ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

УДК 373.5.016:51 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.8**

Христина КІНДРАТІВ, студентка
ORCID: 0009-0006-0600-547X
e-mail: antonikkhristina@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ У МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ

Анотація. *Доведення нерівностей посідає важливе місце у шкільному курсі математики, оскільки сприяє розвитку логічного, аналітичного та критичного мислення учнів. Використання лише стандартних підходів до доведення нерівностей не завжди забезпечує глибоке розуміння математичних закономірностей і часто обмежує творчий потенціал учнів. Тому актуальним є впровадження нестандартних методів доведення, які сприяють формуванню дослідницьких умінь і розвитку математичної інтуїції. Метою статті є дослідження застосовності нестандартних методів доведення нерівностей і визначення можливостей їх використання в процесі навчання математики у закладах загальної середньої освіти.*

У роботі представлено метод допоміжних функцій, метод використання симетрії та інваріантів, техніку параметризації й метод монотонності для доведення нерівностей. Проаналізовано можливості їх застосування у навчальному процесі для підвищення пізнавальної активності учнів, розвитку логічного мислення та формування здатності до самостійного аналізу математичних тверджень. Наведені приклади демонструють ефективність кожного з методів у контексті формування компетентностей, необхідних для успішного опанування шкільного курсу математики та участі в математичних турнірах. Наведені методи доведення нерівностей мають значний дидактичний потенціал, забезпечують глибше розуміння сутності математичних фактів, сприяють розвитку дослідницької діяльності учнів та підвищують якість математичної підготовки. Їх інтеграція у навчальний процес сприятиме розвитку творчих і аналітичних здібностей учнів та розвитку математичної компетентності школярів.

Ключові слова: *нерівності; доведення; нестандартні методи; допоміжна функція; симетрія; параметризація; монотонність; методика навчання математики.*

1. Вступ

Сучасна математична освіта вимагає від учнів не лише засвоєння фактологічних знань, а й сформованості аналітичного, логічного та критичного мислення. Одним із важливих інструментів розвитку цих якостей є вміння доводити математичні твердження, зокрема нерівності. Тематика нерівностей традиційно посідає значне місце у шкільному курсі алгебри й аналізу, а також у системі підготовки до математичних олімпіад, конкурсів і зовнішнього незалежного оцінювання. Проте на практиці доведення нерівностей часто зводиться до використання обмеженого кола стандартних методів – таких як застосування похідних, розкриття дужок, піднесення до степеня чи використання відомих теорем типу Коші–Буняковського або Дженсена. Це призводить до формального підходу та втрати евристичного потенціалу навчання.

У педагогічній практиці дедалі більшого значення набуває пошук шляхів активізації пізнавальної діяльності учнів засобами проблемного, дослідницького та творчого навчання. З цієї позиції ефективним засобом розвитку аналітичного мислення є впровадження нестандартних методів доведення нерівностей, які виходять за межі класичних алгоритмів і передбачають елементи дослідження, експерименту та пошуку нових підходів. Такі методи дозволяють не лише отримувати результат більш елегантним шляхом, а й глибше осмислювати структуру математичних об’єктів, виявляти закономірності, узагальнювати та моделювати ситуації.

Актуальність проблеми також зумовлена тим, що навчання доведенню нерівностей у старшій школі нерідко має репродуктивний характер і не забезпечує достатнього рівня самостійності учнів. Підвищення якості математичної підготовки потребує створення методичних умов, за яких учні зможуть свідомо обирати метод доведення, аргументувати свої дії та порівнювати різні підходи до розв’язування задач.

Таким чином, дослідження нестандартних методів доведення нерівностей має не лише теоретичне, але й прикладне педагогічне значення. Воно сприяє вдосконаленню методики навчання математики, розширенню дидактичного інструментарію вчителя, розвитку творчого потенціалу учнів та формуванню в них культури математичного мислення.

Метою роботи є аналіз основних нестандартних методів доведення нерівностей, визначення їх дидактичного потенціалу та шляхів ефективного використання у процесі навчання математики в закладах загальної середньої освіти.

