

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Яковлев Микита Сергійович**

УДК 519.21

## **ДИСЕРТАЦІЯ**

# **Оцінювання параметрів у лінійних моделях з похибками в змінних та зі змішаним дробовим броунівським рухом**

112 — статистика

Подається на здобуття наукового ступеня  
доктора філософії

*Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.*

*М. С. Яковлев*

Науковий керівник  
**Ральченко Костянтин Володимирович,**  
доктор фізико-математичних наук,  
доцент

Київ — 2024

# Анотація

*Яковлев М. С.* Оцінювання параметрів у лінійних моделях з похибками в змінних та зі змішаним дробовим броунівським рухом.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю «112 — статистика» — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2023.

Дисертаційне дослідження присвячене моделі лінійної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі та моделям зі змішаним дробовим броунівським рухом, а саме лінійними комбінаціями дробового броунівського руху з вінерівським процесом (за наявності або відсутності тренду) або з іншим дробовим броунівським рухом, незалежним від першого. Головною метою дослідження є вивчення асимптотичних властивостей оцінок, отриманих у результаті застосування розроблених методів одночасного оцінювання параметрів моделей на основі дискретних спостережень. Окрема увага приділяється моделюванню отриманих оцінок та аналізу їх поведінки для різноманітних конфігурацій досліджуваних моделей.

У дисертації досліджується три типи лінійних моделей із сумішами: 1) структурна модель регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок; 2) модель суміші дробового броунівського руху та вінерівського процесу; 3) модель суміші двох дробових броунівських рухів. Окремий акцент у дослідженні приділяється асимптотичним властивостям побудованих оцінок, визначенню їх асимптотичних коваріацій та умов асимптотичної нормальності.

Моделі регресії з похибками у змінних, зокрема з сумішшю класичної та берксонівської похибок, застосовуються у радіаційній епідеміології при дослідженні впливу радіаційних ризиків на популяцію, що є особливо актуальним для громадян України, оскільки цей регіон свого часу постраждав від Чорнобильської катастрофи. Відповідно, побудова теоретичних інструментів для якісного дослідження впливу цієї події на популяцію є актуальною задачею.

Для моделі лінійної структурної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок побудовано строго консистентні оцінки невідомих параметрів моделі та визначено умови їх асимптотичної нормальності, разом з визначенням груп асимптотично незалежних оцінок. Окремо досліджено

асимптотичну поведінку моделі за умови нормально розподілених компонент, що дало можливість отримати явний вигляд для асимптотичної коваріаційної матриці. Отримані вирази оцінок параметрів моделі не залежать від берксонівської похибки, проте остання все одно впливає на їх асимптотичну поведінку та точність.

Суттєве число змінних у часі природних процесів зазвичай моделюється стандартним вінерівським рухом, який у свою чергу не може бути застосованим для належного моделювання процесів з властивостями автотерміновості, довготермінової залежності й складними кореляційними структурами. Ця проблема може бути вирішена використанням дробового броунівського руху з індексом Хюрста  $H$ , прирости якого корелюють, та який має властивості короткотермінової ( $H < \frac{1}{2}$ ) або довготермінової ( $H > \frac{1}{2}$ ) залежності. При цьому, використання сумішей на основі цього процесу дає можливість моделювати складніші конфігурації природних процесів, які, наприклад, можуть мати властивості довготермінової, так і короткотермінової залежності, що якраз може бути змодельовано сумішшю двох різних дробових броунівських рухів.

У моделях зі сумішшю дробового броунівського руху та вінерівського процесу досліджувалась асимптотична поведінка вже побудованих строго консистентних ергодичних оцінок для двох випадків: а) за відсутності тренду у лінійній моделі; б) за наявності тренду у лінійній моделі. У першому випадку асимптотичну нормальність продемонстровано для значень індекса Хюрста  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . Досліджено властивості автоковаріаційних рядів, що виникають при вивченні асимптотичної поведінки допоміжних статистик, на основі яких будуються оцінки невідомих параметрів.

При цьому, у моделі за наявності тренду, асимптотична нормальність продемонстрована для  $H \in (0, \frac{1}{2})$ , оскільки у цьому випадку прирости досліджуваного процесу є нецентрованими й це змінює структуру асимптотичної коваріації допоміжних статистик. У результаті виникають ряди першого порядку, що є розбіжними при  $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ .

Для моделі суміші двох різних незалежних дробових броунівських рухів з параметрами Хюрста  $H_1$  та  $H_2$  доведено ергодичність послідовності приростів, виведено строго консистентні одночасні оцінки усіх невідомих параметрів моделі при  $H_1 < H_2$ , визначено умови їх асимптотичної нормальності та

асимптотичної нормальності допоміжних статистик ( $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$ ), виведено явний вигляд їх асимптотичних коваріаційних матриць.

Для кожної з досліджуваних задач проведено комп'ютерне моделювання побудованих оцінок, а також оцінок їх асимптотичних коваріаційних матриць. Наведені результати підтверджують теоретичні висновки, узгоджуються з відомими результатами, а також дають додаткову інформацію щодо поведінки отриманих оцінок.

Дисертаційне дослідження має теоретичний характер, а отримані результати є внеском у теорію оцінювання параметрів у моделях регресії з похибками у змінних та у моделях на основі сумішей дробового броунівського руху. Запропонована методологія може бути використана для побудови загальніших моделей лінійної регресії за наявності суміші похибок у змінних, при дослідженні моделей випадкових процесів з властивостями довготермінової та короткотермінової залежностей, а також для побудови оцінок для більш складних моделей з дробовим броунівським рухом.

*Ключові слова:* Лінійні моделі з похибками у змінних, лінійна регресія, суміш класичної та берксонівської похибок, дробовий броунівський рух, індекс Хюрста, змішаний дробовий броунівський рух, випадкові процеси, гауссів процес, стаціонарні процеси, ергодичні процеси, строга консистентність, асимптотична нормальність, асимптотична незалежність, довірчий інтервал.

## Summary

*Yakovliev M. S.* Parameter estimation in linear models with errors-in-variables and mixed fractional Brownian motion. — Manuscript.

Doctor's of Philosophy, specialty "112 — Statistics" — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis is devoted to the errors-in-variables model under a mixture of classical and Berkson errors and models with mixed fractional Brownian motion, namely linear combinations of fractional Brownian motion with a Wiener process (with or without a trend) or with another distinct fractional Brownian motion. The main goal of the

research is to study the asymptotic properties of estimates obtained as a result of the application of the developed methods of simultaneous estimation of model parameters based on discrete observations. Particular attention is paid to the simulation of the obtained estimators and the analysis of their behavior for various configurations of the studied models.

The thesis examines three types of linear models with mixtures: 1) structural regression model with a mixture of classical and Berkson errors; 2) model with a mixture of fractional Brownian motion and Wiener process; 3) model with a mixture of two fractional Brownian motions. A special emphasis in the research is given to the asymptotic properties of the constructed estimates, the evaluation of their asymptotic correlations, and the conditions of their asymptotic normality.

Errors-in-variables regression models, in particular with a mixture of classical and Berkson errors, are used in radioepidemiology for studying the impact of radiation risks on the population, which is especially relevant for citizens of Ukraine, considering that this region was affected by the Chernobyl disaster. Therefore, the construction of theoretical instruments for an effective study of this event's impact on the population is a relevant task.

For linear structural regression model with the presence of mixture of classical and Berkson errors, strictly consistent estimates of the unknown parameters of the models were constructed and the conditions of their asymptotic normality were established, along with the identification of groups of asymptotically independent estimates. Additionally, the asymptotic behavior of estimates was separately investigated under the conditions of normal distribution of model's components, which made it possible to obtain an explicit form for the asymptotic covariance matrix. Obtained expressions of model parameter estimates are independent of the Berkson error, but it still affects their asymptotic behaviour and accuracy.

A significant number of time-varying natural processes is usually modeled by standard Wiener motion, which in turn cannot be used for proper modeling of processes with the properties of self-similarity, long-range dependence, and complex correlation structures. This problem can be solved by using the fractional Brownian motion with the Hurst index  $H$ , the increments of which are correlated, and which has the properties of short-range ( $H < \frac{1}{2}$ ) or long-range ( $H > \frac{1}{2}$ ) dependencies. At the same time, the use of mixtures based on this process makes it possible to model

more complex configurations of natural processes, which, for example, can have the properties of both long-range and short-range dependencies, which can be simulated by a mixture of two different fractional Brownian motions.

In models with a mixture of fractional Brownian motion and a Wiener process, the asymptotic behavior of previously constructed strictly consistent ergodic estimates was studied in two cases: a) in absence of a trend in the linear model ( $\theta = 0$ ); b) if there is a trend in the linear model ( $\theta \neq 0$ ). In the first case, asymptotic normality was demonstrated for  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . The properties of autocovariance series that arise when studying the asymptotic behavior of auxiliary statistics, on the basis of which estimates of unknown parameters are constructed, have been studied.

At the same time, in the model with the presence of a trend, asymptotic normality was demonstrated for  $H \in (0, \frac{1}{2})$ , since in this case the increments of the studied process are not centered and this changes the structure of the asymptotic covariance of auxiliary statistics. This results in series of first order that do not converge for  $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ .

For the model with a mixture of two different independent fractional Brownian motions with Hurst parameters  $H_1$  and  $H_2$ , the ergodicity of the sequence of increments is proved, strictly consistent simultaneous estimators of all unknown parameters of the model at  $H_1 < H_2$  are given, and the conditions of their asymptotic normality and asymptotic normality of auxiliary statistics are stated ( $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$ ), and explicit forms for their asymptotic covariance matrices is derived.

For each of the investigated models, numerical simulations of the constructed estimators, as well as for the estimates of their asymptotic covariance matrices, was conducted. The presented results confirm the theoretical conclusions, are consistent with the previously obtained results, and also provide additional information about the behavior of the obtained estimates.

The thesis is of theoretical nature, and the obtained results contribute to the theory of parameter estimation in errors-in-variables regression models and to the study of models based on mixtures of fractional Brownian motion. The proposed methodology can be used to build more general models of linear regression in the presence of a mixture of errors in variables, to study models of random processes with the properties of long-range and short-range dependencies, as well as to build estimates for more complex models with fractional Brownian motion.

*Keywords:* Linear errors-in-variables model, linear regression, mixture of the classical and Berkson errors, fractional Brownian motion, Hurst index, mixed fractional Brownian motion, stochastic processes, Gaussian process, stationary process, ergodic process, strong consistency, asymptotic normality, asymptotically independent estimators, confidence interval.

## **Список публікацій здобувача за темою дисертації**

### **Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації**

1. Ralchenko K., Yakovliev M. Asymptotic normality of parameter estimators for mixed fractional Brownian motion with trend // Austrian Journal of Statistics. 2023. Aug. Vol. 52, no. SI. P. 127–148. <https://doi.org/10.17713/ajs.v52iSI.1770>
2. Ralchenko K., Yakovliev M. Parameter estimation for fractional mixed fractional Brownian motion based on discrete observations // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2023. P. 1–29. <https://doi.org/10.15559/23-VMSTA234>
3. Ralchenko K., Yakovliev M. Asymptotically normal estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences. 2023. Dec. no. 2. P. 54–62. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.6>
4. Yakovliev M., Kukush A. Estimation in a linear errors-in-variables model under a mixture of classical and Berkson errors // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2021. Vol 8, no. 3. P. 373–386. <https://doi.org/10.15559/21-VMSTA186>

### **Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації**

1. Кукуш О. Г., Яковлев М. С. Побудова консистентних оцінок параметрів лінійної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі // IX Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Київ, Україна : ФОР Кушнір Ю. В. 28–29 грудня 2020. С. 92–94.
2. Яковлев М. С. Групи асимптотично незалежних оцінок у моделі із сумішшю класичної і берксонівської похибки у регресорі // XIX Міжнародна науково-

- практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 15-16 квітня 2021. С. 30–31.
3. Яковлєв М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху // Всеукраїнська науково-практична конференція «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання». Київ, Україна : УДУ імені Михайла Драгоманова. 18-20 січня 2023. С. 52–55.
  4. Яковлєв М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху з розширенням на випадок тренду // XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2023. С. 68–69.
  5. Яковлєв М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху з узагальненням на випадок лінійного тренду // XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях». Харків, Україна : Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. 12-14 травня 2023. С. 16–19.
  6. Яковлєв М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху за наявності тренду // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 1-3, 2023. [https://www.imath.kiev.ua/young/youngconf2023/Abstracts\\_2023/PS/Yakovliev-Ralchenko.pdf](https://www.imath.kiev.ua/young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Yakovliev-Ralchenko.pdf)
  7. Ральченко К. В., Яковлєв М. С. Оцінювання параметрів моделі суміші двох дробових броунівських рухів // XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. м. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 11–12 жовтня 2023. С. 180–181.
  8. Yakovliev M. Asymptotically normal estimators in linear regression model under a mixture of classical and Berkson measurement errors // Scientific conference

“Actual Problems of Stochastic Analysis”. Tashkent, Uzbekistan. February 20-21, 2021. P. 93–96.

9. Kukush A. G., Yakovliev M. S. Consistent estimation in linear regression model under a mixture of classical and berkson errors in covariate // International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”. Kyiv, Ukraine. June 1-4, 2021. P. 93.

## **Відомості про апробацію результатів дисертації**

### **Конференції**

1. IX Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 28–29 грудня, 2020, Київ, Україна.
2. Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”, February 20-21, 2021, Tashkent, Uzbekistan.
3. XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», 15–16 квітня, 2021, Київ, Україна.
4. International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”, June 1-4, 2021, Kyiv, Ukraine.
5. Всеукраїнська науково-практична конференція «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання», 18-20 січня, 2023, Київ, Україна.
6. XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики», 14 квітня, 2023, Київ, Україна.
7. XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», 12-14 травня, 2023, Харків, Україна.
8. International Conference of Young Mathematicians, June 1-3, 2023, Kyiv, Ukraine.

9. XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 11–12 жовтня 2023 року, КПІ ім. Ігоря Сікорського., м. Київ, Україна.
10. 23rd European Young Statisticians Meeting, September 11-15, 2023, Ljubljana, Slovenia.

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>12</b>
<b>1 Огляд літератури за темою дисертації</b>	<b>23</b>
<b>2 Оцінювання параметрів лінійної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі</b>	<b>28</b>
2.1 Побудова оцінок . . . . .	28
2.1.1 Визначення моделі та основних припущень . . . . .	28
2.1.2 Побудова строго консистентних оцінок . . . . .	30
2.2 Асимптотична нормальність . . . . .	33
2.2.1 Асимптотична нормальність кутового коефіцієнта . . . . .	33
2.2.2 Асимптотична нормальність у нормальному випадку . . . . .	36
2.2.3 Асимптотична нормальність у загальному випадку . . . . .	48
2.3 Моделювання . . . . .	52
2.4 Висновки . . . . .	60
<b>3 Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху</b>	<b>62</b>
3.1 Модель змішаного дробового броунівського руху . . . . .	62
3.2 Асимптотична нормальність оцінок за відсутності тренду . . . . .	65
3.2.1 Асимптотична нормальність допоміжних статистик . . . . .	65
3.2.2 Асимптотична нормальність оцінок параметрів моделі . . . . .	73
3.2.3 Моделювання . . . . .	76
3.3 Асимптотична нормальність оцінок за наявності тренду . . . . .	85
3.3.1 Асимптотична нормальність допоміжних статистик . . . . .	85
3.3.2 Асимптотична нормальність оцінок параметрів моделі . . . . .	99
3.3.3 Моделювання . . . . .	102

3.4	Висновки . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Оцінювання параметрів суміші двох дробових броунівських рухів</b>	<b>108</b>
4.1	Визначення моделі . . . . .	108
4.2	Побудова консистентних оцінок . . . . .	109
4.3	Асимптотична нормальність оцінок . . . . .	116
4.3.1	Асимптотична нормальність <b>допоміжних</b> статистик . . . . .	116
4.3.2	Асимптотична нормальність оцінок параметрів моделі . . . . .	128
4.4	Моделювання . . . . .	131
4.5	Висновки . . . . .	140
	<b>Висновки</b>	<b>141</b>
	<b>Список використаних джерел</b>	<b>143</b>

# Вступ

**Актуальність теми.** Дисертаційне дослідження присвячене моделі лінійної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі та моделям зі змішаним дробовим броунівським рухом, а саме лінійним комбінаціям дробового броунівського руху з вінерівським процесом (за наявності або відсутності тренду) або з іншим дробовим броунівським рухом. Вивчаються явні одночасні оцінки всіх невідомих параметрів відповідних моделей, умови їх консистентності та асимптотичної нормальності. Окрема увага приділяється їх асимптотичним властивостям та структурі відповідних асимптотичних коваріаційних матриць.

Моделі регресії з похибками у змінних, зокрема із сумішшю класичної та берксонівської похибок, застосовуються у радіоепідеміології при дослідженні впливу радіаційних ризиків на популяцію, що є особливо актуальним для громадян України, оскільки цей регіон свого часу постраждав від Чорнобильської катастрофи. Відповідно, побудова теоретичних інструментів для якісного дослідження впливу цієї події на популяцію є актуальною задачею.

Суттєве число змінних у часі природних процесів зазвичай моделюються стандартним вінерівським процесом, який у свою чергу не може бути застосованим для належного моделювання процесів з властивостями автомодельності, довготермінової залежності й складними кореляційними структурами. Ця проблема може бути вирішена використанням дробового броунівського руху з індексом Хюрста  $H$ , прирости якого корелюють, та мають властивості короткотермінової ( $H < \frac{1}{2}$ ) або довготермінової ( $H > \frac{1}{2}$ ) залежності. При цьому використання сумішей на основі цього процесу дає можливість моделювати складніші конфігурації природних процесів, які, наприклад, можуть мати властивості як довготермінової, так і короткотермінової залежності, що якраз може бути змодельовано сумішшю двох різних дробових броунівських рухів.

У дисертаційному дослідженні зосереджено увагу на явних оцінках параметрів моделей, що є простішими та менш обчислювально затратними у практичному застосуванні у порівнянні з неявними методами. Окремо вивчаються асимптотичні властивості та структура асимптотичних коваріаційних матриць, що дає можливість будувати одночасні довірчі інтервали та довірчі еліпсоїди (зокрема - асимптотично незалежні).

Таким чином, тема дисертації є актуальною у контексті сучасних радіоепідеміологічних досліджень та досліджень з теорії ймовірності та статистики випадкових процесів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційну роботу виконано в рамках державних бюджетних дослідницьких наукових тем №19БФ038-01 «Точні формули, оцінки, асимптотичні властивості і статистичний аналіз складних еволюційних систем з багатьма ступенями свободи» (номер державної реєстрації 0119U100317) та №22БФ038-01 «Стохастичні динамічні системи, неоднорідні у часі або з випадковим часом: асимптотика та статистичний аналіз» (номер державної реєстрації 0122U001843) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

**Мета та завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є оцінювання параметрів у моделях регресії зі сумішшю похибок у змінних та моделях зі сумішами дробового броунівського руху, для якого розглянуті випадки лінійної комбінації з вінерівським процесом (за наявності та за відсутності тренду) та з іншим дробовим броунівським рухом. Основними завданнями даної роботи є:

- вивчення властивостей досліджуваних моделей;
- побудова явних одночасних оцінок невідомих параметрів;
- доведення їх строгої консистентності;
- дослідження умов їх спільної асимптотичної нормальності;
- визначення явного вигляду їх асимптотичних коваріаційних матриць;
- моделювання цих оцінок.

**Об'єктом дослідження** є моделі регресії за наявності суміші похибок у регресорі та моделі процесів зі сумішшю дробового броунівського руху з вінерівським процесом або дробовим броунівським рухом.

**Предметом дослідження** є одночасні оцінки невідомих параметрів моделі регресії за наявності суміші похибок у регресорі та моделі процесів зі сумішшю дробового броунівського руху, їх консистентність, асимптотична нормальність та коваріаційна структура.

**Методи дослідження.** У роботі застосовуються методи теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів. Для чисельного моделювання використовується мова статистичного програмування R.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Отримані в дисертаційній роботі результати є новими та математично обґрунтованими. Вони стосуються одночасного статистичного оцінювання параметрів у моделях регресії з сумішшю похибок у змінних та моделях суміші дробового броунівського руху з іншим дробовим броунівським рухом або вінерівським процесом. Основними результатами є такі:

1. побудовано строго консистентні оцінки параметрів моделі лінійної структурної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок, для наведених оцінок визначено умови асимптотичної нормальності для випадку нормально розподілених компонентів моделі (з явним виглядом асимптотичної коваріаційної матриці) та у загальному випадку без припущень про нормальність;
2. визначено властивості автоковаріаційних функцій процесу змішаного дробового броунівського руху;
3. доведено асимптотичну нормальність та визначено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці для ергодичних оцінок параметрів моделі змішаного дробового руху за відсутності тренду при  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ;
4. доведено асимптотичну нормальність та визначено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці для ергодичних оцінок параметрів моделі змішаного дробового руху за наявності тренду при  $H \in (0, \frac{1}{2})$ ;

5. доведено ергодичність та досліджено властивості автоковаріації послідовності приростів лінійної суміші двох незалежних дробових броунівських рухів;
6. побудовано строго консистентні одночасні ергодичні оцінки параметрів моделі лінійної суміші двох незалежних дробових броунівських рухів при  $0 < H_1 < H_2 < 1$ , для визначених оцінок при  $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$  доведено асимптотичну нормальність та виведено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці;
7. проведено чисельне моделювання побудованих оцінок, досліджено проблему чисельної апроксимації автоковаріаційних рядів лінійних моделей сумішей дробового броунівського руху (з вінерівським процесом чи іншим дробовим броунівським рухом) у випадку довготермінової залежності ( $H > \frac{1}{2}$ ).

**Практичне значення одержаних результатів.** Отримані результати даної роботи дозволяють будувати одночасні оцінки невідомих параметрів та відповідні довірчі інтервали у лінійних моделях з сумішшю класичної та берксонівської похибок у змінній та у лінійних моделях процесів зі сумішшю дробового броунівського руху з вінерівським процесом або дробовим броунівським рухом. Моделі регресії зі сумішшю класичної та берксонівської похибок виникають у задачах оцінювання радіаційних ризиків. Моделі з сумішами дробового броунівського руху застосовуються у моделюванні складних стохастичних процесів з наявністю різних компонентів, наприклад, у фінансовій математиці.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати дисертаційної роботи одержані здобувачем самостійно. За результатами дисертації здобувач опублікував чотири роботи у фахових виданнях [46–48,55]. Три роботи [47,48,55] опубліковані у співавторстві з науковим керівником доцентом Ральченком К. В., у яких Ральченку К. В. належить постановка задачі, ідея доведення основних результатів та загальне керівництво роботою. Одна робота [55] опублікована у співавторстві з професором Кукушем О.Г., у якій Кукушу О.Г. належить постановка задачі та визначення загальної схеми дослідження. У всіх чотирьох роботах здобувачу

належить доведення сформульованих теоретичних тверджень та проведення чисельного моделювання.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких всеукраїнських та міжнародних конференціях:

1. IX Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 28–29 грудня, 2020, Київ, Україна.
2. Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”, February 20-21, 2021, Tashkent, Uzbekistan.
3. XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна — 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», 15–16 квітня, 2021, Київ, Україна.
4. International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”, June 1-4, 2021, Kyiv, Ukraine.
5. Всеукраїнська науково-практична конференція «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання», 18-20 січня, 2023, Київ, Україна.
6. XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна — 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики», 14 квітня, 2023, Київ, Україна.
7. XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», 12-14 травня, 2023, Харків, Україна.
8. International Conference of Young Mathematicians, June 1-3, 2023, Kyiv, Ukraine.
9. XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 11–12 жовтня 2023 року, КПІ ім. Ігоря Сікорського., м. Київ, Україна.
10. 23rd European Young Statisticians Meeting, September 11-15, 2023, Ljubljana, Slovenia.

**Публікації.** За результатами дисертації опубліковано

- 4 статті у періодичних фахових виданнях [46–48, 55]; дві з них [48, 55] — у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus та Web of

Science і входять до квартиля Q3; одна [46] — у виданні, що індексується в наукометричних базах Scopus та Web of Science і входять до квартиля Q4; одна [47] — у науковому фаховому виданні України, яке індексується в наукометричній базі Scopus;

- 9 тез доповідей на конференціях [1–7, 25, 54].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел (59 найменувань), та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 153 сторінки, основний текст займає 131 сторінку.

**Зміст роботи.** **Перший розділ** містить огляд сучасного стану вивчення задач, пов'язаних з тематикою роботи та висвітлює результати інших авторів за темою цієї дисертації.

У **другому розділі** розглядається модель лінійної структурної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі.

У **підрозділі 2.1** визначається рівняння моделі та будуються одночасні строго консистентні оцінки невідомих параметрів.

У **пункті 2.1.1** виписується рівняння моделі лінійної структурної моделі за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon, \quad w = x + \delta, \quad \xi = x + u, \quad (1)$$

де спостерігаються пари  $(y, w)^T$ . Визначаються базові припущення:

- випадкові величини  $x$ ,  $\varepsilon$ ,  $\delta$  та  $u$  незалежні в сукупності;
- випадкові величини  $\varepsilon$ ,  $\delta$  та  $u$  мають нульові математичні сподівання та скінченні дисперсії, випадкова величина  $x$  має скінченну додатну дисперсію  $\sigma_x^2$ ;
- дисперсії випадкових величин  $\sigma_\delta^2$  та  $\sigma_u^2$  є додатними та відомими, при цьому інші параметри  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$  та  $\sigma_x^2$  — невідомі.

Доведено, що параметри  $\sigma_\delta^2$  та  $\sigma_u^2$  мають бути відомими, інакше модель (1) буде неідентифікованою.

У пункті 2.1.2 будуються одночасні оцінки невідомих параметрів  $(\beta_1, \beta_0, \sigma_\varepsilon^2)^\top$ :

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{S_{wy}}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}, \quad (2)$$

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{y} - \widehat{\beta}_1 \left( \frac{\bar{w}}{\widehat{K}} - \frac{1 - \widehat{K}}{\widehat{K}} \bar{w} \right) = \bar{y} - \widehat{\beta}_1 \bar{w}, \quad (3)$$

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 := S_{yy} - \frac{\widehat{\beta}_1 S_{wy} (S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}, \quad (4)$$

де

$$\bar{a} := N^{-1} \sum_{i=1}^N a_i, \quad S_{ab} = \overline{(a - \bar{a})(b - \bar{b})} = N^{-1} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}),$$

за допомогою введення наступної додаткової умови

(iv) Випадкові величини  $x$  та  $u$  є гауссовими.

Доведено строгу консистентність оцінок (2)–(4) за умов (i)–(iii).

У підрозділі 2.2 вивчаються асимптотичні властивості побудованих оцінок.

У пункті 2.2.1 вводиться умова обмеження на четвертий момент класичної похибки:

(v)  $\mathbb{E}\delta^4 < \infty$ .

За умов (i)–(iii), (v) та припущення про те, що  $\sigma_\delta^2$  є відомою та додатною, оцінка кутового коефіцієнта  $\widehat{\beta}_1$  (2) є асимптотично нормальною:

$$\sqrt{N}(\widehat{\beta}_1 - \beta_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{\beta_1}^2), \quad (5)$$

де

$$\sigma_{\beta_1}^2 := \frac{\beta_1^2(\sigma_\delta^2 \sigma_x^2 + D(\delta^2) + \sigma_u^2 \sigma_w^2) + \sigma_\varepsilon^2 \sigma_w^2}{\sigma_x^4}. \quad (6)$$

У пункті 2.2.2 змінюється параметризація моделі (1) до наступного вигляду:

$$y = \mu_y + \beta_1(\xi - \mu) + \varepsilon, \quad w = x + \delta, \quad \xi = x + u. \quad (7)$$

Для вектора невідомих параметрів  $\theta = (\mu, \mu_y, \sigma_w^2, \beta_1, \sigma_\varepsilon^2)^\top$  моделі (7) на основі оцінок (2)–(4) визначається оцінка

$$\widehat{\theta} = (\bar{w}, \bar{y}, S_{ww}, \frac{S_{wy}}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}, S_{yy} - \frac{S_{wy}^2 (S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{(S_{ww} - \sigma_\delta^2)^2})^\top. \quad (8)$$

Вводиться обмеження на розподіл випадкових величин  $x$ ,  $\delta$ ,  $u$  та  $\varepsilon$ :

(vi) Випадкові величини  $x, \delta, u, \varepsilon$  — гауссові.

За умов (i) — (iii) та (vi) доведено асимптотичну нормальність оцінки  $\widehat{\theta}$  (8), визначено явний вигляд її асимптотичної коваріаційної матриці та виділено групи асимптотично незалежних оцінок —  $(\widehat{\mu}, \widehat{\mu}_y)$  та  $(\widehat{\sigma}_w^2, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2)$ .

У пункті 2.2.3 вводиться наступне обмеження на треті та четверті моменти випадкових величин  $x, \delta$  та  $u$ :

(vii)  $x, \delta, u$  та  $\varepsilon$  мають нульовий коефіцієнт асиметрії, тобто їх центровані треті моменти є тотожно рівними 0.

(viii)  $\sigma_\varepsilon^2 > 0, \mathbb{E}\varepsilon^4 < \infty$  та розподіл  $\varepsilon$  не зосереджений у двох точках.

За умов (i) — (iii) та (vii)—(viii) доведено асимптотичну нормальність оцінки  $\widehat{\theta}$  (8) та асимптотичну незалежність груп оцінок  $(\widehat{\mu}, \widehat{\mu}_y)$  та  $(\widehat{\sigma}_w^2, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2)$ .

