УДК 519.65
MSC 41A50

CHEBYSHEV APPROXIMATION MULTIVARIABLE FUNCTIONS BY THE RATIONAL EXPRESSION WITH THE INTERPOLATION

P. S. Malachivskyy[1], L. S. Melnychok[1], Y. V. Pizyur[2]
[1]The Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NASU, Lviv, Ukraine, E-mail: Petro.Malachivskyy@gmail.com, levkom@gmail.com
[2]Institute of Applied Mathematics and Fundamental Sciences, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine, E-mail: yaropolk.v.piziur@lpnu.ua

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ РАЦІОНАЛЬНИМ ВИРАЗОМ З ІНТЕРПОЛЮВАННЯМ

П. С. Малачівський[1], Л. С. Мельничок[1], Я. В. Пізюр[2]
[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна, E-mail: Petro.Malachivskyy@gmail.com, levkom@gmail.com
[2]Інститут прикладної математики та фундаментальних наук, Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна, E-mail: yaropolk.v.piziur@lpnu.ua

Abstract. A method for constructing the Chebyshev approximation by the rational expression of the multivariable functions with the interpolation is proposed. The method is based on the construction of the ultimate mean-power approximation by a rational expression with the interpolation condition in the norm of space L^p at $p \to \infty$. To construct such an approximation, an iterative scheme based on the least squares method with two variable weight functions was used.
Keywords: Chebyshev approximation by the rational expression, Chebyshev approximation with the interpolation, multivariable functions, mean-power approximation, least squares method.

Анотація. Запропоновано метод побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних раціональним виразом з інтерполяційною умовою. Метод ґрунтується на побудові граничного середньостепеневого наближення раціональним виразом з інтерполяційною умовою у нормі простору L^p при $p \to \infty$. Побудову такого наближення реалізовано на основі ітераційної схеми з використанням методу найменших квадратів з двома змінними ваговими функціями.
Ключові слова: чебишовське наближення раціональним виразом, чебишовське наближення з інтерполюванням, функції багатьох змінних, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів.

Вступ

Чебишовське наближення раціональним виразом з інтерполюванням використовують при розв'язуванні багатьох прикладних задач [1, 2]. Задача побудови чебишовського наближення з інтерполюванням виникає при проектуванні засобів вимірювання, в яких з технічних вимог необхідно щоб апроксимаційний вираз у певних точках відтворював значення деякої заданої функціональної залежності [2–6]. Наближення з інтерполюванням використовуються також при побудові неперервного сплайн-наближення [3].

Обчислення параметрів чебишовського наближення раціональним виразом здебільшого зводять до послідовного розв'язування задачі лінійного програмування [3] або методу нелінійної оптимізації [1, 2]. В працях [1, 2] описано алгоритми обчислення параметрів чебишовського наближення функцій однієї змінної на основі схеми Ремеза з використанням диференціальної корекції. Ми пропонуємо метод побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних раціональним виразом як граничного наближення у нормі простору L^p при $p \to \infty$ [7]. Він полягає в послідовній побудові середньостепеневих наближень з інтерполяційною умовою [10, 11]. Значення параметрів середньостепеневих наближень раціональним виразом з інтерполюванням обчислюються з застосуванням ітераційної схеми на основі методу найменших квадратів з використанням двох змінних вагових функцій, значення яких уточнюються з врахуванням всіх проміжних середньостепеневих наближень [7, 12]. Параметри раціонального наближення за методом найменших квадратів визначаємо з використанням лінеаризації [7].

