мюллера унітарної і ермітової полярних форм наведені у розділі 1 (див. співвідношення (1.36)-(1.37)). Матриця Мюллера  $\mathbf{M}_\Delta$  деполяризатора має вигляд:

$$\mathbf{M}_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \vec{\mathbf{0}}^T \\ \overline{\mathbf{P}}_\Delta & \mathbf{m}_\Delta \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

де  $\overline{\mathbf{P}}_\Delta$  - вектор поляризації,  $\mathbf{m}_\Delta$  — симетрична матриця розміром  $3 \times 3$ ;  $\vec{\mathbf{0}}^T$  -  $1 \times 3$  нульовий вектор; верхній індекс  $T$  позначає транспонування вектора або матриці.

Щодо структури матриць деполяризації, відмітимо, що, як матриця  $\Delta\mathbf{M}$  (4.5), так і матриця  $\mathbf{M}_\Delta$  (4.8) загалом містять по дев'ять незалежних параметрів. Дійсно, вектор поляризації  $\overline{\mathbf{P}}_\Delta$  містить три параметри, а симетрична матриця  $\mathbf{m}_\Delta$  – шість параметрів.

Внаслідок непереставності матриць  $\mathbf{M}_\Delta$ ,  $\mathbf{M}_R$  та  $\mathbf{M}_D$ , порядок слідування цих матриць у розкладенні у (4.7) не є, очевидно, єдиним. Аналіз непереставності матриць полярного розкладенні (4.7) та, отже, неоднозначності розв'язків оберненої

задачі поляризації як наслідок некомутативності матриць  $\mathbf{M}_\Delta$ ,  $\mathbf{M}_R$ , та  $\mathbf{M}_D$  можна знайти в [50]. У нашому експерименті ми використовуємо саме варіант розкладення, представлений у рівнянні (4.7).

Ще одне цікаве мультиплікативне розкладення довільної деполаризуючої матриці Мюллера, яке використовується в цьому експерименті для характеризування анізотропних і деполаризуючих властивостей досліджуваних зразків, запропоновано в [25]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{D2} \mathbf{M}_{R2} \mathbf{M}_{dep} \mathbf{M}_{R1}^T \mathbf{M}_{D1}, \quad (4.9)$$

де  $\mathbf{M}_{D1}$ ,  $\mathbf{M}_{D2}$  та  $\mathbf{M}_{R1}$ ,  $\mathbf{M}_{R2}$  – чотири детерміновані матриці Мюллера, які характеризують, відповідно, амплітудну та фазову анізотропію;  $\mathbf{M}_{dep}$  – матриця Мюллера діагонального анізотропного деполаризатора виду:

$$\mathbf{M}_{dep} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Як можна бачити в (4.9), кожна з матриць еліптичних фазової  $\mathbf{M}_{R1}$ ,  $\mathbf{M}_{R2}$  і амплітудної  $\mathbf{M}_{D1}$ ,  $\mathbf{M}_{D2}$  анізотропії містить в загальному випадку по три параметри. Таким чином, загальна кількість детермінованих незалежних параметрів у розкладанні (4.9) загалом дорівнює 12. Матриця деполаризатора  $\mathbf{M}_{dep}$  (4.10) містить 4 параметри.

Якщо діагональні елементи в (4.10) задовольняють  $m_{22} = m_{33} = m_{44} < m_{11}$ , то це матриця Мюллера ізотропного часткового деполаризатора, що характеризується одним параметром деполаризації. Якщо діагональні елементи задовольняють умові  $m_{22} \neq m_{33} \neq m_{44}$ , то це матриця Мюллера анізотропного деполаризатора. Дійсно, у цьому випадку ступінь вихідної поляризації буде різним для різних вхідних поляризацій. У загальному випадку матриця деполаризатора в рівнянні (4.10) може

бути недіагональною. Однак у нашому випадку, як це видно нижче, ці умови не реалізуються. Деталі можна знайти в [110]. Важливою особливістю розкладення (4.9) є те, що внаслідок симетрії воно є єдиним.

При аналізі експериментальних матриць Мюллера деполаризуючих зразків рослинних листків, поряд з матрицями Мюллера деполаризаторів, що отримуються в адитивному та мультиплікативних розкладеннях, розглянутих вище, безсумнівний інтерес представляє аналіз анізотропних властивостей досліджуваних зразків. Це пов'язано з тим, що саме параметри анізотропії є додатковим ефективним полем експериментально спостережуваних метрик для характеризування й ідентифікування зразків і їхніх станів. Крім того, наявність амплітудної анізотропії може суттєво впливати на деполаризацію вхідного світла.

Для аналізу інформації, що міститься в детермінованих матрицях Мюллера, ми використовуємо розкладення (1.17) і (1.35). Як було показано в розділі 2, при використанні розкладення (1.35), фазова та амплітудна анізотропія характеризуються співвідношеннями (2.3) відповідно. Ці параметри, як вони визначені в (2.3), є узагальненими ідентифікаторами амплітудної та фазової анізотропії.

При використанні розкладення (1.17), лінійні та циркулярні фазова та амплітудна анізотропія характеризуються величинами  $\varphi$  (циркулярної фазової анізотропії),  $R$  (циркулярної амплітудної анізотропії),  $\delta$  (лінійної фазової анізотропії),  $P$  (лінійної амплітудної анізотропії) і азимутами  $\alpha$  та  $\theta$  лінійної фазової і амплітудної анізотропії відповідно:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{M_{13}}{M_{12}}\right),$$

$$P = \frac{(M_{11} - M_{12} \cos(2\theta) - M_{13} \sin(2\theta))^2}{M_{11}^2 - (M_{12} \cos(2\theta) - M_{13} \sin(2\theta))^2},$$

$$R = \frac{M'_{11} \pm \sqrt{(M'_{11})^2 - (M'_{14})^2}}{M'_{14}},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{M''_{42}}{-M''_{43}}\right),$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{M''_{42}}{M''_{44} \sin(2\alpha)}\right),$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{2} \left( \frac{M''_{34} M''_{42} - M''_{24} M''_{43}}{M''_{34} M''_{43} + M''_{24} M''_{42}} \right),$$
(4.11)

де  $\mathbf{M}' = \mathbf{M} (\mathbf{M}^{LA})^{-1}$ ,  $\mathbf{M}'' = \mathbf{M}' (\mathbf{M}^{CA})^{-1}$ .

## 4.2. Опис зразків

Листя рослин – це фотосинтетичні хімічні «фабрики», які рослини використовують для виробництва енергетичних речовин (вуглеводів), необхідних для їхнього виживання. Основною хімічною сполукою в цьому контексті є молекули хлорофілу, які містяться в листі в спеціалізованих структурах, які називаються хлоропластами.

Незважаючи на те, що хімічні особливості процесу фотосинтезу відомі давно [1], особливості проходження світла крізь поверхню і товщу листка через складність останнього вивчені недостатньо та продовжують викликати і сьогодні неослабну зацікавленість. Матрична Мюллер-поляриметрия, яка характеризується високою

інформативністю та надзвичайно малим впливом на досліджуваний об'єкт, є дуже привабливою методикою для вивчення процесів взаємодії світла з листям різноманітних рослин [110].

У цьому дослідженні ми представляємо результати дослідження анізотропних властивостей на основі експериментальних матриць Мюллера для трьох груп зразків листя ячменю звичайного (*Hordeum vulgare*): (a) *Chlorina* mutant, (b) *Chlorina* mutant етіюльовані та (c) сорту *Cesaer*. Саме ці позначення досліджуваних груп зразків (a), (b), і (c) будуть використовуватися в подальшому в тексті цього розділу і додатку.

Умови освітлення для етіюлювання рослин мутантного ячменю (*Hordeum vulgare*) відповідали описаним у [114]. Рослини вирощували протягом 14 днів при 25°C з щільністю фотосинтетичного потоку фотонів  $200 \text{ ммоль} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  і фотоперіодом 16 год. Етіюльовані проростки *Hordeum vulgare* вирощували при 25 °C у темряві протягом 7 днів, після чого їх піддавали періодичному освітленню протягом 36 циклів (2 хв. освітлення при потоці  $40 \text{ ммоль} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  і 118 хвилин темряви).

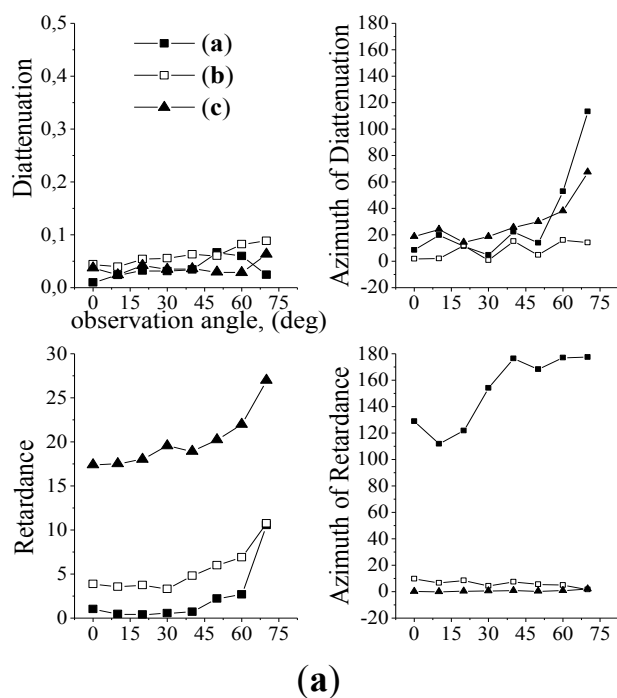
Ці умови освітлення обмежують утворення молекул крохмалю в листі та виробляють великі масиви фотосинтетичних стопок тилакоїдів. Окремі зразки листя, поміщені на вологий фільтрувальний папір, проводили додаткову світлову обробку вольфрамовими галогенними лампами ( $1000 \text{ ммоль} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ). Листя захищали від ІЧ-випромінювання шаром води.