У підрозділі 2.3 проведено чисельне моделювання для оцінок  $\widehat{\beta}_1$  та  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ , яким підтверджено теоретичні результати.

У **третьому розділі** розглядаються асимптотичні властивості ергодичних оцінок параметрів моделі змішаного дробового броунівського руху.

У підрозділі 3.1 визначаються рівняння змішаного дробового броунівського руху за наявності тренду

$$X_t = \theta t + \sigma W_t + \kappa B_t^H, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

та за відсутності тренду ( $\theta = 0$ )

$$X_t = \sigma W_t + \kappa B_t^H, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

Визначаються допоміжні статистики  $(\phi_N, \xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$ :

$$\begin{aligned} \phi_N &:= \frac{X_{Nh}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh}), \\ \xi_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh})^2, \\ \eta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh}) (X_{(k+2)h} - X_{(k+1)h}), \\ \zeta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+2)h} - X_{kh}) (X_{(k+4)h} - X_{(k+2)h}), \end{aligned} \quad (11)$$

а також відповідні ергодичні оцінки невідомих параметрів моделі (9) за наявності тренду наступним чином:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_N &= \frac{\phi_N}{h}, & \hat{H}_N &= \frac{1}{2} \log_{2^+} \frac{\zeta_N - 4\phi_N^2}{\eta_N - \phi_N^2}, \\ \hat{\kappa}_N^2 &= \frac{\eta_N - \phi_N^2}{h^{2\hat{H}_N} (2^{2\hat{H}_N-1} - 1)}, & \hat{\sigma}_N^2 &= \frac{1}{h} \left( \xi_N - \phi_N^2 - \hat{\kappa}_N^2 h^{2\hat{H}_N} \right),\end{aligned}\tag{12}$$

де

$$\log_{2^+} x = \begin{cases} \log_2 x, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

й ергодичні оцінки параметрів для моделі (10) за відсутності тренду:

$$\begin{aligned}\hat{H}_N &= \frac{1}{2} \log_{2^+} \frac{\zeta_N}{\eta_N}, \\ \hat{\kappa}_N^2 &= \frac{\eta_N}{h^{2\hat{H}_N} (2^{2\hat{H}_N-1} - 1)}, \\ \hat{\sigma}_N^2 &= \frac{1}{h} \left( \xi_N - \hat{\kappa}_N^2 h^{2\hat{H}_N} \right).\end{aligned}\tag{13}$$

Досліджуються властивості автоковаріацій послідовності приростів та умови збіжності відповідних автоковаріаційних рядів.

У *підрозділі 3.2* досліджуються асимптотичні властивості оцінок невідомих параметрів моделі (10) змішаного дробового броунівського руху за відсутності тренду.

У *пункті 3.2.1* доведено асимптотичну нормальність та виведено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці допоміжних статистик  $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$  для моделі (10) при  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ .

У *пункті 3.2.2* доведено асимптотичну нормальність та виведено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці оцінок  $(\hat{H}_N, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2)^\top$  (13) при  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ .

У *пункті 3.2.3* проаналізовано отримані теоретичні результати для оцінок параметрів моделі (10) за допомогою чисельного моделювання. Проведені обчислення підтверджують теоретичні висновки.

У *підрозділі 3.3* досліджуються асимптотичні властивості оцінок невідомих параметрів моделі (9) змішаного дробового броунівського руху за наявності тренду.

У пункті 3.3.1 доведено асимптотичну нормальність та виведено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці допоміжних статистик  $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N, \phi_N)^\top$  для моделі (9) при  $H \in (0, \frac{1}{2})$ .

У пункті 3.3.2 доведено асимптотичну нормальність та виведено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці оцінок  $(\hat{\theta}_N, \hat{H}_N, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2)^\top$  (12) при  $H \in (0, \frac{1}{2})$

У пункті 3.3.3 представлено результати чисельного моделювання, яке підтверджує теоретичні висновки, отримані для оцінок параметрів моделі (9).

У **четвертому розділі** розглядається задача одночасного оцінювання параметрів моделі лінійної суміші двох дробових броунівських рухів.

У *підрозділі 4.1* визначається лінійна модель суміші двох дробових броунівських рухів:

$$X_t = \kappa B_t^{H_1} + \sigma B_t^{H_2}, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

Для послідовності приростів процесу (14) доведено ергодичність та визначено умови збіжності автоковаріаційних рядів.

У *підрозділі 4.2* визначаються допоміжні статистики для моделі (14).

$$\begin{aligned} \xi_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh})^2, & \eta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+2)h} - X_{kh})^2, \\ \zeta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+4)h} - X_{kh})^2, & \phi_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+8)h} - X_{kh})^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Використовуючи визначені допоміжні статистики (15) та властивість ергодичності послідовності приростів процесу (14), будуються одночасні строго консистентні оцінки параметрів  $(H_1, H_2, \kappa^2, \sigma^2)^\top$  при  $0 < H_1 < H_2 < 1$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}_N^{(1)} &= \frac{1}{2} \log_{2+} \left( \frac{\eta_N \zeta_N - \xi_N \phi_N + d_N}{2(\eta_N^2 - \xi_N \zeta_N)} \right), \\ \hat{H}_N^{(2)} &= \frac{1}{2} \log_{2+} \left( \frac{\eta_N \zeta_N - \xi_N \phi_N - d_N}{2(\eta_N^2 - \xi_N \zeta_N)} \right), \\ \hat{\kappa}_N^2 &= \left( \frac{2(\eta_N^2 - \xi_N \zeta_N)}{\eta_N \zeta_N - \xi_N \phi_N + d_N} \right)^{\log_2 h} \frac{\xi_N d_N + 2\eta_N^3 - 3\xi_N \eta_N \zeta_N + \xi_N^2 \phi_N}{2d_N}, \\ \hat{\sigma}_N^2 &= \left( \frac{2(\eta_N^2 - \xi_N \zeta_N)}{\eta_N \zeta_N - \xi_N \phi_N - d_N} \right)^{\log_2 h} \frac{\xi_N d_N - 2\eta_N^3 + 3\xi_N \eta_N \zeta_N - \xi_N^2 \phi_N}{2d_N}, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$d_N := (\xi_N^2 \phi_N^2 - 6\xi_N \eta_N \zeta_N \phi_N - 3\eta_N^2 \zeta_N^2 + 4\eta_N^3 \phi_N + 4\xi_N \zeta_N^3)_+^{1/2}, \quad (17)$$

та

$$(x)_+^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

У підрозділі 4.3 досліджуються асимптотичні властивості побудованих оцінок (16) та допоміжних статистик (15).

У пункті 4.3.1 для допоміжних статистик (15) у моделі (14) при  $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$  доведено асимптотичну нормальність та виведено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці.

У пункті 4.3.2 для побудованих оцінок (16) у моделі (14) при  $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$  доведено асимптотичну нормальність та виведено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці.

У пункті 4.4 отримані теоретичні властивості побудованих оцінок (16) та допоміжних статистик (15) підтверджено чисельним моделюванням.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

*Автор дисертаційної роботи окремо висловлює безмежну вдячність науковому керівнику — доценту Ральченку Костянтину Володимировичу — за активну підтримку та настанову у науковій роботі; завідувачці кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики — професору Мішурі Юлії Степанівні — за натхнення до нових наукових звершень; усьому колективу кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики за всебічну допомогу під час освітнього процесу.*

# Розділ 1

## Огляд літератури за темою дисертації

Моделі регресії з похибками у змінних є досить популярними у наш час та мають достатньо розвинену теорію [12, 13, 33]. При цьому також у деяких практичних задачах виникає необхідність застосовувати моделі регресії з сумішшю класичної та берксонівської похибок, теорія для яких є менш розвинутою. Такі моделі застосовуються у радіоепідеміології для дослідження радіаційних ризиків. У розділі 7.2 монографії [33], розглядається така модель з похибками у змінних:

$$D_i^{mes} = \bar{D}_i^{tr} + \sigma_i \gamma_i, \quad D_i^{tr} = \bar{D}_i^{tr} \delta_{F,i}. \quad (1.1)$$

Тут,  $D_i^{mes}$  — виміряна інструментально індивідуальна доза опромінення щитовидної залози для  $i$ -ї особи з когорти,  $D_i^{tr}$  це відповідна істинна доза опромінення щитовидної залози (перша прихована змінна),  $\bar{D}_i^{tr}$  є другою прихованою змінною;  $\sigma_i \gamma_i$  — адитивна класична похибка вимірювання,  $\delta_{F,i}$  — мультиплікативна похибка Берксона,  $\sigma_i$  — стандартне відхилення гетероскедастичної класичної похибки вимірювання,  $\gamma_i$  — стандартна нормальна та  $\delta_{F,i}$  — логнормальна випадкові величини;  $\bar{D}_i^{tr}$ ,  $\gamma_i$  та  $\delta_{F,i}$  є незалежними випадковими величинами.

У монографії [33], модель (1.1) поєднується з бінарною моделлю, що є схожою на логістичну модель:

$$P(Y_i = 1 | D_i^{tr}) = \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}, \quad P(Y_i = 0 | D_i^{tr}) = \frac{1}{1 + \lambda_i}, \quad (1.2)$$

де  $\lambda_i$  — загальна частота захворюваності раком щитовидної залози,

$$\lambda_i = \lambda_0 + EAR \cdot D_i^{tr}. \quad (1.3)$$

Тут, додатні коефіцієнти регресії  $\lambda_0$  та  $EAR$  є фоною захворюваністю та ексцесом відносного ризику, відповідно. У бінарній моделі (1.1), (1.2), (1.3), спо-

стережувана вибірка складається з пар  $(Y_i, D_i^{mes})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , де  $Y_i = 1$  у випадку підтвердження захворювання, та  $Y_i = 0$  у випадку відсутності захворювання протягом певного часового інтервалу. Відповідна модель базується на результатах спільного дослідження Національного наукового центру радіаційної медицини Національної академії медичних наук України та Американського Національного Інституту Раку представлених у [29]. У роботі [27] досліджувались алгоритми оцінювання параметрів моделі абсолютного ризику за наявності суміші класичної похибки та похибки Берксона, використовуючи методи повної максимальної вірогідності, калібрування регресії та симуляції-екстраполяції (SIMEX). У роботі [32] на основі моделювання для нових оцінок методами калібрування регресії, адитивної версії ефективного SIMEX та нового методу скоригованого оцінювання було продемонстровано, що нехтування впливу суміші похибок призводить до переоцінки фонові поширеності та недооцінки надлишкового відносного ризику.

Дисертаційне дослідження вивчає базову лінійну модель регресії за наявності суміші похибок у змінних, та встановлює базові властивості й структуру оцінок, що можуть слугувати для вибудови подальшої теорії, необхідної для оцінювання складніших моделей.

Багато природних явищ, змінних у часі, можуть бути змодельовані за допомогою випадкових процесів. При цьому, досить часто для математичного моделювання таких часових рядів можна використовувати дробовий броунівський рух. Модель цього процесу була вперше визначена А. М. Колмогоровим для вивчення спіральних кривих в гільбертовому просторі [23]. Стохастичний аналіз цього процесу було започатковано у роботі [31], у якій була введена його сучасна назва — дробовий броунівський рух.

Дробовий броунівський рух з індексом Хюрста  $H \in (0, 1)$ , що позначається як  $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ , в останні десятиліття привернув увагу багатьох фахівців з різноманітних галузей науки своїми особливими властивостями. Цей процес є гауссівським випадковим процесом з простою коваріаційною функцією та гельдеровими траекторіями до порядку  $H$ . Але при цьому, він також є узагальненням моделі вінерівського процесу  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  (при  $H = 1/2$  дробовий броунівський рух є стандартним вінерівським процесом). Додатково, на відміну від вінерівського процесу (окрім випадку  $H = 1/2$ ), він не є семімартигалом, не

є марковським процесом та має залежні прорости. Остання властивість є особливо важливою, оскільки вона дозволяє використовувати дробовий броунівський рух для моделювання складніших природних процесів [20, 45, 49, 58], що мають властивості короткотермінової залежності (при  $H < 1/2$ ), або довготермінової залежності (при  $H > 1/2$ ), а отже не можуть бути змодельовані вінерівським процесом, прорости якого є незалежними.

Такі властивості дозволяють використовувати дробовий броунівський рух для моделювання процесів у телекомунікаційних мережах, фізиці, біології та фінансах (страхування та фондові ринки). Його властивості та приклади застосування вивчалась у багатьох роботах, додаткову інформацію можна знайти у наступних монографіях [10, 39, 41, 44] .

Останнім часом великий інтерес викликав так званий змішаний дробовий броунівський рух, що є комбінацією вінерівського процесу та дробового броунівського руху. Цей процес був уперше запропонований у роботі [14] для побудови моделей фінансового ринку, що одночасно не мають арбітражу, проте зберігають певну пам'ять. Змішані моделі часто мають кращі властивості, аніж чисті моделі, керовані лише одним дробовим броунівським рухом, оскільки вони дозволяють брати до уваги одночасно й незалежність приростів на коротких часових інтервалах, так і наявність довгострокової пам'яті на великих інтервалах. Більше деталей на тему властивостей змішаного дробового броунівського руху можна знайти у [59]. Приклади практичного застосування таких моделей представлені у роботах [19, 50, 53, 57].

У роботах [11, 17, 26, 36] було розглянуто задачу оцінювання параметрів змішаного дробового руху за наявності тренду:

$$X_t = \theta t + \sigma W_t + \kappa B_t^H, \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

де  $W$  — вінерівський процес,  $B^H$  — дробовий броунівський рух з параметром Хюрста  $H$ , процеси  $B^H$  та  $W$  — незалежні. У роботі [11] досліджувалось оцінювання параметра зсуву  $\theta$  за умови відомих параметрів  $H$  та  $\sigma$  при  $\kappa = 1$ . Задача оцінювання параметра зсуву для загальнішої моделі, керованої гауссівським процесом, була розглянута у [36].

Методи одночасного оцінювання усіх чотирьох невідомих параметрів моделі (1.4) були досліджені у роботах [17] на основі оцінок максимальної вірогідності

та у [26], де автори узагальнили підхід степеневих варіацій запропонований у [16], та побудували ергодичні оцінки.

У роботах [16, 19, 52, 56] досліджувалось оцінювання параметрів для змішаного дробового руху за відсутності тренду, тобто для процесу  $X_t = \sigma W_t + \kappa B_t^H$ ,  $t \geq 0$ . У [52] застосовувався метод максимальної вірогідності для оцінювання параметрів  $\sigma$  та  $\kappa$ , а також визначення асимптотичних властивостей побудованих оцінок. Автори [56] також застосовували метод максимальної вірогідності, але поєднували його з методом оптимізації Пауела для ефективнішого обчислення оцінок параметрів  $\sigma$  та  $\kappa$ , і ці результати були отримані для  $H > 1/2$ . При цьому побудовані оцінки не мали явної формули, а отже їх теоретичні властивості не були доведені. Параметр Хюрста  $H$  також вважається відомим в обох роботах [52, 56]. У роботі [19] автори розробили метод оцінювання параметрів на основі методу найменших квадратів і побудовані оцінки також не мали явного вигляду, а отже їх теоретичні властивості не були досліджені. Автори роботи [16] дослідили асимптотичні властивості змішаних степеневих варіацій та побудували консистентні оцінки для параметрів  $H$ ,  $\sigma$  та  $\kappa$ .

При цьому, моделі що поєднують дробові броунівські рухи з різними індексами Хюрста також є важливими у практичному застосуванні, наприклад, в економетриці та фінансовій математиці, де компонента з меншим індексом Хюрста відповідає короткотерміновим змінам, а змінам довготерміновим відповідає компонента з більшим індексом Хюрста. Загалом, такі моделі є менш дослідженими, ніж моделі змішаного дробового броунівського руху.

У роботі [42] автори досліджували загальнішу модель за наявності тренду:

$$X_t = \theta t + \kappa B_t^{H_1} + \sigma B_t^{H_2}, \quad t \geq 0. \quad (1.5)$$

Для цієї моделі автори побудували оцінку максимальної вірогідності для параметра зсуву  $\theta$  при  $\{H_1, H_2\} \in (\frac{1}{2}, 1)$  на основі неперервних спостережень. Вони звели задачу до розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду зі слабо сингулярним ядром, залежним від двох показників степенів. У роботі [35] автори застосували аналогічний метод, проте для інтегрального рівняння зі слабо полярним ядром. Чисельний розв'язок цієї задачі у випадку інтегрального рівняння з сингулярним ядром представлений у роботі [38]. Також, задача, схожа до розглянутої у [11], була досліджена для моделі (1.5) у [40].

Оцінювання параметра зсуву на основі дискретних спостережень розглядалась у роботі [37].

Модель двох змішаних дробових броунівських рухів за відсутності тренду, тобто  $X_t = \kappa B_t^{H_1} + \sigma B_t^{H_2}$ ,  $t \geq 0$ , для довільних  $H_1$  та  $H_2$  була розглянута у [18, 34]. Її застосування до ціноутворення кредитних обмінів досліджувалась у [21]. Загальніша модель, що поєднувала декілька дробових броунівських рухів, була розглянута у [51].

## Розділ 2

# Оцінювання параметрів лінійної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі

## 2.1 Побудова оцінок

### 2.1.1 Визначення моделі та основних припущень

Розглянемо наступну модель регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon, \quad w = x + \delta, \quad \xi = x + u, \quad (2.1)$$

де спостерігаються відгук  $y$  та сурогатна змінна  $w$ ,  $\xi$  та  $x$  — неспостережувані приховані змінні,  $\varepsilon$  — похибка у відгуку,  $\delta$  — класична похибка вимірювання,  $u$  — похибка Берксона,  $x$ ,  $\delta$  та  $u$  — незалежні випадкові величини.

Визначимо  $\mu = \mathbb{E}\xi$  і нехай  $\sigma_y^2$ ,  $\sigma_\xi^2$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$ ,  $\sigma_w^2$ ,  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_\delta^2$  та  $\sigma_u^2$  позначатимуть дисперсії величин  $y$ ,  $\xi$ ,  $\varepsilon$ ,  $w$ ,  $x$ ,  $\delta$  та  $u$  відповідно. Введемо наступні обмеження на модель (2.1):

- (i) випадкові величини  $x$ ,  $\varepsilon$ ,  $\delta$  та  $u$  незалежні у сукупності;
- (ii) випадкові величини  $\varepsilon$ ,  $\delta$  та  $u$  мають нульові математичні сподівання та скінченні дисперсії, випадкова величина  $x$  має скінченну додатну дисперсію  $\sigma_x^2$ ;
- (iii) дисперсії випадкових величин  $\sigma_\delta^2$  та  $\sigma_u^2$  є додатними та відомими, при цьому інші параметри  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$  та  $\sigma_x^2$  — невідомі.

Розглядається  $N$  незалежних копій моделі (2.1):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i + \varepsilon_i, \quad w_i = x_i + \delta_i, \quad \xi_i = x_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Відповідно до припущення (i), випадкові вектори  $(x_i, \varepsilon_i, \delta_i, u_i)^\top$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , є незалежними однаково розподіленими та мають такий самий розподіл, як і вектор  $(x, \varepsilon, \delta, u)^\top$ . Задача полягає в оцінюванні невідомих параметрів моделі на основі спостережень  $(y_i, w_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

У випадку  $\sigma_u^2 = 0$ , похибка Берксона  $u = 0$  та модель (2.1) стає класичною моделлю з похибкою у регресорі:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon, \quad w = \xi + \delta. \quad (2.2)$$

Умова (iii) є необхідною для побудови оцінок. Класична модель регресії з похибками вимірювання (2.2) з нормально розподіленими  $\xi$ ,  $\varepsilon$  та  $\delta$ , у випадку шести невідомих параметрів  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_\xi^2$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$ ,  $\sigma_\delta^2$  є неідентифікованою [13]. Відповідно для моделі (2.1) умова (iii) передбачає, що параметр  $\sigma_\delta^2$  має бути відомим. Наступне твердження демонструє, що параметр  $\sigma_u^2$  також має бути відомим.

**Твердження 2.1.** *Нехай для моделі (2.1) виконуються умови (i) та (ii). Припустимо, що параметр  $\sigma_\delta^2$  є відомим та випадкові величини  $x$ ,  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $u$  є гауссовими. Тоді відповідна модель з шістьма невідомими параметрами  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$ ,  $\sigma_u^2$  є неідентифікованою.*

*Доведення.* Розподіл спостережуваного гауссівського вектора  $Z := (y, w)^\top$  однозначно визначається параметрами  $\mathbb{E}Z$  та  $C := \text{Cov}(Z)$ , де

$$\mathbb{E}Z = (\mu, \beta_0 + \beta_1 \mu)^\top, \quad C = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 - \sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 & \beta_1(\sigma_\xi^2 - \sigma_u^2) \\ \beta_1(\sigma_\xi^2 - \sigma_u^2) & \beta_1^2 \sigma_\xi^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо два різні набори параметрів моделі:

- (а)  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma_x^2 = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ , та
- (б)  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma_x^2 = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.5$ ,  $\sigma_u^2 = 1.5$ .

В обох випадках матиме місце:

$$\mathbb{E}Z = 0, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 + \sigma_\delta^2 \end{pmatrix}.$$

Відповідно, розподіл вектора  $Z$  є однаковим для обох наборів параметрів, з чого випливає неідентифіковність моделі.  $\square$

*Зауваження 2.1.* Зауважимо, що за умов твердження 2.1, параметри  $\beta_0$  та  $\beta_1$  є ідентифікованими. При цьому, побудовані нами у подальшому строго консистентні при  $N \rightarrow \infty$  оцінки відповідних параметрів  $\beta_0$  та  $\beta_1$  будуть обчислюватись без використання дисперсії похибки Берксона  $\sigma_u^2$ .

## 2.1.2 Побудова строго консистентних оцінок

Для побудови оцінок введемо додаткову умову:

(iv) Випадкові величини  $x$  та  $u$  є гауссовими.

Тоді модель (2.1) можна звести до вигляду моделі з класичною похибкою вимірювання. За наведених обмежень, умовний розподіл випадкової величини  $x$  відносно  $\xi$  буде мати вигляд [12, 33]:

$$L(x|\xi) = \mathcal{N}(K\xi + (1 - K)\mu, K\sigma_u^2),$$

де  $K := \sigma_x^2/\sigma_\xi^2$  – відношення надійності [13],  $0 \leq K \leq 1$ . Відповідно,  $x$  можна подати у наступному вигляді:

$$x = K\xi + (1 - K)\mu + \sqrt{K}\sigma_u\gamma, \quad \gamma \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

де  $\xi, \gamma, \varepsilon, \delta$  є незалежними у сукупності. Тоді

$$w = K\xi + (1 - K)\mu + \sqrt{K}\sigma_u\gamma + \delta.$$

$$\frac{w}{K} - \frac{1 - K}{K}\mu = \xi + \frac{\sigma_u}{\sqrt{K}}\gamma + \frac{\delta}{K}.$$

Введемо наступні позначення:

$$z := \frac{w}{K} - \frac{1 - K}{K}\mu, \quad v := \frac{\sigma_u}{\sqrt{K}}\gamma + \frac{\delta}{K}.$$

Такими чином, отримаємо наступну модель з класичною похибкою вимірювання:

$$y = \beta_0 + \beta_1\xi + \varepsilon, \quad z = \xi + v, \tag{2.3}$$

з незалежними  $\xi, \varepsilon, v$  та  $\sigma_v^2 := v = \sigma_u^2/K + \sigma_\delta^2/K^2$ .

Припустимо, що параметр  $K$  є відомим. Тоді виправлена оцінка найменших квадратів  $\tilde{\beta}_1$  параметра  $\beta_1$  є консистентною та визначена таким чином [13, 33]:

$$\tilde{\beta}_1 := \frac{S_{zy}}{S_{zz} - \sigma_v^2} = \frac{\frac{1}{\tilde{K}} S_{wy}}{\frac{1}{\tilde{K}^2} S_{ww} - \sigma_v^2} = \frac{S_{wy}}{\frac{S_{ww} - \sigma_\delta^2}{\tilde{K}} - \sigma_u^2}. \quad (2.4)$$

де

$$\bar{a} := N^{-1} \sum_{i=1}^N a_i, \quad S_{ab} = \overline{(a - \bar{a})(b - \bar{b})} = N^{-1} \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}).$$

У випадку коли  $K$  є невідомим, його можна оцінити консистентно як

$$\hat{K} = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_x^2 + \sigma_u^2} = \frac{S_{ww} - \sigma_\delta^2}{S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2}, \quad (2.5)$$

де ми використовували оцінку

$$\hat{\sigma}_x^2 = S_{ww} - \sigma_\delta^2. \quad (2.6)$$

Підставимо вираз (2.5) у рівняння (2.4) замість параметра  $K$  та отримаємо шукану оцінку:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{wy}}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}. \quad (2.7)$$

Далі, для моделі (2.2) оцінка параметра  $\beta_0$  матиме наступний вигляд [13, 33]:

$$\tilde{\beta}_0 := \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \bar{z} = \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \left( \frac{\bar{w}}{K} - \frac{1-K}{K} \mu \right).$$

При цьому параметри  $K$  та  $\mu$  є невідомими, тому замість них ми підставимо відповідні консистентні оцінки (2.5) та

$$\hat{\mu} := \bar{w}. \quad (2.8)$$

Тоді вираз  $\tilde{\beta}_1$  стане  $\hat{\beta}_1$  та ми отримаємо шукану оцінку:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \left( \frac{\bar{w}}{\hat{K}} - \frac{1-\hat{K}}{\hat{K}} \bar{w} \right) = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{w}. \quad (2.9)$$

Примітно, що  $\hat{\beta}_0$  та  $\hat{\beta}_1$  є так званими “наївними оцінками найменших квадратів” для моделі (2.1), які нехтують наявністю берксонівської похибки  $u$ . Точніше, (2.7) та (2.9) є виправленими оцінками найменших квадратів для класичної моделі (2.2) та використовують  $\sigma_\delta^2$ , але не  $\sigma_u^2$ .

У нашій моделі потрібно оцінити п'ять невідомих параметрів  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$ , а ми побудували три оцінки (2.9), (2.7) та (2.8), а також використовували

додаткову оцінку (2.6). У моделі (2.3) виправлена оцінка найменших квадратів для параметра  $\sigma_\varepsilon^2$  має вигляд [33]:

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2 = S_{yy} - \tilde{\beta}_1 S_{zy} = S_{yy} - \frac{\tilde{\beta}_1}{K} S_{wy}.$$

Підставимо замість невідомого параметра  $K$  вираз (2.5) та отримаємо таким чином останню оцінку

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 := S_{yy} - \frac{\hat{\beta}_1 S_{wy} (S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}. \quad (2.10)$$

Незважаючи на те, що вирази для оцінок були виведені використовуючи припущення про нормальність (iv), вони будуть строго консистентними й у загальному випадку. У подальшому будемо казати, що для послідовності випадкових величин  $\{a_i\}_{i=1}^\infty$  певна властивість виконується зрештою, якщо м.н. існує випадкове  $N_0$  таке, що відповідна властивість виконується для усіх  $\{a_i\}_{i=N_0}^\infty$ .

**Теорема 2.1.** *Нехай для системи (2.1) виконуються умови (i) – (iii). Тоді оцінки (2.7), (2.9) та (2.10) визначені м.н. та є строго консистентними оцінками відповідних параметрів.*

*Доведення.* Відомо, що вибіркові коваріації збігаються до відповідних теоретичних значень:  $S_{ww} \xrightarrow{P1} \sigma_w^2$ ,  $N \rightarrow \infty$ , та  $S_{wy} \xrightarrow{P1} \text{Cov}(w, y)$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Оскільки  $\sigma_w^2 - \sigma_\delta^2 = \sigma_x^2 > 0$ , то  $S_{ww} - \sigma_\delta^2 > 0$  зрештою, а отже й визначені наші оцінки.