1. Постановка задачі

Нехай $f(X)$ функція n дійсних змінних, де X вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, неперервна в деякій обмеженій області D, $D \subset R^n$, R^n – n-вимірний векторний простір. Функцію $f(X)$, задану на множині точок $\Omega = \{X_j\}_{j=1}^{s}$ з області D $(\Omega \subset D)$, необхідно наблизити на Ω раціональним виразом

$$R_{k,l}(a, b; X) = \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i \varphi_i(X)}{\sum_{i=0}^{l-1} b_i \psi_i(X) + \psi_l(X)}, \tag{1}$$

де $\varphi_i(X)$, $i = \overline{0, k}$ і $\psi_i(X)$, $i = \overline{0, l}$ – системи лінійно незалежних неперервних на D дійсних функцій, а a_i, $i = \overline{0, k}$ і b_i, $i = \overline{0, l-1}$ – невідомі параметри: $\{a_i\}_{i=0}^{k} \in A$, $A \subseteq R^{k+1}$, $\{b_i\}_{i=0}^{l-1} \in B$, $B \subseteq R^l$. Побудова чебишовського наближення функції $f(X)$ раціональним виразом (1) з інтерполюванням в точці U $(U \in \Omega)$ полягає в обчисленні таких значень параметрів a^* та b^*, при яких досягається найменше значення похибки наближення

$$\max_{X \in \Omega} |f(X) - R_{k,l}(a^*, b^*; X)| = \min_{a \in A,\, b \in B} \max_{X \in \Omega} |f(X) - R_{k,l}(a, b; X)| \tag{2}$$

і в точці U наближення $R_{k,l}(a^*, b^*; U)$ відтворює значення функції $f(U)$

$$f(U) = R_{k,l}(a^*, b^*; U) = v. \tag{3}$$

Наближення раціональним виразом $R_{k,l}(a^*,\ b^*;\ X)$, що задовольняє умову (2)–(3), називають чебишовським наближенням з умовою або з інтерполюванням [1,2].

2. Обчислення параметрів чебишовського наближення раціональним виразом з інтерполюванням

Якщо для функції $f(X)$ на множині точок Ω існує неперервне чебишовське наближення раціональним виразом $R_{k,l}(a,\ b;\ X)$ з інтерполюванням у точці U, то його побудова полягає в послідовному обчисленні середньостепеневих наближень $f(X)$ на множині точок $\bar{\Omega} = \Omega\backslash\{U\}$ виразом

$$\bar{R}_{k,l}(a,b;\ X) = \frac{a_0\varphi_0(X) + \sum_{i=1}^{k} a_i\varphi_i(X)}{\sum_{i=0}^{l-1} b_i\psi_i(X) + \psi_l(X)}, \tag{4}$$

де

$$a_0 = \left(v\left(\sum_{i=0}^{l-1} b_i\psi_i(U) + \psi_l(U) \right) - \sum_{i=1}^{k} a_i\varphi_i(U) \right) \Big/ \varphi_0(U),$$

а a_i $\left(i = \overline{1,\ k}\right)$ і b_i $\left(i = \overline{0,\ l-1}\right)$ – невідомі параметри. Вираз $\bar{R}_{k,l}(a,b;\ X)$ отримано з раціонального виразу (1) з врахуванням умови (3). При отриманні значення параметра a_0 ми припустили, що $\varphi_0(U)$ не дорівнює нулеві. Для обчислення значень параметрів середньостепеневих наближень виразом $\bar{R}_{k,l}(a,b;\ X)$ в просторі E^p для $p = 2,\ 3,\ 4,\ldots$ використовуємо ітераційну схему на основі методу найменших квадратів [7,12]

$$\sum_{X\in\bar{\Omega}} \rho_r(X)\left(f(X) - \bar{R}_{k,l}(a,b;\ X)\right)^2 \xrightarrow[a\in A,\, b\in B]{} \min, \tag{5}$$

$$r = 0,\ldots,p-2, \quad p = 2,\ 3,\ldots$$

з послідовним уточненням значень вагової функції

$$\rho_0(X) \equiv 1,\ \rho_r(X) = \prod_{i=1}^{r} |\Delta_i(X)|\,,\ r = 1,\ \ldots,\ p-2, \tag{6}$$

де $\Delta_s(X) = f(X) - \bar{R}_{k,l,s-1}(a,\ b;\ X)$, $k = \overline{1,\ r}$, $\bar{R}_{k,l,s}(a,\ b;\ X)$ – наближення функції $f(X)$ виразом (4) за методом найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_s(X)$ на множині точок $\bar{\Omega}$ з інтерполюванням в точці U. Наближення $\bar{R}_{k,l,s}(a,\ b;\ X)$ відповідає середньостепеневому наближенню функції $f(X)$ степеня $p = s+2$.