### 4.3. Результати дослідження

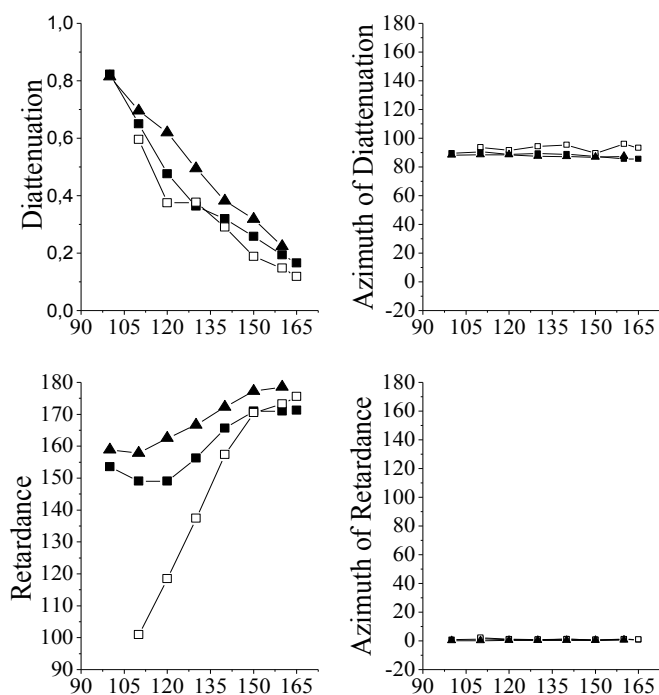
На рисунках 4.4-4.10 представлені параметри анізотропії, які отримані шляхом аналізу детермінованих матриць Мюллера, що отримуються в розкладеннях (4.6), (4.7) і (4.9), на основі розкладень (1.35) і (1.17), для прямого (a) і зворотного (б) розсіювання в залежності від кута спостереження.

Як можна бачити, для прямого та зворотного розсіювання обидва розкладення (1.35) і (1.17) дають дещо схожі результати. За винятком прямого розсіювання, для

якого орієнтації азимутів фазової затримки і лінійної фазової анізотропії відрізняються приблизно на 90 градусів.



(a)



(б)

Рис.4.4. Залежності параметрів анізотропії від кута спостереження для детермінованої матриці Мюллера (4.6), отримані на основі розкладення (1.35) для а) прямого та б) зворотного розсіювання.

Азимут фазової затримки і лінійної фазової анізотропії для групи (а) при кутах спостереження менше 45 градусів є неінформативним через нульове значення величини фазової анізотропії. Найбільші значення величин фазової затримки  $R$  і лінійної фазової анізотропії  $\delta$  спостерігаються для групи (с), але циркулярні амплітудна та фазова анізотропія при цьому відсутні. Слід зазначити, що зміни величини лінійної амплітудної анізотропії  $P$  дещо перевищують відповідні зміни діаттенуації  $D$  залежно від кута спостереження.

Що стосується орієнтації діаттенуації та лінійної амплітудної анізотропії  $\theta$ , то вони відрізняються, як і у випадку фазової анізотропії, приблизно на 90 градусів. Останнє дає змогу при прямому розсіянні впевнено ідентифікувати групи зразків (b) і (с) на основі лінійної амплітудної анізотропії.

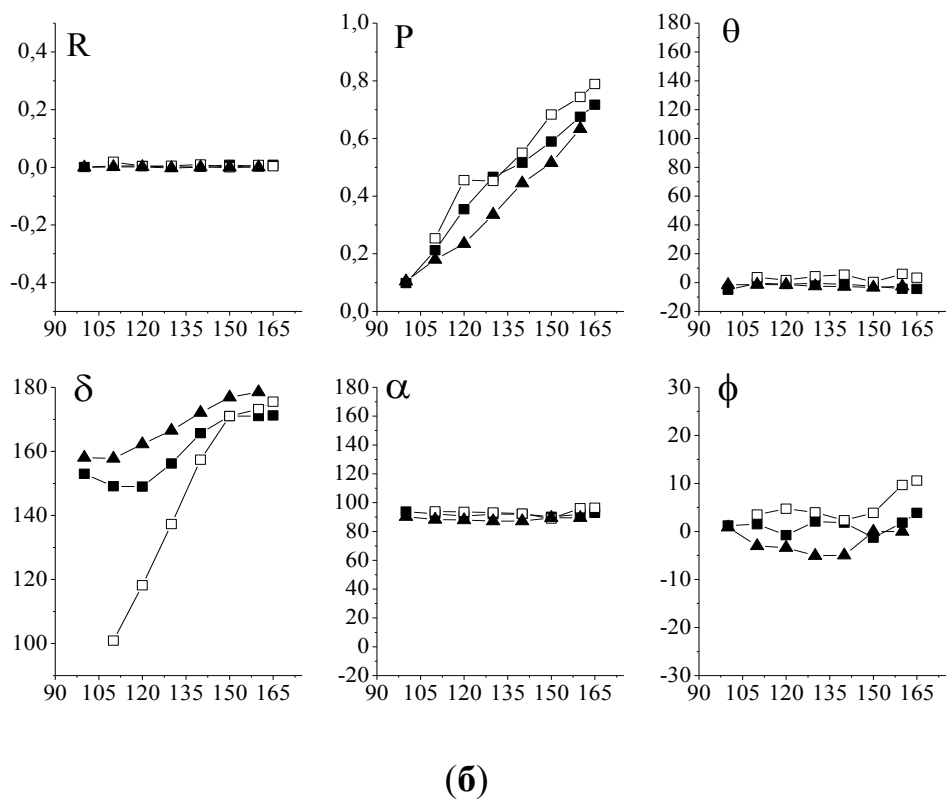
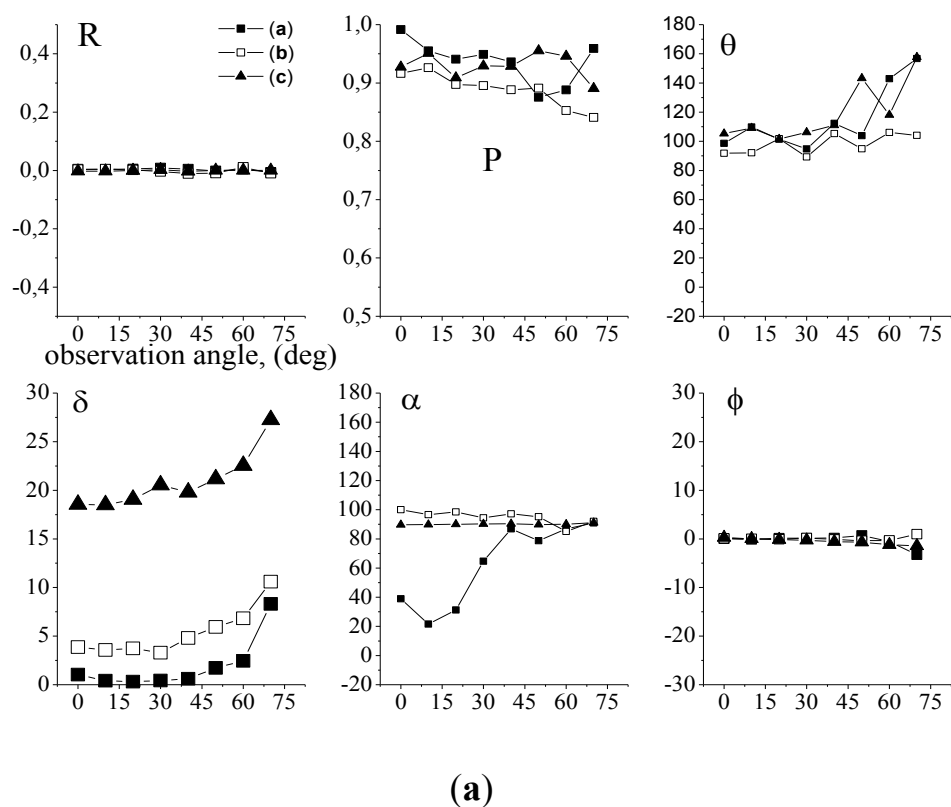
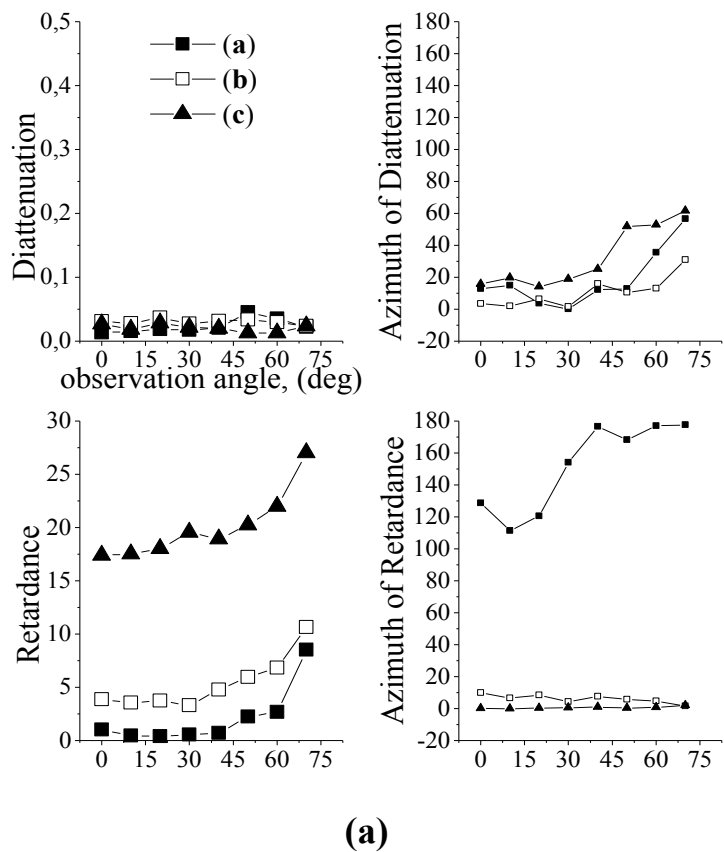


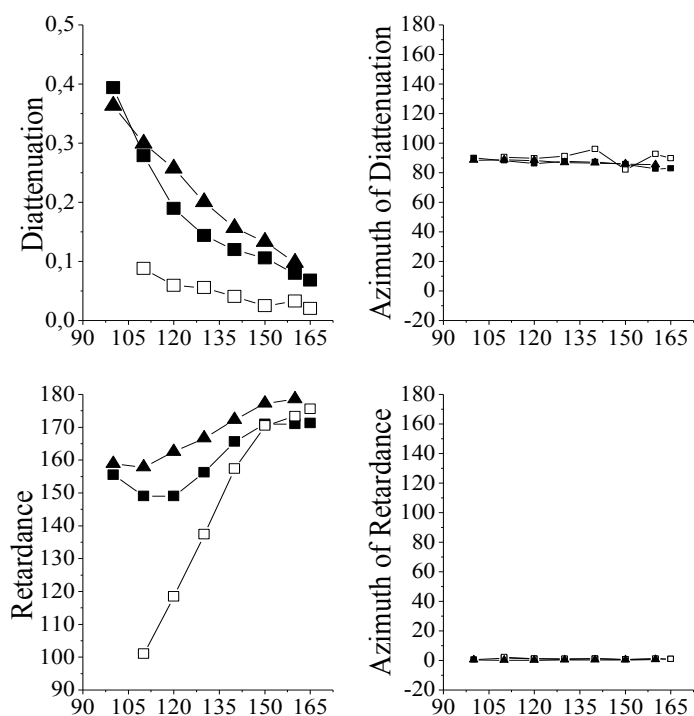
Рис.4.5. Залежності параметрів анізотропії від кута спостереження для детермінованої матриці Мюллера (4.6), отримані на основі розкладення (1.17) для а) прямого та б) зворотного розсіювання.

