МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАРЦАФЕЙ АННА СЕРГІЇВНА

УДК 519.6

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ БАГАТОПРОЦЕСОРНИХ СИСТЕМ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Грищенко Олександр Юхимович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри обчислювальної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України, професор
Хіміч Олександр Миколайович,
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України,
завідувач відділу чисельних методів комп'ютерного моделювання;

доктор фізико-математичних наук, професор
Макаренко Олександр Сергійович,
Інститут прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «КПІ»,
завідувач науково-дослідного відділу прикладного нелінійного аналізу.

Захист відбудеться «17» листопада 2016 р. о 14:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, пр. Академіка Глушкова, 4-Д, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, ауд. 01.

З дисертацією можна ознайомитися у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий 13 жовтня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради П. М. Зінько

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В останні десятиріччя розвиток математичного моделювання динамічних та кінетичних процесів руху в'язкої рідини відбувається у напрямку поглиблення і розширення досліджень за рахунок використання більш повних систем рівнянь, зменшення кількості обмежень, пов'язаних з ідеалізацією моделей руху та рівнянь стану. Одночасно з розвиненням методів математичного моделювання у прикладних галузях науки, виробництві та запитах суспільства виникає значна кількість нових актуальних задач, пов'язаних з процесами, які описуються системами рівнянь переносу та системами рівнянь Нав'є-Стокса.

Практичне застосування на багатопроцесорних комп'ютерних системах показало, що багато із ефективних методів розв'язування задач гідро- та газодинаміки є малоефективними, зокрема, схеми Мак-Кормака, Браіловської, Лакса-Вендроффа, Алена-Чена, Дюфорта-Франклена. В той же час, ідеї запропоновані в роботах О. М. Білоцерковського, В. О. Гущина, Г. І. Марчука, М. М. Яненка, F. H. Harlow, S. V. Patankar, О. С. Макаренка, М. М. Москалькова, В. В. Воєводіна, І. М. Молчанова, О. М. Хіміча та інших одержали подальший розвиток в напрямку застосування на паралельних обчислювальних комплексах. При побудові алгоритмів для таких обчислювальних комплексів все ширше почали використовуватись двокрокові різницеві алгоритми. Так, в роботах Е. А. Данилко, Д. В. Дегі, А. В. Старченко побудовані двокрокові ітераційні алгоритми для розв'язування систем рівнянь Нав'є-Стокса. Свій розвиток в цьому напрямку одержав також і двокроково-симетризований алгоритм.

Незважаючи на достатньо велику кількість робіт, запити наукового та суспільного розвитку вимагають більш широкого застосування сучасних багатопроцесорних комплексів, а отже, і розробки нових алгоритмів чисельного моделювання відповідних процесів. Ця обставина обумовлює актуальність вибору тематики даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до плану наукових досліджень кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках бюджетної науково-дослідної теми № ДР 11БФ015-03 «Алгоритми керування і розпізнавання в складних системах» (2011-2015 рр., номер державної реєстрації 0111U006679).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є побудова і дослідження ефективних методів чисельного моделювання на багатопроцесорних системах процесів тепломасопереносу та процесів динаміки в'язкої нестислої рідини, які описуються системами рівнянь Нав'є-Стокса. Поставлена мета обумовлює необхідність розв'язування таких основних *задач*:

- сформулювати постановку задачу та визначити формалізовані вимоги до розпаралелених чисельних алгоритмів;
- побудувати і обґрунтувати узагальнення двокроково-симетризованого алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу;
- побудувати алгоритми розщеплення за просторовими напрямками з

використанням двокроково-симетризованого алгоритму;
- дослідити та теоретично обґрунтувати основні обчислювальні характеристики побудованих алгоритмів: апроксимацію, стійкість, дисперсійність та дисипативність;
- проаналізувати можливість розпаралелення побудованих алгоритмів;
- побудувати ефективну при розпаралеленні різницеву схему для моделювання руху нестислої рідини (системи рівнянь Нав'є-Стокса);
- дослідити дисперсійність, дисипативність та адекватність одержаного чисельного алгоритму реальним фізичним процесам;
- розробити алгоритм проведення чисельного моделювання руху в'язкої нестислої рідини на багатопроцесорній системі з MIMD-архітектурою;
- реалізувати та проаналізувати ефективність роботи алгоритму на багатопроцесорній обчислювальній системі з MIMD-архітектурою.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є процеси тепломасопереносу та процеси динаміки в'язкої нестислої рідини.

Предметом дослідження є математичні моделі тепломасопереносу та руху в'язкої нестислої рідини, записані у вигляді системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, а також систем відповідних скінчено-різницевих рівнянь.

Методами дослідження є класичні методи математичного та функціонального аналізу, методи математичного моделювання, методи теорії різницевих схем для побудови чисельних алгоритмів та дослідження таких важливих характеристик як стійкість, дисперсійність, дисипативність, збіжність та консервативність різницевих схем. Концепції побудови паралельних алгоритмів застосовувалися при побудові алгоритмів та для оцінки якості їх реалізації на багатопроцесорних системах.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертаційній роботі розроблено і обґрунтовано новий метод чисельного моделювання процесів динаміки в'язкої рідини на багатопроцесорних системах. Здобуто такі основні результати:
- *вперше* побудовано і обґрунтовано узагальнення двокроково-симетризованого алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу;
- *вперше* розроблено та досліджено схеми розщеплення системи рівнянь конвекції-дифузії, побудовані на базі двокроково-симетризованого алгоритму;
- обґрунтовано стійкість, дисипативність та дисперсійність побудованих двокроково-симтеризованих алгоритмів розщеплення;
- *набув подальшого розвитку* двокроково-симтеризований алгоритм розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса, записаної у дивергентній формі;
- обґрунтовано консервативність, дисипативність та дисперсійність побудованого двокроково-симетризованого алгоритму для системи рівнянь Нав'є-Стокса;
- *вперше* розроблено і обґрунтовано алгоритм розпаралелення для системи рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних системах та зроблено аналіз її ефективності.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи в основному мають теоретичний характер, їх застосування є перспективним при чисельному моделюванні на багатопроцесорних обчислювальних комплексах процесів переносу різного роду фізичних субстанцій. Розроблені методи та алгоритми розпаралелення дозволяють підвищити швидкодію та точність процесів чисельного моделювання складних динамічних систем, які базуються на системах рівнянь конвекції-дифузії та системах рівнянь Нав'є-Стокса. Окремі наукові результати, одержані в роботі, були впроваджені впроваджені у 2015-2016 н. р. у навчальний процес кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні спеціальних курсів: для магістрів 1 року навчання «Чисельне моделювання динаміки систем», для бакалаврів 4 року навчання «Чисельне моделювання процесів гідродинаміки» та для бакалаврів 3 року навчання «Методи оптимізації для систем із розподіленими параметрами».

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є самостійною науковою працею. Робота містить теоретичні та методичні положення і висновки, сформульовані здобувачем особисто. Серед опублікованих наукових робіт – 2 виконано особисто [1,4], інші 4 – у співавторстві. В роботах [2,3,6] автору належать алгоритми розщеплення, формулювання та доведення відповідних теорем, Грищенку О. Ю. – загальна постановка задачі, Федоровій В. С. – алгоритм розщеплення для рівнянь із коефіцієнтами, залежними від часу, записаних у дивергентному вигляді. У роботі [5] здобувачу належить блочна схема алгоритму розпаралелення та аналіз результатів, Оноцькому В. В. та Попову О. В. – реалізація алгоритму на багатопроцесорному обчислювальному комплексі «Інпарком» з MIMD-архітектурою, Грищенку О. Ю. – ідея розпаралелення чисельної моделі за рівняннями.