Відтак виникає необхідність звернутися до нестандартних методів, які не лише дозволяють швидше отримати результат, але й поглиблюють розуміння структури нерівностей (Мельников, 2013, с. 15–18). У контексті математичних олімпіад та наукових змагань володіння такими методами є важливою складовою успішного виступу (Manfrino, Gomes & Delgado, 2000).

2. Результати

2.1. Метод допоміжних функцій

Цей метод є одним із найбільш потужних нестандартних підходів до доведення нерівностей. Він дозволяє перетворити складну нерівність на задачу дослідження властивостей простої функції (Мельников, 2013).

Ідея методу полягає у зведенні вихідної нерівності $A > B$ до задачі про знак певної *допоміжної функції* $f(x)$. Реалізація методу передбачає такі кроки:

крок 1: ***трансформація***. Перенесіть усі члени нерівності в один бік, щоб отримати вираз, який має бути більшим (або меншим) за нуль:

$$A - B > 0;$$

крок 2: *визначення функції*. Отриманий вираз прирівнюється до допоміжної функції:

$$f(x) = A - B;$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

крок 3: ***доведення*.** Задача зводиться до доведення нерівності $f(x) > 0$ (або $f(x) \geq 0$) для всіх допустимих значень змінної x.

Для дослідження знаку функції $f(x)$ використовуються поняття *похідної, монотонності* та *екстремумів* функції (табл. 1).

Таблиця 1

Інструменти методу допоміжних функцій

Крок	Дія	Мета
1. Знаходження похідної	Обчислити $f'(x)$	Визначити інтервали монотонності функції $f(x)$
2. Аналіз знаку $f'(x)$	Дослідити, коли $f'(x) > 0$ (зростає) або $f'(x) < 0$ (спадає)	Встановити, чи є функція $f(x)$ зростаючою або спадною на заданому проміжку
3. Знаходження екстремумів	Знайти точки, де $f'(x) = 0$ (критичні точки)	Визначити *мінімальне* (або *максимальне*) значення функції $f(x)$
4. Перевірка значення	Обчислити значення функції $f(x)$ у критичній точці або на кінці проміжку, де функція набуває мінімуму	Якщо мінімальне значення $f_{min} \geq 0$, то $f(x) \geq 0$ для всіх x, і нерівність доведено

Задача 1. *Доведемо для всіх $x \neq 0$ нерівність:*

$$e^x > 1 + x.$$

Розв'язання: Використовуючи метод допоміжних функцій, перенесемо члени нерівності $e^x - 1 - x > 0$. Відтак допоміжну функцію можна записати так:

$$f(x) = e^x - 1 - x.$$

Визначимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Далі знаходимо екстремум:

$$e^x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Отже, $x = 0$ є критичною точкою функції. Похідна $f'(x)$ змінює знак в точці $x = 0$ з мінуса на плюс, тому в цій точці функція має мінімум.

Оскільки $f(0) = 0$ є мінімальним значенням функції, то $f(x) > 0$ для всіх $x \neq 0$. Таким чином, $e^x - 1 - x > 0$, що доводить нерівність $e^x > 1 + x$.

■

Задача 2. *Доведемо, що для всіх $x > 0$ виконується*

$$\ln(1+x) < x.$$

Розв'язання: Введемо допоміжну функцію $f(x) = x - \ln(1+x)$ для $x > 0$. Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Оскільки $x > 0$, то $f'(x) > 0$ для всіх $x > 0$, отже функція $f(x)$ строго зростає. При $x = 0$: $f(0) = 0$. Оскільки $f(0) = 0$ і функція зростає при $x > 0$, то $f(x) > 0$ для всіх $x > 0$, що доводить нерівність.

■

Задача 3. *Доведемо нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним (AM-GM):*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

для додатних a і b.

Розв'язання. Введемо для $t > 0$ допоміжну функцію

$$f(t) = \frac{t + \frac{1}{t}}{2}.$$

Для знаходження екстремуму знайдемо похідну і прирівняємо її до нуля:

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1,$$

оскільки за припущенням $t > 0$.