*Строго консистентність  $\hat{\beta}_1$ .* Маємо, що

$$\begin{aligned} \text{Cov}(w, y) &= \text{Cov}(x + \delta, \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon) = \text{Cov}(x, \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon) = \text{Cov}(x, \beta_1 \xi) = \\ &= \beta_1 \text{Cov}(x, x + u) = \beta_1 \text{Cov}(x, x) + \beta_1 \text{Cov}(x, u) = \beta_1 \sigma_x^2, \end{aligned}$$

а отже,  $\hat{\beta}_1 \xrightarrow{P1} \frac{\beta_1 \sigma_x^2}{\sigma_x^2} = \beta_1$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

*Строго консистентність  $\hat{\beta}_0$ .* Використовуючи те, що

$$\bar{y} \xrightarrow{P1} \mathbb{E}y = \mathbb{E}(\beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 \mu, N \rightarrow \infty,$$

та при  $N \rightarrow \infty$ :

$$\bar{w} \xrightarrow{P1} \mathbb{E}w = \mu, \hat{\beta}_1 \xrightarrow{P1} \beta_1,$$

отримаємо  $\beta_0 \xrightarrow{P1} (\beta_0 + \beta_1 \mu) - \beta_1 \mu = \beta_0$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

Строга консистентність  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ . Остаточо, враховуючи що при  $N \rightarrow \infty$ :

$$(S_{wy})^2 \xrightarrow{P1} \beta_1^2 (\sigma_x^2)^2, \quad S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2 \xrightarrow{P1} \sigma_\xi^2, \quad S_{yy} \xrightarrow{P1} \sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \beta_1 \sigma_\xi^2,$$

отримаємо  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \xrightarrow{P1} \sigma_\varepsilon^2 + \beta_1 \sigma_\xi^2 - \frac{\beta_1^2 \sigma_x^4 \sigma_\xi^2}{\sigma_x^4} = \sigma_\varepsilon^2, N \rightarrow \infty.$   $\square$

## 2.2 Асимптотична нормальність

### 2.2.1 Асимптотична нормальність кутового коефіцієнта

Введемо наступне обмеження на четвертий момент для  $\delta$ :

$$(v) \mathbb{E}\delta^4 < \infty.$$

**Теорема 2.2.** Нехай виконуються умови (i), (ii), (v), та припустимо, що  $\sigma_\delta^2$  є відомою та додатною. Тоді оцінка (2.7) є асимптотично нормальною та

$$\sqrt{N}(\widehat{\beta}_1 - \beta_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{\beta_1}^2), \quad (2.11)$$

де

$$\sigma_{\beta_1}^2 := \frac{\beta_1^2 (\sigma_\delta^2 \sigma_x^2 + \text{Var}(\delta^2) + \sigma_u^2 \sigma_w^2) + \sigma_\varepsilon^2 \sigma_w^2}{\sigma_x^4}. \quad (2.12)$$

*Доведення.* Будемо слідувати доведенню теореми 2.22 [33], використовуючи представлення вибіркових коваріацій та лему Слуцького [33]. Введемо позначення для центрованого  $x$ :

$$\rho := x - \mu.$$

Тоді

$$y = \beta_0 + \beta_1 \mu + \beta_1 \rho + \varepsilon + \beta_1 u, \quad w = \mu + \rho + \delta,$$

$$S_{wy} = S_{\rho+\delta, \beta_1 \rho + \varepsilon + \beta_1 u} = \beta_1 S_{\rho\rho} + S_{\rho\varepsilon} + \beta_1 S_{\rho u} + \beta_1 S_{\delta\rho} + S_{\delta\varepsilon} + \beta_1 S_{\delta u}, \quad (2.13)$$

$$S_{ww} = S_{\rho+\delta, \rho+\delta} = S_{\rho\rho} + 2S_{\rho\delta} + S_{\delta\delta}, \quad (2.14)$$

$$S_{ww} - \sigma_\delta^2 = \sigma_x^2 + o_p(1), \quad (2.15)$$

де  $o_p(1)$  позначає послідовність випадкових величин, що збігаються до нуля з імовірністю 1, при  $N \rightarrow \infty$ . Використовуючи (2.7) та вирази (2.13) – (2.15), отримаємо:

$$\sqrt{N}(\widehat{\beta}_1 - \beta_1) = \frac{-\beta_1 \sqrt{N}(S_{\delta\delta} - \sigma_\delta^2 - S_{u\rho} + S_{\delta\rho} - S_{u\delta}) + \sqrt{N}(S_{\rho\varepsilon} + S_{\delta\varepsilon})}{\sigma_x^2 + o_p(1)}. \quad (2.16)$$

Таким чином:

$$\begin{aligned} S_{\delta\delta} - \sigma_\delta^2 &= \overline{\delta^2} - \sigma_\delta^2 + \frac{o_p(1)}{\sqrt{N}}, \\ S_{u\rho} &= \overline{u\rho} + \frac{o_p(1)}{\sqrt{N}}, \quad S_{\delta\rho} = \overline{\delta\rho} + \frac{o_p(1)}{\sqrt{N}}, \\ S_{u\delta} &= \overline{u\delta} + \frac{o_p(1)}{\sqrt{N}}, \quad S_{\rho\varepsilon} = \overline{\rho\varepsilon} + \frac{o_p(1)}{\sqrt{N}}, \quad S_{\delta\varepsilon} = \overline{\delta\varepsilon} + \frac{o_p(1)}{\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

Підставивши отримані вирази у рівняння (2.16), отримаємо

$$\sqrt{N}(\widehat{\beta}_1 - \beta_1) = o_p(1) + \frac{-\beta_1 \sqrt{N}(\overline{\delta^2} - \sigma_\delta^2 - \overline{u\rho} + \overline{\delta\rho} - \overline{u\delta}) + \sqrt{N}(\overline{\rho\varepsilon} + \overline{\delta\varepsilon})}{\sigma_x^2}. \quad (2.17)$$

З умови (v) та центральної граничної теореми впливатиме

$$\sqrt{N}(\overline{\delta^2} - \sigma_\delta^2, \overline{u\rho}, \overline{\delta\rho}, \overline{u\delta}, \overline{\rho\varepsilon}, \overline{\delta\varepsilon})^\top \xrightarrow{d} \gamma = (\gamma_i)_{i=1}^6 \sim \mathcal{N}_6(0, S),$$

$$S = \text{diag}(\text{Var}(\delta^2), \sigma_u^2 \sigma_x^2, \sigma_\delta^2 \sigma_x^2, \sigma_\delta^2 \sigma_u^2, \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\delta^2 \sigma_\varepsilon^2).$$

Діагональ матриці  $S$  містить дисперсії усереднених випадкових величин, наприклад  $S_{22} = \text{Var}(u\rho) = \mathbb{E}(u\rho)^2 = \sigma_u^2 \sigma_x^2$ , а поза-діагональні елементи  $S$  є нульовими, оскільки випадкові величини  $\delta, \rho, \varepsilon, u$  – незалежні. Таким чином визначник у рівнянні (2.17) збігається за розподілом до

$$-\beta_1(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) + \gamma_5 + \gamma_6 \sim \mathcal{N}(0, \beta_1^2(S_{11} + S_{22} + S_{33} + S_{44}) + S_{55} + S_{66}).$$

З відношення (2.17) та леми Слуцького впливає (2.11) з

$$\sigma_{\beta_1}^2 = \frac{\beta_1^2(\text{Var}(\delta^2) + \sigma_u^2 \sigma_x^2 + \sigma_\delta^2 \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \sigma_\delta^2) + \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^4}. \quad (2.18)$$

Оскільки  $\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_\delta^2$ , то праві частини рівнянь (2.18) та (2.12) збігаються.  $\square$

*Зауваження 2.2.* Якщо замість припущення (v) вважати, що  $\delta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\delta^2)$  (або використовувати загальніше припущення (iv)), тоді  $\text{Var}(\delta^2) = 2\sigma_\delta^4$  та вираз (2.12) може бути представлений у вигляді:

$$\sigma_{\beta_1}^2 = \frac{\beta_1^2(\sigma_\delta^4 + \sigma_\delta^2\sigma_w^2 + \sigma_u^2\sigma_w^2) + \sigma_w^2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^4}. \quad (2.19)$$

Збіжність (2.11), (2.12) може бути використана для побудови асимптотичного довірчого інтервалу для параметра  $\beta_1$ . Для цього нам потрібно, щоб  $\sigma_{\beta_1}^2 > 0$  (це виконується у випадку коли  $\sigma_\delta^2 > 0$  або  $\beta_1 \neq 0$ ) та консистентно оцінити параметр  $\sigma_{\beta_1}^2$ . Останнє виконується для гауссового  $\delta$ , оскільки усі параметри у правій частині виразу (2.19) консистентно оцінюються за теоремою 2.1. Без припущення про нормальність  $\delta$  стає проблематичним оцінити четвертий момент  $\text{Var}(\delta^2)$  у рівнянні (2.18). Якщо  $\mathbb{E}\delta^4$  вважати відомим, тоді  $\sigma_{\beta_1}^2$  також може бути консистентно оцінена.

*Зауваження 2.3.* Дослідження формули (2.18) дозволяє визначити у якій пропорції класична та берксонівська похибки впливають на якість оцінювання кутового коефіцієнту. Введемо наступні позначення:

$$\Lambda_u = |\beta_1|\sigma_u\sigma_x, \quad \Lambda_\delta = \sqrt{\beta_1^2(\sigma_\delta^2\sigma_x^2 + \text{Var}(\delta^2)) + \sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2}, \quad \Lambda_{u\delta} = |\beta_1|\sigma_u\sigma_\delta.$$

Тоді

$$\sigma_{\beta_1}^2 = \sigma_x^{-4}(\Lambda_\delta^2 + \Lambda_u^2 + \Lambda_{u\delta}^2 + \sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2).$$

Нормована оцінка кутового коефіцієнту  $\sqrt{N}(\widehat{\beta}_1 - \beta_1)$  може бути апроксимована за розподілом випадковою величиною

$$\sigma_x^{-2}(\Lambda_\delta\gamma_1 + \Lambda_u\gamma_2 + \Lambda_{u\delta}\gamma_3 + \sigma_x\sigma_\varepsilon\gamma_4),$$

з незалежними однаково розподіленими стандартними гауссовими  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ . Маючи  $\sigma_x^2$  та  $\sigma_\varepsilon^2$ , вирази  $\Lambda_\delta\gamma_1$ ,  $\Lambda_u\gamma_2$  та  $\Lambda_{u\delta}\gamma_3$  відповідно характеризують вплив класичної та берксонівської похибок на оцінку кутового коефіцієнту. Таким чином, цей вплив може бути визначений у пропорції  $\Lambda_\delta : \Lambda_u : \Lambda_{u\delta}$ . Припустимо, що  $\beta_1 \neq 0$  та  $\mathbb{E}\delta^4$  є відомими. Тоді цей вплив може бути оцінений чисельно у пропорції  $\widehat{\Lambda}_\delta : \widehat{\Lambda}_u : \widehat{\Lambda}_{u\delta}$ , де

$$\widehat{\Lambda}_u := |\widehat{\beta}_1|\sigma_u\widehat{\sigma}_x, \quad \widehat{\Lambda}_\delta := \sqrt{\widehat{\beta}_1^2(\sigma_\delta^2\widehat{\sigma}_x^2 + \text{Var}(\delta^2)) + \sigma_\delta^2\widehat{\sigma}_\varepsilon^2}, \quad \widehat{\Lambda}_{u\delta} := |\widehat{\beta}_1|\sigma_u\sigma_\delta.$$

## 2.2.2 Асимптотична нормальність у нормальному випадку

Для доведення одночасної асимптотичної нормальності побудованих оцінок змінимо параметризацію нашої моделі (2.1) звівши її до наступного вигляду:

$$y = \mu_y + \beta_1(\xi - \mu) + \varepsilon, \quad w = x + \delta, \quad \xi = x + u. \quad (2.20)$$

Відповідна модель отримується з (2.1) заміною параметра  $\beta_0$  використовуючи позначення  $\mu_y = \beta_0 + \beta_1\mu$ . Тоді на основі незалежних копій моделі

$$y_i = \mu_y + \beta_1(\xi_i - \mu) + \varepsilon_i, \quad w_i = x_i + \delta_i, \quad \xi_i = x_i + u_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

(тут незалежні випадкові вектори  $(x_i, \varepsilon_i, \delta_i, u_i)$ ,  $i \geq 1$ , мають розподіл випадкового вектора  $(x, \varepsilon, \delta, u)$  з (2.20)) та використовуючи спостереження  $(y_i, w_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , оцінимо вектор невідомих параметрів

$$\theta = (\mu, \mu_y, \sigma_w^2, \beta_1, \sigma_\varepsilon^2)^\top,$$

припускаючи виконання умови (iii), яка говорить про те, що дисперсії  $\sigma_\delta^2$  та  $\sigma_u^2$  є відомими. Для моделі (2.20) ми також припускаємо виконання (i), (ii), а також вводимо наступне додаткове припущення:

(vi) Випадкові величини  $x_i, \delta_i, u_i, \varepsilon_i$  — гауссові.

З теореми 2.1 випливає строга консистентність оцінки

$$\hat{\theta} := (\hat{\mu}, \hat{\mu}_y, \hat{\sigma}_w^2, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_\varepsilon^2)^\top$$

для параметра  $\theta$ , яка визначається у явному вигляді:

$$\hat{\theta} = \left( \bar{w}, \bar{y}, S_{ww}, \frac{S_{wy}}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}, S_{yy} - \frac{S_{wy}^2(S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{(S_{ww} - \sigma_\delta^2)^2} \right)^\top. \quad (2.21)$$

Задамо відповідну оціночну функцію:

$$s := s(\theta; w, y) := (s^\mu, s^{\mu_y}, s^{\sigma_w^2}, s^{\beta_1}, s^{\sigma_\varepsilon^2})^\top, \quad (2.22)$$

де

$$\begin{aligned} s^\mu &:= w - \mu, & s^{\mu_y} &:= y - \mu_y, & s^{\sigma_w^2} &:= (w - \mu)^2 - \sigma_w^2, \\ s^{\beta_1} &:= \beta_1(w - \mu)^2 - \beta_1\sigma_\delta^2 - (w - \mu)(y - \mu_y), \end{aligned}$$

$$s^{\sigma_\varepsilon^2} := (y - \mu_y)^2 - \sigma_\varepsilon^2 - \beta_1^2(w - \mu)^2 + \beta_1^2(\sigma_\delta^2 - \sigma_u^2).$$

Тоді оцінка (2.21) м.н. задовольняє оціночне рівняння

$$\sum_{i=1}^n s(\hat{\theta}; w_i, y_i) = 0.$$

Перед формулюванням результату про асимптотичну нормальність доведемо наступну додаткову лему.

**Лема 2.1.** Нехай для моделі (2.20) виконуються умови (i) – (iii) та (vi). Тоді матимуть місце наступні вирази для коваріацій у трьох категоріях:

1) коваріації другого порядку:

$$\text{Cov}(w, w) = \sigma_x^2 + \sigma_\delta^2, \quad \text{Cov}(y, y) = \sigma_y^2, \quad \text{Cov}(w, y) = \beta_1 \sigma_x^2;$$

2) коваріації третього порядку:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(w, wy) &= \mu_y \sigma_w^2 + \beta_1 \mu \sigma_x^2, & \text{Cov}(w, y^2) &= 2\beta_1 \mu_y \sigma_x^2, & \text{Cov}(y, w^2) &= 2\beta_1 \mu \sigma_x^2, \\ \text{Cov}(y, wy) &= \beta_1 \mu_y \sigma_x^2 + \beta_1^2 \mu \sigma_x^2 + \beta_1^2 \mu \sigma_u^2 + \mu \sigma_\varepsilon^2 = \beta_1 \mu_y \sigma_x^2 + \mu \sigma_y^2, \\ \text{Cov}(w, w^2) &= 2\mu \sigma_w^2, & \text{Cov}(y, y^2) &= 2\mu_y \sigma_y^2; \end{aligned}$$

3) коваріації четвертого порядку:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(w^2, w^2) &= 4\mu^2 \sigma_w^2 + 2\sigma_w^4, & \text{Cov}(y^2, y^2) &= 4\mu_y^2 \sigma_y^2 + 2\sigma_y^4, \\ \text{Cov}(w^2, y^2) &= 2\beta_1^2 \sigma_x^4 + 4\beta_1 \mu \mu_y \sigma_x^2, \\ \text{Cov}(w^2, wy) &= 2\mu \mu_y \sigma_w^2 + 2\beta_1 \mu^2 \sigma_x^2 + 2\beta_1 \sigma_x^4 + 2\beta_1 \sigma_x^2 \sigma_\delta^2, \\ \text{Cov}(w^2, wy) &= 2\mu \mu_y \sigma_w^2 + 2\beta_1 \mu^2 \sigma_x^2 + 2\beta_1 \sigma_x^4 + 2\beta_1 \sigma_x^2 \sigma_\delta^2, \\ \text{Cov}(wy, y^2) &= 2\mu \mu_y \sigma_y^2 + 2\beta_1 \mu_y^2 \sigma_x^2 + 2\beta_1 \sigma_x^2 \sigma_y^2, \\ \text{Cov}(wy, wy) &= \mu_y^2 \sigma_w^2 + \sigma_y^2 \sigma_w^2 + 2\beta_1 \mu \mu_y \sigma_x^2 + \beta_1^2 \sigma_x^4 + \mu^2 \sigma_y^2. \end{aligned}$$

*Доведення.* Спочатку випишемо простіші додаткові коваріації:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, x) &= \sigma_x^2, & \text{Cov}(w, w) &= \sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_\delta^2, & \text{Cov}(\delta, \delta) &= \sigma_\delta^2, & \text{Cov}(u, u) &= \sigma_u^2, \\ \text{Cov}(x, x^2) &= \mathbb{E}x^3 + \mathbb{E}x\mathbb{E}x^2 = \mu^3 + 3\mu\sigma_x^2 - \mu(\mu^2 + \sigma_x^2) = 3\mu\sigma_x^2 - \mu\sigma_x^2 = 2\mu\sigma_x^2, \\ \text{Cov}(x^2, x^2) &= \mathbb{E}x^4 + \mathbb{E}x^2\mathbb{E}x^2 = \mu^4 + 6\mu^2\sigma_x^2 + 3\sigma_x^4 - (\mu^2 + \sigma_x^2)^2 = \\ &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma_x^2 + 3\sigma_x^4 - \mu^4 - 2\mu^2\sigma_x^2 - \sigma_x^4 = 4\mu^2\sigma_x^2 + 2\sigma_x^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\delta, x\delta) &= \mathbb{E}x\delta^2 + \mathbb{E}x\delta\mathbb{E}\delta = \mathbb{E}x\delta^2 = \mathbb{E}x\mathbb{E}\delta^2 = \mu\sigma_\delta^2, \\ \text{Cov}(x\delta, x\delta) &= \mathbb{E}x^2\delta^2 + \mathbb{E}x\delta\mathbb{E}x\delta = \mathbb{E}x^2\delta^2 = \mathbb{E}x^2\mathbb{E}\delta^2 = \mu^2\sigma_\delta^2 + \sigma_x^2\sigma_\delta^2.\end{aligned}$$

Ці додаткові коваріації відразу дають нам шукані вирази для  $\text{Cov}(w, w)$ ,  $\text{Cov}(y, y)$ ,  $\text{Cov}(w, w^2)$  та  $\text{Cov}(y, y^2)$ . Також, можемо достатньо просто знайти вираз для  $\text{Cov}(w, y)$ :

$$\text{Cov}(w, y) = \text{Cov}(x + \delta, (\mu_y - \beta_1\mu) + \beta_1x + \beta_1u + \varepsilon) = \beta_1 \text{Cov}(x, x) = \beta_1\sigma_x^2.$$

1. *Обрахунок  $\text{Cov}(w, wy)$ .*

$$\begin{aligned}\text{Cov}(w, wy) &= \text{Cov}(x + \delta, (x + \delta)y) = \\ &= \text{Cov}((x + \delta), (x + \delta)((\mu_y - \beta_1\mu) + \beta_1x + \beta_1u + \varepsilon)) = \\ &= \text{Cov}((x + \delta), (\mu_y - \beta_1\mu)x + (\mu_y - \beta_1\mu)\delta + \beta_1x^2 + \beta_1x\delta + \\ &\quad + \beta_1xu + \beta_1u\delta + \varepsilon x + \varepsilon\delta) = \\ &= \text{Cov}(x, (\mu_y - \beta_1\mu)x + \beta_1x^2 + \beta_1x\delta + \beta_1xu) + \\ &\quad + \text{Cov}(\delta, (\mu_y - \beta_1\mu)\delta + \beta_1x\delta + \beta_1u\delta + \varepsilon\delta) = \\ &= \text{Cov}(x, (\mu_y - \beta_1\mu)x + \beta_1x^2) + \text{Cov}(\delta, (\mu_y - \beta_1\mu)\delta + \beta_1x\delta) = \\ &= (\mu_y - \beta_1\mu) \text{Cov}(x, x) + \beta_1 \text{Cov}(x, x^2) + (\mu_y - \beta_1\mu) \text{Cov}(\delta, \delta) + \\ &\quad + \beta_1 \text{Cov}(\delta, x\delta) = \\ &= (\mu_y - \beta_1\mu)\sigma_x^2 + 2\beta_1\mu\sigma_x^2 + (\mu_y - \beta_1\mu)\sigma_\delta^2 + \beta_1\mu\sigma_\delta^2 = \\ &= \mu_y\sigma_x^2 - \beta_1\mu\sigma_x^2 + 2\beta_1\mu\sigma_x^2 + \mu_y\sigma_\delta^2 - \beta_1\mu\sigma_\delta^2 + \beta_1\mu\sigma_\delta^2 = \\ &= \mu_y\sigma_x^2 + \mu_y\sigma_\delta^2 + \beta_1\mu\sigma_x^2 = \mu_y\sigma_w^2 + \beta_1\mu\sigma_x^2.\end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \text{Cov}(w, wy) = \mu_y\sigma_w^2 + \beta_1\mu\sigma_x^2.$$

2. *Обрахунок  $\text{Cov}(y, w^2)$ .*

$$\begin{aligned}\text{Cov}(y, w^2) &= \text{Cov}(y, (x + \delta)^2) = \text{Cov}((\mu_y - \beta_1\mu) + \beta_1x + \beta_1u + \varepsilon, x^2 + 2x\delta + \delta^2) = \\ &= \text{Cov}(\beta_1x, x^2 + 2x\delta) = \beta_1 \text{Cov}(x, x^2) = 2\beta_1\mu\sigma_x^2.\end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \text{Cov}(y, w^2) = 2\beta_1\mu\sigma_x^2.$$

3. *Обрахунок  $\text{Cov}(y, wy)$ .*

$$\begin{aligned}\text{Cov}(y, wy) &= \text{Cov}((\mu_y - \beta_1\mu) + \beta_1x + \beta_1u + \varepsilon, (x + \delta)((\mu_y - \beta_1\mu) + \beta_1x + \beta_1u + \varepsilon)) = \\ &= \text{Cov}(\beta_1x + \beta_1u + \varepsilon, (\mu_y - \beta_1\mu)x + (\mu_y - \beta_1\mu)\delta + \beta_1x^2 + \beta_1x\delta + \beta_1xu + \beta_1u\delta +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon x + \varepsilon \delta) = \\
& = \beta_1 \text{Cov}(x, (\mu_y - \beta_1 \mu)x + \beta_1 x^2 + \beta_1 x \delta + \beta_1 x u) + \beta_1 \text{Cov}(u, \beta_1 x u + \beta_1 u \delta) + \\
& \quad + \text{Cov}(\varepsilon, \varepsilon x + \varepsilon \delta) = \\
& = \beta_1 (\mu_y - \beta_1 \mu) \text{Cov}(x, x) + \beta_1^2 \text{Cov}(x, x^2) + \beta_1^2 \text{Cov}(u, x u) + \text{Cov}(\varepsilon, x \varepsilon) = \\
& = \beta_1 \mu_y \sigma_x^2 - \beta_1^2 \mu \sigma_x^2 + 2\beta_1^2 \mu \sigma_x^2 + \beta_1^2 \mu \sigma_u^2 + \mu \sigma_\varepsilon^2 = \\
& = \beta_1 \mu_y \sigma_x^2 + \beta_1^2 \mu \sigma_x^2 + \beta_1^2 \mu \sigma_u^2 + \mu \sigma_\varepsilon^2 = \beta_1 \mu_y \sigma_x^2 + \mu \sigma_y^2.
\end{aligned}$$

Отже,  $\text{Cov}(y, w y) = \beta_1 \mu_y \sigma_x^2 + \beta_1^2 \mu \sigma_x^2 + \beta_1^2 \mu \sigma_u^2 + \mu \sigma_\varepsilon^2 = \beta_1 \mu_y \sigma_x^2 + \mu \sigma_y^2$ .

4. *Обрахунок*  $\text{Cov}(w, y^2)$ .

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(w, y^2) &= \text{Cov}(x + \delta, ((\mu_y - \beta_1 \mu) + \beta_1 x + \beta_1 u + \varepsilon)^2) = \\
&= \text{Cov}(x, ((\mu_y - \beta_1 \mu) + \beta_1 x + \beta_1 u + \varepsilon)^2) = \\
&= \text{Cov}(x, (\mu_y - \beta_1 \mu)^2 + \beta_1^2 x^2 + \beta_1^2 u^2 + \varepsilon^2 + 2\beta_1(\mu_y - \beta_1 \mu)x + 2\beta_1(\mu_y - \beta_1 \mu)u + \\
& \quad + 2(\mu_y - \beta_1 \mu)\varepsilon + 2\beta_1^2 x u + 2\beta_1 x \varepsilon + 2\beta_1 u \varepsilon) = \\
&= \text{Cov}(x, \beta_1^2 x^2 + 2\beta_1(\mu_y - \beta_1 \mu)x + 2\beta_1^2 x u + 2\beta_1 x \varepsilon) = \\
&= \beta_1^2 \text{Cov}(x, x^2) + 2\beta_1(\mu_y - \beta_1 \mu) \text{Cov}(x, x) + 2\beta_1^2 \text{Cov}(x, x u) + 2\beta_1 \text{Cov}(x, x \varepsilon) = \\
&= \beta_1^2 \text{Cov}(x, x^2) + 2\beta_1(\mu_y - \beta_1 \mu) \text{Cov}(x, x) = \\
&= 2\beta_1^2 \mu \sigma_x^2 + 2\beta_1 \mu_y \sigma_x^2 - 2\beta_1^2 \mu \sigma_x^2 = 2\beta_1 \mu_y \sigma_x^2.
\end{aligned}$$

Отже,  $\text{Cov}(w, y^2) = 2\beta_1 \mu_y \sigma_x^2$ .

5. *Обрахунок*  $\text{Cov}(w^2, y^2)$ .

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(w^2, y^2) &= \text{Cov}((x + \delta)^2, ((\mu_y - \beta_1 \mu) + \beta_1 x + \beta_1 u + \varepsilon)^2) = \\
&= \text{Cov}(x^2 + 2x\delta + \delta^2, ((\mu_y - \beta_1 \mu) + \beta_1 x + \beta_1 u + \varepsilon)^2) = \\
&= \text{Cov}(x^2 + 2x\delta + \delta^2, (\mu_y - \beta_1 \mu)^2 + \beta_1^2 x^2 + \beta_1^2 u^2 + \varepsilon^2 + 2\beta_1(\mu_y - \beta_1 \mu)x + \\
& \quad + 2\beta_1(\mu_y - \beta_1 \mu)u + 2(\mu_y - \beta_1 \mu)\varepsilon + 2\beta_1^2 x u + 2\beta_1 x \varepsilon + 2\beta_1 u \varepsilon) = \\
&= \text{Cov}(x^2 + 2x\delta, \beta_1^2 x^2 + 2\beta_1(\mu_y - \beta_1 \mu)x + 2\beta_1^2 x u + 2\beta_1 x \varepsilon) = \\
&= \beta_1^2 \text{Cov}(x^2, x^2) + 2\beta_1(\mu_y - \beta_1 \mu) \text{Cov}(x^2, x) + 2\beta_1^2 \text{Cov}(x^2, x u) + \\
& \quad + 2\beta_1 \text{Cov}(x^2, x \varepsilon) = \\
&= 4\beta_1^2 \mu^2 \sigma_x^2 + 2\beta_1^2 \sigma_x^4 + 4\beta_1 \mu \mu_y \sigma_x^2 - 4\beta_1^2 \mu^2 \sigma_x^2 = 2\beta_1^2 \sigma_x^4 + 4\beta_1 \mu \mu_y \sigma_x^2.
\end{aligned}$$

Отже,  $\text{Cov}(w^2, y^2) = 2\beta_1^2 \sigma_x^4 + 4\beta_1 \mu \mu_y \sigma_x^2$ . Вирази для коваріацій  $\text{Cov}(w^2, w y)$ ,  $\text{Cov}(w y, y^2)$ ,  $\text{Cov}(w y, w y)$  обчислюються аналогічно.

□

Використовуючи доведену лему, а також теорему 26.А з монографії [33], аналогічно до класичного випадку [28], ми можемо довести наступний результат.

**Теорема 2.3.** *Нехай виконуються умови (i) – (iii) та (vi). Тоді має місце наступне:*

1. Оцінка  $\widehat{\theta}$  – асимптотично нормальна, а саме:

$$\sqrt{N}(\widehat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma^N), N \rightarrow \infty \quad (2.23)$$

де асимптотична коваріаційна матриця  $\Sigma^N$  обчислюється за формулою:

$$\Sigma^N = \begin{pmatrix} \sigma_w^2 & \beta_1 \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 \sigma_x^2 & \sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_w^4 & -2\beta^2 \sigma_\delta^2 (2\sigma_x^2 + \sigma_\delta^2) & 2\beta_1 \sigma_w^2 \sigma_\delta^2 \\ 0 & 0 & -2\beta^2 \sigma_\delta^2 (2\sigma_x^2 + \sigma_\delta^2) & \Sigma_{44}^0 & \Sigma_{45}^0 \\ 0 & 0 & 2\beta_1 \sigma_w^2 \sigma_\delta^2 & \Sigma_{45}^0 & \Sigma_{55}^0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

де

$$\begin{aligned} \Sigma_{44}^N &= (2\beta_1^2 \sigma_\delta^4 + \beta_1^2 \sigma_x^2 \sigma_u^2 + \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2 \sigma_x^2 \sigma_\delta^2 + \beta_1^2 \sigma_u^2 \sigma_\delta^2 + \sigma_\varepsilon^2 \sigma_\delta^2) / \sigma_x^4, \\ \Sigma_{45}^N &= -(2\beta_1^3 \sigma_x^2 \sigma_\delta^4 + 4\beta_1^3 \sigma_w^2 \sigma_u^2 \sigma_\delta^2 + 2\beta_1 \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 \sigma_\delta^2 + 2\beta_1^3 \sigma_w^2 \sigma_u^4 + 2\beta_1 \sigma_w^2 \sigma_u^2 \sigma_\varepsilon^2) / \sigma_x^4, \\ \Sigma_{55}^N &= (2\beta_1^4 \sigma_x^4 \sigma_u^4 + 2\sigma_x^4 \sigma_\varepsilon^4 + 4\beta_1^2 \sigma_x^4 \sigma_u^2 \sigma_\varepsilon^2 + 2\beta_1^4 \sigma_x^4 \sigma_\delta^4 + 4\beta_1^4 \sigma_x^4 \sigma_u^2 \sigma_\delta^2 + 4\beta_1^2 \sigma_x^4 \sigma_\varepsilon^2 \sigma_\delta^2 + \\ &\quad + 8\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_u^2 \sigma_\delta^4 + 4\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_u^4 \sigma_\delta^2 + 8\beta_1^4 \sigma_w^2 \sigma_u^4 \sigma_\delta^2 + 8\beta_1^2 \sigma_x^2 \sigma_u^2 \sigma_\varepsilon^2 \sigma_\delta^2 + \\ &\quad + 4\beta_1^4 \sigma_w^2 \sigma_u^6 + 4\beta_1^2 \sigma_w^2 \sigma_u^4 \sigma_\varepsilon^2) / \sigma_x^4. \end{aligned}$$

2. Групи оцінок  $(\widehat{\mu}, \widehat{\mu}_y)$  та  $(\widehat{\sigma}_w^2, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2)$  – асимптотично незалежні.