Апробація результатів. Основні матеріали дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних наукових конференціях:

1. III Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2009);
2. XVI Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2009);
3. Міжнародна молодіжна математична школа «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)» (Кацивелі, 2011);
4. VI Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2013);
5. Міжнародна наукова конференція «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)» (Кацивелі, 2013);
6. Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» (Київ, 2014);
7. XXVI International Conference «Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU – 2015)» (Odessa, 2015);
8. VIII Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2015).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася та обґрунтовувалася на науковому семінарі кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики

Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України під керівництвом чл.-кор. НАН України, проф. Ляшка С. І. та науковому семінарі відділу чисельних методів та комп'ютерного моделювання Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України під керівництвом чл.-кор. НАН України, проф. Хіміча О. М.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 6 статтях у наукових фахових журналах, затверджених МОН України [1-6], один з яких [5] включений до міжнародної наукометричної бази Scopus, та 9 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [7-15].

Обсяг і структура роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації становить 120 сторінок, список використаних джерел налічує 153 найменування на 17 сторінках, 1 додаток займає 1 сторінку.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику – доктору фізико-математичних наук, професору Грищенку Олександру Юхимовичу за постановку розглянутих в дисертаційній роботі задач та постійну увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У **вступі** обґрунтовано актуальність обраної теми, сформульовано мету роботи, визначено наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичну та практичну цінність. Також наведено дані про публікації здобувача, його особистий внесок та апробацію результатів.

Перший розділ містить ґрунтовний аналіз стану проблеми, огляд літератури за тематикою роботи та спорідненими питаннями, висвітлює основні напрямки дисертаційного дослідження. Сформульовано постановку задачі дисертаційної роботи та вимоги до методів чисельного моделювання процесів гідродинаміки на багатопроцесорних системах. Зроблено аналіз чисельних методів, ефективних при використанні багатопроцесорних комплексів.

У **другому розділі** побудовано та обґрунтовано двокроково-симетризовані алгоритми (ДС-алгоритми) чисельного моделювання процесів переносу для еліптичних та параболічних рівнянь другого порядку без мішаних похідних.

Незважаючи на те, що для даного класу задач існує значна кількість методів різного порядку точності, на увагу заслуговують методи, побудовані на основі ДС-алгоритму. Зокрема, у застосуванні до систем стаціонарних рівнянь, що апроксимуються на триточкових шаблонах уздовж кожного з координатних напрямків, цей метод володіє такими позитивними властивостями: 1) має другий порядок швидкості збіжності відносно малого ітераційного параметра; 2) ефективно може бути реалізований на багатопроцесорних системах.

В *підрозділі 2.1* ітераційний ДС-алгоритм для знаходження розв'язків систем стаціонарних рівнянь переносу узагальнено на відповідні системи з операторами, діючими у комплекснозначних функціональних просторах.

Апроксимація диференціального оператора та ітераційна схема. Для наглядності апроксимацію диференціального оператора та схему побудови ітераційного процесу наведемо для задачі, поставленої в прямокутній області $G(x,y)=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ з границею Γ, в якій шукаємо розв'язок рівняння

$$A\vec{u}=\vec{f}(x,y), \qquad (1)$$

$$\vec{u}\big|_{\Gamma}=\vec{\mu}(x,y), \qquad (2)$$

де A – заданий лінійний диференціальний оператор другого порядку без мішаних похідних, що діє у просторі комплекснозначних функцій $A(\cdot)=\operatorname{Re}A(\cdot)+i\operatorname{Im}A(\cdot)$, $\vec{u}(x,y)=\operatorname{Re}\vec{u}+i\operatorname{Im}\vec{u}$, $\vec{f}(x,y)=\operatorname{Re}\vec{f}+i\operatorname{Im}\vec{f}$ і такий, що поставлена задача коректна. Для знаходження розв'язку вводимо фіктивну область $\Omega(x,y,t)=G(x,y)\times(0\le t<\infty)$, де t є релаксаційним параметром, яку покриваємо рівномірною сіткою $\Omega_{h_1,h_2,\tau}$. Цю сіткову область розщеплюємо на дві підобласті $\Omega^{1,n}_{h_1,h_2,\tau}$, $\Omega^{2,n}_{h_1,h_2,\tau}$. До першої відносимо точки, у яких сума індексів $S=i+j+n$ – непарна, до другої – сума S парна. Вважаємо, що кожен ітераційний крок складається із двох допоміжних: непарного $2n+1$ та парного $2n+2$. На непарному $2n+1$ – точкам множини $\Omega^{1,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$ ставимо у відповідність явні різницеві рівняння

$$\frac{\vec{v}^{\,2n+1}_{ij}-\vec{v}^{\,2n}_{ij}}{\tau}=-A_h\vec{v}^{\,2n}_{ij}+\vec{\varphi}^{\,2n}_{ij}, \qquad (3)$$

а точкам $\Omega^{2,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$ неявні

$$\frac{\vec{v}^{\,2n+1}_{ij}-\vec{v}^{\,2n}_{ij}}{\tau}=-A_h\vec{v}^{\,2n+1}_{ij}+\vec{\varphi}^{\,2n}_{ij}. \qquad (4)$$

На парному кроці $2n+2$ у точках $\Omega^{1,2n+2}_{h_1,h_2,\tau}$ відповідно

$$\frac{\vec{v}^{\,2n+2}_{ij}-\vec{v}^{\,2n+1}_{ij}}{\tau}=-A_h\vec{v}^{\,2n+1}_{ij}+\vec{\varphi}^{\,2n+2}_{ij}, \qquad (5)$$

а в точок із множини $\Omega^{2,2n+2}_{h_1,h_2,\tau}$ –

$$\frac{\vec{v}^{\,2n+2}_{ij}-\vec{v}^{\,2n+1}_{ij}}{\tau}=-A_h\vec{v}^{\,2n+2}_{ij}+\vec{\varphi}^{\,2n+2}_{ij}. \qquad (6)$$

Тут: A_h – різницевий оператор, що апроксимує диференціальний оператор A на шаблоні, який має триточкову структуру вздовж кожного координатного напрямку; $\vec{\varphi}$ – сіткова вектор-функція, яка апроксимує $\vec{f}$, а $\vec{v}^{\,2n}_{ij}$ є апроксимацією розв'язку $\vec{u}(x,y)$ у вузлах сітки (x_i,y_j) на $2n$-тому ітераційному кроці. Знаходження $\vec{v}^{\,2n}_{ij}$ починаємо з точок області $\Omega^{1,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$ за явною скінченно-різницевою схемою (3). Оскільки після обходу всіх точок цієї множини значення функції $\vec{v}^{\,2n+1}_{ij}$ у цих точках будуть визначені, то формально неявні різницеві схеми (4) дозволяють знайти розв'язок у вузлах множини $\Omega^{2,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$ явно. Результати розрахунків, проведені за формулами (3), (4) використовуємо як допоміжні. На наступному ітераційному кроці виконуємо цикл розрахунків за формулами (5), (6) і одержуємо значення $\vec{v}^{\,2n+2}_{ij}$, які приймаємо за ітераційне наближення. Обчислення за формулами (3)-(6) проводимо в усіх внутрішніх вузлах сітки.

Якщо розмірність області більше двох, то очевидно, що загальна схема побудови ітераційного алгоритму залишається без зміни.