При переході через точку $t = 1$ похідна змінює знак. Для $t > 1$ маємо $f'(t) > 0$ (функція зростає). Для $0 < t < 1$ маємо $f'(t) < 0$ (функція спадає). При $t = 1$ маємо $f'(1) = 0$, тобто функція досягає мінімуму в точці $t = 1$.

Значення функції при $t = 1$:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$f(1) = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Отже, для всіх $t > 0$ маємо $f(t) \geq 1$. Якщо покласти $t = \sqrt{\frac{a}{b}}$, то:

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}{2} \geq 1.$$

Помноживши обидві частини на $\sqrt{ab}$, отримуємо

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

■

Підсумовуючи, необхідно зазначити, що метод допоміжних функцій особливо ефективний для нерівностей, що містять *трансцендентні функції* (логарифми, експоненти, тригонометричні). Він надає чіткий, покроковий алгоритм для розв'язання та навчає учнів *конструювати власні інструменти* (функції) для розв'язування задачі, а не лише використовувати готові формули.

2.2. Використання симетрії та інваріантів

Цей метод належить до нестандартних підходів і базується на *виявленні прихованої структури* у виразі нерівності. Симетрія дозволяє спрощувати вираз, а інваріанти – фіксувати частину параметрів задачі, щоб зосередитися на ключових змінних (Собкович та Кульчицька, 2018).

Ідея полягає у використанні *повторюваності* або *збалансованості* виразу, щоб спростити його доведення, часто шляхом спеціального групування членів або заміни змінних (табл. 2).

- ***Симетрія.*** Якщо нерівність не змінюється при циклічній або довільній перестановці змінних (наприклад, $a \to b \to c \to a$), то її називають симетричною або циклічною нерівністю.
- ***Інваріант.*** Це величина (вираз), яка залишається незмінною протягом усього процесу перетворень або при певних підстановках. Використання інваріантних величин дозволяє зафіксувати частину параметрів задачі.

Таблиця 2

Інструменти методу використання симетрії та інваріантів

Прийом	Опис та мета	Приклад трансформації
1. Групування членів	Перетворення симетричного виразу на *суму квадратів*	$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$

	невід'ємних чисел. Якщо сума квадратів ≥ 0, то нерівність доведено	
2. Розкриття та використання AM-GM	Для симетричних виразів, які містять добутки, часто застосовується *нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним* до симетричних пар членів	$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=2$
3. Підстановка / Параметризація	Якщо нерівність є циклічною, можна використати підстановку, яка «згортає» частину виразу або вводить інваріантну суму, щоб спростити знаменники	У нерівності $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$, інваріантом є сума $S=a+b+c$

Задача 4. *Доведемо, що для дійсних чисел* a, b, c:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

Розв'язання. Насамперед помічаємо, що нерівність є повністю симетричною – якщо поміняти місцями будь-які дві змінні, вираз не зміниться.

Групування членів (зведення до інваріантної форми). Перенесемо члени в ліву частину:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0.$$

Множення та групування. Помножимо обидві частини нерівності на 2, щоб мати можливість виділити повні квадрати:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0.$$

Далі розбиваємо кожен квадрат a^2, b^2, c^2 на дві частини і групуємо їх у повні квадрати:

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2) \geq 0.$$

Фінальна інваріантна форма. Очевидно, що ліва частина останньої нерівності еквівалентна сумі квадратів:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

Оскільки квадрат будь-якого дійсного числа є невід'ємним, то сума квадратів завжди невід'ємна. Нерівність доведено.

