

Веніамін КУБЕНКО, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. НАН України

ORCID ID: 0000-0002-8863-8580

e-mail: vdk@inmech.kiev.ua

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ, Київ, Україна

Ігор ЯНЧЕВСЬКИЙ, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ORCID ID: 0000-0002-7113-2276

e-mail: i.yanchevskyi@kpi.ua

Національний технічний університет України "КПІ ім. І. Сікорського", Київ, Україна

ПЛОСКА ХВИЛЯ В НЕСКІНЧЕННІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ З РІДИНОЮ, ЩО МІСТИТЬ ДВА ТВЕРДІ СФЕРИЧНІ ТІЛА

Представлено аналітико-чисельний метод розв'язання стаціонарної задачі визначення гідроакустичних характеристик рідини в циліндричній порожнині, на осі якої розташовані два тверді сферичні тіла. Вважаємо, що уздовж осі порожнини поширюється плоска хвиля заданої частоти й амплітуди. З використанням принципу суперпозиції, методу поділу змінних, трансляційних теорем додавання для спеціальних функцій, задачу зведено до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої отримано методом усічення. Розробленим методом обчислені гідродинамічні характеристики механічної системи залежно від частоти хвилі і її геометричних параметрів й акустичні радіаційні сили, що діють на сферичні тіла. Проведені чисельні експерименти показали, що порівняно з одиничним сферичним тілом на осі порожнини розглянутої механічної системи має більший перелік "умовно резонансних" частот, за яких акустичні характеристики можуть перевершувати амплітуду падаючої хвилі на декілька порядків. На цих частотах функція радіаційної сили також набуває максимального значення, причому унаслідок зміни частоти тіла можуть як віддалятися, так і рухатися назустріч. Основний вплив на амплітудні значення гідродинамічних параметрів надають відбиті від циліндричної границі акустичні хвилі. Отримані результати представляють узагальнення методів розв'язання задач про взаємодію плоскої гармонічної хвилі з твердими сферичними включеннями на осі нескінченної або напівнескінченної циліндричної порожнини.

Ключові слова: циліндрична порожнина, стислива рідина, плоска акустична хвиля, тверді кулі.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 33E15, 35Q35, 76N30.

Вступ

Під час дослідження динамічної поведінки різноманітних включень у рідині зазвичай розглядають рух окремої сферичної частинки або їх сукупності в безмежному середовищі (Жук, О., Гузь, & Жук, Я., 2023). Маловивченим, однак актуальним, є розкриття особливостей поведінки сукупності частинок в обмеженому об'ємі рідини. Як показали дослідження (Кубенко та ін., 2023; Кубенко, & Янчевський, 2023), навіть для одиничних сферичних тіл у заповненій ідеальною стисливою рідиною циліндричній порожнині наявні "аномальні" явища, такі, що за певних частот зовнішнього збудження спостерігаємо як суттєве зростання амплітуди коливань, так і зміну значень і напрямку дії так званих акустичних радіаційних сил (Shi et al., 2020; Simon, et al., 2019), що обумовлюють рух частинки. Можна припустити, що за наявності декількох частинок зазначені властивості коригуватимуться, і такі дослідження дадуть змогу виявити нові особливості дифракційних процесів в акустичному середовищі з включеннями.

У цій роботі пропонується підхід до визначення характеристик хвильового поля у стисливій рідині, що заповнює циліндричну порожнину, за присутності двох сферичних тіл. Джерелом динамічних збурень у системі є плоска гармонічна хвиля, що поширюється уздовж осі порожнини. В осесиметричному випадку задача зводиться до визначення хвильового потенціалу за відповідних граничних умов на жорстких поверхнях порожнини та сферичних тіл. Розв'язання задачі будуватиметься методом поділу змінних у вигляді суперпозиції сферичного та циліндричного розв'язків. Задоволення граничних умов на сферичній і циліндричній поверхнях здійснюється за допомогою відповідних перерозвинень циліндричного та сферичного потенціалів з однієї координатної системи в іншу. З огляду на це задача зводиться до розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Розв'язок цієї системи дає змогу повністю визначити хвильові потенціали та з їхньою допомогою обчислити поля тиску і швидкостей у рідині, та радіаційні сили, що діють на частинки.

Об'єкт дослідження – заповнена рідиною циліндрична порожнина, що містить систему двох твердих сферичних частинок під дією плоскої акустичної хвилі.