Апроксимація граничних умов. Нехай на одній із ділянок границі, наприклад $x = x_{M_1} = 1$, виконується умова третього роду:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + c\vec{u} = \vec{d}\,. \tag{7}$$

Цю умову апроксимуємо односторонніми різницями з першим порядком точності на двоточковому шаблоні:

$$(1 + ch_1)\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j} - \vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1 j} = \vec{d}h_1 \tag{8}$$

або із другим порядком точності на триточковому шаблоні:

$$(1 + ch_1)\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j} - 4\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1 j} + \vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-2 j} = 2\vec{d}h_1\,. \tag{9}$$

Для збереження стійкості алгоритму в залежності від належності граничних точок до відповідної сіткової множини $\Omega^{1,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$ чи $\Omega^{2,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$, значення шуканих функцій в граничних і приграничних вузлових точках обчислюємо за різними формулами. Якщо приграничні точка $(x_{M_1-1}, y_j, t_{2n+1}) \in \Omega^{1,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$, то значення $\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1 j}$ знаходимо з рівняння $\vec{v}^{\,2n+1}_{ij} = \vec{v}^{\,2n}_{ij} + \tau A_h \vec{v}^{\,2n}_{ij}$ при $i = M_1 - 1$, а $\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j}$ – з умови (8) або (9). Якщо ж $(x_{M_1-1}, y_j, t_{2n+1}) \in \Omega^{2,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$, то $\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1 j}$ та $\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j}$ визначаємо з системи:

$$\begin{cases} a_{11}\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1 j} + a_{12}\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j} = \vec{b}_1, \\ a_{21}\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1 j} + a_{22}\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j} = \vec{b}_2. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 2.1. Якщо комплекснозначний скінчено-різницевий оператор A_h $(A_h(\cdot) = \operatorname{Re} A_h(\cdot) + i \operatorname{Im} A_h(\cdot))$ лінійний, $\operatorname{Re} A_h \geq 0$, функція f – рівномірно обмежена в області побудови розв’язку G, релаксаційний крок τ сталий або змінюється через парне число кроків, то ітераційний алгоритм, побудований на двокроковій симетризованій схемі (3)-(6), збіжний при довільних початкових умовах.

В наступній частині розділу на основі ДС-алгоритму побудовано та досліджено *чотири варіанти схем розщеплення*. Їх ефективність визначається високою можливістю реалізації на багатопроцесорних системах.

Процес конвективно-дифузійного переносу в наближенні нестискуваної рідини в циліндричній області $Q = \Omega \times (0 < t < T)$, де Ω – регулярна область в $\mathbb{R}^N$ з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L(u) - f = 0, \tag{11}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{12}$$

$$L(u) = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} b_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \tag{13}$$

де $B_\alpha(x) \geq 0$ для всіх $\alpha = \overline{1,N}$ – неперервно-диференційовані за своїми змінними при заданих початково-граничних умовах

$$u\big|_{t=0} = u^0(x), \quad x \in \Omega, \qquad\qquad u\big|_{\partial\Omega} = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega.$$

Зокрема, при $N = 2$, а $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, позначимо

$$\Lambda = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad \Lambda \geq 0 \tag{14}$$

– оператор дифузії, а через

$$C^1(\vec{b})u = \vec{b}\,\mathrm{grad}\,u = \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \tag{15}$$

– оператор конвективного переносу.

При виконанні (12) оператор (15) еквівалентний наступному:

$$C^2(\vec{b})u = \mathrm{div}\,(\vec{b}u) = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial (b_\alpha u)}{\partial x_\alpha}. \tag{16}$$

Початково-крайову задачу (11)-(13) запишемо в операторному вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \qquad\qquad Lu \equiv C(b)(u) + \Lambda(u),$$

де $C(b)$ визначаємо однією з формул (15) чи (16), а Λ – за формулою (14).

При побудові різницевих алгоритмів розщеплення для наведених початково-крайових задач суттєву роль відіграє виконання умови (12). Це спонукає розглядати окремо випадки залежності чи незалежності оператора $C(b)$ від часу.

Спочатку розглянуто дві схеми ДС-розщеплення для рівнянь з коефіцієнтами конвекції не залежними від часу (алгоритм I та алгоритм II).

Алгоритм I. Адитивну схему розщеплення запишемо таким чином

$$\frac{y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} - y_{ij}^{2n+2(\alpha-1)}}{\tau} - C_\alpha y_{ij}^{2n+2(\alpha-1)} + \Lambda_\alpha y_{ij}^{2n+2(\alpha-1)} = \varphi_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}, \tag{17}$$

$$(x_{1i}, x_{2j}, t_n) \in \Omega_{\tau h}^{1,2n+1+2(\alpha-1)},$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} - y_{ij}^{2n+2(\alpha-1)}}{\tau} - C_\alpha y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} + \Lambda_\alpha y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} = \varphi_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}, \tag{18}$$

$$(x_{1i}, x_{2j}, t_n) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+1+2(\alpha-1)},$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2+2(\alpha-1)} - y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}}{\tau} - C_\alpha y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} + \Lambda_\alpha y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} = \varphi_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}, \tag{19}$$

$$(x_{1i}, x_{2j}, t_n) \in \Omega_{\tau h}^{1,2n+2+2(\alpha-1)},$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2\ \alpha-1}-y_{ij}^{2n+1+2\ \alpha-1}}{\tau}-C_\alpha y_{ij}^{2n+2+2\ \alpha-1}+\Lambda_\alpha y_{ij}^{2n+2+2\ \alpha-1}=\varphi_{ij}^{2n+1+2\ \alpha-1}, \qquad (20)$$

$$x_{1i},x_{2j},t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+2+2\ \alpha-1},$$

$\alpha=1,2$; $\varphi_{ij}^{n}=f_{ij}^{n}$.

Тут $C_\alpha\ b$ та $\Lambda_\alpha\ b$ – різницеві оператори, які апроксимують відповідно диференціальні оператори конвективного переносу та диференціальні оператори дифузії. Значення $\alpha=1$ відповідає напрямку x_1, а $\alpha=2$ напрямку x_2.

Алгоритм II. Застосовуємо до розв’язування початково-крайової задачі для рівняння переносу з лінійним джерельним членом

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\sum_{\alpha=1}^{2}b_\alpha\ x\ \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+qu+f \qquad (21)$$

при заданих початкових та граничних умовах.

Позначимо $L_\alpha=-C_\alpha+\Lambda_\alpha+q$, $\alpha=1,2$. Оскільки значення розв’язку різницевої задачі на часовому кроці $2n$ відоме, то обчислення можна проводити навіть на m_1+m_2 процесорах одночасно за формулами одновимірного ДС-алгоритму.

При $\alpha=1$ та кожному фіксованому $j_0=\overline{1,m_2}$ знаходимо значення $\tilde y_{ij_0}^{2n+2}$

$$\frac{\tilde y_{ij_0}^{2n+1}-y_{ij_0}^{2n}}{\tau}+L_1 y_{ij_0}^{2n}=\varphi_{ij_0}^{2n+1}, \qquad x_{1i},x_{2j_0},t_{2n+1}\ \in\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}, \qquad (22)$$

$$\frac{\tilde y_{ij_0}^{2n+1}-\tilde y_{ij_0}^{2n}}{\tau}+L_1\tilde y_{ij_0}^{2n+1}=\varphi_{ij_0}^{2n+1}, \qquad x_{1i},x_{2j_0},t_{2n+1}\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}, \qquad (23)$$

$$\frac{\tilde y_{ij_0}^{2n+2}-\tilde y_{ij_0}^{2n+1}}{\tau}+L_1\tilde y_{ij_0}^{2n+1}=\varphi_{ij_0}^{2n+1}, \qquad x_{1i},x_{2j_0},t_{2n+2}\ \in\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}, \qquad (24)$$

$$\frac{\tilde y_{ij_0}^{2n+2}-\tilde y_{ij_0}^{2n+1}}{\tau}+L_1\tilde y_{ij_0}^{2n+2}=\tilde\varphi_{ij_0}^{2n+1}, \qquad x_{1i},x_{2j_0},t_{2n+2}\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}. \qquad (25)$$

Аналогічно при $\alpha=2$ та кожному фіксованому $i_0=\overline{1,m_1}$ обчислюємо $\tilde{\tilde y}_{i_0 j}^{2n+2}$.