■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 5. *Доведемо нерівність Коші для трьох змінних. Для додатних a, b, c виконується*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Розв'язання. Використовуючи симетрію виразу, розкриємо дужки:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right).$$

За нерівністю AM-GM для кожної пари маємо:

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)} = 2,$$

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{c}\right)} = 2,$$

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)\cdot\left(\frac{b}{c}\right)} = 2.$$

Підсумуємо і отримаємо:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3+2+2+2 = 9.$$

■

Задача 6. *Доведемо, що для додатних a, b, c:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Розв'язання. Використаємо циклічну симетрію виразу та підстановку (Cvetkovski, 2010). Позначимо $S = a+b+c$. Тоді:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{S-a}, \qquad \frac{b}{c+a} = \frac{b}{S-b}, \qquad \frac{c}{a+b} = \frac{c}{S-c}.$$

Потрібно довести:

$$\frac{a}{S-a}+\frac{b}{S-b}+\frac{c}{S-c} \geq \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Зробимо підстановку $x = S - a$, $y = S - b$, $z = S - c$. Тоді $a = S - x$, $b = S - y$, $c = S - z$, і $x + y + z = 3S - (a + b + c) = 2S$.

Нерівність (1) набуває вигляду:

$$\frac{S-x}{x} + \frac{S-y}{y} + \frac{S-z}{z} \geq \frac{3}{2}.$$

Це еквівалентно:

$$\frac{S}{x} + \frac{S}{y} + \frac{S}{z} - 3 \geq \frac{3}{2}.$$

$$S\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{9}{2}. \qquad (2)$$

Оскільки $x + y + z = 2S$, то

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{2S}$$

за нерівністю між гармонічним та арифметичним середніми (Станжицький та ін., 2022). Отже, $S9/(2S) = 9/2$, що доводить нерівність (2).

■

Представлений метод використання симетрії та інваріантів є елегантним інструментом, який дозволяє отримувати короткі та красиві доведення для симетричних задач, навчає учнів «бачити» структуру задачі та шукати приховані закономірності (симетрії) і часто є першим кроком, який суттєво спрощує подальше розв'язування.

2.3. Техніка параметризації (підстановок)

Техніка параметризації є потужним інструментом, особливо при роботі з нерівностями, що містять *багато змінних* або мають обмеження (умови), як-от фіксована сума чи добуток.

Основна ідея полягає у введенні додаткових параметрів (нових змінних) або використанні спеціальних підстановок, щоб трансформувати складну нерівність у простішу форму (табл. 3). Ці нові змінні часто відображають приховані математичні структури або дозволяють застосувати інші, більш знайомі методи (наприклад, метод допоміжних функцій). Параметризація дозволяє трансформувати складні нерівності в простіші форми (Cvetkovski, 2010).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Таблиця 3

Інструменти техніки параметризації

Прийом	Опис та мета	Приклад трансформації
1. Зведення до однієї змінної	Якщо нерівність залежить від двох змінних a і b, її можна звести до однієї змінної t шляхом підстановки $t = a/b$	Нерівність $$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$$ зводиться до $$t+\frac{1}{t} \geq 2 \ (t = a/b)$$
2. Використання обмежень (умов)	Якщо задана умова (інваріант), наприклад, $x+y+z=3$, можна ввести параметри p, q, r, які задовольняють простіше обмеження $p+q+r=0$	Якщо $x+y+z=3$, підстановка $x=1+p$, $y=1+q$, $z=1+r$ приводить до $p+q+r=0$
3.Тригонометрична підстановка	Для нерівностей, пов'язаних із сумою квадратів або обмеженням на одиничному колі ($x^2+y^2=1$), використовують підстановки $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$	Для доведення нерівностей із замкнутою областю та квадратичними виразами

Задача 7. *Довести, що для додатних x, y, z за умови $x+y+z=3$ виконується*

$$xy + yz + zx \leq 3.$$

Розв'язання. Припустимо, що x, y, z близькі до 1 (через умову, що їхня сума дорівнює 3). Введемо малі відхилення:

$$x = 1+p, \qquad y = 1+q, \qquad z = 1+r.$$

Аналіз умови (інваріант). Підставляємо в умову $x+y+z=3$:

$$(1+p)+(1+q)+(1+r)=3 \quad \Rightarrow \quad 3+(p+q+r)=3.$$

Це дає нове, просте обмеження (інваріант): $p+q+r=0$.