Мета та завдання дослідження – формулювання граничної задачі, розвиток підходів розв'язання і на їх основі визначення особливостей гідродинамічних полів і радіаційних сил у порожнині зі стисливою рідиною, що містить сферичні включення.

1. Постановка задачі

Нескінченна тверда кругова циліндрична порожнина радіусом ρ_0 заповнена ідеальною стисливою рідиною з густиною γ і швидкістю поширення звуку c . На осі порожнини розташовані дві тверді кулі з радіусами R_1 і R_2 (рис. 1) і міжцентровою відстанню $2h$ ($2h > R_1 + R_2$).

Задача полягає у визначенні хвильового поля Φ рідини, що заповнює порожнину, яке виникає під час поширення вздовж осі порожнини плоскої акустичної хвилі Φ_{inc} з амплітудою F_0

$$\Phi_{\text{inc}} = F_0(\omega) \cdot e^{i(\omega z - \omega t)}. \quad (1)$$

Уведемо дві сферичні системи координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ ($j=1,2$) з початками у O_j , що збігаються із центрами сферичних тіл, і циліндричну систему координат (ρ, z, φ) , вісь Oz якої збігається з віссю порожнини. Точка O рівновіддалена від центрів O_1 і O_2 (рис. 1).

Необхідно зауважити, що оскільки задача формулюється в осесиметричній постановці, то координата φ_* надалі з розгляду випадає.

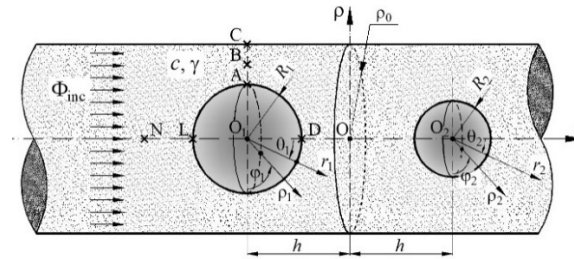


Рис. 1. Механічна система

Шуканий потенціал має задовольняти як рівняння Гельмгольца

$$\Delta \Phi + \omega^2 \Phi = 0, \quad (2)$$

що записане для випадку усталених хвильових рухів (Δ – диференціальний оператор Лапласа), так і відповідні граничні умови, які з урахуванням співвідношень між гідродинамічними параметрами рідини (швидкість точок $\mathbf{v}$ і тиск p) і шуканим потенціалом

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi; \quad p = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3)$$

запишемо так:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r_j} \right|_{r_j=R_j} = 0 \quad (j=1,2). \quad (4)$$

Потенціал поля має задовольняти умови випромінювання Зоммерфельда на нескінченності і бути обмежений у нулі (Кубенко, & Янчевський, 2023).

Варто зазначити, що рівності (1)–(4) записані з використанням безрозмірних змінних (Кубенко та ін., 2023).

2. Метод розв'язання

Очевидно, що хвильовий потенціал Φ являє собою суперпозицію потенціалу падаючої хвилі Φ_{inc} і потенціалу поля відбитих від твердих поверхонь хвиль Φ_{bnd} , останній з яких представимо у вигляді суми циліндричного $\Phi_{\text{cyl}}(\rho, z)$ і двох сферичних $\Phi_{\text{sph}}^{(j)}(r_j, \theta_j)$ ($j=1,2$) потенціалів –

$$\Phi = \Phi_{\text{inc}} + \Phi_{\text{cyl}}(\rho, z) + \Phi_{\text{sph}}^{(1)}(r_1, \theta_1) + \Phi_{\text{sph}}^{(2)}(r_2, \theta_2). \quad (5)$$

З використанням представлених у роботах (Кубенко та ін., 2023; Кубенко, & Янчевський, 2023) результатів, нескладно записати сумарний потенціал хвильового поля Φ у координатах, пов'язаних з кожною граничною поверхнею. Зокрема, у сферичних координатах (r_j, θ_j) ($j=1,2$) вираз (5) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \Phi(r_j, \theta_j, t) = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ i^m (2m+1) j_m(\omega r_j) F_0 e^{(-1)^j i \omega h} + X_m^{(j)} h_m(\omega r_j) - j_m(\omega r_1) \frac{2m+1}{2\omega} \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(j)} i^{m-f} q_{mf} + \right. \\ \left. + j_m(\omega r_j) \sum_{f=0}^{\infty} X_f^{(k)} \left[Q_{mf}^{(k)} - \frac{2m+1}{2\omega} i^{m-f} q_{mf}^{(k)} \right] \right\} P_m(\cos \theta_j) \quad (k=1,2; \quad k \neq j). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $j_m(x)$, $h_m(x)$ – сферичні функції m -го порядку; $P_m(x)$ – багаточлен Лежандра у степені m . Розрахункові вирази для вхідних у (6) коефіцієнтів q_{mf} , $q_{mf}^{(j)}$ і $Q_{mf}^{(j)}$ описані в (Кубенко та ін., 2023; Кубенко, & Янчевський, 2023), тому в цій роботі не наведені.