За розв’язок різницевої задачі, яка апроксимує задачу (21), (12), на часовому кроці $2n+2$ приймаємо

$$y_{ij}^{2n+2}=\frac{1}{2}\ \tilde y_{ij}^{2n+2}+\tilde{\tilde y}_{ij}^{2n+2}\ . \qquad (27)$$

Зауважимо, що перший алгоритм має порядок апроксимації $O\ \tau$. За цикл з чотирьох обрахунків множин точок алгоритм переводить розв’язок з часового шару $2n$ на часовий шар $2n+4$. Другий алгоритм має порядок апроксимації $O\ \tau^2$ та таку саму кількість обчислювальних операцій, як і перший алгоритм, але переводить розв’язок з часового шару $2n$ на шар $2n+2$.

Отже, якщо в процесі моделювання важливим є отримання розв’язку при виході на режим усталення (стаціонарний режим) і нас менше цікавить точність проміжних розрахунків, то доцільно використовувати алгоритм I. Алгоритм II має перевагу, коли потрібна висока точність значень на кожному кроці обчислень.

У *підрозділі 2.2.3* запропоновано дві схеми розщеплення для рівнянь з коефіцієнтами, залежними від часу (алгоритм III та алгоритм IV).

Стандартний алгоритм розщеплення сумарно апроксимує диференціальне рівняння (11), але не задовольняє умову $\left(C\left(b\right)u^{n+1},u^{n+1}\right)=0$, оскільки $\left(C_1\left(b^{n+1}\right)u^{n+1}+C_2\left(b^{n+2}\right)u^{n+2},u^{n+2}\right)\neq 0$. Це спонукає до побудови окремих алгоритмів.

Алгоритм III побудований на базовій схемі ДС-алгоритму, де уведено різницеві оператори $L_\alpha^{2n+1}=-C_\alpha^{2n+1}+\Lambda_\alpha^{2n+1}$ $(\alpha=1,2)$, коефіцієнти яких обчислюються тільки на непарних часових кроках, та сіткові функції $y_{ij}^n=u(x_{1i},x_{2j},t_n)$ $\varphi_{ij}^n=f\left(x_{1i},x_{2j},t_n\right)$.

При кожному фіксованому значенні $j=j_0$, $j_0=\overline{1,m_2}$, за напрямком вздовж координати x_1 обчислимо

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}-y_{ij_0}^{2n}}{\tau}+L_1^{2n+1}y_{ij_0}^{2n}=\varphi_{ij_0}^{2n+1} \qquad \text{в точках } \Omega_{\tau h}^{1,2n+1}\,, \tag{28}$$

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}-y_{ij_0}^{2n}}{\tau}+L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}=\varphi_{ij_0}^{2n+1} \qquad \text{в точках } \Omega_{\tau h}^{2,2n+1}\,, \tag{29}$$

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}-\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}}{\tau}+L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}=\tilde{\varphi}_{ij_0}^{2n+1} \qquad \text{в точках } \Omega_{\tau h}^{1,2n+2}\,, \tag{30}$$

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}-\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}}{\tau}+L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}=\tilde{\varphi}_{ij_0}^{2n+1} \qquad \text{в точках } \Omega_{\tau h}^{2,2n+2}\,, \tag{31}$$

де $\quad \tilde{\varphi}_{ij_0}^{2n+1}=\varphi_{ij_0}^{2n+1}-2L_2^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}$.

Аналогічно розв'язуємо задачу розщеплення вздовж координати x_2 при кожному фіксованому $i=i_0$, $i_0=\overline{1,m_1}$. За наближений розв'язок задачі (11), (12) на кроці $2n+2$ приймемо значення сіткової функції

$$y_{ij}^{2n+2}=\frac{1}{2}\left(\tilde{y}_{ij}^{2n+2}+\tilde{\tilde{y}}_{ij}^{2n+2}\right). \tag{32}$$

Алгоритм IV. У випадку, коли оператор $C(b)$ подано у не дивергентній формі, його доцільно подавати за схемою, запропонованою Г. І. Марчуком

$$C\left(b(x,t)\right)u=b_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial u}{\partial x_2}=b_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{u}{2}\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1}+\frac{\partial b_2}{\partial x_2}\right)=\left(\tilde{C}_1+\tilde{C}_2\right)u\,, \tag{33}$$

де враховано рівняння нерозривності і покладено

$$\tilde{C}_\alpha u=b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{u}{2}\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}=C_\alpha u+\hat{C}_\alpha u\,, \tag{34}$$

$$C_\alpha u=b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \qquad \hat{C}_\alpha u=\frac{u}{2}\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}. \tag{35}$$

Тоді $\quad \left(\tilde{C}_\alpha u,u\right)=\left(C_\alpha u,u\right)+\left(\hat{C}_\alpha u,u\right)=-\frac{1}{2}\int_0^a dx_1\int_0^b u^2\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}dx_2+\frac{1}{2}\int_0^a dx_1\int_0^b u^2\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}dx_2=0\,.$

Одержати алгоритм розщеплення другого порядку сумарної апроксимації можна, якщо використовувати таку циклічну схему

$$\frac{y_{ij}^{2n+1}-y_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+1}y_{ij}^{2n}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n}+f_{ij}^{2n+1}, \qquad x_i,y_j,t_{2n}\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}, \tag{36}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+1}-y_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+1}y_{ij}^{2n+1}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+1}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}, \tag{37}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+1}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+1}y_{ij}^{2n+1}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+1}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}, \tag{38}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+1}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+1}y_{ij}^{2n+2}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+2}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}, \tag{39}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+3}-y_{ij}^{2n+2}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+3}y_{ij}^{2n+2}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+2}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+3}, \tag{40}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+3}-y_{ij}^{2n+2}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+3}y_{ij}^{2n+3}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+3}+f_{ij}^{2n+3}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+3}, \tag{41}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+4}-y_{ij}^{2n+3}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+3}y_{ij}^{2n+3}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+3}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+4}, \tag{42}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+4}-y_{ij}^{2n+3}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+3}y_{ij}^{2n+4}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+4}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+4}, \tag{43}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+5}-y_{ij}^{2n+4}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+5}y_{ij}^{2n+4}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+4}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+5}, \tag{44}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+5}-y_{ij}^{2n+4}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+5}y_{ij}^{2n+5}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+5}+f_{ij}^{2n+5}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+5}, \tag{45}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+6}-y_{ij}^{2n+5}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+5}y_{ij}^{2n+5}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+5}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+6}, \tag{46}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+6}-y_{ij}^{2n+5}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+5}y_{ij}^{2n+6}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+6}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+6}, \tag{47}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+7}-y_{ij}^{2n+6}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+7}y_{ij}^{2n+6}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+6}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+7}, \tag{48}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+7}-y_{ij}^{2n+6}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+7}y_{ij}^{2n+7}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+7}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+7}, \tag{49}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+8}-y_{ij}^{2n+7}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+7}y_{ij}^{2n+7}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+7}+f_{ij}^{2n+7}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+8}, \tag{50}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+8}-y_{ij}^{2n+7}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+7}y_{ij}^{2n+8}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+8}, \qquad x_i,y_j,t_n\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+8}. \tag{51}$$

Очевидно, що жодна окрема різницева схема наведених вище алгоритмів розщеплення не апроксимує поставлену задачу (11), (12).