На рисунках 4.4 і 4.5 показано, що зміни величин діаттенуації  $D$ , фазової затримки  $R$ , лінійних амплітудної  $P$  та фазової анізотропії  $\delta$  для зворотного розсіювання значно більші, ніж для прямого розсіювання. Як фазова затримка, так і лінійна фазова анізотропія дозволяють ідентифікувати всі три групи досліджуваних зразків для кутів спостереження  $110\text{--}140^\circ$  та групи (а) і (с) майже в усьому діапазоні кутів спостереження. У той час як величина фазової затримки для прямого розсіювання у групи (b) не надто виражена, у напрямку зворотного розсіювання група (b) демонструє значну (майже  $80$  градусів) залежність від кута спостереження. Діатенуація, що представляє переважаюче поглинання в залежності від стану поляризації, значним чином залежить від кута спостереження для зворотного розсіювання, тоді як азимут розсіювання стає помітний лише при наближенні до більших кутів прямого розсіювання. Циркулярна амплітудна анізотропія відсутня, як і у випадку прямого розсіювання. Цікавим є відмінне від нуля значення циркулярної фазової анізотропії для груп (b) і (с), яке, очевидно, пов'язане з відмінними від нуля значеннями матричних елементів  $m_{23}$  і  $m_{32}$  (див. Рис. А.2). Лінійна амплітудна і циркулярна фазова анізотропія для зворотного розсіювання дозволяють розрізнити групи зразків (b) та (с) для кутів спостереження  $110\text{--}165^\circ$  і  $110\text{--}140^\circ$ , відповідно.

Наступні два Рис. 4.6 і 4.7 представляють результати, які подібні до наведених вище на Рис. 4.4 і 4.5 (для детермінованих матриць Мюллера, отриманих у розкладенні (4.6)), для детермінованих матриць Мюллера, отриманих у розкладенні (4.7).



(a)



(b)

Рис.4.6. Залежності параметрів анізотропії детермінованої матриці Мюллера (4.7), отримані на основі розкладення (1.35) для **a)** прямого та **b)** зворотного розсіювання.

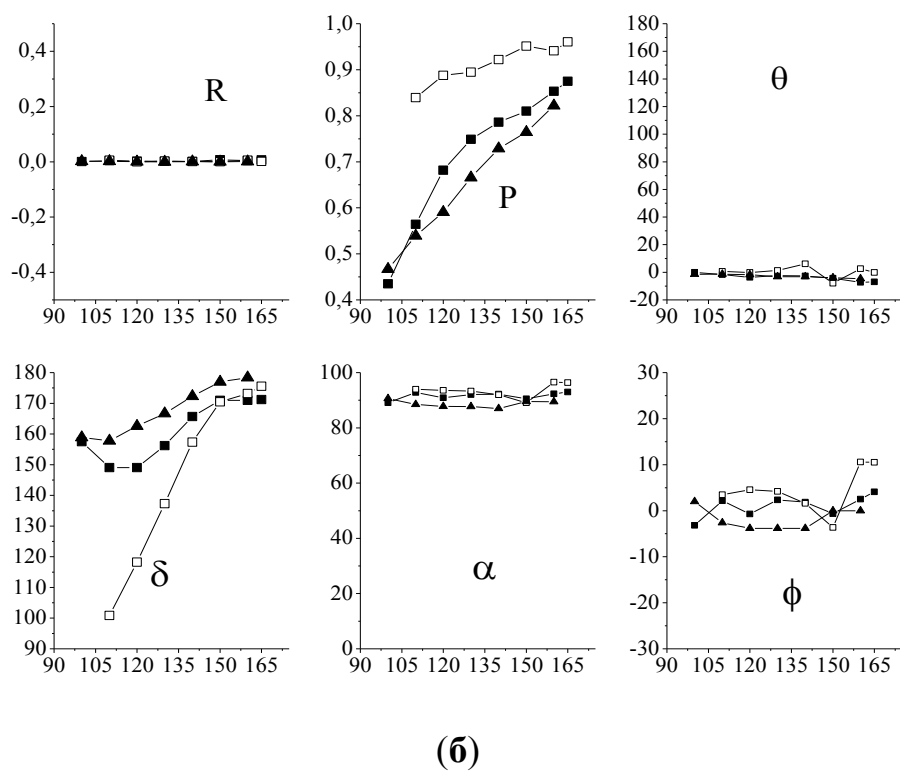
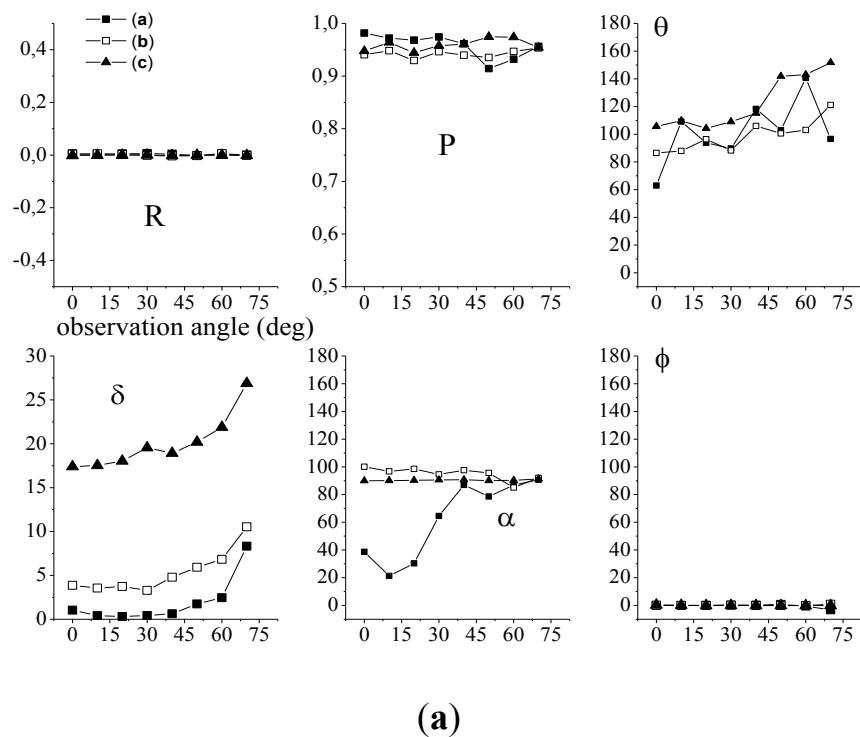


Рис.4.7. Залежності параметрів анізотропії детермінованої матриці Мюллера (4.7), отримані на основі розкладення (1.17) для а) прямого та б) зворотного розсіювання.

Видно, що в цьому випадку є певні аналогії з результатами, представленими на Рис. 4.4 і 4.5. Проте спостерігаються і значні відмінності. Зокрема, для прямого розсіювання діаттенуація  $D$  відмінна від нуля, хоча й вельми незначно. Циркулярна амплітудна анізотропія  $R$  відсутня. Лінійна амплітудна анізотропія  $P$  має помітно більший діапазон змін, ніж діаттенуація  $D$ . На основі величини лінійної амплітудної анізотропії можна розрізнити групи зразків (а) і (б) в діапазоні кутів спостереження від 0 до 40 градусів.

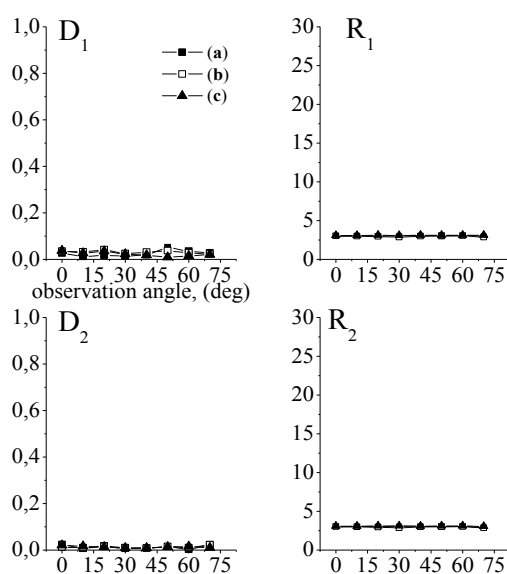
Характер змін величини фазової анізотропії схожий для обох розкладень (4.6) і (4.7), беручи до уваги зміну азимуту орієнтації для групи (а) і груп (б) і (с) на  $90^\circ$ . Таким чином, фазова затримка і лінійна фазова анізотропія  $\delta$  є ефективними інструментами, що дозволяють розрізнити всі три групи зразків у всьому діапазоні кутів спостереження. Слід відмітити зміну лінійної фазової анізотропії  $\delta$  для групи зразків (а) в діапазоні 10–35 градусів. Загалом залежність величини лінійної фазової анізотропії від кута спостереження для всіх трьох груп зразків незначна, однак зростає при великих кутах спостереження. Циркулярна фазова анізотропія відсутня у всьому діапазоні кутів прямого розсіювання.

Як і у випадку Рис. 4.4 і 4.5, для зворотного розсіювання залежності амплітудної та фазової анізотропії від кута спостереження є вельми характерними. Цікаво, що «швидкість» зміни амплітудної та фазової анізотропії має обернений характер: групи зразків (б) і (с) характеризуються найбільшою та найменшою швидкістю зміни амплітудної анізотропії. Водночас для фазової анізотропії спостерігається протилежна картина, тобто групи зразків (б) та (с) характеризуються відповідно найвищими та найменшими швидкостями. І амплітудна, і фазова анізотропія для зворотного розсіювання є ефективними метриками для всіх трьох груп зразків в діапазоні кутів спостереження  $110\text{--}150^\circ$ .