Необхідно зауважити, що співвідношення (6) вже враховують граничну умову на циліндричній поверхні.

Унаслідок підстановки (6) в умови непроникності на твердих поверхнях сферичних тіл (4) отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $X_m^{(1)}$ і $X_m^{(2)}$, розв'язок якої будується із залученням методу усичення.

Маючи значення $X_m^{(j)}$ ($j=1,2$), можна обчислити як потенціал Φ (6), так і гідродинамічні характеристики рідини (3).

З урахуванням рівностей розрахункової системи рівнянь і з використанням представлення сферичної функції Ганкеля h_m через сферичні функції Бесселя I-го і II-го роду вирази (6) набувають простішого вигляду

$$\Phi = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} i X_m^{(j)} \left(y_m(\omega r_j) - \frac{y'_m(\omega R_j)}{j'_m(\omega R_j)} j_m(\omega r_j) \right) P_m(\cos \theta_j). \quad (7)$$

Для твердих куль, потенціальна функція для рідини, що їх оточує, задається виразом типу (7), діюча на них радіаційна сила обчислюється на основі такої рівності (Кубенко та ін., 2023).

$$\langle F_z^{(j)} \rangle = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} \left[m(m+2) - \omega^2 R_j^2 \right] \left(\Re_m^{(j)} \Re_{m+1}^{(j)} + \Im_m^{(j)} \Im_{m+1}^{(j)} \right), \quad (8)$$

$$\text{де } \Re_m^{(j)} = \operatorname{Re}\{X_m^{(j)}\} \cdot Y_m^{(j)}; \quad \Im_m^{(j)} = -\operatorname{Im}\{X_m^{(j)}\} \cdot Y_m^{(j)}; \quad Y_m^{(j)} = y_m(\omega R_j) - \frac{y'_m(\omega R_j)}{j'_m(\omega R_j)} j_m(\omega R_j).$$

Тут штрих позначає похідну спеціальної функції за радіальною координатою.

З метою нормування результатів (8) та зручності їх аналізу іноді використовують безрозмірну функцію акустичного радіаційного тиску Y_{st} (Shi et al., 2020):

$$Y_{st}^{(j)} = \langle F_z^{(j)} \rangle / S_c^{(j)} E_p, \quad (9)$$

де $E_p = \omega^2 F_0^2 / 2$ – безрозмірне середнє значення густини енергії падаючої хвилі; $S_c^{(j)} = \pi R_j^2$ – площа поперечного перерізу j -го тіла.

3. Числові результати

Конкретні обчислення були проведені для одиничної амплітуди тиску первинної хвилі – $F_0 = 1/i\omega$. Частоту приймали з діапазону $0 < \omega \leq 10$ за кроку сканування 0,05. Циліндричну порожнину вважали заповненою водою з параметрами $\gamma = 1000 \text{ кг/м}^3$ і $c = 1500 \text{ м/с}$. Параметр усічення нескінченної системи алгебричних рівнянь прийнято таким, що дорівнює $N = 10$.

На рис. 2 штриховими кривими представлено амплітудні значення тиску в точках А, L і D розрахункової області (рис. 1) для механічної системи з $R_1 = R_2 = 0,3$ і $2h = 1,3$.

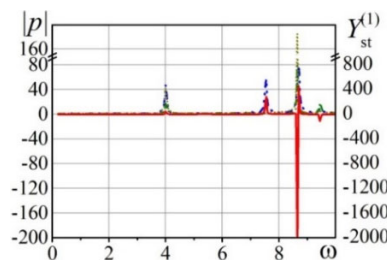


Рис. 2. Амплітуда тиску та функція радіаційної сили

Пікові значення на рис. 2 відповідають так званим умовно резонансним частотам падаючої хвилі (Кубенко та ін., 2023; Кубенко, & Янчевський, 2023). Найбільший тиск маємо в точках на осі порожнини за $\omega \approx 8,65$, за якої тиск у точці D в 185 разів перевищує амплітуду падаючої хвилі.