У *підрозділі 2.3.1* показано, що для всіх чотирьох алгоритмів вірні твердження.

Теорема 2.2. Алгоритм (17)-(20) апроксимує рівняння (11), (12) з порядком $O\left(\tau + h^m\right)$, де m – порядок апроксимації операторів C_α за просторовою змінною.

Теорема 2.3. Алгоритм (22)-(27) апроксимує рівняння (21), (12) з точністю $O\left(\tau^2 + h^m\right)$, де m – порядок апроксимації оператора L_α за просторовими змінними.

Теорема 2.4. Алгоритм (28)-(32) апроксимує рівняння (11), (12) з точністю $O\left(\tau^2 + h^m\right)$, де m – порядок апроксимації оператора L_α за просторовими змінними.

Теорема 2.5. Алгоритм IV має другий порядок апроксимації.

В *підрозділі 2.3.2* досліджено стійкість запропонованих алгоритмів.

Теорема 2.6. Алгоритм (17)-(20) безумовно стійкий за початковими даними.

Тут алгоритм I подано в операторному вигляді: $\vec{y}^{2n+4} = G\vec{y}^{2n}$ або

$$\vec{y}^{2n+4} = G^n \vec{y}^0. \qquad (52)$$

Встановлено, що $G = G_2 \cdot G_1$. Тут $G_\alpha = \left(E - 2\tau L_\alpha\right)\left(E + 2\tau L_\alpha\right)^{-1}$ $\left(\alpha = 1,2\right)$ є оператором переходу з шару $2n$ на шар $2n+2$.

Встановлено додатню визначеність оператора L_α $\left(\alpha = 1,2\right)$. Це дозволяє оцінити норму оператора переходу $\left\|G_\alpha\right\| = \sup\limits_{\varphi \neq 0} \frac{\left(G_\alpha\varphi, G_\alpha\varphi\right)}{\left(\varphi,\varphi\right)} \le 1$. Звідки $\left\|G\right\| \le \left\|G_1\right\| \cdot \left\|G_2\right\| \le 1$.

Теорема 2.7. Алгоритм (22)-(27) безумовно стійкий за початковими даними.

В **теоремах 2.8, 2.9** доведено безумовну стійкість різницевого алгоритму розщеплення III (28)-(32) та алгоритму IV (36)-(51) за початковими даним і правою частиною рівняння.

В *підрозділі 2.3.3* досліджено дисипативні і дисперсійні властивості побудованих чисельних алгоритмів розщеплення I-IV.

Теорема 2.10. Алгоритм (28)-(32) слабко дисипативний та дисперсійний.

Аналогічні результати одержано для алгоритмів II, III та IV.

Завершується другий розділ аналізом можливості використання побудованих алгоритмів розщеплення I-IV на багатопроцесорних системах. Показано, що всі чотири алгоритми володіють такими властивостями: розпаралелюються на основі концепції декомпозиції структури даних, є локальними та масштабованими, вони не вимагають додаткових умов зшивання розв'язків на границях підобластей декомпозиції. В алгоритмах II, III розпаралелення поглиблюється за рахунок розщеплення за просторовими напрямками. Рівномірна завантаженість кожного процесора достатньо просто балансується, а кількість обмінів між процесорами, яка залежить від їх кількості p, на кожному часовому кроці обчислюється як $2\left(p-1\right)$.

В **розділі 3** побудовано та обґрунтовано двокроково-симетризовану модель динаміки в'язкої рідини. Розроблено економічну схему знаходження розв'язку поставленої задачі і встановлено основні обчислювальні характеристики цієї схеми. Показано основні переваги розробленої схеми. Вона дозволяє обчислювати характеристики динамічного процесу не розв'язуючи на кожному кроці великої системи алгебраїчних рівнянь та має сумарну апроксимацію $O\left(\tau^2 + h^2\right)$. Присутні дисперсійна та дисипативна складові в головному члені похибки мають множником величину порядку h^2 і, отже, не можуть суттєво впливати на результат. Алгоритм консервативний, що вказує на виконання на сітковій множині наслідку інтегрального закону збереження маси в довільному замкненому об'ємі, що належить області протікання в'язкої рідини.

В *підрозділі 3.1* проведено аналіз результатів дослідження коректності постановки початково-крайових задач для системи рівнянь Нав'є-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial\, u^2}{\partial x} - \frac{\partial\, uv}{\partial y}, \tag{53}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial\, uv}{\partial x} - \frac{\partial\, v^2}{\partial y}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{55}$$

Встановлено основні поняття та твердження, які стосуються питань існування та єдності розв'язку, розглянутої в роботі задачі.

В *підрозділі 3.2* обґрунтовується доцільність використання моделі, яка складається з двох рівнянь руху рідини та рівняння Пуассона для тиску, яке апроксимуємо різницевою схемою

$$\frac{P_{i-1j}^{2n+1} - 2P_{ij}^{2n+1} + P_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2} + \frac{P_{ij-1}^{2n+1} - 2P_{ij}^{2n+1} + P_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2} = \rho S_{ij}^{2n}, \qquad i = \overline{1, m_1},\ j = \overline{1, m_2}, \tag{56}$$

де $\quad S_{ij}^{2n} = \upsilon \Delta D_{ij}^{2n} + U_1^{2n} + U_2^{2n} + U_3^{2n} + D_{ij}^{2n}/\tau$ – вже відомі значення.

Для розв'язування рівняння (56) використано ітераційний ДС-алгоритм, запропонований в *підрозділі 2.1*.

Рівняння (53) та (54) апроксимовано за прийнятою в ДС-алгоритмі схемою.

На кроці $2n+1$ $\ (n = 0,1,2,\ldots)$ в точках множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ для знаходження допоміжних значень функцій u_{ij}^{2n+1} та v_{ij}^{2n+1} використаємо явні схеми

$$\begin{aligned}\frac{u_{ij}^{2n+1} - u_{ij}^{2n}}{\tau} = &-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2 - \left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_1} - \frac{u_{ij+1}^{2n}v_{ij+1}^{2n} - u_{ij-1}^{2n}v_{ij-1}^{2n}}{2h_2} - \frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1} - P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1} + \\ &+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{i+1j}^{2n}}{h_1^2} + \upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{ij+1}^{2n}}{h_2^2},\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}\frac{v_{ij}^{2n+1} - v_{ij}^{2n}}{\tau} = &-\frac{u_{i+1j}^{2n}v_{i+1j}^{2n} - u_{i-1j}^{2n}v_{i-1j}^{2n}}{2h_1} - \frac{\left(v_{ij+1}^{2n}\right)^2 - \left(v_{ij-1}^{2n}\right)^2}{2h_2} - \frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1} - P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2} + \\ &+\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{i+1j}^{2n}}{h_1^2} + \upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{ij+1}^{2n}}{h_2^2},\end{aligned} \tag{58}$$

а на множині точок $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$ – неявні

$$\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_1}-\frac{u_{ij+1}^{2n+1}v_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+$$
$$+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}, \tag{59}$$

$$\frac{v_{ij}^{2n+1}-v_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n+1}v_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}v_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-\frac{\left(v_{ij+1}^{2n+1}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n+1}\right)^2}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+$$
$$+\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}. \tag{60}$$

Оскільки в рівняннях значення функції тиску P_{ij}^{2n+1} вже визначені, а значення u_{ij}^{2n}, v_{ij}^{2n} відомі (обчислені при $n>0$ або відомі при $n=0$), то очевидно, що в точках множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ значення u_{ij}^{2n+1} та v_{ij}^{2n+1} знаходяться явно. Після цього, на кроці $2n+1$, використовуючи ці значення, явно знаходимо розв'язок в решті точок. Аналогічно знаходимо значення u_{ij}^{2n+2} та v_{ij}^{2n+2}.