*Доведення.* Спочатку зауважимо, що всі зазначені оцінки є строго консистентними. Також, оціночна функція  $s(\theta; w, y)$  є незсуненою, тобто:

$$\mathbb{E}s(\theta; w, y) = 0. \quad (2.25)$$

Розглянемо дві матриці:

$$V := -\mathbb{E} \frac{\partial s(\theta; w, y)}{\partial \theta^\top}, \quad B := \text{Cov}(s(\theta; w, y)).$$

Матриця  $B$  коректно визначена, оскільки за умовами (iii) та (vi) існують скінченні четверті моменти випадкових величин  $w - \mu$  та  $y - \mu_y$ . Випишемо

явний вигляд матриці  $V$ :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2) & 1 \end{pmatrix}.$$

Рівність (2.25), консистентність  $\widehat{\theta}$ , а також невиродженість  $V$  дозволяють застосувати теорему 26.A з монографії [33]. Тоді виконується (2.23), при цьому асимптотична коваріаційна матриця  $\Sigma^N$  буде визначатись за сендвіч-формулою:

$$\Sigma^N = V^{-1}BV^{-\top} = V^{-1}B(V^{-1})^\top.$$

Обчислимо її використовуючи явний вигляд матриці  $V$  та лему 2.1. Для цього нам спочатку потрібно буде знайти матрицю  $B$ . Обчислимо її покомпонентно.

Обчислимо  $\text{Cov}(s^\mu, s^\mu)$ ,  $\text{Cov}(s^{\mu y}, s^{\mu y})$  та  $\text{Cov}(s^\mu, s^{\mu y})$ :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(s^\mu, s^\mu) &= \text{Cov}(w - \mu, w - \mu) = \text{Cov}(w, w) = \sigma_w^2. \\ \text{Cov}(s^{\mu y}, s^{\mu y}) &= \text{Cov}(y - \mu_y, y - \mu_y) = \text{Cov}(y, y) = \sigma_y^2. \\ \text{Cov}(s^\mu, s^{\mu y}) &= \text{Cov}(w - \mu, y - \mu_y) = \text{Cov}(x + \delta, \beta_1 x + \beta_1 u + \varepsilon) = \\ &= \text{Cov}(x, \beta_1 x) = \beta_1 \text{Cov}(x, x) = \beta_1 \sigma_x^2. \end{aligned}$$

Далі визначимо  $\text{Cov}(s^\mu, s^{\sigma_w^2})$ ,  $\text{Cov}(s^{\mu y}, s^{\sigma_w^2})$  та  $\text{Cov}(s^{\sigma_w^2}, s^{\sigma_w^2})$ :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(s^\mu, s^{\sigma_w^2}) &= \text{Cov}(w - \mu, (w - \mu)^2 - \sigma_w^2) = \text{Cov}(w, w^2 - 2\mu w) = \\ &= \text{Cov}(w^2, w) - 2\mu \text{Cov}(w, w) = 2\mu\sigma_w^2 - 2\mu\sigma_w^2 = 0; \\ \text{Cov}(s^{\mu y}, s^{\sigma_w^2}) &= \text{Cov}(y - \mu_y, (w - \mu)^2 - \sigma_w^2) = \\ &= \text{Cov}(\beta_1 x + \beta_1 u + \varepsilon, (x + \delta)^2 - 2\mu x - 2\mu\delta) = \text{Cov}(\beta_1 x, x^2 - 2\mu x) = \\ &= \beta_1 \text{Cov}(x^2, x) - 2\mu \text{Cov}(x, x) = 2\beta_1\mu\sigma_x^2 - 2\beta_1\mu\sigma_x^2 = 0; \\ \text{Cov}(s^{\sigma_w^2}, s^{\sigma_w^2}) &= \text{Cov}((w - \mu)^2 - \sigma_w^2, (w - \mu)^2 - \sigma_w^2) = \\ &= \text{Cov}(w^2 - 2\mu w, w^2 - 2\mu w) = \\ &= \text{Cov}(w^2, w^2) - 4\mu \text{Cov}(w^2, w) + 4\mu^2 \text{Cov}(w, w) = \\ &= 4\mu^2 \sigma_w^2 + 2\sigma_w^4 - 8\mu^2 \sigma_w^2 + 4\mu^2 \sigma_w^2 = 2\sigma_w^4. \end{aligned}$$

Обчислення  $\text{Cov}(s^\mu, s^{\beta_1})$ :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(s^\mu, s^{\beta_1}) &= \text{Cov}(w - \mu, \beta_1(w - \mu)^2 - \beta_1\sigma_\delta^2 - (w - \mu)(y - \mu_y)) = \\ &= \text{Cov}(w, \beta_1 w^2 + (\mu_y - 2\beta_1\mu)w - wy + \mu y) = \\ &= \beta_1 \text{Cov}(w, w^2) + (\mu_y - 2\beta_1\mu) \text{Cov}(w, w) - \text{Cov}(w, wy) + \mu \text{Cov}(w, y) = \\ &= 2\beta_1\mu\sigma_w^2 + (\mu_y - 2\beta_1\mu)\sigma_w^2 - \mu_y\sigma_w^2 - \beta_1\mu\sigma_x^2 + \beta_1\mu\sigma_x^2 = 0.\end{aligned}$$

Обчислення  $\text{Cov}(s^\mu, s^{\sigma_\varepsilon^2})$ :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(s^\mu, s^{\sigma_\varepsilon^2}) &= \text{Cov}(w - \mu, (y - \mu_y)^2 - \sigma_\varepsilon^2 - \beta_1^2(w - \mu)^2 + \beta_1^2(\sigma_\delta^2 - \sigma_u^2)) = \\ &= \text{Cov}(w, y^2 - 2\mu_y y - \beta_1^2 w^2 + 2\beta_1^2 \mu w) = \\ &= \text{Cov}(w, y^2) - 2\mu_y \text{Cov}(w, y) - \beta_1^2 \text{Cov}(w, w^2) + 2\beta_1^2 \mu \text{Cov}(w, w) = \\ &= 2\beta_1\mu_y\sigma_x^2 - 2\beta_1\mu_y\sigma_x^2 - 2\beta_1^2\mu\sigma_w^2 + 2\beta_1^2\mu\sigma_w^2 = 0.\end{aligned}$$

Обчислення  $\text{Cov}(s^{\mu_y}, s^{\beta_1})$ :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(s^{\mu_y}, s^{\beta_1}) &= \text{Cov}(y - \mu_y, \beta_1(w - \mu)^2 - \beta_1\sigma_\delta^2 - (w - \mu)(y - \mu_y)) = \\ &= \text{Cov}(y, \beta_1 w^2 + (\mu_y - 2\beta_1\mu)w - wy + \mu y) = \\ &= \beta_1 \text{Cov}(y, w^2) + (\mu_y - 2\beta_1\mu) \text{Cov}(y, w) - \text{Cov}(y, wy) + \mu \text{Cov}(y, y) = \\ &= 2\beta_1^2\mu\sigma_x^2 + (\mu_y - 2\beta_1\mu)\beta_1\sigma_x^2 - \beta_1\mu_y\sigma_x^2 - \mu\sigma_y^2 + \mu\sigma_y^2 = 0.\end{aligned}$$

Обчислення  $\text{Cov}(s^{\mu_y}, s^{\sigma_\varepsilon^2})$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(s^{\mu_y}, s^{\sigma_\varepsilon^2}) &= \text{Cov}(y - \mu_y, (y - \mu_y)^2 - \sigma_\varepsilon^2 - \beta_1^2(w - \mu)^2 + \beta_1^2(\sigma_\delta^2 - \sigma_u^2)) = \\ &= \text{Cov}(y, y^2 - 2\mu_y y - \beta_1^2 w^2 + 2\beta_1^2 \mu w) = \\ &= \text{Cov}(y, y^2) - 2\mu_y \text{Cov}(y, y) - \beta_1^2 \text{Cov}(y, w^2) + 2\beta_1^2 \mu \text{Cov}(y, w) = \\ &= 2\mu_y\sigma_y^2 - 2\mu_y\sigma_y^2 - 2\beta_1^3\mu\sigma_x^2 + 2\beta_1^3\mu\sigma_x^2 = 0.\end{aligned}$$

Обчислення  $\text{Cov}(s^{\sigma_w^2}, s^{\beta_1})$ :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(s^{\sigma_w^2}, s^{\beta_1}) &= \text{Cov}((w - \mu)^2 - \sigma_w^2, \beta_1(w - \mu)^2 - \beta_1\sigma_\delta^2 - (w - \mu)(y - \mu_y)) = \\ &= \text{Cov}(w^2 - 2\mu w, \beta_1 w^2 - 2\beta_1\mu w - wy + \mu y + \mu_y w) = \\ &= \beta_1 \text{Cov}(w^2, w^2) - 4\beta_1\mu \text{Cov}(w^2, w) - \text{Cov}(w^2, wy) + \mu \text{Cov}(w^2, y) + \\ &\quad + \mu_y \text{Cov}(w^2, w) + 4\beta_1\mu^2 \text{Cov}(w, w) + 2\mu \text{Cov}(w, wy) - \\ &\quad - 2\mu^2 \text{Cov}(w, y) - 2\mu\mu_y \text{Cov}(w, w) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\beta_1\mu^2\sigma_w^2 + 2\beta_1\sigma_w^4 - 8\beta_1\mu^2\sigma_w^2 - 2\mu\mu_y\sigma_x^2 - 2\beta_1\sigma_x^4 - 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1\mu^2\sigma_x^2 + \\
&\quad + 2\mu\mu_y\sigma_w^2 + 4\beta_1\mu^2\sigma_w^2 + 2\mu\mu_y\sigma_w^2 + 2\beta_1\mu^2\sigma_x^2 - 2\beta_1\mu^2\sigma_x^2 - 2\mu\mu_y\sigma_w^2 = \\
&= 2\beta_1(\sigma_w^4 - \sigma_x^2(\sigma_x^2 + \sigma_\delta^2)) = 2\beta_1\sigma_w^2\sigma_\delta^2.
\end{aligned}$$

Обчислення  $\text{Cov}(s^{\sigma_w^2}, s^{\sigma_\varepsilon^2})$ :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(s^{\sigma_w^2}, s^{\sigma_\varepsilon^2}) &= \text{Cov}((w - \mu)^2 - \sigma_w^2, (y - \mu_y)^2 - \sigma_\varepsilon^2 - \beta_1^2(w - \mu)^2 + \beta_1^2(\sigma_\delta^2 - \sigma_u^2)) = \\
&= \text{Cov}((w - \mu)^2, (y - \mu_y)^2 - \beta_1^2(w - \mu)^2) = \\
&= \text{Cov}(w^2, y^2) - 2\mu_y \text{Cov}(w^2, y) - \beta_1^2 \text{Cov}(w^2, w^2) + 4\beta_1^2\mu \text{Cov}(w^2, 2) - \\
&\quad - 2\mu \text{Cov}(y^2, w) + 4\mu\mu_y \text{Cov}(w, y) - 4\beta_1^2\mu \text{Cov}(w, w) = \\
&= 2\beta_1^2\sigma_x^4 + 4\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2 - 4\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2 - 4\beta_1^2\mu^2\sigma_w^2 - 2\beta_1^2\sigma_w^4 + 8\beta_1\mu^2\sigma_w^2 - 4\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2 + \\
&\quad + 4\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2 - 4\beta_1\mu^2\sigma_w^2 = \\
&= 2\beta_1^2\sigma_x^4 - 2\beta_1^2\sigma_w^4 = 2\beta_1^2(\sigma_x^4 - \sigma_w^4) = 2\beta_1^2(\sigma_x^2 + \sigma_w^2)(-\sigma_\delta^2) = -2\beta_1^2\sigma_\delta^2(2\sigma_x^2 + \sigma_\delta^2).
\end{aligned}$$

Обчислення  $\text{Cov}(s^{\beta_1}, s^{\sigma_\varepsilon^2})$ :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(s^{\beta_1}, s^{\sigma_\varepsilon^2}) &= \text{Cov}(\beta_1(w - \mu)^2 - \beta_1\sigma_\delta^2 - (w - \mu)(y - \mu_y), (y - \mu_y)^2 - \sigma_\varepsilon^2 - \\
&\quad - \beta_1^2(w - \mu)^2 + \beta_1^2(\sigma_\delta^2 - \sigma_u^2)) = \\
&= \text{Cov}(\beta_1w^2 - 2\beta_1\mu w - wy + \mu y + \mu_y w, y^2 - 2\mu_y y - \beta_1^2w^2 + 2\beta_1^2\mu w) = \\
&= \text{Cov}(\beta_1w^2 + (\mu_y - 2\beta_1\mu)w - wy + \mu y, y^2 - 2\mu_y y - \beta_1^2w^2 + 2\beta_1^2\mu w) = \\
&= \beta_1 \text{Cov}(w^2, y^2) - (2\beta_1\mu_y + \beta_1^2\mu) \text{Cov}(w^2, y) - \beta_1^3 \text{Cov}(w^2, w^2) + \\
&\quad + (2\beta_1^3\mu - \beta_1^2(\mu_y - 2\beta_1\mu)) \text{Cov}(w^2, w) + (\mu_y - 2\beta_1\mu) \text{Cov}(w, y^2) - \\
&\quad - (2\mu_y(\mu_y - 2\beta_1\mu) - 2\beta_1^2\mu^2) \text{Cov}(w, y) + 2\beta_1^2\mu(\mu_y - 2\beta_1\mu) \text{Cov}(w, w) - \\
&\quad - \text{Cov}(wy, y^2) + 2\mu_y \text{Cov}(wy, y) + \beta_1^2 \text{Cov}(wy, w^2) - \\
&\quad - 2\beta_1^2\mu \text{Cov}(wy, w) + \mu \text{Cov}(y, y^2) - 2\mu\mu_y \text{Cov}(y, y) = \\
&= \beta_1 \text{Cov}(w^2, y^2) - (2\beta_1\mu_y + \beta_1^2\mu) \text{Cov}(w^2, y) - \beta_1^3 \text{Cov}(w^2, w^2) + \\
&\quad + (4\beta_1^3\mu - \beta_1^2\mu_y) \text{Cov}(w^2, w) + (\mu_y - 2\beta_1\mu) \text{Cov}(w, y^2) + \\
&\quad + (4\beta_1\mu\mu_y + 2\beta_1^2\mu^2 - 2\mu_y^2) \text{Cov}(w, y) + 2\beta_1^2\mu(\mu_y - 2\beta_1\mu) \text{Cov}(w, w) - \\
&\quad - \text{Cov}(wy, y^2) + 2\mu_y \text{Cov}(wy, y) + \beta_1^2 \text{Cov}(wy, w^2) - \\
&\quad - 2\beta_1^2\mu \text{Cov}(wy, w) + \mu \text{Cov}(y, y^2) - 2\mu\mu_y \text{Cov}(y, y) = \\
&= \beta_1(2\beta_1^2\sigma_x^4 + 4\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2) - (2\beta_1\mu_y + \beta_1^2\mu)2\beta_1\mu\sigma_x^2 - \beta_1^3(4\mu^2\sigma_w^2 + 2\sigma_w^4) + \\
&\quad + (4\beta_1^3\mu - \beta_1^2\mu_y)2\mu\sigma_w^2 + (\mu_y - 2\beta_1\mu)2\beta_1\mu_y\sigma_x^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (4\beta_1\mu\mu_y + 2\beta_1^2\mu^2 - 2\mu_y^2)\beta_1\sigma_x^2 + 2\beta_1^2\mu(\mu_y - 2\beta_1\mu)\sigma_w^2 - \\
& - (2\mu\mu_y\sigma_y^2 + 2\beta_1\mu_y^2\sigma_x^2 + 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_y^2) + 2\mu_y(\beta_1\mu_y\sigma_x^2 + \mu\sigma_y^2) + \\
& + \beta_1^2(2\mu\mu_y\sigma_w^2 + 2\beta_1\mu^2\sigma_x^2 + 2\beta_1\sigma_x^4 + 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\delta^2) - 2\beta_1^2\mu(\mu_y\sigma_w^2 + \beta_1\mu\sigma_x^2) + \\
& + \mu 2\mu_y\sigma_y^2 - 2\mu\mu_y\sigma_y^2 = \\
& = 2\beta_1^3\sigma_x^4 + 4\beta_1^2\mu\mu_y\sigma_x^2 - 4\beta_1^2\mu\mu_y\sigma_x^2 - 2\beta_1^3\mu^2\sigma_x^2 - 4\beta_1^3\mu^2\sigma_w^2 - 2\beta_1^3\sigma_w^4 + 8\beta_1^3\mu^2\sigma_w^2 - \\
& - 2\beta_1^2\mu\mu_y\sigma_w^2 + 2\beta_1\mu_y^2\sigma_x^2 - 4\beta_1^2\mu\mu_y\sigma_x^2 + 4\beta_1^2\mu\mu_y\sigma_x^2 + 2\beta_1^3\mu^2\sigma_x^2 - 2\beta_1\mu_y^2\sigma_x^2 + \\
& + 2\beta_1^2\mu\mu_y\sigma_w^2 - 4\beta_1^3\mu^2\sigma_w^2 - 2\mu\mu_y\sigma_y^2 - 2\beta_1\mu_y^2\sigma_x^2 - 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_y^2 + 2\beta_1\mu_y^2\sigma_x^2 + \\
& + 2\mu\mu_y\sigma_y^2 + 2\beta_1^2\mu\mu_y\sigma_w^2 + 2\beta_1^3\mu^2\sigma_x^2 + 2\beta_1^3\sigma_x^4 + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^2 - 2\beta_1^2\mu\mu_y\sigma_w^2 - \\
& - 2\beta_1^3\mu^2\sigma_x^2 + 2\mu\mu_y\sigma_y^2 - 2\mu\mu_y\sigma_y^2 = \\
& = 4\beta_1^3\sigma_x^4 - 2\beta_1^3\sigma_w^4 - 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_y^2 + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^2 = \\
& = 4\beta_1^3\sigma_x^4 - 2\beta_1^3(\sigma_x^4 + 2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + \sigma_\delta^4) - 2\beta_1\sigma_x^2(\beta_1^2\sigma_x^2 + \beta_1^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2) + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^2 = \\
& = 4\beta_1^3\sigma_x^4 - 2\beta_1^3\sigma_x^4 - 4\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^2 - 2\beta_1^3\sigma_\delta^4 - 2\beta_1^3\sigma_x^4 - 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^2 - 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2 + \\
& + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^2 = \\
& = -2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^2 - 2\beta_1^3\sigma_\delta^4 - 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^2 - 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Обчислення  $\text{Cov}(s^{\beta_1}, s^{\beta_1})$ :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(s^{\beta_1}, s^{\beta_1}) & = \text{Cov}(\beta_1(w - \mu)^2 - \beta_1\sigma_\delta^2 - (w - \mu)(y - \mu_y), \beta_1(w - \mu)^2 - \beta_1\sigma_\delta^2 - \\
& - (w - \mu)(y - \mu_y)) = \\
& = \text{Cov}(\beta_1w^2 - 2\beta_1\mu w - wy + \mu y + \mu_y w, \beta_1w^2 - 2\beta_1\mu w - wy + \mu y + \mu_y w) = \\
& = \text{Cov}(\beta_1w^2 + (\mu_y - 2\beta_1\mu)w - wy + \mu y, \beta_1w^2 + (\mu_y - 2\beta_1\mu)w - \\
& - wy + \mu y) = \\
& = \beta_1^2 \text{Cov}(w^2, w^2) + (\mu_y - 2\beta_1\mu)^2 \text{Cov}(w, w) + \text{Cov}(wy, wy) + \mu^2 \text{Cov}(y, y) + \\
& + 2\beta_1(\mu_y - 2\beta_1\mu) \text{Cov}(w^2, w) - 2\beta_1 \text{Cov}(w^2, wy) + \\
& + 2\beta_1\mu \text{Cov}(w^2, y) - 2(\mu_y - 2\beta_1\mu) \text{Cov}(w, wy) + \\
& + 2\mu(\mu_y - 2\beta_1\mu) \text{Cov}(w, y) - 2\mu \text{Cov}(wy, y) = \\
& = \beta_1^2(4\mu^2\sigma_w^2 + 2\sigma_w^4) + (\mu_y^2 - 4\beta_1\mu\mu_y + 4\beta_1^2\mu^2)\sigma_w^2 + (\mu_y^2\sigma_w^2 + \sigma_y^2\sigma_w^2 + 2\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2 + \\
& + \beta_1^2\sigma_x^4 + \mu^2\sigma_y^2) + \mu^2\sigma_y^2 + 2\beta_1(\mu_y - 2\beta_1\mu)2\mu\sigma_w^2 - 2\beta_1(2\mu\mu_y\sigma_w^2 + \\
& + 2\beta_1\mu^2\sigma_x^2 + 2\beta_1\sigma_x^4 + 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\delta^2) + 2\beta_1\mu(2\beta_1\mu\sigma_x^2) - 2(\mu_y - 2\beta_1\mu) \times \\
& \times (\mu_y\sigma_w^2 + \beta_1\mu\sigma_x^2) + 2\mu(\mu_y - 2\beta_1\mu)\beta_1\sigma_x^2 - 2\mu(\beta_1\mu_y\sigma_x^2 + \mu\sigma_y^2) = \\
& = 4\beta_1^2\mu^2\sigma_w^2 + 2\beta_1^2\sigma_w^4 + \mu_y^2\sigma_w^2 - 4\beta_1\mu\mu_y\sigma_w^2 + 4\beta_1^2\mu^2\sigma_w^2 + \mu_y^2\sigma_w^2 + \sigma_y^2\sigma_w^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2 + \beta_1^2\sigma_x^4 + \mu^2\sigma_y^2 + \mu^2\sigma_y^2 + 4\beta_1\mu\mu_y\sigma_w^2 - 8\beta_1^2\mu^2\sigma_w^2 - \\
& - 4\beta_1\mu\mu_y\sigma_w^2 - 4\beta_1^2\mu^2\sigma_x^2 - 4\beta_1^2\sigma_x^4 - 4\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + 4\beta_1^2\mu^2\sigma_x^2 - 2\mu_y^2\sigma_w^2 - \\
& - 2\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2 + 4\beta_1\mu\mu_y\sigma_w^2 + 4\beta_1^2\mu^2\sigma_x^2 + 2\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2 - 4\beta_1^2\mu^2\sigma_x^2 - \\
& - 2\beta_1\mu\mu_y\sigma_x^2 - 2\mu^2\sigma_y^2 = \\
& = 2\beta_1^2\sigma_w^4 + \sigma_y^2\sigma_w^2 + \beta_1^2\sigma_x^4 - 4\beta_1^2\sigma_x^4 - 4\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 = \\
& = 2\beta_1^2(\sigma_x^2 + \sigma_\delta^2)^2 + (\beta_1^2\sigma_x^2 + \beta_1^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2)(\sigma_x^2 + \sigma_\delta^2) + \beta_1^2\sigma_x^4 - 4\beta_1^2\sigma_x^4 - 4\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 = \\
& = 2\beta_1^2\sigma_x^4 + 4\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1^2\sigma_\delta^4 + \beta_1^2\sigma_x^4 + \beta_1^2\sigma_x^2\sigma_u^2 + \sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + \beta_1^2\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + \\
& \quad + \sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 + \beta_1^2\sigma_x^4 - 4\beta_1^2\sigma_x^4 - 4\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 = \\
& = 2\beta_1^2\sigma_\delta^4 + \beta_1^2\sigma_x^2\sigma_u^2 + \sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + \beta_1^2\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + \sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 = \\
& = \beta_1^2(\sigma_\delta^4 + \sigma_\delta^4 + \sigma_x^2\sigma_u^2 + \sigma_x^2\sigma_\delta^2 + \sigma_u^2\sigma_\delta^2) + \sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 = \\
& = \beta_1^2(\sigma_\delta^4 + \sigma_w^2\sigma_\delta^2 + \sigma_u^2\sigma_w^2) + \sigma_\varepsilon^2\sigma_w^2.
\end{aligned}$$

Обчислення  $\text{Cov}(s^{\sigma_\varepsilon^2}, s^{\sigma_\varepsilon^2})$ :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(s^{\sigma_\varepsilon^2}, s^{\sigma_\varepsilon^2}) & = \text{Cov}((y - \mu_y)^2 - \sigma_\varepsilon^2 - \beta_1^2(w - \mu)^2 + \beta_1^2(\sigma_\delta^2 - \sigma_u^2), (y - \mu_y)^2 - \\
& \quad - \sigma_\varepsilon^2 - \beta_1^2(w - \mu)^2 + \beta_1^2(\sigma_\delta^2 - \sigma_u^2)) = \\
& = \text{Cov}(y^2 - 2\mu_y y - \beta_1^2 w^2 + 2\beta_1^2 \mu w, y^2 - 2\mu_y y - \beta_1^2 w^2 + 2\beta_1^2 \mu w) = \\
& = \text{Cov}(y^2, y^2) + 4\mu_y^2 \text{Cov}(y, y) + \beta_1^4 \text{Cov}(w^2, w^2) + 4\beta_1^4 \mu^2 \text{Cov}(w, w) - \\
& \quad - 4\mu_y \text{Cov}(y^2, y) - 2\beta_1^2 \text{Cov}(y^2, w^2) + 4\beta_1^2 \mu \text{Cov}(y^2, w) + \\
& \quad + 4\beta_1^2 \mu_y \text{Cov}(y, w^2) - 8\beta_1^2 \mu \mu_y \text{Cov}(y, w) - 4\beta_1^4 \mu \text{Cov}(w^2, w) = \\
& = (4\mu_y^2 \sigma_y^2 + 2\sigma_y^4) + 4\mu_y^2 (\sigma_y^2) + \beta_1^4 (4\mu^2 \sigma_w^2 + 2\sigma_w^4) + 4\beta_1^4 \mu^2 (\sigma_w^2) - 4\mu_y (2\mu_y \sigma_y^2) - \\
& \quad - 2\beta_1^2 (2\beta_1^2 \sigma_x^4 + 4\beta_1 \mu \mu_y \sigma_x^2) + 4\beta_1^2 \mu (2\beta_1 \mu_y \sigma_x^2) + 4\beta_1^2 \mu_y (2\beta_1 \mu \sigma_x^2) - \\
& \quad - 8\beta_1^2 \mu \mu_y (\beta_1 \sigma_x^2) - 4\beta_1^4 \mu (2\mu \sigma_w^2) = \\
& = 4\mu_y^2 \sigma_y^2 + 2\sigma_y^4 + 4\mu_y^2 \sigma_y^2 + 4\beta_1^4 \mu^2 \sigma_w^2 + 2\beta_1^4 \sigma_w^4 + 4\beta_1^4 \mu^2 \sigma_w^2 - 8\mu_y^2 \sigma_y^2 - 4\beta_1^4 \sigma_x^4 - \\
& \quad - 8\beta_1^3 \mu \mu_y \sigma_x^2 + 8\beta_1^3 \mu \mu_y \sigma_x^2 + 8\beta_1^3 \mu \mu_y \sigma_x^2 - 8\beta_1^3 \mu \mu_y \sigma_x^2 - 8\beta_1^4 \mu^2 \sigma_w^2 = \\
& = 2\sigma_y^4 + 2\beta_1^4 \sigma_w^4 - 4\beta_1^4 \sigma_x^4 = \\
& = 2(\beta_1^2 \sigma_x^2 + \beta_1^2 \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2)^2 + 2\beta_1^4 (\sigma_x^2 + \sigma_\delta^2)^2 - 4\beta_1^4 \sigma_x^4 = \\
& = 2\beta_1^4 \sigma_x^4 + 2\beta_1^4 \sigma_u^4 + 2\sigma_\varepsilon^4 + 4\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_u^2 + 4\beta_1^2 \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^2 \sigma_u^2 \sigma_\varepsilon^2 + 2\beta_1^4 \sigma_x^2 + \\
& \quad + 4\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_\delta^2 + 2\beta_1^4 \sigma_\delta^4 - 4\beta_1^4 \sigma_x^4 = \\
& = 2\beta_1^4 \sigma_u^4 + 2\sigma_\varepsilon^4 + 4\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_u^2 + 4\beta_1^2 \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^2 \sigma_u^2 \sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_\delta^2 + 2\beta_1^4 \sigma_\delta^4.
\end{aligned}$$