Трансформація нерівності. Підставляємо нові змінні у вираз $xy+yz+zx$:

$$xy+yz+zx = 3+2(p+q+r)+(pq+qr+rp).$$

Оскільки $p+q+r=0$, вираз спрощується до:

$$xy+yz+zx = 3+(pq+qr+rp).$$

Спрощена задача. Нерівність $xy + yz + zx \leq 3$ зводиться до

$$3 + (pq + qr + rp) \leq 3 \qquad \Longrightarrow \qquad pq + qr + rp \ \leq 0.$$

Доведення нової нерівності (через інваріант $p + q + r = 0$). Використовуємо формулу квадрата суми:

$$(p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + \ r^2 + 2(pq + qr + rp) = 0.$$

Звідси: $p^2 + q^2 + r^2 = -2(pq + qr + rp)$. Оскільки $p^2 + q^2 + r^2 \geq 0$ (сума квадратів невід'ємна), то й $-2(pq + qr + rp) \geq 0$, що означає $pq + qr + rp \leq 0$. Нерівність доведено.

■

Задача 8. *Доведемо, що для додатних* a, b:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Розв'язання. Введемо параметр $t = a/b > 0$. Нерівність набуває вигляду:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2.$$

Використовуючи метод допоміжних функцій, розглянемо функцію

$$f(t) = t + \frac{1}{t}$$

для $t \ > \ 0$.

Знайдемо її похідну:

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}. \tag{3}$$

Знаходимо з (3) критичні точку $f'(t) = 0$. Для $t > 1$: $f'(t) > 0$ (зростання). Для $0 < t < 1$: $f'(t) \ < \ 0$ (спадання).

Отже, $t = 1$ є точкою мінімуму і $f(1) = 1 + 1 = 2$. Тому для всіх $t > 0$: $f(t) \geq 2$.

■

Техніка параметризації, як метод доведення нерівностей, незамінна, коли нерівність має складні обмеження (умови), дозволяючи перетворити складні

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

нерівності на простіші форми, які легше доводити. Використання техніки навчає учнів шукати приховані залежності та творчо підходити до вибору змінних.

2.4. Метод монотонності

Метод монотонності є одним із найбільш універсальних і фундаментальних інструментів для доведення нерівностей. Він спирається на властивості *зростаючих* та *спадних* функцій, використовуючи апарат *похідної* (Сарана, 2004).

Ідея полягає у зведенні доведення нерівності до дослідження поведінки (зростання або спадання) спеціально сконструйованої допоміжної функції $f(x)$ на певному проміжку (табл. 4).

- ***Монотонність***. Якщо функція $f(x)$ зростає на проміжку, то для будь-яких $x_1 < x_2$ на цьому проміжку виконується $f(x_1) < f(x_2)$. Якщо функція спадає, то $f(x_1) > f(x_2)$.
- ***Ключ до доведення.*** Знаючи, що функція зростає, достатньо перевірити її значення на початку проміжку (або в граничній точці). Якщо $f(x)$ зростає і $f(a) \geq 0$, то $f(x) \geq 0$ для всіх $x > a$.

Таблиця 4

Інструменти методу монотонності

Крок	Дія	Мета
1. Створення $f(x)$	Перетворити нерівність $A > B$ на допоміжну функцію $f(x) = A - B$	Звести доведення до аналізу знаку $f(x)$
2. Аналіз похідної	Знайти $f'(x)$ та дослідити її знак на заданому проміжку	Встановити, чи $f(x)$ зростає ($f'(x) > 0$) чи спадає ($f'(x) < 0$)
3. Перевірка граничного значення	Обчислити значення $f(x)$ у точці, де починається проміжок (зазвичай $x = 0$ або межа області визначення)	Це значення буде *мінімальним* (якщо функція зростає) або *максимальним* (якщо функція спадає) на проміжку
4. Висновок	Якщо $f(x)$ зростає і $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ для всіх $x > 0$. Отже, нерівність доведено	Довести, що $f(x) \geq 0$ (або $f(x) \leq 0$)

Задача 9. *Доведемо, що*

$$\sin x < x$$

для $x \in (0, \pi/2)$.