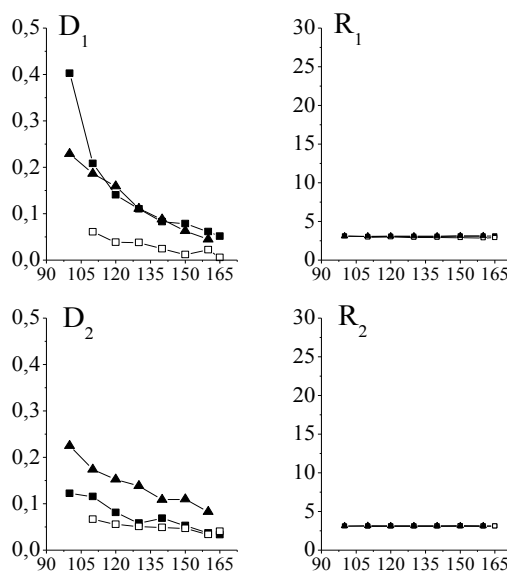
Циркулярна амплітудна анізотропія  $R$  відсутня у всьому діапазоні кутів спостереження. Як і на Рис. 4.4 і 4.5, циркулярна фазова анізотропія  $\varphi$  представляє особливий інтерес. Для групи (а) вона в середньому близька до нуля, тоді як для груп (б) і (с) при кутах зворотного розсіювання  $110\text{--}140^\circ$  спостерігається право

циркулярна ( $\varphi_r$ ) і ліво циркулярна ( $\varphi_l$ ) фазова анізотропія приблизно 5 градусів, відповідно, що достовірно перевищує похибку вимірювання.

На Рис. 4.8 показані результати для детермінованих лівої та правої матриць Мюллера, які отримуються в симетричному розкладенні (4.9), на основі розкладання (1.35). Рис. 4.9 і 4.10 демонструють аналогічні результати для розкладання (1.17).



(a)



(б)

Рис.4.8. Залежності параметрів анізотропії детермінованих матриць Мюллера розкладення (4.9), отримані на основі розкладення (1.35) для а) прямого та б) зворотного розсіювання.

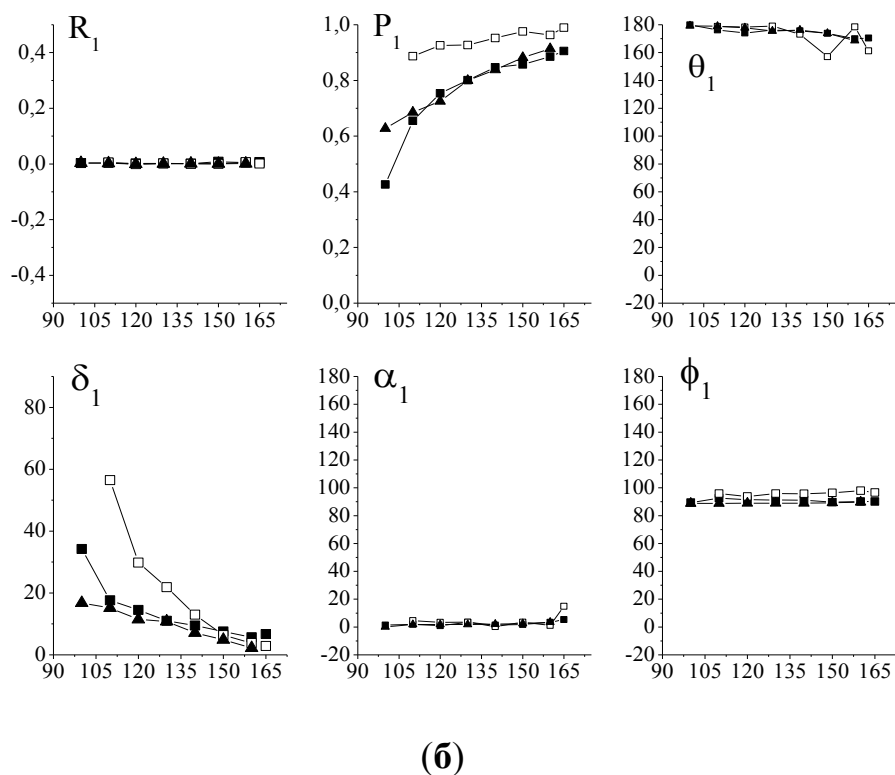
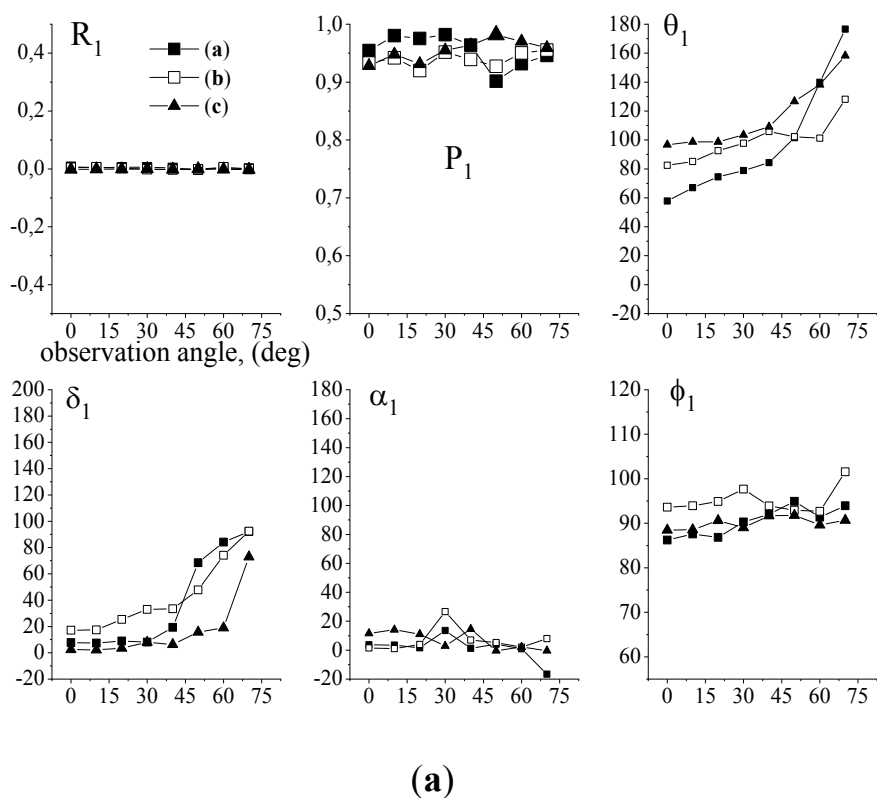


Рис.4.9. Залежності параметрів анізотропії для правої детермінованої частини симетричного розкладення (4.9), отримані на основі розкладення (1.17), для прямого а) і зворотного б) розсіювання.

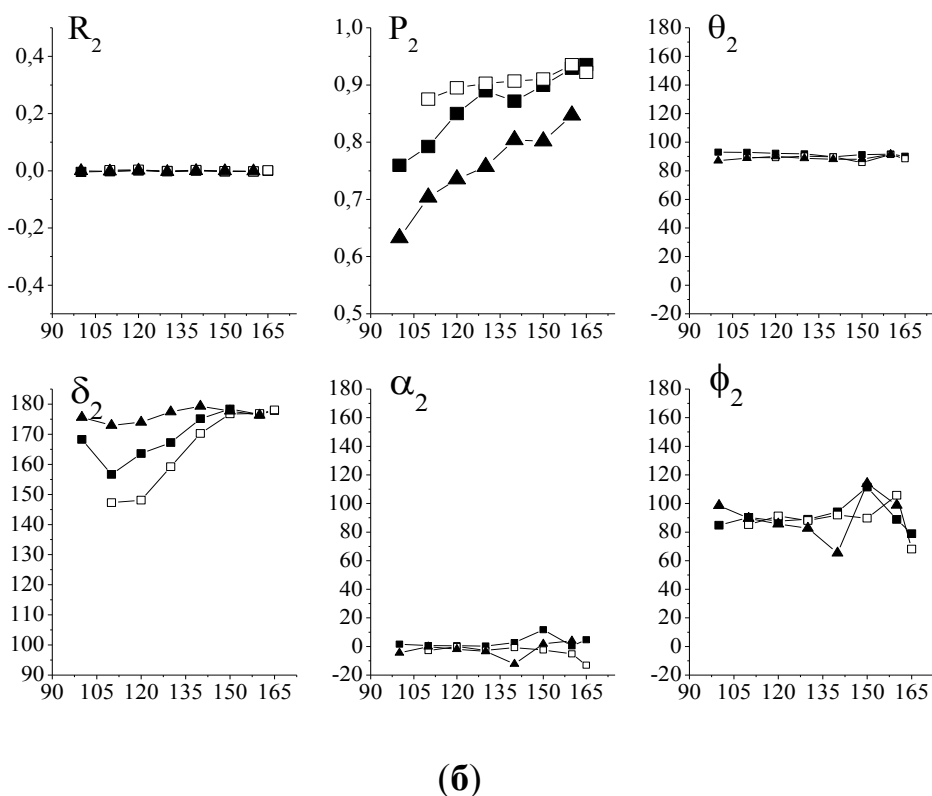
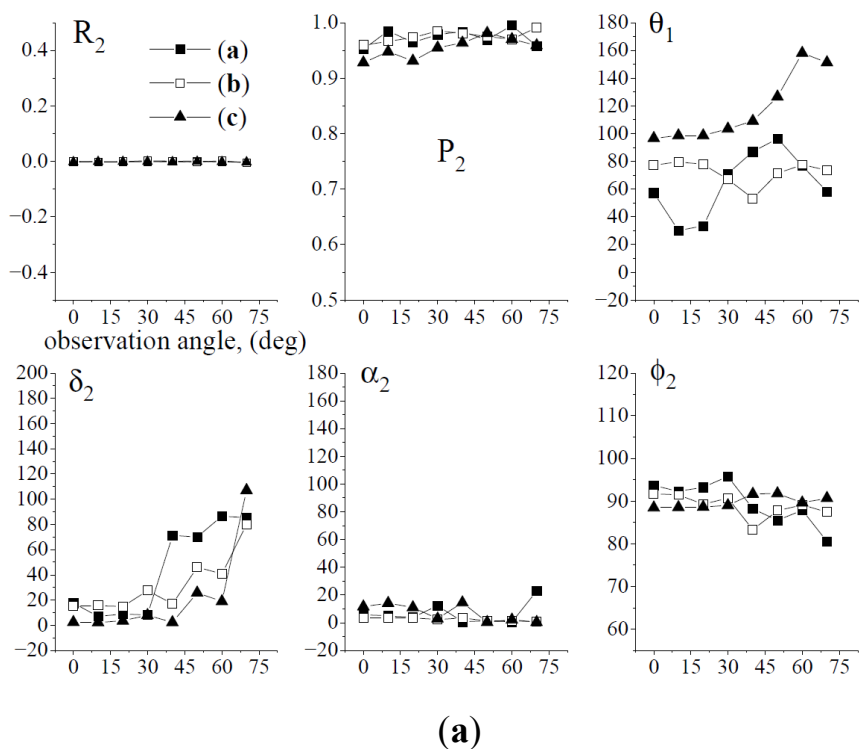


Рис. 4.10. Залежності параметрів анізотропії для лівої детермінованої частини симетричного розкладення (4.9), отримані на основі розкладення (4.17), для прямого а) і зворотного б) розсіювання.