Таким чином ми отримаємо наступний вираз для матриці  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_w^2 & \beta_1 \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 \sigma_x^2 & \sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_w^4 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_1 & d_1 & d_3 \\ 0 & 0 & c_2 & d_3 & d_2 \end{pmatrix},$$

де

$$d_1 := \beta_1^2 \sigma_\delta^4 + \beta_1^2 \sigma_w^2 \sigma_\delta^2 + \beta_1^2 \sigma_u^2 \sigma_w^2 + \sigma_\varepsilon^2 \sigma_w^2,$$

$$d_2 := 2\beta_1^4 \sigma_u^4 + 2\sigma_\varepsilon^4 + 4\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_u^2 + 4\beta_1^2 \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^2 \sigma_u^2 \sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_\delta^2 + 2\beta_1^4 \sigma_\delta^4$$

$$d_3 := -2\beta_1^3 \sigma_x^2 \sigma_\delta^2 - 2\beta_1^3 \sigma_\delta^4 - 2\beta_1^3 \sigma_x^2 \sigma_u^2 - 2\beta_1 \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2,$$

$$c_1 := -2\beta^2 \sigma_\delta^2 (2\sigma_x^2 + \sigma_\delta^2),$$

$$c_2 := 2\beta_1 \sigma_w^2 \sigma_\delta^2.$$

Далі матимемо наступне:

$$\begin{aligned} \Sigma^N &= V^{-1} B V^{-T} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\sigma_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)}{\sigma_x^2} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_w^2 & \beta_1 \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 \sigma_x^2 & \sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_w^4 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_1 & d_1 & d_3 \\ 0 & 0 & c_2 & d_3 & d_2 \end{pmatrix} \times V^{-T} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_w^2 & \beta_1 \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 \sigma_x^2 & \sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_w^4 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_1 & -\frac{d_1}{\sigma_x^2} & -\frac{d_3}{\sigma_x^2} \\ 0 & 0 & c_2 & d_1 \frac{2\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)}{\sigma_x^2} + d_3 & d_3 \frac{2\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)}{\sigma_x^2} + d_2 \end{pmatrix} \times V^{-T} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_w^2 & \beta_1 \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 \sigma_x^2 & \sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_w^4 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_1 & \frac{d_1}{\sigma_x^4} & O_1 \\ 0 & 0 & c_2 & O_1 & O_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де  $O_1$  та  $O_2$  визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
O_1 &= -(2d_1\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2) + d_3\sigma_x^2)/\sigma_x^4 = \\
&= -(2(2\beta_1^2\sigma_\delta^4 + \beta_1^2\sigma_x^2\sigma_u^2 + \sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + \beta_1^2\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + \sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2)\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2) + \\
&\quad + \sigma_x^2(-2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^2 - 2\beta_1^3\sigma_\delta^4 - 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^2 - 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2))/\sigma_x^4 = \\
&= -((4\beta_1^3\sigma_\delta^4 + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^2 + 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2 + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1^3\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2)(\sigma_x^2 + \sigma_u^2) - \\
&\quad - 2\beta_1^3\sigma_x^4\sigma_\delta^2 - 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^4 - 2\beta_1^3\sigma_x^4\sigma_u^2 - 2\beta_1\sigma_x^4\sigma_\varepsilon^2))/\sigma_x^4 = \\
&= -(4\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^4 + 2\beta_1^3\sigma_x^4\sigma_u^2 + 2\beta_1\sigma_x^4\sigma_\varepsilon^2 + 2\beta_1^3\sigma_x^4\sigma_\delta^2 + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 + \\
&\quad + 4\beta_1^3\sigma_u^2\sigma_\delta^4 + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^4 + 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2 + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1^3\sigma_u^4\sigma_\delta^2 + \\
&\quad + 2\beta_1\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 - 2\beta_1^3\sigma_x^4\sigma_\delta^2 - 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^4 - 2\beta_1^3\sigma_x^4\sigma_u^2 - 2\beta_1\sigma_x^4\sigma_\varepsilon^2)/\sigma_x^4 = \\
&= -(2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^4 + 4\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 + 4\beta_1^3\sigma_u^2\sigma_\delta^4 + 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^4 + 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2 + \\
&\quad + 2\beta_1^3\sigma_u^4\sigma_\delta^2 + 2\beta_1\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2) = \\
&= -(2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^4 + 4\beta_1^3\sigma_w^2\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1^3\sigma_w^2\sigma_u^4 + 2\beta_1\sigma_w^2\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2)/\sigma_x^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_2 &= d_3 \frac{2\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)}{\sigma_x^2} + d_2 + \frac{2\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)}{\sigma_x^2} (d_1 \frac{2\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)}{\sigma_x^2} + d_3) = \\
&= d_3 \frac{4\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2)}{\sigma_x^2} + d_2 + d_1 \frac{4\beta_1^2(\sigma_x^4 + 2\sigma_x^2\sigma_u^2 + \sigma_u^4)}{\sigma_x^4} = \\
&= (4d_3\beta_1(\sigma_x^4 + \sigma_x^2\sigma_u^2) + d_2\sigma_x^4 + 4d_1\beta_1^2(\sigma_x^4 + 2\sigma_x^2\sigma_u^2 + \sigma_u^4))/\sigma_x^4 = \\
&= ((-2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_\delta^2 - 2\beta_1^3\sigma_\delta^4 - 2\beta_1^3\sigma_x^2\sigma_u^2 - 2\beta_1\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2)(4\beta_1\sigma_x^4 + 4\beta_1\sigma_x^2\sigma_u^2) + (2\beta_1^4\sigma_u^4 + \\
&\quad + 2\sigma_\varepsilon^4 + 4\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_u^2 + 4\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^2\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + 2\beta_1^4\sigma_\delta^4)\sigma_x^4 + \\
&\quad + (2\beta_1^2\sigma_\delta^4 + \beta_1^2\sigma_x^2\sigma_u^2 + \sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2 + \beta_1^2\sigma_x^2\sigma_\delta^2 + \beta_1^2\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + \sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2) \times \\
&\quad \times (4\beta_1^2\sigma_x^4 + 8\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_u^2 + 4\beta_1^2\sigma_u^4))/\sigma_x^4 = \\
&= (-8\beta_1^4\sigma_x^6\sigma_\delta^2 - 8\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_\delta^4 - 8\beta_1^4\sigma_x^6\sigma_u^2 - 8\beta_1^2\sigma_x^6\sigma_\varepsilon^2 - 8\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_u^2\sigma_\delta^2 - 8\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\delta^4 - \\
&\quad - 8\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_u^4 - 8\beta_1^2\sigma_x^4\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2 + 2\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_u^4 + 2\sigma_x^4\sigma_\varepsilon^4 + 4\beta_1^4\sigma_x^6\sigma_u^2 + 4\beta_1^2\sigma_x^6\sigma_\varepsilon^2 + \\
&\quad + 4\beta_1^2\sigma_x^4\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^4\sigma_x^6\sigma_\delta^2 + 2\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_\delta^4 + 8\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_\delta^4 + 4\beta_1^4\sigma_x^6\sigma_u^2 + 4\beta_1^2\sigma_x^6\sigma_\varepsilon^2 + \\
&\quad + 4\beta_1^4\sigma_x^6\sigma_\delta^2 + 4\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + 4\beta_1^2\sigma_x^4\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 + 16\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\delta^4 + 8\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_u^4 + \\
&\quad + 8\beta_1^2\sigma_x^4\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2 + 8\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + 8\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_u^4\sigma_\delta^2 + 8\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 + 8\beta_1^4\sigma_u^4\sigma_\delta^4 + \\
&\quad + 4\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_u^6 + 4\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_u^4\sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_u^4\sigma_\delta^2 + 4\beta_1^4\sigma_u^6\sigma_\delta^2 + 4\beta_1^2\sigma_u^4\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2)/\sigma_x^4 = \\
&= (2\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_u^4 + 2\sigma_x^4\sigma_\varepsilon^4 + 4\beta_1^2\sigma_x^4\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2 + 2\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_\delta^4 + 4\beta_1^4\sigma_x^4\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + 4\beta_1^2\sigma_x^4\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 + \\
&\quad + 8\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\delta^4 + 12\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_u^4\sigma_\delta^2 + 8\beta_1^2\sigma_x^2\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2 + 8\beta_1^4\sigma_u^4\sigma_\delta^4 + 4\beta_1^4\sigma_x^2\sigma_u^6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\beta_1^2 \sigma_x^2 \sigma_u^4 \sigma_\varepsilon^2 + 4\beta_1^4 \sigma_u^6 \sigma_\delta^2 + 4\beta_1^2 \sigma_u^4 \sigma_\varepsilon^2 \sigma_\delta^2) / \sigma_x^4 = \\
= & (2\beta_1^4 \sigma_x^4 \sigma_u^4 + 2\sigma_x^4 \sigma_\varepsilon^4 + 4\beta_1^2 \sigma_x^4 \sigma_u^2 \sigma_\varepsilon^2 + 2\beta_1^4 \sigma_x^4 \sigma_\delta^4 + 4\beta_1^4 \sigma_x^4 \sigma_u^2 \sigma_\delta^2 + 4\beta_1^2 \sigma_x^4 \sigma_\varepsilon^2 \sigma_\delta^2 + \\
& + 8\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_u^2 \sigma_\delta^4 + 4\beta_1^4 \sigma_x^2 \sigma_u^4 \sigma_\delta^2 + 8\beta_1^4 \sigma_w^2 \sigma_u^4 \sigma_\delta^2 + 8\beta_1^2 \sigma_x^2 \sigma_u^2 \sigma_\varepsilon^2 \sigma_\delta^2 + \\
& + 4\beta_1^4 \sigma_w^2 \sigma_u^6 + 4\beta_1^2 \sigma_w^2 \sigma_u^4 \sigma_\varepsilon^2) / \sigma_x^4.
\end{aligned}$$

Те, що групи оцінок  $(\widehat{\mu}, \widehat{\mu}_y)$  та  $(\widehat{\sigma}_w^2, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2)$  є асимптотично незалежними, впливає безпосередньо зі структури отриманої асимптотичної коваріаційної матриці.  $\square$

*Зауваження 2.4.* Ми отримали однакові вирази для асимптотичної дисперсії оцінки кутового коефіцієнта  $\widehat{\beta}_1$  у теоремі 2.3 ( $\Sigma_{44}^N$ ) та (2.12), що дає додаткову валідацію результатів.

### 2.2.3 Асимптотична нормальність у загальному випадку

Для того, щоб довести асимптотичну нормальність оцінки (2.21) й асимптотичну незалежність груп оцінок  $(\widehat{\mu}, \widehat{\mu}_y)^\top$  та  $(\widehat{\sigma}_w^2, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2)^\top$  без використання припущення про нормальність (vi), введемо два додаткових припущення:

- (vii)  $x, \delta, u$  та  $\varepsilon$  мають нульовий коефіцієнт асиметрії, тобто їх центровані треті моменти є тотожно рівними 0.
- (viii)  $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ ,  $\mathbb{E}\varepsilon^4 < \infty$  та розподіл  $\varepsilon$  не зосереджений у двох точках.

Тоді можна сформулювати наступну теорему.

**Теорема 2.4.** *Нехай виконуються умови (i) – (iii), (viii) та випадкові величини  $x, \delta, u$  мають скінченні четверті моменти. Тоді:*

- (a) *Оцінка (2.21) у моделі (2.20) є асимптотично нормальною, а саме*

$$\sqrt{N}(\widehat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma^F), N \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

*з невиродженою асимптотичною коваріаційною матрицею  $\Sigma^F$  ( $F$  позначає невизначену сім'ю розподілів без обмеження на нормальність);*

- (б) *за додаткового припущення (vii), групи оцінок  $(\widehat{\mu}, \widehat{\mu}_y)^\top$  та  $(\widehat{\sigma}_w^2, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2)^\top$  є асимптотично незалежними.*

*Доведення. Частина 1.* Доведемо, що має місце (2.26) з невиродженою  $\Sigma^F$ .

Оскільки усі дисперсії у визначеній моделі вважаються додатними, то справжнє значення вектору  $\theta$  є внутрішньою точкою множини параметрів  $\Theta = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$ .

Як було зазначено вище, оцінка  $\hat{\theta}$  є строго консистентною. Оціночна функція (2.22) є незміщеною, тобто  $\mathbb{E}_\theta s(\theta; w, y) = 0$ . Визначимо дві матриці

$$V := -\mathbb{E}_\theta \frac{\partial s(\theta; w, y)}{\partial \theta^\top} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix},$$

де

$$I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_x^2 & 0 \\ 0 & 2\beta_1(\sigma_x^2 + \sigma_u^2) & 1 \end{pmatrix},$$

та матрицю

$$B := \text{Cov}_\theta(s(\theta; w, y)).$$

Оскільки випадкові величини  $\varepsilon$ ,  $x$ ,  $\delta$ ,  $u$  мають скінченні четверті моменти, то матриця  $B$  є коректно визначеною.

З незміщеності  $s(\theta; w, y)$ , консистентності  $\hat{\theta}$  та невиродженості  $V$  випливає (2.26) за теоремою А.26 з [33], тоді матриця  $\Sigma^F$  визначається сендвіч-формулою

$$\Sigma^F = V^{-1}B(V^{-1})^\top.$$

Для того, щоб довести невиродженість матриці  $B$ , продемонструємо, що наступні п'ять випадкових величин

$$\begin{aligned} s^\mu &= s^\mu(\theta; w, y), & s^{\mu_y} &= s^{\mu_y}(\theta; w, y), & s^{\sigma_w^2} &= s^{\sigma_w^2}(\theta; w, y), \\ s^{\beta_1} &= s^{\beta_1}(\theta; w, y), & s^{\sigma_\varepsilon^2} &= s^{\sigma_\varepsilon^2}(\theta; w, y) \end{aligned}$$

є лінійно незалежними для істинного значення  $\theta$ .

Визначимо випадковий вектор:

$$h := (w - \mu, y - \mu_y, (w - \mu)^2, (w - \mu)(y - \mu_y), (y - \mu_y)^2)^\top. \quad (2.27)$$

Тоді

$$(s^\mu, s^{\mu_y}, s^{\sigma_w^2}, s^{\beta_1}, s^{\sigma_\varepsilon^2})^\top = Th + a,$$

де  $T = T(\theta)$  є невиродженою квадратною матрицею та  $a = a(\theta)$  — сталий вектор. Матриця  $T$  є невиродженою, а отже достатньо показати, що жодна нетривіальна лінійна комбінація компонент вектора  $h$  не є сталою.

Використаємо центрування  $\rho = x - \mu$ . Припустимо, що існують такі дійсні сталі  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  та  $a_3$ , що м.н. виконується:

$$F := a_{11}(w - \mu)^2 + a_{12}(w - \mu)(y - \mu_y) + a_{22}(y - \mu_y)^2 + a_1(w - \mu) + a_2(y - \mu_y) + a_3 = 0,$$

$$F = a_{11}(\rho + \delta)^2 + a_{12}(\rho + \delta)(\beta_1\rho + \beta_1u + \varepsilon) + a_{22}(\beta_1\rho + \beta_1u + \varepsilon)^2 + a_1(\rho + \delta) + a_2(\beta_1\rho + \beta_1u + \varepsilon) + a_3 = 0.$$

Тоді м.н.

$$0 = \mathbb{E}[F|\varepsilon] = a_{22}\varepsilon^2 + a_2\varepsilon + b_3, \quad b_3 \in \mathbb{R},$$

а отже, за умовою (viii),  $a_{22} = a_2 = 0$ . Таким чином матимемо м.н.

$$0 = \mathbb{E}[F|\delta] = a_{11}\delta^2 + a_1\delta + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Розглянемо два випадки розподілу  $\delta$ .

*Випадок 1.* Припустимо, що розподіл  $\delta$  не сконцентрований у двох точках.

Тоді з (2.28) випливає  $a_{11} = a_1 = 0$ . Відповідно, м.н.

$$0 = \mathbb{E}[F|\varepsilon, \delta] = a_{12}\delta\varepsilon + d_3, \quad d_3 \in \mathbb{R},$$

$$0 = \text{Var}(a_{12}\delta\varepsilon) = a_{12}^2\sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2, \quad a_{12} = 0,$$

з чого впливатиме шукане

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_1 = a_2 = 0. \quad (2.29)$$

*Випадок 2.* Припустимо що для деякого  $\delta_0 \neq 0$  виконується

$$P(\delta = \delta_0) = P(\delta = -\delta_0) = \frac{1}{2}.$$

Тоді м.н.

$$F(\rho, \varepsilon, \delta_0, u) = F(\rho, \varepsilon, -\delta_0, u) = 0, \quad 0 = F(\rho, \varepsilon, \delta_0, u) - F(\rho, \varepsilon, -\delta_0, u) = 2\delta_0 G,$$

$$0 = G = 2a_{11}\rho + a_{12}(\beta_1\rho + \beta_1u + \varepsilon) + a_1,$$

$$0 = \mathbb{E}[G|\varepsilon] = a_{12}\varepsilon + a_1, \quad a_{12} = a_1 = 0; \quad a_{11}\rho = 0 \text{ м.н.}, \quad a_{11} = 0.$$

Отже, у цьому випадку знову отримуємо (2.29). Таким чином твердження (а) Теорема 2.4 доведено.

*Частина 2.* Припустимо додатково, що виконується припущення (vii) про рівність нулю центрованих третіх моментів. Згідно за доведеним твердженням

(а), матриця  $B$  є невивродженою. Продемонструємо, що вона має при цьому блочно-діагональну структуру

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

з деякими матрицями  $B_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  та  $B_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Тоді  $\Sigma^F$  також буде блочно-діагональною з невивродженими блоками:

$$\Sigma^F = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_1 = B_1, \quad \Sigma_2 = V_2^{-1} B_2 (V_2^{-1})^T,$$

й твердження (б) теореми 2.4 буде доведено.

Використовуючи умову (vii) випишемо елементи матриці  $B$  які повинні бути нульовими для виконання (2.30):

$$\text{Cov}(s^\mu, s^{\sigma_w^2}) = \mathbb{E}(x - \mu)^3 + \mathbb{E}\delta^3 = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(s^\mu, s^{\beta_1}) &= \text{Cov}(w - \mu, \beta_1(w - \mu)^2) - \text{Cov}(w - \mu, (w - \mu)(y - \mu_y)) = \\ &= -\mathbb{E}(\rho + \delta)^2(\beta_1\rho + \beta_1u + \varepsilon) = -\beta_1\mathbb{E}\rho^3 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(s^\mu, s^{\sigma_\varepsilon^2}) &= \text{Cov}(w - \mu, (y - \mu_y)^2) - \beta_1^2 \text{Cov}(w - \mu, (w - \mu)^2) = \\ &= \mathbb{E}(w - \mu)(y - \mu_y)^2 = \mathbb{E}(\rho + \delta)(\beta_1\rho + \beta_1u + \varepsilon)^2 = \beta_1^2\mathbb{E}\rho^3 = 0; \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(s^{\mu_y}, s^{\sigma_w^2}) = \beta_1\mathbb{E}\rho^3 = 0;$$

$$\text{Cov}(s^{\mu_y}, s^{\beta_1}) = \beta_1\mathbb{E}(w - \mu)^2(y - \mu_y) - \mathbb{E}(w - \mu)(y - \mu_y)^2 = \beta_1^2\mathbb{E}\rho^3 - \beta_1^2\mathbb{E}\rho^3 = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(s^{\mu_y}, s^{\sigma_\varepsilon^2}) &= \mathbb{E}(y - \mu_y)^3 - \beta_1^2\mathbb{E}(w - \mu)^2(y - \mu_y) = \mathbb{E}(\beta_1\rho + \beta_1u + \varepsilon)^3 - \beta_1^3\mathbb{E}\rho^3 = \\ &= \beta_1^3\mathbb{E}u^3 + \mathbb{E}\varepsilon^3 = 0. \end{aligned}$$

Звідки випливає (2.30), а отже й твердження (б) теореми 2.4.  $\square$

*Зауваження 2.5.* Твердження теореми 2.4 не виконується без умови (viii). Припустимо, що для деякого  $\varepsilon_0 \neq 0$ ,

$$\mathbb{P}(\varepsilon = \varepsilon_0) = \mathbb{P}(\varepsilon = -\varepsilon_0) = \frac{1}{2}.$$

Якщо додатково  $\beta_1 = 0$ , тоді  $(y - \mu_y)^2 = \varepsilon^2 = \varepsilon_0^2$  м.н., та

$$F_0 := (y - \mu_y)^2 - \varepsilon_0^2 = 0 \text{ м.н.}$$

Відповідно, існує нетривіальна лінійна комбінація компонентів вектора (2.27) яка дорівнює сталій, відповідно блок  $B_2$  у (2.30) є вивродженим, а отже й асимптотична коваріаційна матриця  $\Sigma^F$  у цьому випадку вивроджується.

## 2.3 Моделювання

Оцінимо якість оцінок для параметрів  $\beta_1$  та  $\sigma_\varepsilon^2$  побудованих у підрозділі 2.1.2 за допомогою чисельного моделювання. Будемо використовувати нормально розподілені випадкові величини й відповідний явний вигляд для асимптотичної коваріаційної матриці, отриманий у теоремі 2.3. При цьому, для оцінювання асимптотичних дисперсій  $\Sigma_{44}^N$  та  $\Sigma_{55}^N$  будемо використовувати вектор консистентних оцінок  $(\widehat{\mu}, \widehat{\mu}_y, \widehat{\sigma}_w^2, \widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2)^\top$  замість невідомих параметрів, замінюючи при цьому  $\sigma_x^2$  на  $\sigma_w^2 - \sigma_\delta^2$ . При цьому, оцінку  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  будемо прирівнювати до 0, для ітерацій у яких відповідний вираз стає від'ємним. Таким чином отримаємо оцінки:

$$\widehat{\Sigma}_N^{44} = \left( \frac{\widehat{\beta}_1^2 (\sigma_\delta^4 + \sigma_\delta^2 \widehat{\sigma}_w^2 + \sigma_u^2 \widehat{\sigma}_w^2) + \widehat{\sigma}_w^2 \sigma_\varepsilon^2}{(\widehat{\sigma}_w^2 - \sigma_\delta^2)^2} \right)_+,$$

$$\widehat{\Sigma}_N^{55} = \left( \frac{2\widehat{\beta}_1^4 \sigma_u^2 (\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) (\widehat{\sigma}_w^4 - \sigma_\delta^4 + \widehat{\sigma}_w^2 \sigma_u^2) + 4\widehat{\beta}_1^2 \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 (\sigma_u^2 (\widehat{\sigma}_w^4 - \sigma_\delta^4) + \widehat{\sigma}_w^2 \sigma_u^4)}{(\widehat{\sigma}_w^2 - \sigma_\delta^2)^2} + 2\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 (\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2) \right)_+,$$

де

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Розглядатимемо моделі з різними наборами параметрів. Для кожного набору параметрів генеруємо 10000 вибірок  $(y_i, w_i)_{i=1}^N$  розмірності  $N \in (2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10})$  та обчислюємо вибіркові середні (Сер.) та стандартні відхилення (Ст.В.) для значень оцінок, середнє оцінене теоретичне стандартне відхилення (О.Ст.В.) — середній квадратний корінь з оціненої асимптотичної дисперсії поділений на  $N$  ( $\sqrt{\widehat{\Sigma}_N^{ii}/N}$ ) та ймовірність покриття (Йм.П.) для  $\alpha = 5\%$  на основі оцінок для асимптотичних дисперсій.

У таблицях 2.1–2.2 відображаються результати моделювання для значень  $\lambda \in (2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3)$ , де параметр  $\lambda = \sigma_u^2 / \sigma_\delta^2$  визначає відношення між дисперсіями класичної та берксонівської похибок, які додатково задовольняють умову  $\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 = 2$  (тобто, при  $\lambda = 1$  маємо  $\sigma_u^2 = \sigma_\delta^2 = 1$ ). Інші елементи моделі при цьому визначаються наступним чином:  $x \sim \mathcal{N}(-1, 1)$ ,  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_0 = 1$ .

Табл. 2.1. Оцінка  $\hat{\beta}_1$  при зміні  $\lambda = \sigma_u^2/\sigma_\delta^2$ 

$\lambda$		$N$						
		$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
0.125	Сер.	-0.266	3.5750	2.9200	2.2680	2.0977	2.0475	2.0225
	Ст.В.	236.83	72.426	29.359	2.9643	0.4755	0.3031	0.1978
	О.Ст.В.	8.9264	16.364	6.0005	5.1795	2.8357	1.2326	0.4901
	Йм.П.%	72.340	82.930	88.940	93.650	96.460	98.010	99.080
0.25	Сер.	-136.5	5.2472	2.5433	2.2436	2.0798	2.0392	2.0192
	Ст.В.	$1.3 \cdot 10^4$	250.30	33.920	3.458	0.4286	0.2811	0.1854
	О.Ст.В.	85.691	14.565	15.542	12.437	24.754	14.418	29.482
	Йм.П.%	80.480	89.500	95.040	98.390	99.690	99.930	99.990
0.5	Сер.	1.3572	7.7811	2.5281	2.1523	2.0574	2.0284	2.0146
	Ст.В.	126.77	443.88	11.700	0.7840	0.3710	0.2509	0.1678
	О.Ст.В.	36.752	17.036	6.8435	4.6173	0.8930	0.4482	0.2913
	Йм.П.%	90.000	95.450	97.670	98.690	98.960	99.370	99.680
1.0	Сер.	2.1072	2.6437	2.2349	2.0933	2.0352	2.0172	2.0097
	Ст.В.	47.633	14.982	3.1150	0.5030	0.3131	0.2167	0.1473
	О.Ст.В.	938.68	57.436	2.9519	0.4892	0.3138	0.2144	0.1489
	Йм.П.%	94.500	95.490	95.900	96.500	96.050	95.810	95.910
2.0	Сер.	2.7277	2.3033	2.1127	2.0501	2.0183	2.0083	2.0057
	Ст.В.	24.735	2.1689	0.6232	0.3907	0.2653	0.1860	0.1281
	О.Ст.В.	4.7389	1.0092	0.5256	0.3406	0.2305	0.1598	0.1118
	Йм.П.%	93.620	94.300	94.860	94.290	92.740	91.760	91.860
4.0	Сер.	2.2720	2.0813	2.0530	2.0254	2.0081	2.0027	2.0031
	Ст.В.	14.124	2.9927	0.4991	0.3326	0.2321	0.1635	0.1138
	О.Ст.В.	1.7837	0.7246	0.4415	0.2965	0.2037	0.1419	0.0995
	Йм.П.%	93.900	94.620	94.680	94.180	92.930	91.960	91.790
8.0	Сер.	2.1647	2.0488	2.0245	2.0128	2.0029	1.9997	2.0016
	Ст.В.	1.4291	0.6581	0.4416	0.3008	0.2119	0.1496	0.1048
	О.Ст.В.	1.0763	0.6268	0.4146	0.2822	0.1950	0.1361	0.0956
	Йм.П.%	94.370	95.370	95.260	95.100	93.970	93.440	93.010

Табл. 2.2. Оцінка  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  при зміні  $\lambda = \sigma_u^2/\sigma_\delta^2$ 

$\lambda$		$N$						
		$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
0.125	Сер.	1.7449	1.2209	1.0015	0.9601	0.9551	0.9369	0.9504
	Ст.В.	2.3516	1.6541	1.2007	1.0004	0.8255	0.6716	0.5157
	О.Ст.В.	29335	1959.3	232.21	6.9278	2.7603	1.1593	0.4320
	Йм.П.%	97.800	97.160	96.950	96.860	96.540	89.130	81.440
0.25	Сер.	1.5619	1.2186	1.0793	1.0312	1.0011	0.9622	0.9551
	Ст.В.	2.1529	1.6558	1.3288	1.1256	0.9302	0.7569	0.5894
	О.Ст.В.	$7.4 \cdot 10^7$	17190	256.50	28.930	53.100	30.380	58.990
	Йм.П.%	97.360	97.920	98.630	99.320	99.590	99.840	100.00
0.5	Сер.	1.5170	1.3231	1.2162	1.1360	1.0745	1.0070	0.9709
	Ст.В.	2.2434	1.8442	1.5440	1.2946	1.0654	0.8606	0.6750
	О.Ст.В.	19770	$1.6 \cdot 10^5$	116.50	23.300	3.9970	1.8910	1.2080
	Йм.П.%	96.710	97.670	98.000	98.310	98.230	98.790	99.220
1.0	Сер.	1.6053	1.5054	1.3801	1.2507	1.1576	1.0587	0.9943
	Ст.В.	2.4868	2.1338	1.7811	1.4676	1.1980	0.9564	0.7485
	О.Ст.В.	$4.4 \cdot 10^6$	53000	956.30	3.2940	1.9600	1.3150	0.9055
	Йм.П.%	96.440	96.710	96.470	96.760	96.540	96.720	97.080
2.0	Сер.	1.7334	1.6816	1.5160	1.3370	1.2175	1.0962	1.0133
	Ст.В.	2.7283	2.3814	1.9629	1.5867	1.2841	1.0135	0.7876
	О.Ст.В.	2692.3	20.048	4.3288	2.6190	1.7235	1.1812	0.8226
	Йм.П.%	96.160	95.240	95.290	95.350	95.080	95.020	95.400
4.0	Сер.	1.8792	1.7958	1.5942	1.3779	1.2419	1.1119	1.0222
	Ст.В.	2.9166	2.5175	2.0521	1.6310	1.3113	1.0275	0.7928
	О.Ст.В.	720.37	27.128	3.7455	2.4334	1.6444	1.1374	0.7964
	Йм.П.%	95.340	94.600	94.690	94.920	94.360	94.660	94.920
8.0	Сер.	1.9664	1.8532	1.6210	1.3883	1.2427	1.1141	1.0249
	Ст.В.	3.0071	2.5669	2.0750	1.6285	1.3041	1.0184	0.7811
	О.Ст.В.	14.270	5.6618	3.5810	2.3893	1.6337	1.1352	0.7972
	Йм.П.%	95.210	94.700	94.780	95.190	94.610	94.930	95.480

Для оцінки  $\widehat{\beta}_1$  спостерігаємо, що коли берксонівська похибка є більшою, за класичну, то ймовірність покриття перевищує 95%, й відповідно меншою за 95%, коли більшим стає вплив класичної похибки вимірювання. При цьому, виходячи з показників Ст.В та О.Ст.В., точність оцінювання параметра  $\beta_1$  зростає зі збільшенням відношення  $\sigma_u^2/\sigma_\delta^2$ . Для оцінки  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  загалом показники ймовірності покриття зростають зі збільшенням відповідного відношення, у той час як точність трохи падає, судячи з відповідних стандартних відхилень.