Розв'язання. Створимо допоміжну функцію, перенісши члени у ліву частину, щоб довести $x - \sin x > 0$. Відтак

$$f(x) = x - \sin x \text{ для } x \in (0, \pi/2).$$

Знайдемо похідну функції $f(x)$ та проаналізуємо її. Отримуємо

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

На проміжку $x \in (0, \pi/2)$ значення $\cos x < 1$. Отже, $f'(x) = 1 - \cos x > 0$. Це означає, що функція $f(x)$ зростає на $(0, \pi/2)$.

Межова точка $x = 0$. Тоді $f(0) = 0 - \sin 0 = 0$.

Оскільки $f(0) = 0$ і функція $f(x)$ зростає при $x > 0$, то $f(x) > 0$ для всіх $x \in (0, \pi/2)$. Таким чином, $x - \sin x > 0$, що доводить нерівність $\sin x < x$.

■

Задача 10. *Доведемо, що для* $x \in (0, \pi/2)$*:*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Розв'язання. Дослідимо окремо дві допоміжні функції.

1) Розглянемо $f(x) = x - \sin x$ для $x \in (0, \pi/2)$. Похідна: $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, оскільки $\cos x < 1$ для $x \in (0, \pi/2)$. Отже, $f(x)$ зростає, $f(0) = 0$, тому $f(x) > 0$, звідки $x > \sin x$.
2) Розглянемо $g(x) = \operatorname{tg} x - x$ для $x \in (0, \pi/2)$. Похідна:

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} > 0$$

для $x \in (0, \pi/2)$. Отже, $g(x)$ зростає, $g(0) = 0$, тому $g(x) > 0$, звідки $tg\ x > x$.

Об'єднаємо результати:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

■

Задача 11. *Довести нерівність Бернуллі: для* $x > -1$ *та натурального* $n \geq 1$ *виконується*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Розв'язання. Для $n = 1$ нерівність очевидна: $1 + x = 1 + x$.

Для $n \geq 2$ розглянемо функцію

$$f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

для $x > -1$.

Дослідимо похідну функції $f(x)$.

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n = n[(1 + x)^{n-1} - 1]. \tag{4}$$

При $x = 0$: $f(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ і $f'(0) = n(1 - 1) = 0$.

Друга похідна:

$$f''(x) = n(n-1)(1 + x)^{n-2}. \tag{5}$$

Для $n \geq 2$ та $x > -1$ маємо $f''(x) > 0$, оскільки $(1 + x)^{n-2} > 0$.

Оскільки $f''(x) > 0$, функція $f(x)$ опукла. З умов $f(0) = 0$ і $f'(0) = 0$ випливає, що $x = 0$ є точкою глобального мінімуму, тому $f(x) \geq 0$ для всіх $x > -1$.

Отже, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ для всіх $n \geq 1$.

■

Метод монотонності є одним із найуніверсальніших підходів, який застосовний для різних типів трансцендентних функцій (тригонометричних, степеневих, логарифмічних). Його використання дозволяє учням не лише доводити нерівності, але й глибше розуміти їхню природу та поведінку функцій, надає чіткий, хоча й іноді громіздкий, *алгоритм* розв'язання, що є важливим для формування навичок доведення.

3. Висновки

Підсумовуючи, необхідно зазначити, що нестандартні методи доведення нерівностей мають ряд переваг:

- *універсальність*: кожен метод застосовний до широкого класу нерівностей;
- *елегантність:* дозволяють отримувати короткі та красиві доведення;
- *педагогічна цінність:* розвивають аналітичне мислення та математичну інтуїцію.

Метод допоміжних функцій є особливо ефективним для нерівностей з трансцендентними функціями. Як зазначається у (Мельников, 2013), вдало підібрана допоміжна функція може перетворити складну нерівність на майже очевидний результат. Розглянуті приклади проілюстрували різні аспекти методу: від простого аналізу монотонності до дослідження опуклості функцій.

Використання симетрії та інваріантів дозволяє значно спростити доведення для симетричних виразів. У (Собкович & Кульчицька, 2018) описано, що виявлення симетрії часто є першим кроком до знаходження ефективного розв’язання.