Для прямого розсіювання права детермінована частина симетричного розкладання демонструє незначні ненульові амплітудну і фазову (приблизно  $3^\circ$ ) анізотропію для всіх трьох груп зразків для всього діапазону кутів спостереження, тоді як розкладення (1.17) показує більшу зміну лінійної амплітудної анізотропії та значну залежність лінійної фазової анізотропії за кутом спостереження. У цьому випадку циркулярна фазова анізотропія  $\varphi$  спостерігається поблизу  $90^\circ$  і мало залежить від кута спостереження. Амплітудна анізотропія для обох детермінованих розкладень не дозволяє розрізнити групи досліджуваних зразків. Лінійна фазова анізотропія дозволяє достовірно розрізнити групи (b) і (c) майже для всіх кутів спостереження. Групи зразків (a) і (c) можна розрізнити для кутів спостереження більше  $30$  градусів. Циркулярна фазова анізотропія дозволяє впевнено розрізнити групи зразків (b) і пари (a) і (c) для кутів спостереження від  $0^\circ$  до  $40^\circ$ .

Для лівої детермінованої частини в (4.9) розкладення (1.35) демонструє повну відсутність амплітудної анізотропії та таке ж саме значення фазової анізотропії, як й для правої детермінованої частини у випадку прямого розсіювання. Отже, розкладення (4.9) як для прямого, так і для зворотного розсіювання не має детермінованих метрик, на основі яких групи досліджуваних зразків листя можуть бути розрізнені.

Для зворотного розсіювання знову відсутня залежність фазового зсуву і більш помітна залежність поглинання для всіх трьох груп зразків від кута спостереження для правої та лівої частин розкладання. Поглинання та лінійна амплітудна анізотропія правої сторони дає змогу виділити групи зразків (b) і пари (a) і (c) майже у всьому діапазоні кутів спостереження, тоді як для лівої сторони розкладання це були групи зразків (a) і (c) і група зразків (b). Цікаво, що лінійна фазова анізотропія правої частини дозволяє розрізнити групу (b) і пару (a) і (c), тоді як ліва частина в кутах спостереження  $100\text{--}135^\circ$  дозволяє розрізнити всі три групи досліджуваних зразків.

#### Висновки до розділу 4

У цьому розділі проведено порівняльне дослідження анізотропних властивостей трьох груп листків ячменю, які отримуються на основі аналізу детермінованих матриць Мюллера в трьох розкладеннях: адитивне розкладення Клауда (4.6), полярне розкладення (4.7) і симетричне розкладення (4.9). Аналіз детермінованих матриць Мюллера здійснювався на основі двох підходів: детермінована частина полярного розкладення (1.35) і розкладення на основі узагальненої теореми еквівалентності (1.17). Мета даного порівняння – аналіз неоднозначності розв’язку оберненої задачі поляриметрії для розрізнення трьох груп листків ячменю, для яких є різними умови росту і освітлення.

У ході цього аналізу встановлені найбільш інформативні детерміновані метрики для характеризування анізотропних властивостей трьох груп листків ячменю. Крім цього, встановлено, що найбільш ефективним режимом вимірювання для цього є зворотне розсіювання. Останнє є дуже важливим для практичного застосування результатів, отриманих в даному розділі.

Не менш важливим результатом, отриманим в цьому розділі, є встановлення того факту, що метод розв’язку оберненої задачі на основі узагальненої теореми розкладення є більш ефективним (інформативним). Останнє означає, що вибір методу розкладення для розв’язку оберненої задачі ідентифікування різних класів досліджуваних об’єктів і їхніх станів не є апіорно визначеним і є предметом дослідження для кожного окремого класу об’єктів.

## ВИСНОВКИ

1. Однорідні середовища, оптична анізотропія яких зумовлена виключно двопротенезаломленням (фазовою анізотропією) або дихроїзмом (амплітудною анізотропією) однозначно описуються полярною моделлю. При цьому унітарна й ермітова полярні форми, що описують середовища з фазовою або амплітудною анізотропією, ідентичні відповідним матрицям Мюллера однорідної та узагальненої моделей, а параметри анізотропії полярної моделі набувають чіткого фізичного змісту. Одночасна наявність у середовищі фазової та амплітудної анізотропії робить неможливим його однозначний опис в рамках полярної моделі у загальному випадку. При цьому значення параметрів анізотропії полярної моделі залежать від порядку слідування відповідних полярних форм, тобто характеризують деякий ефективний вплив середовища на поляризацію падаючого випромінювання.

2. У випадку однакових поляризацій власних хвиль фазової та амплітудної частини полярної моделі (коли осі амплітудної та фазової анізотропії співпадають) середовище характеризується ортогональними власними поляризаціями, а для полярної моделі однозначність розв'язку оберненої задачі у її рамках зберігається. Те ж саме можна сказати про однорідну модель. В узагальненій моделі умови співпадіння осей фазової та амплітудної анізотропії недостатньо для однозначності представлення середовища.

3. За певних співвідношень між параметрами анізотропії, анізотропне середовище може характеризуватись виродженою анізотропією, невласним, або неермітовим дихроїзмом в рамках полярної моделі.

4. Графічна залежність параметра неоднорідності, разом із кутом між власними поляризаціями, можуть бути використані для одночасного порівняльного аналізу як можливості існування ортогональних власних поляризацій, так і можливості реалізації трьох типів складної анізотропії середовища в рамках усіх трьох підходів, що розглядаються в роботі. Зокрема, у класі середовищ з трьома видами анізотропії ортогональність можлива лише в рамках узагальненої моделі,

тоді як існування трьох типів складної анізотропії можливе лише в рамках полярної моделі.

5. Показано, що звичайні (wild type), генномодифіковані листки ячменю і генномодифіковані листки ячменю зі змінним режимом освітленості одного віку, не маючи ідентифікаційних ознак в термінах інтенсивності розсіюваного світла, мають різні анізотропні властивості, які дозволяють достовірно ідентифікувати ці групи листків.

6. Показано, що різні матричні моделі довільного деполаризуючого середовища дають для трьох розглядуваних груп листків ячменю різні детерміновані матриці Мюллера, що характеризують анізотропні властивості цих об'єктів. У свою чергу, два розкладення детермінованих матриць Мюллера, а саме, детерміноване полярне розкладення і розкладення на основі узагальненої теореми еквівалентності, дають різні розв'язки оберненої задачі поляриметрії. Останнє означає, що вибір ефективного розв'язку оберненої задачі ідентифікування різних класів досліджуваних об'єктів і їхніх станів не є апіорно визначеним і є предметом дослідження для кожного окремого класу об'єктів.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Tompkins H.G. Handbook of Ellipsometry / H.G. Tompkins, E.A. Irene // Heidelberg: Springer, 2005. - 891 p.
2. Hovenier J.W. Transfer of polarized light in planetary atmospheres: basic, concepts and practical methods / Hovenier J.W., van der Mee C.V.M., Domke H. // Dordrecht: Springer, 2004. – 272 p.
3. Shurcliff W.A. Polarized light-production and use / Shurcliff W.A. // Harvard: Harvard University Press, 1962 - 207 p.
4. Ney J.F. Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices / Ney J.F. // Oxford science publication, 1972. – 352 p.
5. Savenkov S.N. Generalized matrix equivalence theorem for polarization theory / Savenkov S.N., Marienko V.V., Oberemok E.A. / J. Phys. Rev. - 2006. - E. 74. - p. 1- 8.
6. Gerrard A. Introduction to Matrix Methods in Optics / Gerrard A., Burch J.-M. // New York, 1994. – p. 340.
7. Azzam R. M. Ellipsometry and Polarized Light / Azzam R.M., Bashara N.M. // Elsevier, 1987. – 585.p.
8. Berreman D.W. Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4 X 4-Matrix Formulation / Berreman D.W. // J. Opt. Soc. Am. - 1971. - Vol.62. – No.4. - P. 502 - 510.
9. Arteaga O. Determination of the components of the gyration tensor of quartz by oblique incidence transmission two-modulator generalized ellipsometry / Arteaga O., Canillas A., Jellison G.E. // Appl. Optics. – 2009. – Vol.48. – No.28. - P. 5307-5317.
10. Uchida N. Optical Properties of Single-Crystal Paratellurite (TeO<sub>2</sub>) / Uchida N. // Phys. Rev. B. – 1971. – Vol.10. – No.4 - P. 3736-3745.
11. Коломієць І.С. Розв’язок спектральної задачі для поздовжньо неоднорідних недеполяризуючих середовищ / Коломієць І.С. та ін. // Металлофиз. новейшие технол. – 2013. – Том.35. - №9. - С. 1197—1208.

12. Kolomiets I.S. Studying anisotropic properties of longitudinal inhomogeneous nondepolarizing media with elliptical phase anisotropy / Kolomiets I.S., et al. // *Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics*. - 2013. - V.16. - No.4. - P. 366-373.
13. Savenkov S.N. Orthogonal properties of homogeneous anisotropy medium / Savenkov S.N., Aulin Y.V. // *Proc. SPIE*. - 2007. - Vol.6536. – P. 65360D.
14. Davis J.A. Polarization eigenstates for twisted-nematic liquid-crystal display / Davis J.A., Moreno I., Tsai P. // *App. Opt.* – 1998. - Vol.37. - No.5. - P. 937-945.
15. Eigenmodes of a reflective twisted-nematic liquid-crystal cell / Zhu X., Hong Q., Huang Y., Wu S.-T. // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol.94. – No.5. – P. 2868-2873.
16. Yamauch M. Jones-matrix models for twisted-nematic liquid-crystal devices / Yamauch M. // *App. Opt.* - 2005. - Vol.44. - No.21. - P. 4484-4493.
17. Azzam R.M.A. Polarization Orthogonalization Properties of Optical Systems / Azzam R.M.A. // *Appl. Phys. A*. – 1977. - Vol.13. – P. 281 – 285.
18. Ossikovski R. Differential and product Mueller matrix decompositions: a formal comparison / Ossikovski R. // *Opt. Letters*. - 2012. - Vol. 37. - No.2. – P. 220-222.
19. Noble H.D. Mueller matrix roots algorithm and computational considerations / Noble H.D., Chipman R.A. // *Opt. Express*. – 2011. – Vol.20. – No.1. – P. 17-31.
20. Savenkov S.N. Conditions for polarization elements to be dichroic and birefringent / Savenkov S.N., Sydoruk O.I., Muttiah R.S. // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2005. - Vol.22. – P. 1447–1452.
21. Brosseau Ch. Fundamentals of polarized light. A statistical optics approach. / Brosseau Ch. // New York: North-Holland Publishing Company, 1998 - 424 p.
22. Parke N.G. Optical algebra / Parke N.G. // *J. Math. Phys.* – 1949. – Vol.28. – P. 131-139.
23. Brosseau Ch. Generalized trace condition on the Mueller-Jones polarization matrix / Brosseau Ch., Givens C.R., Kostinski A.B. // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 1993. – Vol.10. – P. 2248-1151.
24. Gil J.J. Polarimetric characterization of light and media / Gil J.J. // *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* – 2007. – Vol.40. – P. 1-47.