Наближення раціональним виразом за методом найменших квадратів – це нелінійна задача [13]. Для побудови наближення раціональним виразом за методом найменших квадратів застосуємо лінеаризацію з використанням змінної вагової функції [7], яка полягає в ітераційному уточненні наближення раціональним виразом (4). Відповідно до цього методу лінеаризації для кожного фіксованого значення p ($p = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$) обчислюємо наближення функції $f(X)$ виразом $\bar{R}_{k,l}(a,b;\ X)$ (4) за методом найменших квадратів

$$\sum_{X\in\bar{\Omega}} \rho_r(X)\ \upsilon_{r,t}(X)\ (\Phi_{r,t}(a,\,b;\ X))^2 \xrightarrow[a\in A,\ b\in B]{} \min,$$

$$r = p - 2,\ t = 0,\ 1,\ \dots, \tag{7}$$

де

$$\Phi_{r,t}(a,\,b;\ X) = f(X)\left(\sum_{i=0}^{l-1} b_{i,r,t}\psi_i(X) + \psi_l(X)\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} a_{i,r,t}\varphi_i(X) - a_0\varphi_0(X). \tag{8}$$

Значення вагової функції $\rho_r(X)$ обчислюємо за формулою (6), а вагової функції $\upsilon_{r,t}(X)$ – за формулою

$$\upsilon_{r,t}(X) = \begin{cases} 1, & \text{якщо}\quad r=0, t=0, \\ \left(\sum\limits_{i=0}^{l-1} b_{i,r,t-1}\psi_i(X) + \psi_l(X)\right)^{-2}, & \text{якщо}\quad t>0. \end{cases} \tag{9}$$

Уточнення наближення виразом $\bar{R}_{k,l}(a,b;\ X)$ за методом найменших квадратів (7) з ваговими функціями (6) і (9) можна контролювати точністю ε_1 виконання умови

$$|\,\eta_{r,t-1} - \eta_{r,t}\,| \le \varepsilon_1\eta_{r,t}, \tag{10}$$

де

$$\eta_{r,t} = \sum_{X\in\bar{\Omega}} \rho_r(X)\ \upsilon_{r,t}(X)\ (\Phi_{r,t}(a,\,b;\ X))^2\,. \tag{11}$$

Виконання умови (10) означає, що середньостепеневе наближення степеня $p = r + 2$ раціональним виразом $\bar{R}_{k,l,r}(a,\,b;\ X)$ обчислено з точністю ε_1. Значення параметрів наближення $\bar{R}_{k,l,r}(a,\,b;\ X)$ такі

$$a_{j,r} = a_{j,r,t}\left(j=\overline{1,\ k}\right),\ \text{а}\ \ b_{j,r} = b_{j,r,t}\left(j=\overline{0,\ l-1}\right). \tag{12}$$

Отже, побудова чебишовського наближення раціональним виразом (4) полягає в застосуванні двох ітераційних процесів: вкладених ітерацій (7) і зовнішніх (5). Завершення ітерацій (5) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε

$$\mu_{r-1} - \mu_r \le \varepsilon\mu_r, \tag{13}$$

де

$$\mu_r = \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} \left|\,f(X) - \bar{R}_{k,l,r}(a,\,b;\ X)\,\right|. \tag{14}$$

Запропонований метод забезпечує побудову чебишовського наближення з необхідною точністю. Його збіжність забезпечує оригінальний спосіб послідовного уточнення значень вагової функції за формулою (6), яка враховує похибки апроксимації на всіх попередніх ітераціях. Такий спосіб уточнення вагової функції [12] забезпечує збіжність методу при обчисленні середньостепеневих наближень. Збіжність обчислювальних схем побудови чебишовського наближення на основі середньостепеневого наближення теоретично обґрунтував і проілюстрував на чисельних прикладах Є. Я. Ремез у праці [14].