У таблицях 2.3–2.4 відображено результати моделювання для порівняння різних значень  $\beta_1 \in (2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4)$ , у той час як решта елементів визначаються наступним чином:  $x \sim \mathcal{N}(-1, 1)$ ,  $u \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\delta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\beta_0 = 1$ .

Для оцінки  $\widehat{\beta}_1$  спостерігаємо, що точність повільно зростає, оскільки при  $\beta_1 = 0.25$  відношення Сер. до Ст.В складає приблизно 5 : 1, у той час як при  $\beta_1 = 8$ , вона складає 16 : 1. Але паралельно з цим, зі зростанням  $\beta_1$  поступово зменшується точність оцінки асимптотичної дисперсії та як результат – зростає ймовірність покриття. У випадку ж з  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ , йде стабільне погіршення як точності самої оцінки, так й оцінки асимптотичної дисперсії, що призводить до зростання ймовірності покриття. Ймовірно, що зі зростанням кутового коефіцієнта зростає й вплив регресора на відгук, а отже, і вплив наших класичної та берксонівської похибок на якість оцінювання.

У таблицях 2.5–2.6 відображаються результати моделювання для порівняння різних значень  $\sigma_\varepsilon^2 \in (2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3)$ , у той час як решта елементів визначаються наступним чином:  $x \sim \mathcal{N}(-1, 1)$ ,  $u \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\delta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_0 = 1$ . Як можемо бачити, при зростанні  $\sigma_\varepsilon^2$  для оцінки  $\widehat{\beta}_1$  одночасно повільно погіршується точність, але при цьому покращується якість оцінювання асимптотичної дисперсії. У випадку ж з  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ , то при зростанні істинного значення параметра  $\sigma_\varepsilon^2$  зростає як й точність самої оцінки (відношення Сер. до Ст.В: 7:9 при  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.125$  та 8:1 при  $\sigma_\varepsilon^2 = 8$ ), так і якість оцінювання асимптотичної дисперсії, в результаті чого ймовірність покриття стає ближчою до теоретичних 95%.

Також зауважимо, що серед розглянутих моделей є певний відсоток ітерацій, для яких оцінка  $\sigma_\varepsilon^2$  ставала від'ємною, й відповідно занулялась. Цей відсоток трохи зростає зі збільшенням відношення  $\sigma_u^2/\sigma_\delta^2$ , але значно істотніше він зростає

Табл. 2.3. Оцінка  $\hat{\beta}_1$  при зміні  $\beta_1$ 

$\beta_1$		$N$						
		$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
0.25	Сер.	0.2389	0.3602	0.2754	0.2606	0.2536	0.2517	0.2509
	Ст.В.	5.7663	2.3414	0.7441	0.1507	0.0986	0.0699	0.0478
	О.Ст.В.	91.653	7.8383	0.6927	0.1450	0.0980	0.0683	0.0479
	Йм.П.%	97.300	97.040	96.510	95.140	95.250	94.540	95.150
0.5	Сер.	0.5058	0.6864	0.5554	0.5224	0.5081	0.5040	0.5022
	Ст.В.	10.432	3.9478	1.0575	0.1835	0.1183	0.0831	0.0566
	О.Ст.В.	195.46	14.352	0.9647	0.1749	0.1168	0.0811	0.0568
	Йм.П.%	96.010	96.500	96.580	95.790	95.220	94.860	95.350
1.0	Сер.	1.0396	1.3388	1.1152	1.0460	1.0171	1.0084	1.0047
	Ст.В.	22.445	7.5478	1.7292	0.2785	0.1758	0.1222	0.0831
	О.Ст.В.	439.54	28.508	1.6065	0.2658	0.1732	0.1195	0.0836
	Йм.П.%	95.240	95.880	96.100	96.480	95.770	95.010	95.480
2.0	Сер.	2.1072	2.6437	2.2349	2.0933	2.0352	2.0172	2.0097
	Ст.В.	47.633	14.982	3.1150	0.5030	0.3131	0.2167	0.1473
	О.Ст.В.	938.68	57.436	2.9519	0.4892	0.3138	0.2144	0.1489
	Йм.П.%	94.500	95.490	95.900	96.500	96.050	95.810	95.910
4.0	Сер.	4.2424	5.2535	4.4744	4.1877	4.0713	4.0349	4.0199
	Ст.В.	98.487	29.971	5.9167	0.9773	0.6049	0.4184	0.2842
	О.Ст.В.	1939.0	115.38	5.6756	0.9607	0.6144	0.4188	0.2902
	Йм.П.%	94.460	95.420	95.810	96.360	96.360	95.990	96.060
8.0	Сер.	8.5128	10.473	8.9533	8.3767	8.1435	8.0702	8.0401
	Ст.В.	200.41	60.011	11.538	1.9400	1.1982	0.8289	0.5632
	О.Ст.В.	3940.5	231.30	11.136	1.9135	1.2231	0.8336	0.5774
	Йм.П.%	94.290	95.370	95.880	96.500	96.390	96.030	96.150
16.0	Сер.	17.054	20.912	17.911	16.755	16.288	16.141	16.081
	Ст.В.	404.36	120.12	22.791	3.8728	2.3899	1.6538	1.1237
	О.Ст.В.	7943.3	463.14	22.064	3.8231	2.4435	1.6653	1.1535
	Йм.П.%	94.270	95.260	95.910	96.540	96.330	96.020	96.190

Табл. 2.4. Оцінка  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  при зміні  $\beta_1$ 

$\beta_1$		$N$						
		$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
0.25	Сер.	0.5894	0.7592	0.8750	0.9423	0.9758	0.9873	0.9941
	Ст.В.	0.4823	0.4031	0.2923	0.1902	0.1236	0.0868	0.0602
	О.Ст.В.	33260	1132.0	58.610	0.1879	0.1244	0.8622	0.6040
	Йм.П.%	93.500	95.400	95.510	95.480	95.800	95.240	95.250
0.5	Сер.	0.6048	0.7386	0.8321	0.9097	0.9609	0.9796	0.9906
	Ст.В.	0.5965	0.5365	0.4407	0.3252	0.2171	0.1515	0.1032
	О.Ст.В.	$1.9 \cdot 10^5$	3558.0	119.40	0.3365	0.2155	0.1484	0.1037
	Йм.П.%	98.110	98.810	98.170	96.960	96.100	95.370	95.600
1.0	Сер.	0.7700	0.8216	0.8489	0.8815	0.9252	0.9523	0.9756
	Ст.В.	0.9895	0.8896	0.7685	0.6439	0.5081	0.3799	0.2631
	О.Ст.В.	$9.7 \cdot 10^5$	13390	308.50	0.9182	0.5606	0.3817	0.2656
	Йм.П.%	99.540	97.650	97.150	96.940	96.690	96.310	95.600
2.0	Сер.	1.6053	1.5054	1.3801	1.2507	1.1576	1.0587	0.9943
	Ст.В.	2.4868	2.1338	1.7811	1.4676	1.1980	0.9564	0.7485
	О.Ст.В.	$4.4 \cdot 10^6$	53000	956.30	3.2940	1.9600	1.3150	0.9055
	Йм.П.%	96.440	96.710	96.470	96.760	96.540	96.720	97.080
4.0	Сер.	5.0979	4.4875	3.8794	3.2192	2.6955	2.1634	1.7185
	Ст.В.	8.4790	7.0861	5.7536	4.5563	3.6200	2.7762	2.0869
	О.Ст.В.	$1.9 \cdot 10^7$	$2.1 \cdot 10^5$	33300	12.870	7.6200	5.0950	3.4960
	Йм.П.%	95.630	96.360	96.420	96.740	96.330	96.630	97.250
8.0	Сер.	19.182	16.537	14.033	11.274	9.1331	6.9883	5.1541
	Ст.В.	32.502	26.923	21.633	16.858	13.229	9.9448	7.2224
	О.Ст.В.	$7.7 \cdot 10^7$	$8.5 \cdot 10^5$	12390	51.200	30.290	20.250	13.890
	Йм.П.%	95.590	96.330	96.450	96.800	96.270	96.660	97.230
16.0	Сер.	75.688	64.800	54.710	43.515	34.943	26.405	19.065
	Ст.В.	128.69	106.30	85.160	66.012	51.623	38.623	27.726
	О.Ст.В.	$3.1 \cdot 10^8$	$3.4 \cdot 10^6$	47770	204.60	121.00	80.860	55.470
	Йм.П.%	95.430	96.210	96.490	96.750	96.270	96.610	97.210

Табл. 2.5. Оцінка  $\hat{\beta}_1$  при зміні  $\sigma_\varepsilon^2$ 

$\sigma_\varepsilon^2$		$N$						
		$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
0.125	Сер.	2.1253	2.6218	2.2379	2.0940	2.0358	2.0175	2.0100
	Ст.В.	49.743	14.995	2.9147	0.4862	0.3005	0.2079	0.1412
	О.Ст.В.	978.65	57.768	2.8061	0.4790	0.3062	0.2087	0.1446
	Йм.П.%	94.390	95.410	95.870	96.430	96.350	96.020	96.110
0.25	Сер.	2.1212	2.6267	2.2372	2.0939	2.0356	2.0174	2.0099
	Ст.В.	49.244	14.986	2.9583	0.4887	0.3024	0.2092	0.1421
	О.Ст.В.	969.52	57.690	2.8378	0.4804	0.3072	0.2094	0.1451
	Йм.П.%	94.460	95.420	95.810	96.360	96.360	95.990	96.060
0.5	Сер.	2.1154	2.6338	2.2363	2.0936	2.0354	2.0173	2.0099
	Ст.В.	48.558	14.979	3.0218	0.4935	0.3061	0.2118	0.1439
	О.Ст.В.	956.67	57.583	2.8839	0.4832	0.3093	0.2109	0.1462
	Йм.П.%	94.440	95.410	95.850	96.380	96.170	96.010	96.040
1.0	Сер.	2.1072	2.6437	2.2349	2.0933	2.0352	2.0172	2.0097
	Ст.В.	47.633	14.982	3.1150	0.5030	0.3131	0.2167	0.1473
	О.Ст.В.	938.68	57.436	2.9519	0.4892	0.3138	0.2144	0.1489
	Йм.П.%	94.500	95.490	95.900	96.500	96.050	95.810	95.910
2.0	Сер.	2.0956	2.6578	2.2331	2.0928	2.0348	2.0170	2.0096
	Ст.В.	46.415	15.009	3.2528	0.5216	0.3265	0.2264	0.1538
	О.Ст.В.	913.49	57.247	3.0544	0.5025	0.3241	0.2223	0.1550
	Йм.П.%	94.740	95.630	95.980	96.480	96.010	95.400	95.550
4.0	Сер.	2.0792	2.6777	2.2304	2.0921	2.0343	2.0167	2.0094
	Ст.В.	44.890	15.096	3.4584	0.5569	0.3515	0.2444	0.1662
	О.Ст.В.	879.08	57.016	3.2130	0.5315	0.3464	0.2390	0.1672
	Йм.П.%	95.240	95.880	96.100	96.480	95.770	95.010	95.480
8.0	Сер.	2.0561	2.7058	2.2267	2.0911	2.0335	2.0163	2.0090
	Ст.В.	43.173	15.311	3.7668	0.6216	0.3965	0.2769	0.1885
	О.Ст.В.	833.16	56.915	3.4637	0.5910	0.3902	0.2705	0.1895
	Йм.П.%	95.500	96.180	96.390	96.250	95.300	94.900	95.270

Табл. 2.6. Оцінка  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  при зміні  $\sigma_\varepsilon^2$ 

$\sigma_\varepsilon$		$N$						
		$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
0.125	Сер.	1.2231	0.9074	0.8750	0.7375	0.6043	0.4702	0.3561
	Ст.В.	2.0603	1.7122	1.3808	1.0825	0.8532	0.6458	0.4753
	О.Ст.В.	$4.8 \cdot 10^6$	53020	798.30	3.2060	1.8970	1.2680	0.8700
	Йм.П.%	95.600	96.350	96.410	96.800	96.280	96.660	97.290
0.25	Сер.	1.2745	1.1219	0.9699	0.8048	0.6739	0.5409	0.4296
	Ст.В.	2.1198	1.7715	1.4384	1.1391	0.9050	0.6940	0.5217
	О.Ст.В.	$4.7 \cdot 10^5$	52990	832.60	3.2180	1.9050	1.2740	0.8741
	Йм.П.%	95.630	96.360	96.420	96.740	96.330	96.630	97.250
0.5	Сер.	1.3804	1.2451	1.0999	0.9458	0.8233	0.6975	0.5967
	Ст.В.	2.2414	1.8920	1.5533	1.2504	1.0060	0.7870	0.6082
	О.Ст.В.	$4.6 \cdot 10^6$	52980	882.60	3.2420	1.9220	1.2860	8.8340
	Йм.П.%	95.930	96.340	96.390	96.770	96.360	96.610	97.230
1.0	Сер.	1.6053	1.5054	1.3801	1.2507	1.1576	1.0587	0.9943
	Ст.В.	2.4868	2.1338	1.7811	1.4676	1.1980	0.9564	0.7485
	О.Ст.В.	$4.4 \cdot 10^6$	53000	956.30	3.2940	1.9600	1.3150	0.9055
	Йм.П.%	96.440	96.710	96.470	96.760	96.540	96.720	97.080
2.0	Сер.	2.0788	2.0627	1.9973	1.9401	1.9271	1.9058	1.9245
	Ст.В.	2.9814	2.6149	2.2302	1.8741	1.5375	1.2197	0.9091
	О.Ст.В.	$4.2 \cdot 10^6$	53150	1066.0	3.4110	2.0470	1.3810	0.9566
	Йм.П.%	97.980	96.970	96.740	96.790	96.520	96.850	97.060
4.0	Сер.	3.0800	3.2863	3.3955	3.5258	3.7009	3.8094	3.9024
	Ст.В.	3.9582	3.5584	3.0740	2.5758	2.0324	1.5196	1.0525
	О.Ст.В.	$3.8 \cdot 10^6$	53580	1234.0	3.6730	2.2420	1.5270	1.0630
	Йм.П.%	99.540	97.650	97.150	96.940	96.690	96.310	95.600
8.0	Сер.	5.2045	5.9906	6.5333	7.0699	7.5419	7.7548	7.8852
	Ст.В.	5.8580	5.3314	4.5582	3.6447	2.6311	1.8600	1.2597
	О.Ст.В.	$3.5 \cdot 10^6$	54160	1495.0	4.2380	2.6510	1.8180	1.2680
	Йм.П.%	99.46	98.70	97.69	97.08	96.41	95.26	95.63

Табл. 2.7. Відсоток ітерацій з від'ємною оцінкою  $\sigma_\varepsilon^2$ 

		N						
		2 <sup>4</sup>	2 <sup>5</sup>	2 <sup>6</sup>	2 <sup>7</sup>	2 <sup>8</sup>	2 <sup>9</sup>	2 <sup>10</sup>
$\lambda$	0.125	45.280	47.140	42.710	34.930	23.860	14.970	05.730
	0.25	50.270	50.320	44.740	37.560	27.340	18.710	08.730
	0.5	55.000	52.010	46.220	39.570	30.510	22.370	12.350
	1.0	57.840	52.390	46.690	40.220	32.480	24.250	15.010
	2.0	58.490	51.670	46.160	40.360	32.760	24.790	15.670
	4.0	56.770	50.630	45.360	39.410	32.450	24.040	15.510
	8.0	55.510	49.070	43.990	38.370	31.640	23.200	14.280
$\beta_1$	0.25	23.750	09.860	02.090	00.080	00.000	00.000	00.000
	0.5	33.330	19.640	08.670	01.640	00.050	00.000	00.000
	1.0	47.740	38.430	27.770	16.970	06.600	01.760	00.180
	1.0	57.840	52.390	46.690	40.220	32.480	24.250	15.010
	2.0	61.180	57.840	54.380	51.000	47.250	43.930	40.330
	8.0	62.140	59.330	56.410	54.170	51.700	50.230	49.160
	16.0	62.300	59.630	56.750	54.890	52.810	51.870	51.170
$\sigma_\varepsilon^2$	0.125	61.820	58.940	55.560	53.160	50.180	48.270	46.140
	0.25	61.180	57.840	54.380	51.000	47.250	43.930	40.330
	0.5	59.870	55.930	51.860	47.000	41.420	36.340	29.780
	1.0	57.840	52.390	46.690	40.220	32.480	24.250	15.010
	2.0	53.690	46.410	39.160	29.570	19.480	10.360	02.890
	4.0	47.740	38.430	27.770	16.970	06.600	01.760	00.180
	8.0	40.400	28.360	16.750	06.560	01.020	00.030	00.000

зі збільшенням  $\beta_1$  та спадає зі збільшенням  $\sigma_\varepsilon^2$ , що наведено у таблиці 2.7.

## 2.4 Висновки

У другому розділі розглянуто модель лінійної регресії за наявності суміші берксонівської та класичної похибок у регресорі.

Визначено мінімальну кількість відомих параметрів, за якої модель є ідентифіковною. Побудовано одночасні оцінки невідомих параметрів моделі та визначено умови їх строгої консистентності.

Доведено асимптотичну нормальність оцінки кутового коефіцієнта. Визначено умови асимптотичної нормальності одночасних оцінок невідомих параметрів та продемонстрована наявність груп асимптотично незалежних

оцінок. У випадку моделі з нормально розподіленими величинами, визначено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці.

Проведено моделювання побудованих у роботі оцінок для параметрів  $\beta_1$  та  $\sigma_\varepsilon^2$ , а також їх асимптотичних дисперсій. Отримані чисельні результати показали збіжність оцінок до теоретичних значень параметрів, що підтверджує теоретичні результати. Додатково досліджено поведінку оцінок для різноманітних конфігурацій параметрів моделі.

## Розділ 3

# Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху

### 3.1 Модель змішаного дробового броунівського руху

У цьому розділі розглядається модель змішаного дробового броунівського руху за наявності лінійного тренду:

$$X_t = \theta t + \sigma W_t + \kappa B_t^H, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

де  $W$  — вінерівський процес,  $B^H$  — дробовий броунівський рух з індексом Хюрста  $H$ ,  $B^H$  та  $W$  — незалежні. Окремо також розглянемо частковий випадок моделі (3.1) за відсутності тренду ( $\theta = 0$ ):

$$X_t = \sigma W_t + \kappa B_t^H, \quad t \geq 0. \quad (3.2)$$

Для моделі (3.1) задача полягає в оцінюванні параметрів  $(\theta, H, \sigma, \kappa)^\top$  на основі спостережуваних  $\{X_{kh}, k = 0, 1, 2, \dots, N + 3\}$ ,  $h > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Базуючись на

результатах [26], визначимо наступні чотири допоміжні статистики:

$$\begin{aligned}
\phi_N &:= \frac{X_{Nh}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh}), \\
\xi_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh})^2, \\
\eta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh}) (X_{(k+2)h} - X_{(k+1)h}), \\
\zeta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+2)h} - X_{kh}) (X_{(k+4)h} - X_{(k+2)h}),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

використовуючи які, визначимо оцінки для параметрів  $(\theta, H, \sigma^2, \kappa^2)^\top$  наступним чином:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_N &= \frac{\phi_N}{h}, & \hat{H}_N &= \frac{1}{2} \log_{2^+} \frac{\zeta_N - 4\phi_N^2}{\eta_N - \phi_N^2}, \\
\hat{\kappa}_N^2 &= \frac{\eta_N - \phi_N^2}{h^{2\hat{H}_N} (2^{2\hat{H}_N-1} - 1)}, & \hat{\sigma}_N^2 &= \frac{1}{h} \left( \xi_N - \phi_N^2 - \hat{\kappa}_N^2 h^{2\hat{H}_N} \right),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

де

$$\log_{2^+} x = \begin{cases} \log_2 x, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Строго консистентність визначених оцінок була доведена у [26]. У цьому розділі ставиться задача дослідити їх асимптотичну поведінку та довести асимптотичну нормальність. Для моделі (3.2), задача аналогічно полягає в оцінюванні параметрів  $(H, \sigma, \kappa)^\top$  на основі спостережуваних  $\{X_{kh}, k = 0, 1, 2, \dots, N+3\}$ ,  $h > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . При цьому будуть використовуватись допоміжні статистики  $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$  (без  $\phi_N$ ) та оцінки невідомих параметрів будуть визначені наступним чином:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_N &= \frac{1}{2} \log_{2^+} \frac{\zeta_N}{\eta_N}, \\
\hat{\kappa}_N^2 &= \frac{\eta_N}{h^{2\hat{H}_N} (2^{2\hat{H}_N-1} - 1)}, \\
\hat{\sigma}_N^2 &= \frac{1}{h} \left( \xi_N - \hat{\kappa}_N^2 h^{2\hat{H}_N} \right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Моделі (3.1)–(3.2) будуть неідентифіковними при  $H = \frac{1}{2}$ , тому це значення буде виключатись з оцінювання.

Позначимо приріст процесу (3.1):

$$\Delta X_k := X_{(k+1)h} - X_{kh} = \theta h + \sigma \Delta W_k + \kappa \Delta B_k^H = \theta h + \Delta Z_k,$$

де  $\Delta Z_k := \sigma \Delta W_k + \kappa \Delta B_k^H$ . При цьому  $\{\Delta X_k\}$  та  $\{\Delta Z_k\}$  будуть стаціонарними гаусовими послідовностями з наступною автоковаріаційною функцією:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(i) &= \text{Cov}(\Delta X_0, \Delta X_i) = \text{Cov}(\Delta Z_0, \Delta Z_i) = \\ &= \sigma^2 \text{Cov}(\Delta W_0, \Delta W_i) + \kappa^2 \text{Cov}(\Delta B_0^H, \Delta B_i^H) = \\ &= \sigma^2 h \mathbb{1}_{\{i=0\}} + \kappa^2 h^{2H} \rho(i), \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

де

$$\rho(i) := \frac{1}{2} \left( |i+1|^{2H} - 2|i|^{2H} + |i-1|^{2H} \right) \quad (3.7)$$

позначає автоковаріаційну функцію стаціонарної послідовності  $\{B_{k+1}^H - B_k^H, k \geq 0\}$ , яку називають дробовим гауссовим шумом. Для моделі (3.2) буде мати місце рівність  $\Delta X_k = \Delta Z_k$ . Наступне твердження надає деякі важливі властивості послідовностей  $\tilde{\rho}(i)$  та  $\rho(i)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , визначених формулами (3.6) та (3.7) відповідно.

**Лема 3.1.** Нехай  $H \in (0, \frac{3}{4})$ . Тоді виконуються наступні твердження

1.  $\rho(i) \sim H(2H-1)|i|^{2H-2}$  при  $|i| \rightarrow \infty$ .
2.  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho^2(i) < \infty$ .
3. Для всіх  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha) \tilde{\rho}(i+\beta) < \infty. \quad (3.8)$$

Також, за умови  $H \in (0, \frac{1}{2})$  виконується наступне твердження:

4.  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(i) < \infty$  та

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) < \infty. \quad (3.9)$$

*Доведення.* Перші два твердження є загально відомими властивостями дробового броунівського руху [44].

Для того, щоб довести третє твердження зауважимо, що

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}^2(i) = \sigma^4 h^2 + 2\sigma^2 \kappa^2 h^{2H+1} + \kappa^4 h^{4H} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho^2(i) < \infty,$$

за другим твердженням. Тоді, використовуючи нерівність Коші-Шварца, отримаємо для всіх  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha) \tilde{\rho}(i + \beta) \leq \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}^2(i + \alpha) \cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}^2(i + \beta)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}^2(i) < \infty,$$

де рівність отримується при заміні  $i' = i + \alpha$  та  $i' = i + \beta$ .

Для доведення четвертого твердження застосуємо першу властивість  $\rho(i) \sim H(2H - 1)|i|^{2H-2}$ , при  $|i| \rightarrow \infty$ . Використовуючи стандартний критерій збіжності для рядів Рімана отримаємо, що ряд  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(i)$  є збіжним тоді й лише тоді, коли  $2H - 2 < -1$ , тобто  $H < \frac{1}{2}$ . А отже:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) = \sigma^2 h + \kappa^2 h^{2H} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(i) < \infty.$$

□

## 3.2 Асимптотична нормальність оцінок за відсутності тренду

### 3.2.1 Асимптотична нормальність допоміжних статистик

Спочатку доведемо асимптотичну нормальність для лінійної моделі за відсутності тренду (3.2). Визначимо наступний вектор:

$$\tau_N = (\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top. \quad (3.10)$$

Згідно за [26, лемою 3.2], для довільного  $H \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \tau_N &\rightarrow (\mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\eta_1, \mathbb{E}\zeta_1)^\top = \\ &= \left( \sigma^2 h + \kappa^2 h^{2H}, \kappa^2 h^{2H} \left( 2^{2H-1} - 1 \right), \kappa^2 h^{2H} 2^{2H} \left( 2^{2H-1} - 1 \right) \right)^\top =: \tau_0 \end{aligned}$$

м. н., при  $N \rightarrow \infty$ .

**Теорема 3.1.** *Нехай  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . Тоді вектор  $\tau_N$  визначений рівнянням (3.10) є асимптотично нормальним, тобто*

$$\sqrt{N}(\tau_N - \tau_0) = \sqrt{N} \begin{pmatrix} \xi_N - \mathbb{E}\xi_1 \\ \eta_N - \mathbb{E}\eta_1 \\ \zeta_N - \mathbb{E}\zeta_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\vec{0}, \tilde{\Sigma}^0)$$

з асимптотичною коваріаційною матрицею  $\tilde{\Sigma}^0$ , що визначається у явному вигляді

$$\tilde{\Sigma}^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_{11}^0 & \tilde{\Sigma}_{12}^0 & \tilde{\Sigma}_{13}^0 \\ \tilde{\Sigma}_{12}^0 & \tilde{\Sigma}_{22}^0 & \tilde{\Sigma}_{23}^0 \\ \tilde{\Sigma}_{13}^0 & \tilde{\Sigma}_{23}^0 & \tilde{\Sigma}_{33}^0 \end{pmatrix},$$

де

$$\tilde{\Sigma}_{11}^0 = 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i)^2, \quad \tilde{\Sigma}_{22}^0 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) (\tilde{\rho}(i) + \tilde{\rho}(i+2)),$$

$$\tilde{\Sigma}_{33}^0 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) (6\tilde{\rho}(i) + 8\tilde{\rho}(i+1) + 3\tilde{\rho}(i+2) + 4\tilde{\rho}(i+3) + 6\tilde{\rho}(i+4) + 4\tilde{\rho}(i+5) + \tilde{\rho}(i+6)),$$

$$\tilde{\Sigma}_{12}^0 = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i+1), \quad \tilde{\Sigma}_{13}^0 = 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) (\tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + \tilde{\rho}(i+3)),$$

$$\tilde{\Sigma}_{23}^0 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) (\tilde{\rho}(i) + 2\tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + 2\tilde{\rho}(i+3) + \tilde{\rho}(i+4)).$$

*Доведення.* Доведення складається з двох частин: у першій частині йде обчислення асимптотичної коваріаційної матриці  $\tilde{\Sigma}^0$ , а друга частина містить доведення асимптотичної нормальності.

*Частина 1: Обчислення асимптотичної коваріаційної матриці.* Знайдемо явний вигляд коваріаційної матриці  $\tilde{\Sigma}^0$  обчисливши границі при  $N \rightarrow \infty$  для наступних вибіркової дисперсій та коваріацій:  $N \text{Var}(\xi_N)$ ,  $N \text{Var}(\eta_N)$ ,  $N \text{Var}(\zeta_N)$ ,  $N \text{Cov}(\xi_N, \eta_N)$ ,  $N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N)$ ,  $N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N)$ .