25. Ossikovski R. Product decompositions of experimentally determined non-depolarizing Mueller matrices / Ossikovski R., Garcia-Caurel E., De Martino A. // *Phys. Stat. Sol.* – 2008. - Vol.5 - No.5. – P. 1059-1063.
26. Arteaga O. Pseudopolar decomposition of the Jones and Mueller–Jones exponential polarization matrices / Arteaga O., Canillas A. // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2009. - Vol.26. - No.4. – P. 783-793.
27. Polarimetric imaging of uterine cervix: a case study / Pierangelo A., Nazac A., Benali A., et.al. // *Opt. Express.* – 2013. – Vol. 21. – P. 14120-14130.
28. Advances in multichannel spectroscopic ellipsometry / Collin R.W., Ilsin An., Fujiwara H. et al. // *Thin Solid Films.* - 1998. – Vol.313-314. - P. 18-32.
29. Tompkins H.G. Handbook of Ellipsometry / H.G. Tompkins, E.A. Irene // Heidelberg: Springer, 2005. - 891 p.
30. Kokhanovsky A.A. Light Scattering Media Optics: Problems and Solutions / Kokhanovsky A.A. // Chichester: Springer-Praxis Books in Environmental Sciences, 2nd Edition, 2001. – 365 p.
31. Bohren C.F. Absorption and scattering of light of light by small particles / Bohren C.F., Huffman E.R. // New York: Wiley, 1983. – 530 p.
32. Mishchenko M.I. Light scattering by nonspherical particles: theory, measurements and applications / Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D. // San Diego: AcademicPress, 2000. - 690 p.
33. Polarimetric Remote Sensing of Solar System Objects / Mishchenko M.I., Rosenbush V.K., Kiselev N.N. et al. // K.: Akadempriodyka, 2010. – 292 p.
34. Radar polarimetry: analysis tools and applications / Evans D.L., Farr T.G., Van Zyl J.J., Zebker H.A. // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing.* – 1988. – Vol.26. – P. 774-789.
35. Muttiah R.S. From Laboratory Spectroscopy to Remotely Sensed Spectra of Terrestrial Ecosystems / Muttiah R.S. // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 300 p.
36. Tuchin V.V. Handbook of Optical Biomedical diagnostics / Tuchin V.V. // Bellingham: SPIE Press, 2002. – 1110 p.

37. Tuchin V.V. Optical Polarization in Biomedical Applications / Tuchin V.V., Wang L.V., Zimnyakov D.A. // Berlin: Springer, 2006. – 285 p.
38. Пішак В.П. Лазерна поляриметрична діагностика в біології і медицині / Пішак В.П., Ушенко О.Г. // Чернівці: Медакадемія, 2000. – 302 с.
39. Können G.P. Polarized Light in Nature / Können G.P. // Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 172 p.
40. Goldstein D. Polarized Light / Goldstein D. // New York: Taylor and Francis, 2003. – 680 p.
41. Schubert M. Generalized ellipsometry for biaxial absorbing materials: determination of crystal orientation and optical constants of Sb<sub>2</sub>S<sub>3</sub> / Schubert M., Dollase W. // Opt. Letters. – 2002. – Vol.27. – No.23. - P. 2073-2075
42. Dichroism of diamond grains by a polarization modulated near field optical setup / Micheletto R., Kawakami Y., Manfredotti C., et al. // Appl. Phys. Lett. – 2006. - Vol.89. - P. 121125.
43. Optical properties of doped potassium gadolinium tungstate single crystals / Konstantinova Michalski E, Zmija J., Mierczyk Z., et al. // Proceedings of the SPIE – 2001. - Vol.4412. - P. 69–73.
44. Jones R.C. A new calculus for the treatment of optical systems. VII, Properties of the N – matrices / Jones R.C. // J. Opt. Soc. Am. - 1948. - Vol.38. - P. 671-685.
45. Azzam R.M.A. Propagation of partially polarized light through anisotropic media with or without depolarization. A differential 4 X 4 matrix calculus / Azzam R.M.A. // J. Opt. Soc. Am. - 1979. - Vol.68. - P. 1756 - 1767.
46. Graham E.B. Eigenvector approach to the evaluation of the Jones N – matrices of non absorbing crystalline media / Graham E.B., Raab R.E. // J. Opt. Soc. Am. A. - 1994. - Vol.11. – P. 2137-1944.
47. Hurwitz H. A new calculus for the treatment of optical systems II. Proof of three general equivalence theorems / Hurwitz H., Jones R.C. // J. Opt. Soc. Am. – 1941. – Vol.31. – P. 493-499.

48. Hammer H. Characteristic parameters in integrated photoelasticity: an application of Poincare's equivalence theorem / Hammer H. // *Journal of Modern Optics* – 2004. – Vol.51. – No.4. – P. 597-618.
49. Gil J.J. Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a non-depolarizing optical system from the polar decomposition of its Mueller matrix / Gil J.J., Bernabeu E. // *Optik (Stuttgart)*. – 1987. – Vol.76. – P. 67-71.
50. Lu S.Y. Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition / Lu S.Y., Chipman R.A. // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 1996. – Vol.13. – P. 1106-1113.
51. Kolomiets I.S. Conditions for the orthogonality of eigenpolarizations for the first and second Jones equivalence theorems / Kolomiets I.S., Oberemok E.A., Savenkov S.N. // *Metallophysics and advanced technologies* . – 2011. – V.33. - P. 493-502.
52. Коломієць І.С. Матрична модель довільного однорідного анізотропного середовища / Коломієць І.С., Савенков С.М., Оберемок Є.А. // Тези, Конференція молодих вчених з фізики напівпровідників «Лашкарьовські читання 2012» з міжнародною участю Київ, 3-5 квітня 2012. – Україна, Київ, 2012. - С.44-46.
53. Коломієць І.С. Дослідження ортогоналізуючих властивостей поздовжньо неоднорідних недеполяризуючих середовищ / Коломієць І.С., Савенков С.М., Оберемок Є.А. // *Реєстрація, зберігання і обробка даних*. -2013. – Том.15. - №1. - С. 23-30.
54. Savenkov S.N. Characteristic Features of the Solution for the Inverse Problem of Polarimetry / Savenkov S.N., Oberemok E.A., Kushchenko A.G., Kolomiets I.S., Klimov A.S. // *Based on the Generalized Equivalence Theorem, Journal of Applied Spectroscopy* vol. 82, p. 801–808 (2015).
55. Savenkov S.N. Eigenanalysis of dichroic, birefringent, and degenerate polarization elements: a Jones-calculus study / Savenkov S.N., Sydoruk O.I., Muttiah R.S. // *App. Opt.* 46 No.27, 6700-6709 (2007).
56. Marienko V.V. General classification of polarization systems based on the anisotropic properties / Marienko V.V., Savenkov S.N. // *Opt and Spec.* vol. 76, No. 1, pp. 102 - 104, 1994.

57. Sh.-Yau Lu Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices / Sh.-Yau. Lu, Chipman R.A. // J. Opt. Soc. Am. A, vol. 11, No. 2, pp. 766-773, 1994.
58. Savenkov S.N. Inverse problem of polarimetry for homogeneous anisotropy media on basis of Mueller matrix calculus / Savenkov S.N., Oberemok Ye.A. // Proceedings of SPIE. – 2007. – Vol.6536. – P. 65360E (8 pages).
59. Jones R.C. A new calculus for the treatment of optical systems I. Description and discussion of the calculus / Jones R.C. // J. Opt. Soc. Am. – 1941. – Vol.31. – P. 488-493.
60. Mueller H. The foundation of optics / Mueller H. // J. Opt. Soc. Am. – 1948. – Vol.38. – P. 661.
61. Perrin F. Polarization of light scattering by isotropic opalescent media / Perrin F. // J. Chem. Phys. – 1942. – Vol.10. – P. 415-427.
62. Stokes G.G. On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / Stokes G.G. // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1852. – Vol.9. – P. 399-416.
63. Anderson D.G.M. Necessary and sufficient conditions for a Mueller matrix to be derivable from a Jones matrix / Anderson D.G.M., Barakat R. // J. Opt. Soc. Am. A. – 1994. – Vol.11. – P. 2305-2319.
64. Marathay A.S. Matrix-Operator Description of the Propagation of Polarized Light through Cholesteric Liquid Crystals / Marathay A.S. // J. Opt. Soc. Am. - 1971. - Vol. 61. – P. 1363 - 1372.
65. Jones R.C. A new calculus for the treatment of optical systems. VIII. Electromagnetic Theory / Jones R.C. // J. Opt. Soc. Am. - 1956. – Vol.46. – No.2. – P.126-131.
66. Landau L.D. Electrodynamics of Continuous Media / Landau L.D., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.. - Oxford: Pergamon Press, 1984. – 460 p.
67. Newnham R.E. Properties of materials: Anisotropy, Symmetry, Structure / Newnham R.E. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2004. - 390 p.
68. Azzam R.M.A. Simplified Approach to the Propagation of Polarized Light in Anisotropic Media-Application to Liquid Crystals / Azzam R.M.A., Bashara N.M. // J. Opt. Soc. Am. - 1972. - Vol.62. - P. 1252-1257.