В різницевій задачі значення тиску обчислюються на непарних часових кроках, починаючи з першого, а значення проекцій вектора швидкості – на парних. Це зроблено для того, щоб використати концепцію алгоритмічного паралелізму – розпаралелення системи на рівні рівнянь, а на кожному часовому кроці поглибити процес розпаралеленням за декомпозицією структури даних.

Всі алгоритми знаходження наближеного розв'язку мають особливості, що часто виражені у відмінності поведінки наближеного розв'язку диференціальної задачі від точного. В різницевих схемах такими особливостями є не прогнозована зміна похибки обчислень та збільшення або зменшення величини в'язкості.

Підрозділ 3.3 присвячено дослідженню обчислювальних характеристик запропонованого ДС-алгоритму для рівнянь Нав'є-Стокса.

Теорема 3.1. Для задачі (53)-(55) ДС-алгоритм, побудований на базі системи (57)-(60), має сумарну похибку апроксимації $O\left(\tau^2+h^2\right)$, і є слабко дисперсійним та слабко дисипативним.

Важливим аспектом є відповідність різницевої схеми на грубих сітках реальному фізичному процесу. Для встановлення такої адекватності побудовано інтегральний аналог диференціального рівняння (балансне рівняння). Різницевий аналог різницевого рівняння будуємо шляхом підсумування системи різницевих рівнянь по заданій множині просторових та часових точок. Після низки перетворень, врахування властивостей системи рівнянь та відповідних перетворень різницевих схем приходимо до висновку, що на сітковій множині балансне рівняння має вигляд

$$\sum_{i=0}^{M_1}\sum_{j=0}^{M_2}\left(u_{ij}^{\left(2N+2\right)\tau}-u_{ij}^{0}\right)=-\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M_2}\left(P_{M_1+1j}^{2k+1}-P_{-1j}^{2k+1}\right)-$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M_2}\left(\left(u_{M_1+1\,j}^{2k+1}\right)^2-\left(u_{-1j}^{2k+1}\right)^2\right)+\nu\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M_2}\left(\frac{u_{M_1+1\,j}^{2k+1}-u_{M_1-1\,j}^{2k+1}}{h_x}-\frac{u_{0j}^{2k+1}-u_{-1j}^{2k+1}}{h_x}\right)-$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{M_1}\left(\left(u_{i\,M_2+1}^{2k+1}\right)^2-\left(u_{i\,-1}^{2k+1}\right)^2\right)+\nu\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{M_1}\left(\frac{u_{i\,M_2+1}^{2k+1}-u_{i\,M_2-1}^{2k+1}}{h_y}-\frac{u_{i0}^{2k+1}-u_{i-1}^{2k+1}}{h_y}\right).$$

Оскільки кожна із сум в лівій і правій частині останнього рівняння є інтегральними сумами для відповідних доданків балансного рівняння, то приходимо до наступної теореми.

Теорема 3.2. Схема алгоритму для системи рівнянь (53)-(55) є консервативною.

Розділ 4 присвячено побудові схеми ефективної реалізації ДС-алгоритму для систем рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних комплексах з MIMD-архітектурою. Запропоновано розпаралелення системи рівнянь на два незалежні блоки на рівні рівнянь: для визначення тиску та проекцій вектора швидкості. Крім того, на кожному часовому кроці для обчислення функції тиску P_{ij}^{2n+1} та проекцій вектора швидкості u_{ij}^{2n+2} та v_{ij}^{2n+2} проведено розпаралелення області за декомпозицією структури даних.

Однією з переваг побудованої схеми є те, що вона не вимагає складної операції зшивання розв'язків на границі двох сусідніх областей.

В *підрозділах 4.1* та *4.2* запропоновано новий підхід реалізації цієї схеми на багатопроцесорних системах. Програмна реалізація схеми побудови розв'язку повної системи рівнянь Нав'є-Стокса складається з семи блоків.

Блок 1. Вводимо розміри області, кількість вузлів сітки m_x по x та m_y по y, кількість процесорів p. Обраховуємо розмір масиву $M = m_x \times m_y$ для запису початкових значень P, u, v.

Блок 2. Вводимо початкові та граничні дані функцій P, u, v.

Блок 3. Після низки перетворень алгоритму (3)-(6) одержимо, що на ітераційному кроці $2n+1$ в усіх точках множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ значення тиску обчислюються так

$$P_{ij}^{2n+1} = P_{ij}^{2n} + \frac{\tau}{\rho}\left(\frac{P_{i+1j}^{2n}-2P_{ij}^{2n}+P_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{P_{ij+1}^{2n}-2P_{ij}^{2n}+P_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right)+\tau S_{ij}^{2n}. \qquad (61)$$

Потім обчислюються значення тиску в усіх точках множини $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$

$$P_{ij}^{2n+1} = \left[P_{ij}^{2n}+\frac{\tau}{\rho}\left(\frac{P_{i+1j}^{2n+1}+P_{i-1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\frac{P_{ij+1}^{2n+1}+P_{ij-1}^{2n+1}}{h_y^2}\right)\right]\times\left(1+\frac{2\tau}{\rho h_x^2}+\frac{2\tau}{\rho h_y^2}\right)^{-1}. \qquad (62)$$

На кроці $2n+2$ для $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$ та $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$ маємо аналогічні формули.

Блок 4. Для знаходження значень u та v на $2n+1$ кроці з системи рівнянь (57)-(60) в кожній точці області $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ одержимо

$$u_{ij}^{2n+1} = \frac{a_{12}^{2n}(ij)\,F_2^{2n}(ij) - a_{22}^{2n}(ij)\,F_1^{2n}(ij)}{a_{21}^{2n}(ij)\,a_{12}^{2n}(ij) - a_{11}^{2n}(ij)\,a_{22}^{2n}(ij)}, \qquad (63)$$

$$v_{ij}^{2n+1}=\frac{a_{21}^{2n}\;ij\;\;F_1^{2n}\;\;ij\;\;-a_{11}^{2n}\;\;ij\;\;F_2^{2n}\;\;ij}{a_{21}^{2n}\;\;ij\;\;a_{12}^{2n}\;\;ij\;\;-a_{11}^{2n}\;\;ij\;\;a_{22}^{2n}\;\;ij}, \tag{64}$$

а в точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$ –

$$u_{ij}^{2n+1}=\frac{b_{12}^{2n+1}\;\;ij\;\;\Phi_2^{2n+1}\;\;ij\;\;-b_{22}^{2n+1}\;\;ij\;\;\Phi_1^{2n+1}\;\;ij}{b_{21}^{2n+1}\;\;ij\;\;b_{12}^{2n+1}\;\;ij\;\;-b_{11}^{2n+1}\;\;ij\;\;b_{22}^{2n+1}\;\;ij}, \tag{65}$$

$$v_{ij}^{2n+1}=\frac{b_{21}^{2n+1}\;\;ij\;\;\Phi_1^{2n+1}\;\;ij\;\;-b_{11}^{2n+1}\;\;ij\;\;\Phi_2^{2n+1}\;\;ij}{b_{21}^{2n+1}\;\;ij\;\;b_{12}^{2n+1}\;\;ij\;\;-b_{11}^{2n+1}\;\;ij\;\;b_{22}^{2n+1}\;\;ij}. \tag{66}$$

Тут $a_{11}^{2n}\;\;ij$, $a_{12}^{2n}\;\;ij$, $a_{21}^{2n}\;\;ij$, $a_{22}^{2n}\;\;ij$, $F_1^{2n}\;\;ij$, $F_2^{2n}\;\;ij$, b_{11}^{2n+1}, b_{12}^{2n+1}, b_{21}^{2n+1}, b_{22}^{2n+1}, Φ_1^{2n+1}, Φ_2^{2n+1} – відомі функції дискретних змінних.