Детальніша інформація про розподіл гідродинамічних параметрів акустичного середовища в околі сферичних тіл може бути отримана за фіксованого значення частоти. Результати чисельних експериментів для $\omega \approx 8,65$ зображено на рис. 3.

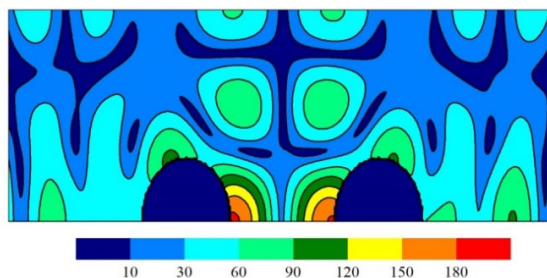


Рис. 3. Поле тиску за $R_j = 0,3$; $2h = 1,3$; $\omega \approx 8,65$

Аналіз рис. 3 свідчить про те, що за $R_1 = R_2$ зазначене поле із прийнятною точністю можна вважати симетричним відносно площини $z = 0$. Симетрія обумовлює і рівні за модулем значення радіаційних сил, що діють на сферичні вclusions, між якими, як показали чисельні експерименти, виконується рівність $\langle F_z^{(2)} \rangle = -\langle F_z^{(1)} \rangle$.

Графік обчисленої за формулою (9) функції $Y_{st}^{(1)}$ зображено суцільною кривою на рис. 2. З її аналізу випливає, що радіаційна сила на широкому діапазоні частот близька до нуля. Пікові значення відповідають "умовно резонансним частотам" для цієї механічної системи.

У разі зменшення міжцентрової відстані $2h$ з 1,3 до 1,0 пікове значення радіаційної сили змінюється з $Y_{st}^{(1)} = -2196$ за $\omega \approx 8,65$ (рис. 2) до $Y_{st}^{(1)} \approx +42600$ за $\omega \approx 3,90$.

На рис. 4 зображені обчислені за $\omega \approx 8,65$ епюри розподілу амплітудних значень радіальної і колової швидкостей точок середовища уздовж відрізків AC і NO (рис. 1). Ці епюри свідчать про задоволення граничних умов (4).

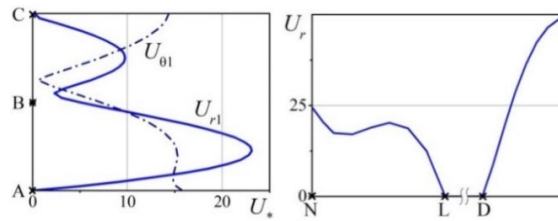


Рис. 4. Розподіл радіальної і колової швидкостей

Дискусія і висновки

У роботі представлено розв'язок задачі дифракційного розсіювання акустичних полів в околі двох сферичних тіл, які розташовані на осі нескінченної циліндричної порожнини з ідеальною стисливою рідиною. Вважаємо, що джерелом акустичних процесів є плоска гармонічна хвиля, яка поширюється уздовж осі порожнини. Авторами виявлені особливості дифракційних процесів в акустичному середовищі з включеннями й обчислені радіаційні сили, що діють на них.

Внесок авторів: Веніамін Кубенко – концептуалізація, теоретичні дослідження; Ігор Янчевський – проведення обчислень та аналіз отриманих результатів.

Джерела фінансування. Наукові дослідження виконано коштом бюджетної програми Національного фонду досліджень України (Проект 0120U105260 "Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах").