69. Azzam R.M.A. Trajectories Describing the Evolution of Polarized Light in Homogeneous Anisotropic Media and Liquid Crystals / Azzam R.M.A., Bashara N.M., Merrill B.E. // *J Appl. Opt.* - 1973. - Vol.12. - P. 764-771.
70. Propagation of partially polarized light in dichroic and birefringent media / Mosino J.F., Starodumov A., Barbosa-Garcia O., Filippov V.N. // *J. Opt. B.* — 2001. - Vol.3. - P. 159–165.
71. Comparative study of optical activity in chiral biological media by polar decomposition and differential Mueller matrices analysis / Ortega-Quijano N., Fanjul-Velez F., Salas-Garcia I., Arce-Diego J.L. // *Proc. of SPIE* – 2013. - Vol.7906. – P. 1-12.
72. Brosseau C. Evolution of the Stokes parameters in optically anisotropic media / Brosseau C. // *Opt. Letters.* – 1995. – Vol.20. – No.11. - P. 1221-1223.
73. Barakat R. Exponential versions of the Jones and Mueller–Jones polarization matrices / Barakat R. // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1996. - Vol.13. - No.1. – P. 158-163.
74. Ortega-Quijano N. Generalized Jones matrices for anisotropic media / Ortega-Quijano N., Arce-Diego J.L. // *Opt. Express.* – 2013. – Vol.21. – No.6. – P. 6895-6900.
75. Devlaminck V. Spatial propagation of coherency matrix in polarization optics / Devlaminck V. // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2012. - Vol.29. – P. 1247-1251.
76. Transmission Mueller matrix ellipsometry of chirality switching phenomena / Arteaga O., El-Hachemi Z., Canillas A., Ribo J.M. // *Thin Solid Films* – 2011. – Vol.519. – P. 2617–2623.
77. Oh Y. Semi-Empirical Model of the Ensemble-Averaged Differential Mueller Matrix for Microwave Backscattering From Bare Soil Surfaces // Oh Y., Sarabandi K., Ulaby F.T. // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing.* – 2002. - Vol.40. - No.6. – P.1348 – 1355.
78. Reflectometric measurement of birefringence rotation in single-mode optical fibers / Galtarossa A., Grosso D., Palmieri L., Schenato L. // *Opt. Letters.* – 2008. – Vol.33. – No.20. - P. 2284-2286.

79. Segre S.E. New formalism for the analysis of polarization evolution for radiation in a weakly nonuniform, fully anisotropic medium: a magnetized plasma / Segre S.E. // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. - Vol.18. – No.10. - P. 2601-2606.
80. Gunning M.J. Systematic eigenvalue approach to crystal optics:an analytic alternative to the geometric ellipsoid model / Gunning M.J., Raab R.E. // J. Opt. Soc. Am. - 1998. - Vol.15. - P. 2199–2207.
81. Budker D. Magnetolectric Jones Dichroism in Atoms / Budker D., Stalnaker J.E. // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol.91. – P.263901.
82. Andrews D.L. Magnetolectric Jones dichroism / Andrews D.L., Danielsand G.J., Stedman G. E. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2003. – Vol.36. – P. 357–364.
83. Raab R.E. Some unmeasured crystal properties / Raab R.E. // Cryst. Res. Tech. - 2003. - Vol.38. – P. 202–214.
84. Mironova P.V. Magnetolectric Jones birefringence and dichroism in a medium of free atoms / Mironova P.V., Ovsiannikov V.D., Chernushkin V.V. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2006. – Vol.39. – P. 4999–5011.
85. Arteaga O. On the existence of Jones birefringence and Jones dichroism / Arteaga O. // Opt. Lett. – 2010. – Vol.35. – No.9. – P. 1359-1360.
86. Pancharatnam S. The propagation of light in absorbing biaxial crystals – I. Theoretical / Pancharatnam S. // Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A. – 1955. – Vol.42. – P. 89-109.
87. Pancharatnam S. The propagation of light in absorbing biaxial crystals – II. Experimental / Pancharatnam S. // Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A. – 1955. – Vol.42. – P. 235-248.
88. Jones R.C. A new calculus for the treatment of optical systems III. The Sohncke Theory of Optical Activity / Jones R.C. // J. Opt. Soc. Am. – 1941. – Vol.31. – P. 500-503.
89. Jones R.C. A new calculus for the treatment of optical systems IV / Jones R.C. // J. Opt. Soc. Am. – 1942. – Vol.32. – P. 486-493.
90. Jones R.C. A new calculus for the treatment of optical systems V. A more general formulation and description of another calculus / Jones R.C. // J. Opt. Soc. Am. – 1947. – Vol.37. – P. 107-110.

91. Mamedov N. Extended Application of Light Figures to Optically Active Materials with Transversally Isotropic Dielectric Function / Mamedov N., Yamamoto N., Shim Y. et al. // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 2003. - Vol.42 - No.8 - P. 5145–5152.
92. Pilgun Yu.V. Broadband acoustooptic diffraction of two-wavelength light in paratellurite / Pilgun Yu.V., Smirnov Ye.M. // *Ukr. J. Phys. Opt.* – 2010. – Vol.11. – No.1 - P. 28-43.
93. Horn R. Matrix Analysis / Horn R., Johnson Ch. - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. – 655 p.
94. Whitney C. Pauli-algebraic operators in polarization optics / Whitney C. // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1971. - Vol.61. - №9. - P. 1207-1213.
95. Brosseau Ch. Fundamentals of Polarized Light. A Statistical Optics Approach / Brosseau Ch. // North-Holland, New York. – 1998.
96. Gil J. Polarimetric characterization of light and media / Gil J. J. // *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* – 2007. - Vol.40, p.1-47.
97. Kolomiets I.S. Evolution of light polarization in arbitrary homogeneous medium / Kolomiets I.S., Savenkov S.N., Oberemok Y.A. // VII international conference «Electronics and applied physics» Kyiv 19-22 October 2011. – Ukraine, Kyiv, 2011. - P.25-26.
98. Simon R. The connection between Mueller and Jones matrices of polarization optics / Simon R. // *Opt. Commun.* - 1982. – Vol.42. – P. 293-297.
99. Kurylenko R.O. The analysis of media's anisotropy in scope of homogeneous, polar and multiplicative decompositions / R.O. Kurylenko, I.S. Kolomiets, S.N. Savenkov, Ye.A. Oberemok // XVII International Young Scientists Conference on Applied Physics, Kyiv May, 23-27, 2017, Kyiv, Ukraine– Ukraine, Kyiv, 2017. - P.25-26.
100. Kurylenko R.O. Investigation of polarization properties of media with linear amplitude and circular phase anisotropy in terms of polar decomposition theorem / R.O. Kurylenko, I.S. Kolomiets, S.N. Savenkov, Ye.A. Oberemok, A.S. Klimov // XIV International Scientific Conference “Electronics and Applied Physics” Kyiv October 23–26, 2018, Kyiv, Ukraine– Ukraine, Kyiv, 2018. - P.174-175.

101. Kurylenko R. Degenerate anisotropy in homogeneous media: polar decomposition approach / R. Kurylenko, I. Kolomiets, S. Savenkov, Ye. Oberemok // 61st International Conference for Students of Physics and Natural Sciences "Open Readings 2018", Vilnius, 20-23 May 20q8. – Lithuania, Vilnius, 2018. - P.120.
102. Куриленко Р. Аналіз середовищ з лінійною амплітудною та циркулярною фазовою анізотропією на основі параметра неоднорідності/ Р. Куриленко // International Conference of Students and Young Scientists in Theoretical and Experimental Physics "HEUREKA-2021" Lviv 18-20 May 2021. – Ukraine, Lviv, 2022. - P.41.
103. Kurylenko R.O. Eigenpolarizations orthogonality conditions of homogeneous anisotropic media in the term of the polar decomposition theorem / R.O. Kurylenko I.S. Kolomiets // International Conference of Students and Young Scientists in Theoretical and Experimental Physics "HEUREKA-2022" Lviv 18-20 October 2022. – Ukraine, Lviv, 2022. - P.41.
104. Kurylenko R.O. The geometric interpretation of the inhomogeneity parameter for different types of anisotropic media/ R.O. Kurylenko, I.S. Kolomiets, S.N. Savenkov, Ye.A. Oberemok // XXIII International Young Scientists Conference on Applied Physics, Kyiv May, 16-20, 2023, P.28-29.
105. Kurylenko R. Comparison of the anisotropic media polarization properties in terms of the homogeneous and multiplicative approach / R. Kurylenko I. Kolomiets // International Conference of Students and Young Scientists in Theoretical and Experimental Physics "HEUREKA-2023" Lviv 16-18 May 2023. – Ukraine, Lviv, 2023. - P.39.
106. Kurylenko R. Mueller-Polarimetry of Barley Leaves II: Mueller Matrix Decompositions / S. Savenkov, Y. Oberemok, R. Muttiah. R. Kurylenko // Photonics.– 2024. – Vol.11. – No.1 - P. 76.
107. Savenkov S., Kolomiets I., Oberemok Y., Kurylenko R. Spectral Problem for the Jones Matrix in Remote Scat-tering. Космічна наука і технологія. 2025. 31, No 1 (152). - P.27-34.

108. Аналіз розв'язку спектральної задачі для позовжньо неоднорідних недеполяризуючих середовищ / Коломієць І.С., Савенков С.М., Оберемок Є.А., Клімов О.С. // Тези, Конференція молодих вчених з фізики напівпровідників "Лашкарьовські читання 2013" з міжнародною участю Київ, 2-4 квітня 2013. – Україна, Київ, 2013. - С.27-29.
109. Rodriguez C.; Polarimetric data-based model for tissue recognition / C. Rodriguez, A. van Eeckhout, L. Ferrer, et. al // Biomed. Opt. Express . - 2021. - Vol.12. - P. 4852–4872.
110. Savenkov S.N. Mueller-polarimetry of barley leaves I: Depolarization metrics. / S.N. Savenkov, Y.A. Oberemok, I.S. Kolomiets, et. al // Photonics. - 2023. - Vol.10. - P. 1361.
111. Cloude S.R. Conditions for the physical realizability of matrix operators in polarimetry / S.R. Cloude // Proc SPIE. - 1990. – Vol.1166. – P. 177–185.
112. Hovenier J.W. Structure of a general pure Mueller matrix / J.W. Hovenier // Appl. Opt. 1994. – Vol.33. – P. 8318–8324.
113. Savenkov S.N. Jones and Mueller matrices: Structure, symmetry relations and information content. In Light Scattering Reviews; Kokhanovsky, A., Ed. / S.N. Savenkov // Praxis Publishing: Chichester, UK. – 2009. - Vol.4. – P. 71–114.
114. Zhou X. A new metric of analyzing the surface optical characteristic based on the measurement of Mueller matrices / X. Zhou, X. Wang, G. Gu, et. al // Proc. SPIE. – 2014. – Vol.9297.- 147–158.

## ДОДАТОК А

На Рис. А.1 представлено результати вимірювання матриць Мюллера для листків трьох груп ячменю в режимі прямого розсіювання в діапазоні кутів спостереження від  $0$  до  $70^\circ$ . На Рис. А.2 показано результати вимірювань матриць Мюллера в режимі зворотного розсіювання в діапазоні кутів  $100^\circ - 170^\circ$ . Для кутів спостереження в діапазоні від  $70^\circ$  до  $100^\circ$  інтенсивність розсіяного світла близька до нуля. Кожна точка на Рис. А.1 і А.2 відповідає двом процесам усереднення: понад 300 одиничних вимірювань для одного зразка та понад 10 зразків однієї групи. Час експозиції при вимірюванні одного зразка становить 20 хвилин.