Під час розв'язування тестових прикладів для функцій однієї, двох і трьох змінних досягнення точності $\varepsilon = 0.003$ спостерігалося з використанням від п'яти до двадцяти двох ітерацій (5). Ця точність забезпечувала співпадіння двох-трьох значущих цифр похибки чебишовського наближення раціональним виразом. При цьому точність $\varepsilon_1 = 0.003$, визначення проміжних наближень раціональним виразом, досягалась за три-чотири внутрішні ітерації (7). Якщо для $r \geq 1$ значення вагової функції $\upsilon_{r,0}(X)$ не змінювати – залишити рівними попереднім $\upsilon_{r-1,\,t}(X)$, то для уточнення раціонального виразу достатньо було лише двох ітерацій (7).

В результаті чебишовське наближення неперервної функції $f(X)$ раціональним виразом (1) на множині точок Ω з інтерполюванням у точці U визначається значеннями параметрів обчисленими при наближенні виразом (4)

$$R_{k,l}(a,\, b;\; X) = \bar{R}_{k,l,r}(a,\, b;\; X)\,. \tag{15}$$

Під час побудови чебишовського наближення таблично заданих функцій раціональним виразом з умовою для деяких значень степенів чисельника k і знаменника l можливе отримання розривного наближення. Це означає, що для заданої функції не існує неперервного чебишовського наближення раціональним виразом з умовою для цих значень степенів k і l. За необхідності побудови чебишовського наближення раціональним виразом для цієї функції можна продовжити обчислення з іншими значеннями степенів k і l.

Приклад. Знайдемо чебишовське наближення функції двох змінних $z(x,\, y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ заданої в точках $(x_i,\, y_j)$, $i = \overline{0,\, 10}$, $j = \overline{0,\, 10}$, де $x_i = -1 + 0.2i$, $y_j = -1 + 0.2j$, раціональним виразом $R_{2,2}(a,\, b;\, x,\, y)$, в якому чисельник і знаменник поліноми другого степеня за змінними x та y, з інтерполюванням у точці $(\bar{x},\, \bar{y}) = (-0.8,\, -0.8)$.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за шістнадцять ітерацій (5) для функції $z(x,\, y)$ отримано раціональний вираз

$$R_{2,2}(a,\, b;\, x,\, y) = \frac{P_2(a;\, x,\, y)}{Q_2(b;\, x,\, y)}, \tag{16}$$

в якому

$$\begin{aligned} P_2(x,\, y) &= 1.01171787 + 0.01271888453y + 0.01271891836x + \\ &+ 0.0188347875xy - 0.3388819739x^2 - 0.3388825501y^2\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2(x,\, y) &= 1 + 0.01749528954x + 0.01749496507y + \\ &+ 0.07980466521xy + 0.801369663x^2 + 0.8013684243y^2\,. \end{aligned}$$

Раціональний вираз (16) забезпечує абсолютну похибку наближення – 0.012295796. Поверхню похибки апроксимації функції $z(x,\, y)$ раціональним виразом (16) подано на рис. 1.

Чебишовське наближення функції $z(x,\, y)$ раціональним виразом з інтерполюванням у точці $(\bar{x},\, \bar{y}) = (-0.8,\, -0.8)$ для $\varepsilon = 0.00003$ було отримано

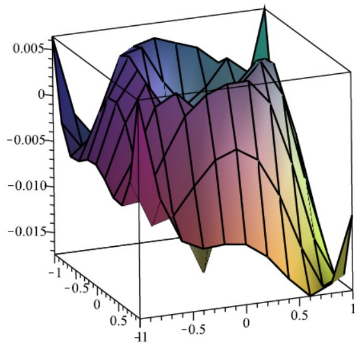

Рис. 1. Поверхня похибки апроксимації функції $z(x, y)$ раціональним виразом (16) з інтерполюванням у точці $(\bar{x}, \bar{y}) = (-0.8, -0.8)$.