Техніка параметризації незамінна при роботі з багатьма змінними та обмеженнями. Параметризація дозволяє трансформувати складні нерівності в простіші форми, використовуючи приховані математичні структури (Cvetkovski, 2010).

Метод монотонності є одним з найуніверсальніших підходів, що дозволяє не лише доводити нерівності, але й глибше розуміти їхню природу (Сарана, 2004). Приклади ілюструють, як його застосовувати для тригонометричних та степеневої функції.

Порівняльний аналіз наведених вище прикладів дозволяє зробити висновок, що вибір методу суттєво залежить від структури нерівності:

- для нерівностей з логарифмічними та експоненціальними функціями оптимальним є метод допоміжних функцій;
- для симетричних виразів ефективне використання симетрії та інваріантів;
- для нерівностей з обмеженнями доцільна параметризація;
- для порівняння значень функцій природним є метод монотонності.

Опанування нестандартними методами суттєво збагачує математичну підготовку і є важливою складовою сучасної математичної освіти. Освітянська практика свідчить, що саме поєднання різних методів часто дає найкращі результати. Як зазначає (Manfrino, Gomes & Delgado, 2000), майстерність у доведенні нерівностей виражається не лише знаннями окремих прийомів, а й розумінням того, як їх комбінувати.

Для формування математичної компетентності важливим є впровадження цих підходів на заняттях з математики у закладах загальної середньої освіти при вивченні відповідних тем. Особливо важливим є поступове опанування даними методами через розробку комплексу вправ – від простіших до складніших, що забезпечуватиме глибоке розуміння та формуватиме стійкі навички розв’язування відповідних задач.

Список використаних джерел

Мельников, В. (2013). Доведення нестандартних нерівностей (на основі матеріалів Всеукраїнських олімпіад, інтернет-олімпіад та математичних турнірів). Освіта. С. 15–35.

Сарана О.А. (2004). Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібник. К.: Вид-во А.С.К., 344 с.

Собкович, Р., & Кульчицька, Н. (2018). Основні методи доведення нерівностей. Видавництво ЛНУ.

Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Цань В.Б. (2022). Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина ІІ «Нерівності в шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету. 2022, 123 с.

Cvetkovski, Z. (2010). Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems. Springer. 444 p.

Manfrino R.B., Gomes J.A., Delgado R.V. (2000). Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach. Birkhauser Verlag. 211 p.

Отримано редакцією журналу: 24.09.2025
Прорецензовано: 14.11.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Khrystyna KINDRATIV, Student.
0009-0006-0600-547X
e-mail: antonikkhristina@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

NON-STANDARD METHODS OF PROVING INEQUALITIES IN MATHEMATICS EDUCATION

Abstract. *The process of proving inequalities occupies an important place in the school mathematics curriculum, as it contributes to the development of students' logical, analytical, and critical thinking skills. Relying solely on standard approaches to proving inequalities does not always ensure a deep understanding of mathematical regularities and often limits students' creative potential. Therefore, the implementation of non-standard proof methods is of particular relevance, as they foster the formation of research skills and the development of mathematical intuition. The purpose of this article is to investigate the applicability of non-standard methods for proving inequalities and to determine the possibilities of their integration into the process of teaching mathematics in general secondary education institutions.*

The paper presents the method of auxiliary functions, the method of symmetry and invariants, the technique of parameterization, and the monotonicity method for proving inequalities. The possibilities of applying these approaches in the educational process are analyzed with regard to enhancing students' cognitive activity, developing logical reasoning, and fostering the ability to conduct independent analysis of mathematical statements. The provided examples illustrate the effectiveness of each method in the context of forming competencies essential for mastering the school mathematics curriculum and participating in mathematical competitions. The discussed proof methods possess considerable didactic potential, promote a deeper understanding of mathematical facts, encourage students' research-oriented activity, and improve the overall quality of mathematical training. Their integration into the educational process will contribute to the development of students' creative and analytical abilities and the enhancement of their mathematical competence.

Keywords: *inequalities; proof; non-standard methods; auxiliary function; symmetry; parameterization; monotonicity; mathematics teaching methodology.*