Блок 5. Значення u та v на $2n+2$ кроці для $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$ визначаються явно.

Блок 6 перевіряє умови припинення процесу.

Блок 7 задає формат виводу розрахунків, в самих розрахунках участі не приймає.

Використання схеми багатопроцесорних систем MIMD-архітектури пов'язано з тим, що вона забезпечує передачу багатьох потоків команд та багатьох потоків даних так, що кожен процесор виконує команди своїх підпрограм та обробляє свої масиви даних.

В *підрозділі 4.3* проведено аналіз ефективності запропонованої схеми.

Показано, що схема дозволяє розпаралелити систему на рівні рівнянь. Це можливо, оскільки послідовність обчислень дозволяє кожному з p процесорів проводити операції незалежно від інших.

Рівень розпаралелення поглиблюється, завдяки використанню окремої групи з p процесорів при обчисленні кожного з блоків. Масив значень функцій P, u та v складаються з m_x стовпчиків, кожен з яких має m_y елементів. Для обчислення цих значень ми масиви даних розбиваємо на p окремих потоків однакової ширини так, що перший містить стовпчики від 1 до m_1+1 , другий від m_1 до m_2+1 , а останній від m_{p-1} до m_x. Потоки для кожного з процесорів можна також формувати і у вигляді горизонтальних смуг. Наведена в блоці 3 послідовність обчислень дозволяє кожному з p процесорів проводити операції незалежно від інших. Аналогічно реалізовано процеси розпаралелення блоків 4 та 5.

Особливістю даного підходу є те, що алгоритм не потребує зшивання розв'язків. В даному разі на границях потоків даних відбувається обмін між сусідніми процесорами приграничними стовпчиками. Переданий стовпчик є початковим для подальших розрахунків.

Тестування алгоритму проведено для задачі, яка має точний розв'язок для двох груп варіантів, в яких кількість часових кроків відповідно рівна 1600 та 16000. В кожній з груп розглянуто два варіанти розпаралелення: по рядках та по стовпчиках сітки. Обчислення проведено відповідно на одно-, дво-, чотири- та восьмипроцесорних системах. Порівняння одержаних результатів з точними значеннями розв'язку показали, що при точності $\varepsilon=10^{-3}$, $\tau_1=10^{-3}$ на 1600 часових кроках максимальна абсолютна похибка $u, v, P = 0.000405, 0.000437, 0.01$, а відносна – становить відповідно $u, v, P = 0.0069, 0.00496, 0.0254$.

Результати тестування показали високу ефективність запропоновано підходу, а саме його швидкодію та точність, і підтвердили зроблені раніше теоретичні висновки. Таким чином, при розв'язуванні системи рівнянь Нав'є-Стокса на сітковій області з кількістю невідомих $12 \cdot 10^3$, затрачений час при N=1600 спадає від 7.38 до 1.27 секунди (при збільшенні числа процесорів від двох до восьми), а при N=16000 – спадає від 70.96 до 14.67 секунди. Середнє значення прискорення на восьми процесорній системі становить 5.35, а ефективність 0.67.

ВИСНОВКИ

В роботі запропоновано нові обчислювальні алгоритми, які базуються на ідеї двокроково-симетризованого алгоритму (ДС-алгоритму), що дозволяє не розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Всі алгоритми обґрунтовано і реалізовано при розв'язуванні задач переносу та системи рівнянь Нав'є-Стокса.
При цьому отримані такі нові наукові результати:

- *вперше* побудовано і обґрунтовано узагальнення ДС-алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу;
- *вперше* розроблено та досліджено алгоритми розщеплення системи рівнянь конвекції-дифузії на базі ДС-алгоритму;
- обґрунтовано стійкість, дисипативність та дисперсійність побудованих ДС-алгоритмів розщеплення;
- *набув подальшого розвитку* ДС-алгоритм розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса, записаної у дивергентній формі;
- обґрунтовано консервативність, дисипативність та дисперсійність побудованого ДС-алгоритму для системи рівнянь Нав'є-Стокса;
- *вперше* розроблено і обґрунтовано схему розпаралелення для системи рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних системах та зроблено аналіз її ефективності.

Окремі наукові результати, одержані в роботі, були впроваджені у 2015-2016 н. р. у навчальний процес кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні спеціальних курсів: для магістрів 1 року навчання «Чисельне моделювання динаміки систем», для бакалаврів 4 року навчання «Чисельне моделювання процесів гідродинаміки» та для бакалаврів 3 року навчання «Методи оптимізації для систем із розподіленими параметрами».

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Марцафей А.С. Застосування чисельного ДС-алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу / Марцафей А. С. // Журнал

обчислювальної та прикладної математики. – Київ. – 2009. – № 3(99). – С. 63–69.

2. Грищенко О. Ю. ДС-алгоритм розпаралелювання різницевих схем для задач перенесення із коефіцієнтами залежними від часу / Грищенко О. Ю., Марцафей А. С. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – Київ. – 2010. – № 4(104). – С. 17–25.

3. Грищенко О. Ю. Розпаралелювання різницевих схем на основі ДС-алгоритму / Грищенко О. Ю., Марцафей А. С., Федорова В. С. // Доповіді Національної академії наук України. – 2011. – № 7. – С. 32–36.

4. Марцафей А. С. Обгрунтування ДС-алгоритмів при моделюванні ізотермічних потоків нестислої рідини / Марцафей А. С. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – Київ. – 2014. – № 3(117). – С. 66–75.

5. Грищенко О. Ю. Ефективність застосування ДС-алгоритму для системи рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних комплексах / Грищенко О. Ю., Марцафей А. С., Оноцький В. В. Попов О. В. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – Київ. – 2016. – № 1(121). – С. 28–36.

Статті у наукових фахових виданнях України,
які входять до міжнародних наукометричних баз:

6. A. Yu. Gryshchenko A two-step splitting algorithm in heat and mass transfer problems / A. Yu. Gryshchenko, A. S. Martsafei // Cybernetics Analysis. – 2011. – Vol.47. – Issue 6. – P. 941–947.

Опубліковані праці апробаційного характеру:

1. Грищенко О. Ю. Двокроковий різницевий алгоритм для еліптичних рівнянь другого порядку / Грищенко О. Ю., Марцафей А. С. // ІІІ Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені І. І. Ляшка, 11-12 вересня 2009 р.: матеріали конференції. – Київ, 2009. – С. 34.

2. Грищенко О. Ю. Чисельне моделювання процесу проявлення оптичних голограм / Грищенко О. Ю., Марцафей А. С. // XVI Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», 8-9 жовтня 2009 р.: матеріали конференції. – Львів, 2009. – С. 72–73.

3. Грищенко О. Ю. Різницева схема розщеплення, побудована на основі ДС-алгоритму / Грищенко О. Ю., Марцафей А. С., Федорова В. С. // Праці міжнародної молодіжної математичної школи «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)», 22-29 вересня 2011 р. – Кацивелі, 2011. – С. 45–46.