За винятком  $m_{11}$ , усі елементи матриць нормовані на елемент  $m_{11}$ , тому ми розглядаємо  $m_{ij}/m_{11}$ , де  $i, j = \overline{1,4}$ , окрім  $i = j = 1$ . Щоб уникнути потенційних проблем з обчисленнями, ми дослідили надійність значень вимірюваних матриць Мюллера, перевіривши, чи всі вони задовольняють критерій фізичної відтворюваності Клауда [111] у межах експериментальних похибок для кожного кута спостереження.

Як можна бачити, вісім матричних елементів  $m_{13}$ ,  $m_{14}$ ,  $m_{23}$ ,  $m_{24}$ ,  $m_{31}$ ,  $m_{32}$ ,  $m_{41}$  та  $m_{42}$  дорівнюють нулю в межах експериментальних похибок у всьому діапазоні кутів спостереження, і, таким чином, матриця Мюллера має блочно-діагональну структуру для обох геометрій експерименту. Така структура матриці Мюллера характерна для багатьох задач розсіювання (див. [113]).

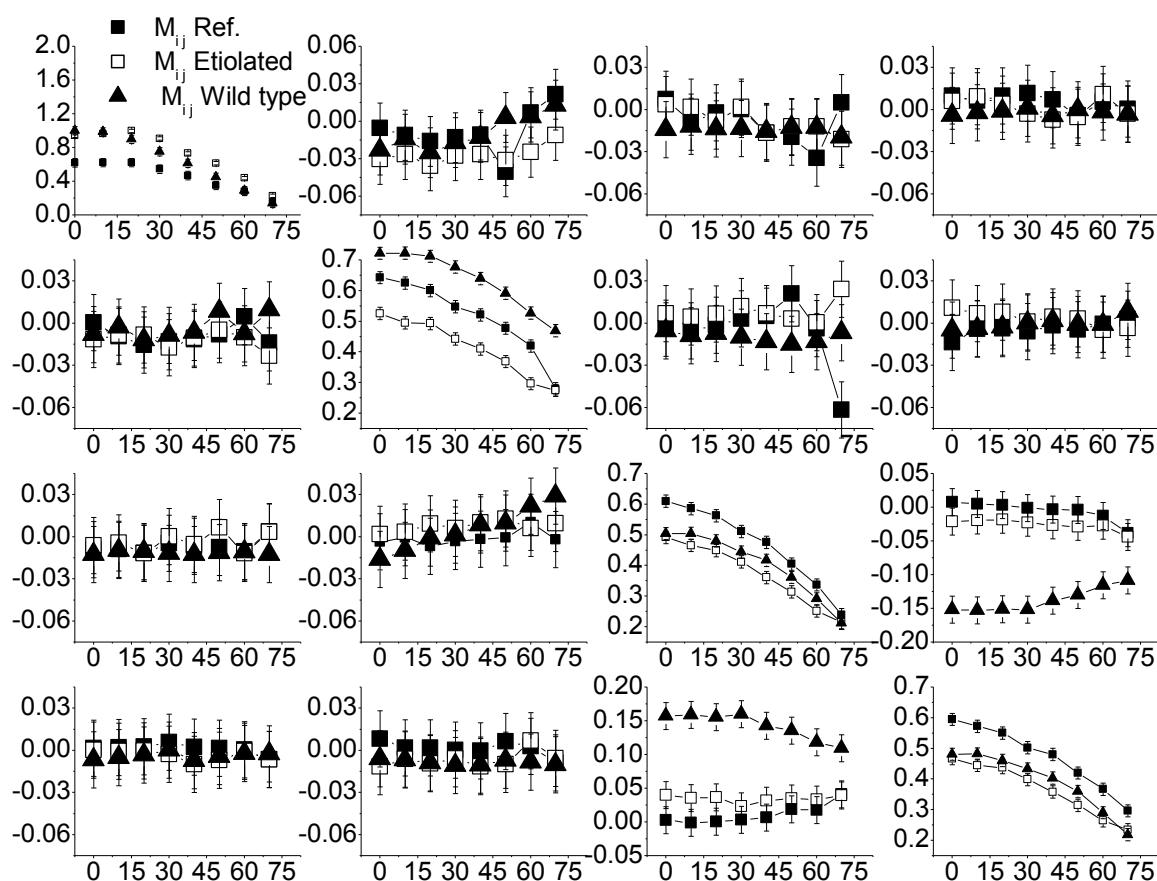


Рис. А.1. Залежності елементів матриці Мюллера  $m_{ij}$  від кута спостереження для прямого розсіювання.

Результати, що представлені на Рис А.1 демонструють, що матриці Мюллера листків всіх типів рослин, що досліджуються у цьому експерименті, для прямого розсіювання світла під кутами  $0^{\circ} - 70^{\circ}$  мають блочно діагональну структуру:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Зазначимо, що для зразків ячменю груп (b) і (c) структура матриці (A.1) характерна у всьому діапазоні кутів спостереження  $0^{\circ} - 70^{\circ}$ , тоді як для зразків

групи (а) матричні елементи  $m_{34}$  і  $m_{43}$  відмінні від нуля лише в діапазоні кутів спостереження від  $45^\circ$  до  $70^\circ$ .

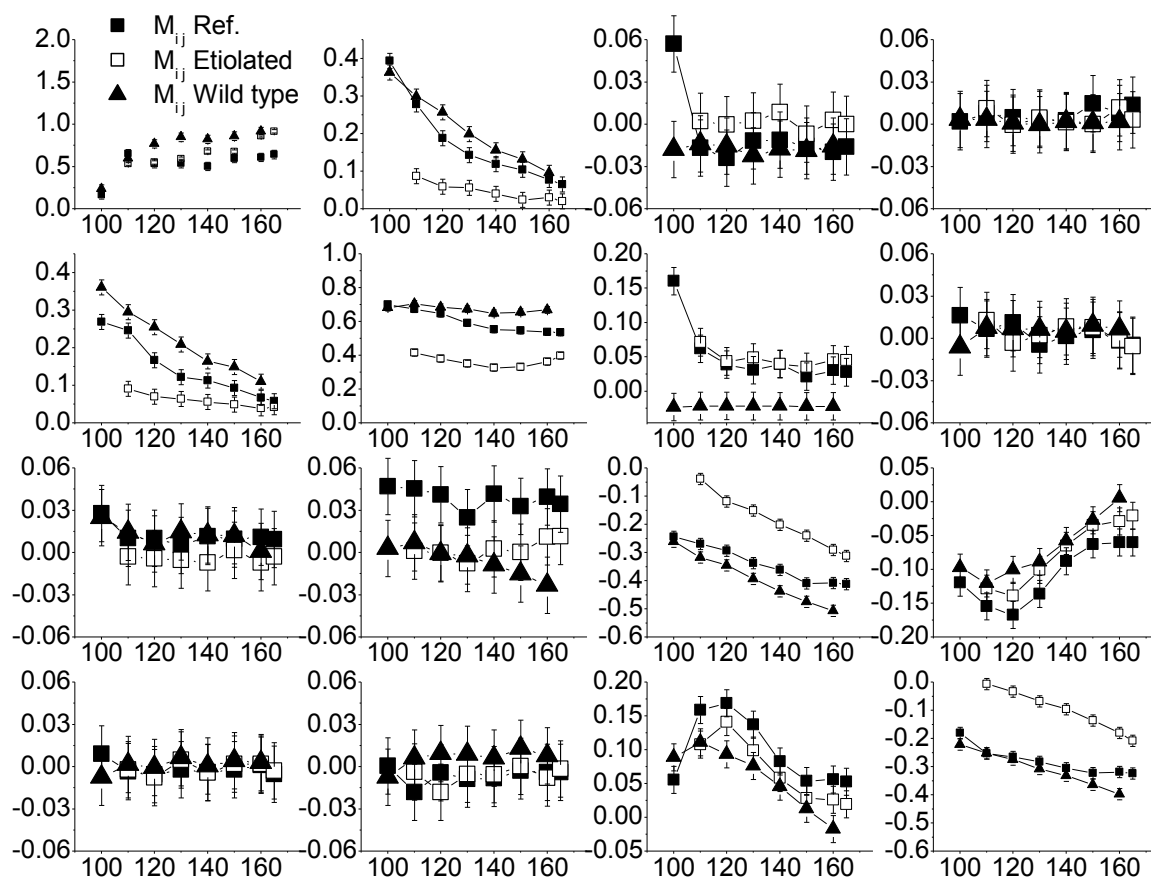


Рис. А.2. Залежності елементів матриці Мюллера  $m_{ij}$  від кута спостереження для зворотного розсіювання.

Для випадку розсіювання назад у діапазоні кутів спостереження  $100^\circ - 170^\circ$  отримана така структура матриць Мюллера:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Для зразків групи (с) значення матричних елементів  $m_{23}$  та  $m_{32}$  у цьому випадку близькі до нуля у всьому діапазоні кутів спостереження.

Відмітимо, що результати, представлені на Рис. А.1 і А.2, дозволяють стверджувати, що різні типи рослин, які досліджуються в цьому експерименті, очевидно, можна достовірно розрізнити за допомогою Мюллер-поляриметрії.

## ДОДАТОК Б

### Список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

*Статті у наукових фахових виданнях України та наукових періодичних виданнях інших держав:*

1. Savenkov S, Oberemok Y, Kolomiets I, Muttiah R, Kurylenko R. Mueller-Polarimetry of Barley Leaves II: Mueller Matrix Decompositions. *Photonics*. 2024; 11(1):76. <https://doi.org/10.3390/photonics11010076>.
2. Savenkov S., Kolomiets I., Oberemok Y., Kurylenko R. Spectral Problem for the Jones Matrix in Remote Scattering. *Космічна наука і технологія*. 2025. 31, No 1 (152). <https://doi.org/10.15407/knit2025.01.027>.

*Опубліковані праці апробаційного характеру:*

1. Kurylenko R., Kolomiets I. Eigenpolarizations orthogonality conditions of homogeneous anisotropic media in the term of the polar decomposition theorem // International Conference HEUREKA, 18–20 October 2022, Lviv, Ukraine. P. B4.
2. Kurylenko R.O., Kolomiets I.S., Savenkov S.N., Oberemok Ye.A. The geometric interpretation of the inhomogeneity parameter for different anisotropic media types // International Conference on Applied Physics (ICAP), 16–20 May 2023, Kyiv, Ukraine. Pp. 21–23.
3. Kurylenko R., Kolomiets I. Comparison of the polarization properties of anisotropic media in terms of the homogeneous and multiplicative approach // International Conference HEUREKA, 16–18 May 2023, Lviv, Ukraine. P. B3. URL: <https://physics.lnu.edu.ua/conferences/heureka2023/files/Heureka2023.pdf>.