*1.1 Обчислення границі для  $N \text{Var}(\xi_N)$ .* Використовуючи теорему Іссерліса<sup>1</sup>, та стаціонарність послідовності  $\{\Delta X_k\}$ , можемо виписати

$$\text{Cov}((\Delta X_k)^2, (\Delta X_j)^2) = 2 \text{Cov}((\Delta X_k), (\Delta X_j))^2 = 2\tilde{\rho}(k-j)^2.$$

Отже,

$$N \text{Var}(\xi_N) = \frac{1}{N} \text{Var} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2 \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}((\Delta X_k)^2, (\Delta X_j)^2) =$$

<sup>1</sup>Теорема Іссерліса [22]: якщо  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  – є центрованим багатовимірним випадковим нормально розподіленим вектором, то для нього виконуватиметься:  $\mathbb{E}(X_1 X_2 X_3 X_4) = \mathbb{E}X_1 X_2 \mathbb{E}X_3 X_4 + \mathbb{E}X_1 X_3 \mathbb{E}X_2 X_4 + \mathbb{E}X_1 X_4 \mathbb{E}X_2 X_3$ . Зокрема,  $\text{Cov}(X_1^2, X_2^2) = 2 \text{Cov}(X_1, X_2)^2$ .

$$= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2. \quad (3.11)$$

Далі, за допомогою зміни порядку підсумовування

$$\begin{aligned} N \operatorname{Var}(\xi_N) &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=k-N+1}^k \tilde{\rho}(i)^2 = \frac{2}{N} \sum_{i=-N+1}^0 \sum_{k=0}^{N-1+i} \tilde{\rho}(i)^2 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i}^{N-1} \tilde{\rho}(i)^2 = \\ &= 2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i)^2 \rightarrow 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)^2, \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.12)$$

де перехід до границі ґрунтується на теоремі про мажоровану збіжність за лемою 3.1.

1.2. Обчислення границі для  $N \operatorname{Cov}(\xi_N, \eta_N)$ . Запишемо

$$\begin{aligned} N \operatorname{Cov}(\xi_N, \eta_N) &= \frac{1}{N} \operatorname{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2, \sum_{j=0}^{N-1} \Delta X_j \Delta X_{j+1} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Cov} \left( (\Delta X_k)^2, \Delta X_j \Delta X_{j+1} \right), \end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса,

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov} \left( (\Delta X_k)^2, \Delta X_j \Delta X_{j+1} \right) &= \mathbb{E}(\Delta X_k)^2 \Delta X_j \Delta X_{j+1} - \mathbb{E}(\Delta X_k)^2 \mathbb{E} \Delta X_j \Delta X_{j+1} = \\ &= \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_j \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_{j+1} + \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_{j+1} \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_j = \\ &= 2 \operatorname{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_j) \operatorname{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_{j+1}) = 2\tilde{\rho}(j-k)\tilde{\rho}(j-k+1). \end{aligned}$$

Використовуючи аргументацію, аналогічну до (3.12), отримаємо

$$\begin{aligned} N \operatorname{Cov}(\xi_N, \eta_N) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j-k)\tilde{\rho}(j-k+1) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i+1) = \\ &= 2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i+1) \rightarrow 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i+1), \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ , де останній ряд є збіжним за лемою 3.1.

1.3. Обчислення границі для  $N \operatorname{Var}(\eta_N)$ . Маємо

$$N \operatorname{Var}(\eta_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_j \Delta X_{j+1}).$$

За теоремою Іссерліса,

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_j \Delta X_{j+1}) = \\
& = \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_{k+1} \Delta X_j \Delta X_{j+1} - \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_{k+1} \mathbb{E} \Delta X_j \Delta X_{j+1} = \\
& = \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_{k+1} \mathbb{E} \Delta X_j \Delta X_{j+1} + \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_j \mathbb{E} \Delta X_{k+1} \Delta X_{j+1} = \\
& \quad + \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_{j+1} \mathbb{E} \Delta X_{k+1} \Delta X_j - \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_{k+1} \mathbb{E} \Delta X_j \Delta X_{j+1} = \\
& = \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_j \mathbb{E} \Delta X_{k+1} \Delta X_{j+1} + \mathbb{E} \Delta X_k \Delta X_{j+1} \mathbb{E} \Delta X_{k+1} \Delta X_j = \\
& = \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_j) \text{Cov}(\Delta X_{k+1}, \Delta X_{j+1}) = \\
& \quad + \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_{j+1}) \text{Cov}(\Delta X_{k+1}, \Delta X_j) = \\
& = (\text{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_j))^2 + \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_{j+1}) \text{Cov}(\Delta X_{k+1}, \Delta X_j) = \\
& = \tilde{\rho}(k-j)^2 + \tilde{\rho}(k-j+1)\tilde{\rho}(k-j-1),
\end{aligned}$$

де  $\text{Cov}(\Delta X_{k+1}, \Delta X_{j+1}) = \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_j) = \text{Cov}(\Delta X_0, \Delta X_{k-j})$ , оскільки  $\{\Delta X_k\}$  є стаціонарною гаусовою послідовністю. Таким чином

$$N \text{Var}(\eta_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2 + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+1)\tilde{\rho}(k-j-1). \quad (3.13)$$

Згідно за (3.11) та (3.12), перший елемент у правій частині виразу (3.13)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2 = \frac{N}{2} \text{Var}(\xi_N) \rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)^2, \quad N \rightarrow \infty.$$

Другий елемент може бути оцінений аналогічно до (3.12) наступним чином:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+1)\tilde{\rho}(k-j-1) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-(N-1)}^j \tilde{\rho}(i-1)\tilde{\rho}(i+1) = \\
& = \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i-1)\tilde{\rho}(i+1) \rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i-1)\tilde{\rho}(i+1) = \\
& = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i+2), \quad \text{при } N \rightarrow \infty.
\end{aligned} \quad (3.14)$$

Об'єднавши (3.13)–(3.14), отримаємо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Var}(\eta_N) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i) + \tilde{\rho}(i+2) \right).$$

1.4. Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N)$ . Запишемо вираз  $N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N)$  у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N) &= \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2, \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta X_j + \Delta X_{j+1})(\Delta X_{j+2} + \Delta X_{j+3}) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_{j+\alpha} \Delta X_{j+\beta}). \end{aligned}$$

Аналогічно до попереднього, використаємо теорему Іссерліса та отримаємо

$$\begin{aligned} N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N) &= \frac{2}{N} \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j-k+\alpha) \tilde{\rho}(j-k+\beta) = \\ &= 2 \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+\alpha) \tilde{\rho}(i+\beta) \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha) \tilde{\rho}(i+\beta) = 2 \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+\beta-\alpha) = \\ &= 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + \tilde{\rho}(i+3) \right), \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

1.5. Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N)$ . Аналогічно до попередніх міркувань,

$$\begin{aligned} N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N) &= \\ &= \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \Delta X_k \Delta X_{k+1}, \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta X_j + \Delta X_{j+1})(\Delta X_{j+2} + \Delta X_{j+3}) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_{j+\alpha} \Delta X_{j+\beta}). \end{aligned}$$

Й використавши знову теорему Іссерліса, отримаємо

$$\begin{aligned} N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N) &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\gamma=0}^1 \tilde{\rho}(j-k+\alpha-\gamma) \tilde{\rho}(j-k-1+\beta+\gamma) = \\ &= \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+\alpha-\gamma) \tilde{\rho}(i+\beta-1+\gamma) \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha-\gamma) \tilde{\rho}(i+\beta-1+\gamma), \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Відповідно до описаного вище, спростимо останній вираз. Таким чином отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \operatorname{Cov}(\eta_N, \zeta_N) &= \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=2}^3 \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i + \beta - 1 + 2\gamma - \alpha) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i) + 2\tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + 2\tilde{\rho}(i+3) + \tilde{\rho}(i+4) \right). \end{aligned}$$

1.6. Обчислення границі для  $N \operatorname{Var}(\zeta_N)$ . Матимемо, що

$$N \operatorname{Var}(\zeta_N) = \frac{1}{N} \sum_{a,b,c,d=0}^1 \sum_{k,j=0}^{N-1} \operatorname{Cov}(\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b+2}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d+2}).$$

За теоремою Іссерліса:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b+2}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d+2}) &= \\ &= \sum_{\gamma=0}^1 \operatorname{Cov}(\Delta X_{k+a+\gamma(2+b-a)}, \Delta X_{j+c}) \operatorname{Cov}(\Delta X_{k+b+2+\gamma(a-b-2)}, \Delta X_{j+d+2}) = \\ &= \sum_{\gamma=0}^1 \tilde{\rho}(j - k - a + c - \gamma(2 + b - a)) \tilde{\rho}(j - k - b + d - \gamma(a - b - 2)). \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} N \operatorname{Var}(\zeta_N) &= \frac{1}{N} \sum_{a,b,c,d,\gamma=0}^1 \sum_{k,j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j - k - a + c - \gamma(2 + b - a)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(j - k - b + d - \gamma(a - b - 2)) = \\ &= \sum_{a,b,c,d,\gamma=0}^1 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left( 1 - \frac{|i|}{N} \right) \tilde{\rho}(i + c - a - \gamma(2 + b - a)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(i + d - b - \gamma(a - b - 2)) \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{a,b,c,d,\gamma=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i + c - a - \gamma(2 + b - a)) \tilde{\rho}(i + d - b - \gamma(a - b - 2)), \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Після спрощення:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \operatorname{Var}(\zeta_N) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 6\tilde{\rho}(i) + 8\tilde{\rho}(i+1) + 3\tilde{\rho}(i+2) + \right. \\ &\quad \left. + 4\tilde{\rho}(i+3) + 6\tilde{\rho}(i+4) + 4\tilde{\rho}(i+5) + \tilde{\rho}(i+6) \right). \end{aligned}$$

Частина 2: Доведення асимптотичної нормальності. Позначимо  $Y_k = \left( Y_k^{(1)}, Y_k^{(2)}, Y_k^{(3)} \right)^\top$ , де

$$Y_k^{(1)} := \Delta X_k, \quad Y_k^{(2)} := \Delta X_{k+1}, \quad Y_k^{(3)} := \Delta X_{k+2} + \Delta X_{k+3}. \quad (3.15)$$

Тоді можна записати допоміжні статистики у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \xi_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( Y_k^{(1)} \right)^2, & \eta_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k^{(1)} Y_k^{(2)}, \\ \zeta_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)} \right) Y_k^{(3)}. \end{aligned}$$

Доведемо асимптотичну нормальність вектору  $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$  використовуючи теорему Крамера-Вольда. Нехай  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  такі, що  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ . Визначимо функцію

$$f(y) = \alpha y_1^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma (y_1 + y_2) y_3, \quad y = (y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{R}^3,$$

й таким чином отримаємо

$$\alpha \xi_N + \beta \eta_N + \gamma \zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(Y_k).$$

Доведемо, що послідовність

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \left( \alpha (\xi_N - \mathbb{E} \xi_N) + \beta (\eta_N - \mathbb{E} \eta_N) + \gamma (\zeta_N - \mathbb{E} \zeta_N) \right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left( f(Y_k) - \mathbb{E} f(Y_k) \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

збігається до нормального розподілу. Це можна продемонструвати, використавши центральну граничну теорему для стаціонарних векторів [8, теорема 4], див. також [43, теорему 1.1]. Перед тим як застосувати відповідну теорему, необхідно підтвердити виконання наступної умови:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| r^{(p,l)}(j) \right|^q < \infty, \quad \text{для всіх } p, l \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.17)$$

де

$$r^{(p,l)}(k) := \text{Cov} \left( Y_1^{(p)}, Y_{1+k}^{(l)} \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

та  $q$  — ранг Ерміта <sup>2</sup> функції  $f$  відносно  $Y_1$ .

Зауважимо, що у нашому випадку ранг Ерміта  $q \geq 2$ . Маємо, що  $f(Y_1)$  є поліномом другого порядку від центрованих нормально розподілених випадкових величин  $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, Y_1^{(3)}$ , який складається виключно з членів другого порядку, а саме  $(Y_1^{(1)})^2, Y_1^{(1)}Y_1^{(2)}$  та  $Y_1^{(1)}Y_1^{(3)}$ . Тоді, згідно з теоремою Іссерліса, математичне сподівання добутку  $f(Y_1)$  та будь-якого з  $Y_1^{(t)}, t \in \{1, 2, 3\}$ , буде дорівнювати нулю. Усі отримані в результаті такого множення члени будуть мати вигляд  $\mathbb{E}G_1G_2G_3$ , де  $(G_1, G_2, G_3)^\top$  — центрований багатовимірний нормально розподілений випадковий вектор, й за теоремою Іссерліса  $\mathbb{E}G_1G_2G_3 = 0$ . Отже, математичне сподівання добутку полінома  $f(Y_1)$  й довільного поліному першого порядку відносно  $\{Y_1\}$  (лінійна комбінація  $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, Y_1^{(3)}$ ) буде дорівнювати нулю, а отже й ранг Ерміта  $q$  функції  $f$  відносно  $Y_1$  не дорівнює 1.

Оскільки  $q \geq 2$ , то для перевірки умови (3.17), достатньо показати, що

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| r^{(p,l)}(j) \right|^2 < \infty, \quad \text{для всіх } p, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.18)$$

При цьому (3.18) випливає з леми 3.1, оскільки, використавши рівняння (3.15) та означення  $\tilde{\rho}$ , можна представити  $r^{(p,l)}$  через  $\tilde{\rho}$  у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} r^{(1,1)}(k) &= r^{(2,2)}(k) = \tilde{\rho}(k), & r^{(1,2)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1), & r^{(2,1)}(k) &= \tilde{\rho}(k-1), \\ r^{(1,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k+2) + \tilde{\rho}(k+3), & r^{(3,1)}(k) &= \tilde{\rho}(k-2) + \tilde{\rho}(k-3), \\ r^{(2,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1) + \tilde{\rho}(k+2), & r^{(3,2)}(k) &= \tilde{\rho}(k-1) + \tilde{\rho}(k-2), \\ r^{(2,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1) + 2\tilde{\rho}(k) + \tilde{\rho}(k-1). \end{aligned}$$

Отримані ряди будуть дійсно збігатись, наприклад ряд

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( r^{(1,3)}(k) \right)^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\tilde{\rho}(k+2) + \tilde{\rho}(k+3))^2 = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k+2)^2 + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k+2)\tilde{\rho}(k+3) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k+3)^2, \end{aligned}$$

збігається як скінченна сума рядів, збіжних за лемою 3.1. Аналогічно збігаються й інші ряди визначені у (3.18).  $\square$

<sup>2</sup>Число  $q$  називається рангом Ерміта функції  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  відносно випадкового вектора  $X$ , якщо (а)  $\mathbb{E}[(f(X) - \mathbb{E}[f(X)])p_m(X)] = 0$  для довільного многочлена  $p_m$  (на  $\mathbb{R}^d$ ) степеня  $m \leq q-1$ ; та (б) існує многочлен  $p_q$  степеня  $q$  такий, що  $\mathbb{E}[(f(X) - \mathbb{E}[f(X)])p_q(X)] \neq 0$ , див. [43].

*Зауваження 3.1.* Умова на  $H < \frac{3}{4}$  є істотною, оскільки без неї ряди визначені у (3.18) не будуть збігатись. Більш того, за  $H > \frac{3}{4}$  оцінка  $\tau_N$  не буде асимптотично нормальною: використовуючи результати [30] можна показати, що має місце збіжність певним чином нормованого вектору  $\tau_N - \tau_0$  до спеціального негауссового розподілу.

### 3.2.2 Асимптотична нормальність оцінок параметрів моделі

У цьому пункті ми наведемо основний результат про асимптотичні властивості наших оцінок (3.5). Позначимо

$$\vartheta = (H, \kappa^2, \sigma^2)^\top, \quad \hat{\vartheta}_N = (\hat{H}_N, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2)^\top, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (3.19)$$

**Теорема 3.2.** Нехай  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . Тоді оцінка  $\hat{\vartheta}_N$  є асимптотично нормальною

$$\sqrt{N} \left( \hat{\vartheta}_N - \vartheta \right) = \sqrt{N} \begin{pmatrix} \hat{H}_N - H \\ \hat{\kappa}_N^2 - \kappa^2 \\ \hat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( \vec{0}, \Sigma^0 \right)$$

з асимптотичною коваріаційною матрицею  $\Sigma^0$ , що визначається явно за формулою

$$\Sigma^0 = g'(\tau_0) \tilde{\Sigma}^0 (g'(\tau_0))^\top,$$

де матриця  $\tilde{\Sigma}^0$  визначена у теоремі 3.1 та

$$g'(\tau_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2\kappa^2 h^{2H} (2^{2H-1}-1) \log 2} & \frac{1}{2\kappa^2 h^{2H} 2^{2H} (2^{2H-1}-1) \log 2} \\ 0 & \frac{2}{h^{2H}} \frac{(2+\log_{2^+} h) 2^{2H}-2(\log_{2^+} h+1)}{(2^{2H}-2)^2} & \frac{2}{h^{2H}} \frac{(2 \log_{2^+} h - (\log_{2^+} h+1) 2^{2H})}{2^{2H} (2^{2H}-2)^2} \\ \frac{1}{h} & \frac{4(1-2^{2H})}{h(2^{2H}-2)^2} & \frac{2}{h(2^{2H}-2)^2} \end{pmatrix}.$$

*Доведення.* Введемо наступну функцію відносно параметра  $\tau = (\xi, \eta, \zeta)^\top$ :

$$g(\tau) = (g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)),$$

де

$$g_1(\tau) = g_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \log_{2^+} \frac{\zeta}{\eta},$$

$$g_2(\tau) = g_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\eta}{h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} (2^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)-1} - 1)},$$

$$g_3(\tau) = g_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{h} \left( \xi - g_2(\xi, \eta, \zeta) h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} \right).$$

Тоді оцінка (3.19) може бути представлена як

$$\hat{\vartheta}_N = (\widehat{H}_N, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2)^\top = g(\xi_N, \eta_N, \zeta_N).$$

Для доведення асимптотичної нормальності оцінки  $\hat{\vartheta}_N$  застосуємо дельта-метод до функції  $g(\tau)$  та послідовності  $\tau_N$ , яка є асимптотично нормальною за теоремою 3.1. Для цього нам потрібно знайти матрицю  $g'(\tau)$  та продемонструвати її невиродженість у точці  $\tau_0$ .

Почнемо з обчислення частинних похідних для функції  $g_1$ . Оскільки

$$g_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \log_{2^+} \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\log \zeta - \log \eta}{2 \log 2},$$

то можемо бачити, що

$$\frac{\partial g_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\eta \log 2}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \zeta} = \frac{1}{2\zeta \log 2}.$$

Для обчислення частинних похідних функцій  $g_2$  та  $g_3$  визначимо наступні допоміжні функції:

$$h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} = h^{\log_{2^+} \frac{\zeta}{\eta}} = \left( \frac{\zeta}{\eta} \right)^{\log_{2^+} h} = \left( \frac{\zeta}{\eta} \right)^c,$$

де  $c = \log_{2^+} h$ , та

$$2^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)-1} - 1 = 2^{\log_{2^+} \frac{\zeta}{\eta} - 1} - 1 = \frac{\zeta}{2\eta} - 1 = \frac{\zeta - 2\eta}{2\eta}.$$

Тоді

$$g_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\eta}{h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} (2^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)-1} - 1)} = \frac{\eta}{\left( \frac{\zeta}{\eta} \right)^c \cdot \frac{\zeta - 2\eta}{2\eta}} = \frac{2\eta^{2+c}}{\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c}.$$

Отже, відповідні частинні похідні дорівнюватимуть наступному:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial \eta} &= 2 \frac{(2+c)\eta^{1+c}(\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c) + 2\eta^{2+c}\zeta^c}{(\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c)^2} = \\ &= 2 \frac{(2+c)\eta^{1+c}\zeta^{c+1} - 2(c+1)\eta^{2+c}\zeta^c}{(\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c)^2} = 2 \left( \frac{\eta}{\zeta} \right)^c \frac{(2+c)\eta\zeta - 2(c+1)\eta^2}{(\zeta - 2\eta)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \zeta} = 2\eta^{2+c} \cdot \frac{-1}{(\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c)^2} ((c+1)\zeta^c - 2c\eta\zeta^{c-1}) = 2 \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^c \frac{\eta^2(2c\eta - (c+1)\zeta)}{\zeta(\zeta - 2\eta)^2}.$$

Функція  $g_3$  може бути представлена у вигляді

$$g_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{h} \left( \xi - \frac{\eta}{h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} (2^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)-1})} \cdot h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} \right) = \frac{1}{h} \left( \xi - \frac{2\eta^2}{\zeta - 2\eta} \right).$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{h}, \\ \frac{\partial g_3}{\partial \eta} &= \frac{(-1)}{h} \cdot \frac{4\eta(\zeta - 2\eta) - 2\eta^2(-2)}{(\zeta - 2\eta)^2} = \frac{4\eta(\eta - \zeta)}{h(\zeta - 2\eta)^2}, \\ \frac{\partial g_3}{\partial \zeta} &= \frac{2\eta^2}{h(\zeta - 2\eta)^2}. \end{aligned}$$

Остаточно, отримуємо наступну матрицю похідних:

$$\begin{aligned} g'(\xi, \eta, \zeta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} & \frac{\partial g_1}{\partial \eta} & \frac{\partial g_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \xi} & \frac{\partial g_2}{\partial \eta} & \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \xi} & \frac{\partial g_3}{\partial \eta} & \frac{\partial g_3}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2\eta \log 2} & \frac{1}{2\zeta \log 2} \\ 0 & 2\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^c \frac{(2+c)\eta\zeta - 2(c+1)\eta^2}{(\zeta - 2\eta)^2} & 2\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^c \frac{\eta^2(2c\eta - (c+1)\zeta)}{\zeta(\zeta - 2\eta)^2} \\ \frac{1}{h} & \frac{4\eta(\eta - \zeta)}{h(\zeta - 2\eta)^2} & \frac{2\eta^2}{h(\zeta - 2\eta)^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де  $c = \log_{2^+} h$ .

При цьому, у точці  $\tau = \tau_0$ :

$$g'(\tau_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2\kappa^2 h^{2H} (2^{2H-1} - 1) \log 2} & \frac{1}{2\kappa^2 h^{2H} 2^{2H} (2^{2H-1} - 1) \log 2} \\ 0 & \frac{2}{h^{2H}} \frac{(2 + \log_{2^+} h) 2^{2H} - 2(\log_{2^+} h + 1)}{(2^{2H} - 2)^2} & \frac{2}{h^{2H}} \frac{(2 \log_{2^+} h - (\log_{2^+} h + 1) 2^{2H})}{2^{2H} (2^{2H} - 2)^2} \\ \frac{1}{h} & \frac{4(1 - 2^{2H})}{h(2^{2H} - 2)^2} & \frac{2}{h(2^{2H} - 2)^2} \end{pmatrix}.$$

Випишемо визначник матриці  $g'(\xi, \eta, \zeta)$ :

$$\begin{aligned} \det(g'(\xi, \eta, \zeta)) &= \frac{\partial g_3}{\partial \xi} \left( \frac{\partial g_1}{\partial \eta} \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial g_1}{\partial \zeta} \frac{\partial g_2}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{h} \left( \left( \frac{-1}{2 \log 2} \right) \cdot \frac{1}{\eta} \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} + \left( \frac{-1}{2 \log 2} \right) \cdot \frac{1}{\zeta} \frac{\partial g_2}{\partial \eta} \right) = \\ &= \left( \frac{-1}{2h \log 2} \right) \cdot \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial g_2}{\partial \eta} \right) = \\ &= \left( \frac{-1}{h \log 2} \right) \cdot \left( \frac{\eta}{\zeta} \right)^c \cdot \left( \frac{\eta^2(2c\eta - (c+1)\zeta)}{\zeta\eta(\zeta - 2\eta)^2} + \frac{(2+c)\zeta\eta - 2(c+1)\eta^2}{\zeta(\zeta - 2\eta)^2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{-1}{\zeta(\zeta - 2\eta)^2 h \log 2} \right) \cdot \left( \frac{\eta}{\zeta} \right)^c \cdot (2c\eta^2 - c\eta\zeta - \eta\zeta + 2\zeta\eta + c\eta\zeta - 2\eta^2 - 2c\eta^2) = \\
&= \left( \frac{-1}{\zeta(\zeta - 2\eta)^2 h \log 2} \right) \cdot \left( \frac{\eta}{\zeta} \right)^c \cdot (\zeta\eta - 2\eta^2) = \left( \frac{\eta}{\zeta} \right)^{c+1} \cdot \frac{1}{(2\eta - \zeta)h \log 2}.
\end{aligned}$$

Тоді у точці  $\tau = \tau_0$ :

$$\begin{aligned}
\det(g'(\tau_0)) &= (2^{-2H})^{c+1} \frac{1}{(-2)\kappa^2 h^{2H+1} (2^{2H-1} - 1)^2 \log 2} = \\
&= \frac{1}{2^{2H} h^{2H}} \cdot \frac{-1}{2\kappa^2 h^{2H+1} (2^{2H-1} - 1)^2 \log 2} = \\
&= -\frac{1}{2^{2H+1} \kappa^2 h^{4H+1} (2^{2H-1} - 1)^2 \log 2}.
\end{aligned}$$

Остаточно, визначник матриці похідних

$$\det(g'(\tau_0)) = -\frac{1}{2^{2H+1} \kappa^2 h^{4H+1} (2^{2H-1} - 1)^2 \log 2}$$

є коректно визначеним при  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$  та не дорівнює нулю.

Таким чином, матриця похідних є невинродженою у точці  $\tau = \tau_0$ , а отже може бути застосований дельта-метод (див. [24, теорема В.6]). З цього методу випливає твердження теореми та формула для обчислення асимптотичної коваріаційної матриці  $\Sigma^0$ .  $\square$

### 3.2.3 Моделювання

У цьому пункті представлено результати дослідження ефективності побудованих оцінок за допомогою чисельних моделювань методом Монте-Карло. Для кожної згенерованої траєкторії ми оцінюємо асимптотичні коваріаційні матриці визначені у теоремах 3.1 та 3.2 використовуючи значення параметрів отримані з оцінок (3.5). Для кожного теоретичного набору параметрів ми генеруємо 1000 траєкторій процесу (3.2) та обчислюємо вибіркові середні (Сер.) й стандартні відхилення (Ст.В.) для значень оцінок, середнє оцінене теоретичне стандартне відхилення (О.Ст.В.) — середній квадратний корінь з оціненої асимптотичної дисперсії поділений на  $N$  ( $\sqrt{\hat{\Sigma}_{ii}^0/N}$ ) та ймовірність покриття (Йм.П.) для  $\alpha = 5\%$  на основі оцінок для асимптотичних дисперсій.

Для чисельної апроксимації граничних коваріаційних матриць, ряди вигляду (3.8) розбиватимемо на суму двох збіжних рядів

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha) \tilde{\rho}(i + \beta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha) \tilde{\rho}(i + \beta) + \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + 1 - \alpha) \tilde{\rho}(i + 1 - \beta)$$

де  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ .

Після цього, ряди вигляду  $\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha) \tilde{\rho}(i + \beta)$  будуть чисельно апроксимуватись з точністю  $\delta = 10^{-3}$  за допомогою обчислення часткових сум  $S_m = \sum_{i=0}^m \tilde{\rho}(i + \alpha) \tilde{\rho}(i + \beta)$ , де  $m$  – найменший таке число, що  $|S_m - S_{m-1}| < 10^{-3}$ . Отримані апроксимації будуть використовуватись для обчислення асимптотичних коваріаційних матриць, визначених теоремами 3.1 та 3.2. При цьому для симуляцій ми будемо використовувати лише значення  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ , оскільки при  $H = \frac{1}{2}$  модель (3.2) є неідентифіковною, а при  $H \in (\frac{3}{2}, 1)$  ряди визначені у (3.8) будуть розбіжні за лемою 3.1, а отже не будуть визначені відповідні асимптотичні коваріаційні матриці. Більш того, у випадках, коли оцінений параметр  $\widehat{H}_N$  буде виходити за межі  $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ , асимптотичні коваріаційні матриці й відповідні статистики (О.Ст.В. та Йм.П.) будуть вважатись невизначеними.

У таблицях 3.1–3.3 представлені результати застосування оцінок  $\widehat{H}_N, \widehat{\kappa}_N^2$ , та  $\widehat{\sigma}_N^2$  для наступних істинних значень теоретичних параметрів:  $\kappa = 2.5, \sigma = 1.5$ . При цьому спостерігаємо, що ймовірність покриття та оцінки асимптотичної дисперсії кращі при  $H \in (0, 1/2)$  у порівнянні з  $H \in (1/2, 3/4)$ , а саме – ймовірність покриття є ближчою до теоретичних 95%, а різниця між О.Ст.В. та Ст.В стає меншою. Більш того, чим ближчий параметр  $H$  до значення  $1/2$ , тим менша швидкість збіжності побудованих оцінок й це відповідає результатам моделювання отриманим у [26]. У той же час наші оцінки асимптотичної дисперсії для допоміжних статистик (3.3) побудовані у теоремі 3.1 залишаються досить точними для усіх значень  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . Результати відповідного моделювання представлені у таблиці 3.4 оцінками ймовірності покриття. Отже, відповідно до результатів моделювання, асимптотична коваріаційна матриця визначена у теоремі 3.1 не так сильно залежить від значень індексу Хюрста у порівнянні з матрицею  $\Sigma^0$  з теореми 3.2.

Додатково, для різних значень кроку  $h$  результати моделювання ймовірності покриття оцінок  $(\widehat{H}_N, \widehat{\kappa}_N^2, \widehat{\sigma}_N^2)^\top$  залишаються відносно однаковими, що продемонстровано у таблиці 3.5.