Список використаних джерел

- Жук, О. П., Гузь, О. М., & Жук, Я. О. (2023). Радіаційні сили акустичного поля в рідині з включеннями. Альянт. Kubenko, V. D., & Yanchevskiy, I. V. (2023). Diffraction field and radiation force for a liquid bubble in a dissimilar fluid in an infinite cylindrical cavity. *International Applied Mechanics*, 59, 257–269. <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01218-w>
- Kubenko, V. D., Yanchevskiy, I. V., Zhuk, Ya. O., & Liskin, V. O. (2023). Hydrodynamic characteristics of a plane wave interacting with a spherical body in a semi-infinite cylindrical cavity filled with a compressible fluid. *International Applied Mechanics*, 59, 131–144. <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01207-z>
- Shi, J., Li, Sh. Deng, Yu., Zhang, X., & Zhang, G. (2020). Analysis of acoustic radiation force on a rigid sphere in a fluid-filled cylindrical cavity with an abruptly changed cross-section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 147(1), 516–524. <https://doi.org/10.1121/10.0000603>
- Simon, G., Andrade, M. A. B., Desmulliez, M. P. Y., Riehle, M. O., & Bernassau, A. L. (2019). Numerical determination of the secondary acoustic radiation force on a small sphere in a plane standing wave field. *Micromachines*, 10(431). <https://doi.org/10.3390/mi10070431>
- Zhuk, O. P., Guz, O. M., & Zhuk, Ya. O. (2023) Radiation forces of an acoustic field in the liquid with inclusions. Альянт.

References

- Kubenko, V. D., & Yanchevskiy, I. V. (2023). Diffraction field and radiation force for a liquid bubble in a dissimilar fluid in an infinite cylindrical cavity. *International Applied Mechanics*, 59, 257–269 <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01218-w>
- Kubenko, V. D., Yanchevskiy, I. V., Zhuk, Ya. O., & Liskin, V. O. (2023). Hydrodynamic characteristics of a plane wave interacting with a spherical body in a semi-infinite cylindrical cavity filled with a compressible fluid. *International Applied Mechanics*, 59, 131–144. <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01207-z>
- Shi, J., Li, Sh. Deng, Yu., Zhang, X., & Zhang, G. (2020). Analysis of acoustic radiation force on a rigid sphere in a fluid-filled cylindrical cavity with an abruptly changed cross-section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 147(1), 516–524. <https://doi.org/10.1121/10.0000603>
- Simon, G., Andrade, M. A. B., Desmulliez, M. P. Y., Riehle, M. O., & Bernassau, A. L. (2019). Numerical determination of the secondary acoustic radiation force on a small sphere in a plane standing wave field. *Micromachines*, 10(431). <https://doi.org/10.3390/mi10070431>
- Zhuk, O. P., Guz, O. M., & Zhuk, Ya. O. (2023) Radiation forces of an acoustic field in the liquid with inclusions. Альянт.

Отримано редакцією журналу / Received: 31.01.24
Прорецензовано / Revised: 12.03.24
Схвалено до друку / Accepted: 01.05.24

Veniamin KUBENKO, DSc (Phys. & Math.), Prof., Active Member of the National Academy of Sciences of Ukraine

ORCID ID: 0000-0002-8863-8580

e-mail: vdk@inmech.kiev.ua

S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Ihor YANCHEVSKYI, DSc (Phys. & Math.), Prof.

ORCID ID: 0000-0002-7113-2276

e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua

National Technical University of Ukraine "I. Sikorskyi Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

PLANE WAVE IN INFINITE CYLINDRICAL CAVITY WITH FLUID AND TWO SPHERICAL SOLIDS

An analytical-numerical method for solving the stationary problem of determining the hydroacoustic characteristics of a liquid in a cylindrical cavity with two rigid spherical bodies is presented. It is assumed that a plane wave of a given frequency and amplitude propagates along the axis of the cavity. Using the principle of superposition, the method of separation of variables, translational addition theorems for special functions, the problem is reduced to an infinite system of algebraic equations, the solution of which is obtained by the truncation method. The hydrodynamic characteristics of the mechanical system depending on the frequency of the wave and its geometric parameters and the acoustic radiation forces acting on the bodies were calculated using the developed method. Numerical experiments showed that compared to a single spherical body on the axis of the cavity, the considered mechanical system has more "conditionally resonant" frequencies, at which the acoustic characteristics can exceed the amplitude of the incident wave by several orders of magnitude. At these frequencies, the radiation force function also takes its maximum value, and due to the change in frequency, bodies can both move away from each other and move towards each other. The main influence on the amplitude values of the hydrodynamic parameters is exerted by the acoustic waves reflected from the cylindrical boundary. The obtained results represent a generalization of methods for solving problems about the interaction of a plane harmonic wave with solid spherical inclusions on the axis of an infinite or semi-infinite cylindrical cavity.

Keywords: cylindrical cavity, compressible fluid, plane acoustic wave, spherical solids.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.