за вісімдесят шість ітерацій (5)

$$\widehat{R}_{2,2}(a, b; x, y) = \frac{\widehat{P}_2(a; x, y)}{\widehat{Q}_2(b; x, y)}, \tag{17}$$

де

$$\widehat{P}_2(a; x, y) = 1.011896416 + 0.01275075547y - 0.01280516368x + \\ +0.01467104117xy - 0.3371140452x^2 - 0.337412009y^2,$$

$$\widehat{Q}_2(b; x, y) = 1 + 0.01764260288y + 0.01813318269x + \\ +0.03314116329xy + 0.8242332228x^2 + 0.8232947458y^2.$$

Раціональний вираз (17) забезпечує похибку наближення – 0.0119055076.

Висновок

Запропонований метод побудови чебишовського наближення таблично заданих функцій багатьох змінних раціональним виразом з інтерполюванням полягає в послідовному обчисленні середньостепеневих наближень раціональним виразом з інтерполюванням. Обчислення середньостепеневих наближень раціональним виразом з інтерполюванням реалізовано на основі методу найменших квадратів з двома змінними ваговими функціями. Метод простий для реалізації і передбачає можливість обчислення параметрів чебишовського наближення раціональним виразом з інтерполюванням з необхідною точністю.

Результати розв'язування тестових прикладів підтверджують швидку збіжність запропонованого методу при наближенні раціональним виразом з інтерполюванням функцій однієї, двох і трьох змінних. Під час розв'язування тестових прикладів за цим методом співпадіння двох-трьох значущих цифр похибки чебишовського наближення раціональним виразом з інтерполюванням досягалась з використанням від п'яти до двадцяти двох ітерацій.

Література

1. Collatz L., Krabs W. Approximationstheorie. Tschebyscheffsche Approximation mit Anwendungen. Teubner. Stuttgart. 1973.
2. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наук. думка. 1980. 352 с.
3. Skopetskii V. V., Malachivskii P. S. Chebyshev approximation of functions by the sum of a polynomial and an expression with a nonlinear parameter and endpoint interpolation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45. Issue 1. P. 58–68. https://doi.org/10.1007/s10559-009-9078-4
4. Верлань А. Ф., Адбусадаров Б. Б., Игнатенко А. А., Максимович Н. А. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов. Киев: Наук. думка. 1993. 208 с.
5. Малачівський П. С., Скопецький В. В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка. 2013. 270 с.
6. Charles B. Dunham. Rational Approximation with a Vanishing Weight Function and with a Fixed Value at Zero. *Mathematics of Computation.* 1976. Vol. 30, No. 133 P. 45–47.
7. Malachivskyy P. S., Pizyur Y. V., Malachivskyi R. P. Chebyshev approximation by the rational expression of functions of many variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. Issue 5. P. 118–125. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00302-0
8. Filip S.I., Nakatsukasa Y., Trefethen L.N., Beckermann B. Rational minimax approximation via adaptive barycentric representations. https://arxiv.org/pdf/1705.10132. 2017. P. 1–29.
9. Nakatsukasa Y., Sete O., Trefethen L. N. The AAA algorithm for rational approximation. *SIAM J. SCI. COMPUT*. 2018. Vol. 40. No. 3. P. A1494–A1522.
10. Malachivskyy P., Melnychok L., Pizyur Ya. Chebyshev approximation of multivariable functions with the interpolation. *Mathematical Modeling and Computing.* 2022. Vol. 9. No. 3. P. 757–766.
11. Malachivskyy P. S. , Melnychok L. S., Pizyur Y. V. Chebyshev Approximation of the Functions of Many Variables with the Condition. *2020 IEEE 15th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT).* Zbarazh, Ukraine. 2020. P. 54–57, doi: 10.1109/CSIT49958.2020.9322026.
12. Malachivskyy P. S., Pizyur Y. V., Malachivskyi R. P., Ukhanska O. M. Chebyshev approximation of functions of several variables. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56. Issue 1. P. 118–125. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00227-8
13. Mario Berljafa and Stefan Guttel. The RKFIT Algorithm for Nonlinear Rational Approximation. *SIAM J. Sci. Comput.* 2017. Vol. 39. No. 5. P. A2049–A2071.
14. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка. 1969. 623 с.

Надійшла: 25.09.2022 / Прийнята: 29.09.2022