4. Грищенко О. Ю. Розпаралелені ДС-алгоритми для задач тепло-масопереносу / Грищенко О. Ю., Марцафей А. С. // VI Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені І. І. Ляшка, 5-6 вересня 2013 р.: матеріали конференції. – Київ, 2013. – С. 104–106.

5. Грищенко О. Ю. Чисельне моделювання процесу рельєфографії / Грищенко О. Ю., Марцафей А. С. // Праці міжнародної наукової конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)», 30 вересня - 4 жовтня 2013 р.: праці конференції. – Кацивелі, 2013. – С. 81–82.

6. Марцафей А. С. Економічний ДС-алгоритм розв'язування нелінійних початково-крайових задач тепломасопереносу / Марцафей А. С. // Праці міжнародної наукової конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)», 30 вересня - 4 жовтня 2013 р.: праці конференції. – Кацивелі, 2013. – С. 167–168.

7. Марцафей А. С. Обґрунтування використання ДС-алгоритму для рівнянь Нав'є-Стокса / Марцафей А. С. // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-ліття від дня народження ч.-к. НАН України Положого Г. М., 23-24 квітня 2014 р.: матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 88.

8. Марцафей А. С. Побудова алгоритмів ефективних при моделюванні на багатопроцесорних комплексах / Марцафей А. С. // XXVI International Conference «Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2015)», August 24-28, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 112.

9. Марцафей А. С. Ефективні алгоритми розпаралелювання для процесів конвекції-дифузії / Марцафей А. С. // VIII Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені І. І. Ляшка, 8-9 жовтня 2015 р.: матеріали конференції. – Київ, 2015. – С. 61.

АНОТАЦІЯ

Марцафей А. С. *Чисельне моделювання гідродинамічних процесів з використанням багатопроцесорних систем.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота спрямована на розробку нових ефективних методів чисельного моделювання на багатопроцесорних системах процесів переносу різного роду фізичних субстанцій та процесів динаміки в'язкої нестислої рідини, які описуються системами рівнянь Нав'є-Стокса.

В роботі запропоновано нові обчислювальні методи. Вони базуються на ідеї двокроково-симетризованого алгоритму (ДС-алгоритму), що дозволяє не розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, та на принципах побудови паралельних алгоритмів, ефективних при реалізації на багатопроцесорних комплексах. Ці методи обґрунтовано і реалізовано при розв'язуванні задач переносу та системи рівнянь Нав'є-Стокса.

Побудовано і обґрунтовано узагальнення ДС-алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу. Розроблено та досліджено алгоритми розщеплення системи рівнянь конвекції-дифузії на базі ДС-алгоритму. Обґрунтовано стійкість, дисипативність та дисперсійність побудованих ДС-алгоритмів розщеплення. Побудовано ДС-алгоритм розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса, записаної у дивергентній формі. Обґрунтовано консервативність, дисипативність та дисперсійність побудованого ДС-алгоритму. Розроблено і обґрунтовано схему розпаралелення для системи рівнянь Нав'є-Стокса на

багатопроцесорних системах та зроблено аналіз її ефективності.

Ключові слова: рівняння конвекції-дифузії, система рівнянь Нав'є-Стокса, чисельне моделювання, динаміка в'язкої рідини, паралельні обчислення, багатопроцесорні системи, гідродинамічні процеси.

АННОТАЦИЯ

Марцафей А. С. *Численное моделирование гидродинамических процессов с использованием многопроцессорных систем.* – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, Министерства образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена разработке новых эффективных методов численного моделирования на многопроцессорных системах процессов переноса разного рода физических субстанций при выполнении условий неразрывности потока и процессов динамики вязкой несжимаемой жидкости, которые описываются системами уравнений Навье-Стокса.

В работе предложены новые методы численного моделирования указанных процессов. Они базируются на развитии идеи двухшагового симметризированного алгоритма (ДС-алгоритма), который позволяет не решая систему разностных уравнений находить все параметры процессов, а также на теоретических принципах построения параллельных алгоритмов, эффективных при реализации на многопроцессорных системах. Эти методы обоснованы и реализованы при решении задач переноса и системы уравнений Навье-Стокса.

Предложено и обосновано обобщение ДС-алгоритма на случай моделирования стационарных процессов переноса. Разработаны и исследованы алгоритмы расщепления систем уравнений конвекции-диффузии, построенные на основе ДС-алгоритма. Обосновано устойчивость, дисипативность и диспрсионность построенных алгоритмов расщепления. Предложена модификация ДС-алгоритма для системы уравнений Навье-Стокса, записанной в дивергентной форме.

Значительная часть работы посвящена обоснованию важных вычислительных свойств алгоритмов численного моделирования, а именно: устойчивости, дисипативности и дисперсионности построенных алгоритмов расщепления. Также исследованы эти вычислительные свойства и для построенного ДС-алгоритма для систем уравнений Навье-Стокса.

Используя теоретические принципы построения параллельных алгоритмов построена вычислительная схема, которая имеет двухуровневое распараллеливание: распараллеливание системы по уравнениям, распараллеливание вычислительного процесса для каждого уравнения по декомпозиции структуры данных. Это позволяет находить решение каждого уравнения независимо на своих процессорах. Помимо того, использование ДС-алгоритма исключает необходимость решения системы разностных уравнений и сшивание решений на смежных областях декомпозиции.

Разработана и обоснована схема распараллеливания ДС-алгоритма для решения системы уравнений Навье-Стокса на многопроцессорных системах и сделан анализ ее эффективности. Проведено тестирование схемы расспарелелливания на многопроцессорных вычислительных системах с MIMD-архитектурой, которое показало, что среднее значение ускорения на восьмипроцессорной системе составляет 5,35, а эффективность 0,67. Это подтверждает сделанные в работе теоретические предпосылки.

Ключевые слова: уравнения конвекции-диффузии, система уравнений Навье-Стокса, численное моделирование, динамика вязкой жидкости, параллельные вычисления, многопроцессорные системы, гидродинамические процессы.

ANNOTATION

Martsafei A. S. *Numerical modeling of hydrodynamic processes using multiprocessor systems.* – Manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Science in Physics and Mathematics, specialty 01.05.02 – Mathematical Modelling and Computational Methods. – Taras Shevchenko National University of Kyiv of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

Thesis is focused on the development of new effective numerical modeling methods on multiprocessor systems of various kinds of processes of transport of physical of substances and of processes of dynamics of a viscous incompressible fluids, which are described the Navier-Stokes equations.

In work proposed new computational methods. It offered new computational approaches based upon the idea of double-step symmetrized algorithm and the principles of efficient numerical algorithms suitable for use on multiprocessor complexes. These approaches are proved and implemented for solving problems convection-diffusion and systems Navier-Stokes equations.

Constructed and proved generalized DS-algorithm for iterative modeling of stationary of transfer processes. It was developed and investigated splitting algorithm for systems of equations of convection-diffusion based on the DS-algorithm. It was proved that splitting DS-algorithms are stability, dissipative and dispersive. It was constructed DS-algorithms for solving systems of Navier-Stokes equations written in divergent form. It was proved that constructed DS-algorithms are conservative, dissipative and dispersive. It was developed and proved a new scheme of implementing for Navier-Stokes equations on multiprocessor systems. Have been analyzed its effectiveness.

Keywords: convection-diffusion equation, system of Navier-Stokes equations, numeral modeling, dynamic of viscous liquid, parallel computing, multiprocessor systems, hydrodynamic processes.