Частково на спостережувані результати впливає швидкість збіжності у

Табл. 3.1. Оцінка  $\widehat{H}_N$  при  $\kappa^2 = 6.25$ ,  $\sigma^2 = 2.25$  ( $h = 1$ )

$H$			$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	$\widehat{H}_N$	Сер.	0.0970	0.0958	0.0981	0.1004	0.1001	0.1003	0.1000
		Ст.В.	0.2579	0.1303	0.0622	0.0311	0.0154	0.0078	0.0038
		О.Ст.В.	0.2525	0.1243	0.0621	0.0311	0.0155	0.0078	0.0039
		Йм.П.%	100.00	100.00	98.089	95.000	95.100	94.600	95.300
0.2	$\widehat{H}_N$	Сер.	0.1823	0.1998	0.2018	0.1999	0.2008	0.2003	0.2000
		Ст.В.	0.3135	0.1451	0.0721	0.0373	0.0176	0.0090	0.0043
		О.Ст.В.	0.3027	0.1479	0.0728	0.0362	0.0181	0.0090	0.0045
		Йм.П.%	100.00	100.00	97.522	94.880	95.600	95.500	96.400
0.3	$\widehat{H}_N$	Сер.	0.2939	0.2888	0.2975	0.2983	0.2989	0.2998	0.3000
		Ст.В.	0.4722	0.2010	0.0937	0.0456	0.0237	0.0114	0.0058
		О.Ст.В.	0.4145	0.1976	0.0954	0.0471	0.0235	0.0117	0.0059
		Йм.П.%	100.00	100.00	97.101	97.306	95.095	96.100	95.300
0.4	$\widehat{H}_N$	Сер.	0.4281	0.3790	0.4052	0.4003	0.4009	0.3995	0.3994
		Ст.В.	0.7990	0.4221	0.1686	0.0842	0.0403	0.0202	0.0103
		О.Ст.В.	0.6739	0.3671	0.1715	0.0823	0.0404	0.0201	0.0100
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.636	96.019	97.005	97.081	94.795
0.6	$\widehat{H}_N$	Сер.	0.5963	0.5576	0.5903	0.5968	0.5999	0.5996	0.5999
		Ст.В.	0.5792	0.3125	0.1232	0.0575	0.0290	0.0145	0.0070
		О.Ст.В.	0.4746	0.2313	0.1119	0.0556	0.0279	0.0140	0.0070
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	96.636	95.755	96.238	95.496
0.7	$\widehat{H}_N$	Сер.	0.6650	0.6931	0.6977	0.6984	0.6997	0.6997	0.7000
		Ст.В.	0.2818	0.1044	0.0491	0.0254	0.0130	0.0065	0.0031
		О.Ст.В.	0.2261	0.0983	0.0479	0.0237	0.0117	0.0059	0.0029
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	98.091	92.400	93.100	93.900

Табл. 3.2. Оцінка  $\hat{\kappa}_N^2$  при  $\kappa^2 = 6.25$ ,  $\sigma^2 = 2.25$  ( $h = 1$ )

$H$			$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	$\hat{\kappa}_N^2$	Сер.	13.386	6.7888	6.3329	6.2775	6.2607	6.2553	6.2505
		Ст.В.	129.27	2.6197	0.6106	0.2911	0.1447	0.0715	0.0357
		О.Ст.В.	3.0235	1.3887	0.6301	0.2954	0.1456	0.0726	0.0362
		Йм.П.%	100.00	100.00	98.301	96.100	94.800	95.800	94.700
0.2	$\hat{\kappa}_N^2$	Сер.	13.197	10.643	6.5692	6.3171	6.2721	6.2574	6.2505
		Ст.В.	86.074	47.739	1.3784	0.5680	0.2560	0.1269	0.0604
		О.Ст.В.	4.0819	2.0720	1.0934	0.5279	0.2569	0.1271	0.0633
		Йм.П.%	100.00	97.072	93.427	94.076	95.500	95.600	95.900
0.3	$\hat{\kappa}_N^2$	Сер.	14.273	11.922	8.2646	6.4918	6.2916	6.2598	6.2546
		Ст.В.	64.482	37.898	13.341	1.2972	0.5948	0.2777	0.1425
		О.Ст.В.	6.2376	3.3884	2.0420	1.1681	0.5821	0.2844	0.1414
		Йм.П.%	99.367	88.441	86.430	92.457	94.294	96.100	94.200
0.4	$\hat{\kappa}_N^2$	Сер.	8.5306	7.9877	25.768	13.869	8.0469	6.4827	6.2735
		Ст.В.	54.206	26.911	206.04	52.539	9.9068	1.3526	0.5839
		О.Ст.В.	13.130	6.3713	4.2116	2.9711	2.0175	1.1250	0.5636
		Йм.П.%	98.131	71.642	70.909	76.592	88.412	92.216	94.094
0.6	$\hat{\kappa}_N^2$	Сер.	9.1450	11.089	26.615	14.947	10.454	6.4324	6.2924
		Ст.В.	39.869	33.461	269.74	111.44	104.39	1.1123	0.5002
		О.Ст.В.	17.947	9.0522	4.5897	2.9458	1.7836	0.9968	0.4920
		Йм.П.%	100.00	99.257	83.200	83.792	88.639	93.626	94.795
0.7	$\hat{\kappa}_N^2$	Сер.	15.468	16.003	7.0431	6.4245	6.2946	6.2684	6.2531
		Ст.В.	57.096	184.49	4.8880	0.9865	0.4686	0.2314	0.1112
		О.Ст.В.	8.5457	3.5712	1.7154	0.8521	0.4136	0.2044	0.1016
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.560	94.592	92.100	91.800	91.900

Табл. 3.3. Оцінка  $\hat{\sigma}_N^2$  при  $\kappa^2 = 6.25$ ,  $\sigma^2 = 2.25$  ( $h = 1$ )

$H$			$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	$\hat{\sigma}_N^2$	Сер.	2.6500	2.2654	2.1762	2.2250	2.2419	2.2457	2.2499
		Ст.В.	1.1841	0.9134	0.5940	0.2892	0.1412	0.0701	0.0349
		О.Ст.В.	2.9785	1.3640	0.6163	0.2882	0.1420	0.0708	0.0353
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.363	95.600	94.200	94.800	95.700
0.2	$\hat{\sigma}_N^2$	Сер.	3.2413	2.5829	2.1907	2.1943	2.2265	2.2426	2.2492
		Ст.В.	1.4481	1.1681	0.8823	0.5378	0.2542	0.1271	0.0602
		О.Ст.В.	4.0495	2.0566	1.0873	0.5250	0.2554	0.1264	0.0629
		Йм.П.%	100.00	98.243	92.996	94.679	95.900	95.100	96.400
0.3	$\hat{\sigma}_N^2$	Сер.	4.3523	3.4629	2.6769	2.2556	2.2108	2.2390	2.2453
		Ст.В.	1.6631	1.5660	1.2437	0.9430	0.5892	0.2784	0.1428
		О.Ст.В.	6.2193	3.3812	2.0395	1.1673	0.5818	0.2842	0.1413
		Йм.П.%	100.00	87.916	87.088	92.457	94.695	95.600	94.900
0.4	$\hat{\sigma}_N^2$	Сер.	5.7222	5.3646	4.4137	3.5306	2.6526	2.2861	2.2297
		Ст.В.	1.8376	1.7763	1.6134	1.5312	1.2686	0.9385	0.5759
		О.Ст.В.	13.129	6.3734	4.2119	2.9710	2.0175	1.1250	0.5636
		Йм.П.%	99.533	72.637	70.000	76.911	89.063	92.324	94.094
0.6	$\hat{\sigma}_N^2$	Сер.	6.2802	5.6206	4.5294	3.3821	2.6477	2.2034	2.2096
		Ст.В.	2.2077	1.9714	1.8375	1.5867	1.2471	0.9003	0.4946
		О.Ст.В.	17.972	9.0592	4.5923	2.9467	1.7840	0.9970	0.4920
		Йм.П.%	100.00	99.628	82.600	83.639	88.764	93.626	94.795
0.7	$\hat{\sigma}_N^2$	Сер.	4.3658	3.2765	2.5435	2.1914	2.2071	2.2315	2.2464
		Ст.В.	2.0550	1.6256	1.1840	0.8375	0.4747	0.2342	0.1128
		О.Ст.В.	8.6356	3.6142	1.7360	0.8620	0.4184	0.2068	0.1028
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.707	95.228	91.900	91.900	91.700

Табл. 3.4. Ймовірність покриття для оцінок  $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$  при  $\kappa^2 = 6.25$ ,  $\sigma^2 = 2.25$  ( $h = 1$ )

$H$		$N$						
		$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	$\xi_N$	94.823	95.294	93.100	94.900	96.200	94.900	95.7000
	$\eta_N$	97.820	97.059	95.860	95.200	95.500	94.600	95.5000
	$\zeta_N$	100.00	99.706	96.921	95.900	94.800	96.100	95.3000
0.2	$\xi_N$	94.264	95.168	94.397	94.478	95.100	94.200	94.900
	$\eta_N$	98.753	96.633	97.522	95.783	95.400	93.900	95.700
	$\zeta_N$	100.00	98.536	96.552	95.482	94.800	94.600	95.900
0.3	$\xi_N$	92.722	94.046	94.862	96.121	94.394	95.000	95.000
	$\eta_N$	99.684	96.322	96.574	96.552	95.496	95.900	95.000
	$\zeta_N$	100.00	99.124	97.497	96.013	95.195	95.400	94.000
0.4	$\xi_N$	95.327	94.776	95.091	94.586	95.313	95.135	94.495
	$\eta_N$	98.598	96.269	96.546	95.382	95.573	96.432	96.396
	$\zeta_N$	100.00	100.00	98.546	96.338	96.224	97.081	94.995
0.6	$\xi_N$	97.436	95.911	96.800	95.107	95.506	95.298	96.096
	$\eta_N$	98.077	97.026	95.400	95.260	94.632	94.253	94.595
	$\zeta_N$	98.718	99.628	98.800	97.554	96.629	95.507	95.195
0.7	$\xi_N$	94.286	96.373	95.455	94.910	95.200	94.900	95.200
	$\eta_N$	95.429	97.409	95.601	94.910	93.200	95.300	93.400
	$\zeta_N$	97.714	98.187	98.241	96.501	94.500	95.200	94.400

чисельній апроксимації рядів, визначених у лемі 3.1. Відповідні ряди збігаються при  $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ , але настільки повільно, що це насправді має істотний вплив на остаточне наближення суми ряду. При цьому для значень  $H \in (0, \frac{1}{2})$  такий істотний вплив відсутній. Більше того, швидкість збіжності рядів при  $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$  насправді створює певні технічні складнощі для оцінювання. Як було зазначено раніше, оцінюємо такі ряди розбиваючи їх у суму двох збіжних рядів. Проведемо моделювання для наступного ряду:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i)^2. \quad (3.20)$$

Ряди (3.20) будемо чисельно оцінювати за допомогою визначення найменшого значення  $m \in \mathbb{N}$  такого, що для  $S_m = \sum_{i=0}^m \tilde{\rho}(i)^2$  для різних наперед визначених  $\delta$  виконувалось  $|S_m - S_{m-1}| \leq \delta$ .

Табл. 3.5. Ймовірність покриття для оцінок  $(\widehat{H}_N, \widehat{\kappa}_N^2, \widehat{\sigma}_N^2)^\top$  при  $\kappa^2 = 6.25, \sigma^2 = 2.25$  ( $N = 2^{20}$ )

$H$	$h$	$h$						
		1	1/10	1/50	1/100	1/250	1/500	1/1000
0.1	$\widehat{H}_N$	94.300	96.500	94.900	96.653	96.886	96.472	96.269
	$\widehat{\sigma}_N^2$	94.800	96.200	94.500	96.146	96.655	96.608	95.672
	$\widehat{\kappa}_N^2$	95.400	96.300	94.500	96.349	96.425	96.337	95.821
0.2	$\widehat{H}_N$	94.700	96.100	95.000	95.596	96.985	96.750	97.015
	$\widehat{\sigma}_N^2$	95.200	96.000	94.600	94.795	97.193	96.872	96.269
	$\widehat{\kappa}_N^2$	95.300	96.200	94.700	95.696	96.882	96.425	96.517
0.3	$\widehat{H}_N$	96.200	95.800	95.000	94.795	97.172	96.258	98.431
	$\widehat{\sigma}_N^2$	96.100	95.000	95.000	94.695	96.667	95.322	97.197
	$\widehat{\kappa}_N^2$	96.200	94.800	94.900	94.995	96.970	94.803	96.525
0.4	$\widehat{H}_N$	94.300	97.371	97.306	97.919	97.100	96.774	97.092
	$\widehat{\sigma}_N^2$	94.300	96.360	95.544	95.421	95.918	94.550	95.526
	$\widehat{\kappa}_N^2$	94.300	96.360	95.337	95.005	95.489	93.993	94.519
0.6	$\widehat{H}_N$	93.700	95.300	93.900	96.100	94.200	94.400	94.700
	$\widehat{\sigma}_N^2$	93.400	94.900	94.000	94.600	92.800	95.400	93.200
	$\widehat{\kappa}_N^2$	93.400	95.300	93.400	96.100	96.400	97.700	95.300
0.7	$\widehat{H}_N$	93.500	92.600	95.000	94.000	94.100	95.200	95.190
	$\widehat{\sigma}_N^2$	91.700	92.300	94.700	94.400	94.600	95.800	94.790
	$\widehat{\kappa}_N^2$	91.400	92.300	91.700	92.200	93.900	94.900	94.689

Зазначене моделювання було проведене для значень  $\delta \in \{10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}\}$  при  $\kappa = 2.5, \sigma = 1.5$  та  $H \in \{0.1, 0.2, 0.6, 0.7\}$ . Отримані результати представлені у таблиці 3.6. Як можна побачити, для того, щоб оцінити  $S_m$  з точністю  $\delta = 10^{-10}$  при  $H = 0.1$ , потрібно лише декілька сотень ітерацій, у той час як для оцінення при  $H = 0.7$  необхідні десятки мільйонів ітерацій. На додачу до цього, зменшення точності оцінювання з  $10^{-10}$  до  $10^{-3}$  практично не впливає на точність оцінювання загальної суми  $S_m$  за малих  $H$ , але для великих  $H$  це може призводити до різниці близько 1%. Це може не бути істотним для оцінювання асимптотичної дисперсії статистик  $(\zeta_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$  як представлено у таблиці 3.4, проте це може мати серйозніший вплив на оцінки (3.5).

Також маємо зауважити, що для вибірок з малою розмірністю  $N$  має місце певний відсоток ітерацій, для яких деякі з оцінок (3.5) є невизначеними (Невиз.%) або отримані оцінки для параметра  $H$  у результаті виходять поза межі інтервалу

Табл. 3.6. Оцінювання збіжності ряду (3.20) при  $\kappa^2 = 6.25$ ,  $\sigma^2 = 2.25$  ( $h = 1$ )

$H$		$\delta$						
		$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$2^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$
0.1	$m$	5	9	17	32	60	114	216
	$S_m$	79.361	79.362	79.362	79.362	79.362	79.362	79.362
0.2	$m$	8	15	31	63	129	265	543
	$S_m$	76.879	76.880	76.880	76.881	76.881	76.881	76.881
0.6	$m$	53	221	931	3925	16552	69796	$2.9 * 10^5$
	$S_m$	73,768	73.817	73.831	73.848	73.851	73.852	73.853
0.7	$m$	804	5476	37303	$2.5 * 10^5$	$1.7 * 10^6$	$1.1 * 10^7$	$3.3 * 10^7$
	$S_m$	86.370	87.650	88.522	89.117	89.521	89.789	89,910

Табл. 3.7. Відсоток ітерацій у наведених вище моделях для яких оцінки не можуть бути використані для обрахунку асимптотичних коваріаційних матриць

$H$		$N$						
		$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	Невиз.%	28.500	11.100	0.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	Н Out%	34.800	20.900	5.6000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	Невиз.%	34.100	23.400	6.9000	0.4000	0.0000	0.0000	0.0000
	Н Поз.%	25.800	8.3000	0.3000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3	Невиз.%	47.000	35.800	24.000	7.2000	0.1000	0.0000	0.0000
	Н Поз.%	21.400	7.1000	0.1000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	Невиз.%	59.000	46.900	44.100	37.200	23.200	7.5000	0.1000
	Н Поз.%	19.600	12.900	0.9000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	Невиз.%	52.600	50.300	42.200	34.200	19.900	4.3000	0.1000
	Н Поз.%	31.800	22.800	7.8000	0.4000	0.0000	0.0000	0.0000
0.7	Невиз.%	42.400	30.800	17.700	4.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	Н Поз.%	40.100	30.600	14.100	1.7000	0.0000	0.0000	0.0000

$(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$  (Н Поз.%). У таких випадках асимптотичні коваріаційні матриці не можуть бути оціненими, оскільки ряди (3.8) будуть розбіжними. Відповідні результати моделювання наведено у таблиці 3.7.

Наведені результати моделювання демонструють, що побудовані оцінки є більш точним для малих значень  $H$ , а також є менш точним та складнішими в обчисленні для більших значень  $H$ . Загалом, отримані результати відповідають з висновками отриманими у [26].

Під кінець наведемо порівняння результатів застосування наших ергодичних (ЕРГ) оцінок з оцінками максимальної вірогідності (ОМВ). Для нашої досліджуваної моделі за відсутності тренду (3.2) сумісна функція щільності має вигляд

$$f(X; H, \kappa^2, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \Gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2} X^\top \Gamma^{-1} X\right), \quad (3.21)$$

де компоненти коваріаційної матриці  $\Gamma$  визначаються як

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} &:= \Gamma_{ij}(H, \kappa^2, \sigma^2) := \text{Cov}(X_{ih}, X_{jh}) = \\ &= \sigma^2 \text{Cov}(W_{ih}, W_{jh}) + \kappa^2 \text{Cov}(B_{ih}^H, B_{jh}^H) = \\ &= h\sigma^2 \min(i, j) + \frac{\kappa^2 h^{2H}}{2} (i^{2H} + j^{2H} - |i - j|^{2H}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Використовуючи спеціалізовані методи обчислень (а саме функцію `fminsearch` з пакету `pracma` мови програмування R) ми проводимо мінімізацію від'ємного логарифму від (3.21), що є еквівалентним максимізації початкової функції. Для кожного визначеного набору параметрів ми генеруємо 1000 траєкторій процесу (3.2) та обчислюємо вибіркові середні (Сер.), стандартні відхилення (Ст.В.) та середній час обчислення (секунди). Через наявність певних технічних обмежень реалізації цієї задачі, ми проводимо наші обчислення для вибірок розмірності  $N = 2^7$ . Для більших значень  $N$  наша функція вірогідності є невизначеною у більшості ітерацій через те, що визначник матриці коваріації (3.22) стає настільки великим, що система трактує його як нескінченність. Отримані результати моделювання наведені у таблиці 3.8. Згідно з отриманими результатами оцінювання, наші ергодичні оцінки є менш точними ніж оцінки максимальної вірогідності, проте вони значно швидше обчислюються, що є очікуваним.

*Зауваження 3.2.* Нехай  $\tilde{\vartheta} = (\tilde{H}, \tilde{\kappa}^2, \tilde{\sigma}^2)$  є оцінкою максимальної вірогідності вектору параметрів  $\vartheta$ , отриманою максимізацією функції (3.21). Використовуючи загальну теорію для оцінок максимальної вірогідності для залежних спостережень [15], можна показати асимптотичну нормальність цієї оцінки як

$$(T_N(\vartheta))^{-\frac{1}{2}} \left( \tilde{\vartheta}_N - \vartheta \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( \vec{0}, I_3 \right) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (3.23)$$

де  $I_3$  є одиничною матрицею  $3 \times 3$ , а  $T_N(\vartheta)$  – це матриця інформації за Фішером, яка може бути обчислена аналогічно до наведеного у [9, підрозділ 3.3]. Вона

Табл. 3.8. Порівняння з оцінками максимальної вірогідності параметрів  $(H, \sigma^2, \kappa^2)^\top$  при  $\kappa^2 = 6.25$ ,  $\sigma^2 = 2.25$  ( $N = 2^7$ ,  $h = 1$ )

$H$		$\tilde{H}_N$		$\tilde{\sigma}_N^2$		$\tilde{\kappa}_N^2$		Час (сек)
		Сер.	Ст.В.	Сер.	Ст.В.	Сер.	Ст.В.	
0.1	ЕРГ	0.0620	0.4170	3.0174	1.3064	10.553	29.221	0.0001
	ОМВ	0.1236	0.1121	1.6484	1.2825	6.8699	6.8699	13.739
0.2	ЕРГ	0.1826	0.4760	3.5475	1.6039	11.062	36.113	0.0001
	ОМВ	0.1727	0.1307	1.9005	1.6932	6.5957	1.8864	13.939
0.3	ЕРГ	0.2837	0.6365	4.5825	1.7741	10.970	36.621	0.0001
	ОМВ	0.2457	0.1556	1.8155	2.1920	6.6926	2.4333	14.658
0.4	ЕРГ	0.4912	0.9395	5.8045	1.9974	9.7042	45.327	0.0001
	ОМВ	0.3324	0.2108	2.2525	2.9215	6.2323	3.1248	15.040
0.6	ЕРГ	0.6721	0.7451	6.7316	1.9906	11.848	85.599	0.0001
	ОМВ	0.6465	0.1927	2.9323	3.3843	5.5375	3.4577	15.804
0.7	ЕРГ	0.6589	0.4462	4.9383	2.1581	12.840	51.410	0.0002
	ОМВ	0.7221	0.1184	2.1314	2.6485	6.4517	2.8072	20.393

матиме наступний вигляд:

$$T_N(\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma')^2) & \frac{1}{2} \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma')(\Gamma^{-1}\Gamma_B)) & \frac{1}{2} \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma')(\Gamma^{-1}\Gamma_W)) \\ \frac{1}{2} \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma')(\Gamma^{-1}\Gamma_B)) & \frac{1}{2} \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma_B)^2) & \frac{1}{2} \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma_B)(\Gamma^{-1}\Gamma_W)) \\ \frac{1}{2} \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma')(\Gamma^{-1}\Gamma_W)) & \frac{1}{2} \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma_B)(\Gamma^{-1}\Gamma_W)) & \frac{1}{2} \text{tr}((\Gamma^{-1}\Gamma_W)^2) \end{pmatrix},$$

де  $\Gamma_W = \text{Cov}((W_0, W_h, \dots, W_{Nh}))$ ,  $\Gamma_B = \text{Cov}((B_0^H, B_h^H, \dots, B_{Nh}^H))$ ,  $\Gamma' = \frac{\partial}{\partial H}\Gamma$ . Обґрунтоване доведення (3.23), а також послідовний аналіз асимптотичної поведінки оцінки  $T_N(\vartheta)$  є окремою задачею, що вимагає додаткового дослідження, та не є ціллю цієї роботи.

### 3.3 Асимптотична нормальність оцінок за наявності тренду

#### 3.3.1 Асимптотична нормальність допоміжних статистик

Перейдемо до доведення асимптотичної нормальності оцінок для параметрів лінійної моделі за наявності тренду (3.1). Загальна методологія при цьому буде

аналогічна, до застосованої для моделі (3.2), проте наявність тренду призведе не лише до необхідності оцінювання додаткового параметра та зміни рівнянь для шуканих оцінок, а й вплине на асимптотичну поведінку. Останнє є наслідком того, що прирости процесу (3.1) не будуть центрованими, а саме  $\Delta X_k = \theta h + \Delta Z_k$ . Визначимо наступний вектор:

$$\tau_N = (\phi_N, \xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top. \quad (3.24)$$

Згідно за [26, лемою 3.2], для довільного  $H \in (0, 1)$ ,

$$\tau_N \rightarrow (\mathbb{E}\phi_1, \mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\eta_1, \mathbb{E}\zeta_1) =: \tau_0$$

м. н., при  $N \rightarrow \infty$ , де

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\phi_1 &= \theta h, & \mathbb{E}\xi_1 &= \theta^2 h^2 + \sigma^2 h + \kappa^2 h^{2H}, \\ \mathbb{E}\eta_1 &= \theta^2 h^2 + \kappa^2 h^{2H} \left(2^{2H-1} - 1\right), & \mathbb{E}\zeta_1 &= 4\theta^2 h^2 + \kappa^2 h^{2H} 2^{2H} \left(2^{2H-1} - 1\right). \end{aligned}$$

**Теорема 3.3.** Нехай  $H \in (0, \frac{1}{2})$ . Тоді вектор  $\tau_N$  визначений у (3.24) є асимптотично нормальним, а саме

$$\sqrt{N}(\tau_N - \tau_0) = \sqrt{N} \begin{pmatrix} \phi_N - \mathbb{E}\phi_1 \\ \xi_N - \mathbb{E}\xi_1 \\ \eta_N - \mathbb{E}\eta_1 \\ \zeta_N - \mathbb{E}\zeta_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\vec{0}, \tilde{\Sigma}^\theta)$$

з асимптотичною коваріаційною матрицею  $\tilde{\Sigma}^\theta$ , що може бути представлена у явному вигляді як

$$\tilde{\Sigma}^\theta = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_{11}^\theta & \tilde{\Sigma}_{12}^\theta & \tilde{\Sigma}_{13}^\theta & \tilde{\Sigma}_{14}^\theta \\ \tilde{\Sigma}_{12}^\theta & \tilde{\Sigma}_{22}^\theta & \tilde{\Sigma}_{23}^\theta & \tilde{\Sigma}_{24}^\theta \\ \tilde{\Sigma}_{13}^\theta & \tilde{\Sigma}_{23}^\theta & \tilde{\Sigma}_{33}^\theta & \tilde{\Sigma}_{34}^\theta \\ \tilde{\Sigma}_{14}^\theta & \tilde{\Sigma}_{24}^\theta & \tilde{\Sigma}_{34}^\theta & \tilde{\Sigma}_{44}^\theta \end{pmatrix}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{11}^\theta &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i), & \tilde{\Sigma}_{22}^\theta &= 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i)^2 + 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i), \\ \tilde{\Sigma}_{33}^\theta &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i) + \tilde{\rho}(i+2) \right) + 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Sigma}_{44}^{\theta} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 6\tilde{\rho}(i) + 8\tilde{\rho}(i+1) + 3\tilde{\rho}(i+2) + 4\tilde{\rho}(i+3) + 6\tilde{\rho}(i+4) + 4\tilde{\rho}(i+5) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\rho}(i+6) \right) + 64\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i), \\
\widetilde{\Sigma}_{23}^{\theta} &= 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+1) + 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i), \\
\widetilde{\Sigma}_{24}^{\theta} &= 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + \tilde{\rho}(i+3) \right) + 16\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i), \\
\widetilde{\Sigma}_{34}^{\theta} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i) + 2\tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + 2\tilde{\rho}(i+3) + \tilde{\rho}(i+4) \right) + 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i), \\
\widetilde{\Sigma}_{12}^{\theta} &= \widetilde{\Sigma}_{13}^{\theta} = 2\theta h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \widetilde{\Sigma}_{14}^{\theta} = 8\theta h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i).
\end{aligned}$$

*Доведення.* Аналогічно до теореми 3.1, доведення складатиметься з двох частин: обчислення асимптотичної коваріаційної матриці  $\widetilde{\Sigma}^{\theta}$  та доведення асимптотичної нормальності. Але на відміну від теореми 3.1, у цьому доведенні ми будемо працювати з нецентрованими приростами, у результаті чого будуть виникати ряди першого порядку, що є розбіжними при  $H > \frac{1}{2}$  за лемою 3.1.

*Частина 1: Обчислення асимптотичної коваріаційної матриці.*

Знайдемо явний вигляд коваріаційної матриці  $\widetilde{\Sigma}^{\theta}$  обчисливши границі при  $N \rightarrow \infty$  для наступних вибіркової дисперсії та коваріацій:  $N \text{Var}(\xi_N)$ ,  $N \text{Var}(\eta_N)$ ,  $N \text{Var}(\zeta_N)$ ,  $N \text{Var}(\phi_N)$ ,  $N \text{Cov}(\xi_N, \eta_N)$ ,  $N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N)$ ,  $N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N)$ ,  $N \text{Cov}(\xi_N, \phi_N)$ ,  $N \text{Cov}(\eta_N, \phi_N)$ ,  $N \text{Cov}(\zeta_N, \phi_N)$ .

*1.1 Обчислення границі для  $N \text{Var}(\xi_N)$ .* Використовуючи теорему Іссерліса та стаціонарність центрованої послідовності  $\{\Delta Z_k\}$ , можемо записати

$$\text{Cov}((\Delta Z_k)^2, (\Delta Z_j)^2) = 2 \text{Cov}((\Delta Z_k), (\Delta Z_j))^2 = 2\tilde{\rho}(k-j)^2,$$

$$\text{Cov}(\Delta Z_k, (\Delta Z_j)^2) = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\text{Cov}((\Delta X_k)^2, (\Delta X_j)^2) &= \text{Cov}((\theta h + \Delta Z_k)^2, (\theta h + \Delta Z_j)^2) = \\
&= \text{Cov}\left(2\theta h \Delta Z_k + \Delta Z_k^2, 2\theta h \Delta Z_j + \Delta Z_j^2\right) = \\
&= 4\theta^2 h^2 \text{Cov}(\Delta Z_k, \Delta Z_j) + \text{Cov}\left(\Delta Z_k^2, \Delta Z_j^2\right) =
\end{aligned}$$

$$= 4\theta^2 h^2 \tilde{\rho}(k-j) + 2\tilde{\rho}(k-j)^2.$$

Таким чином

$$\begin{aligned} N \operatorname{Var}(\xi_N) &= \frac{1}{N} \operatorname{Var} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2 \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Cov}((\Delta X_k)^2, (\Delta X_j)^2) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (4\theta^2 h^2 \tilde{\rho}(k-j) + 2\tilde{\rho}(k-j)^2) = \\ &= \frac{4\theta^2 h^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j) + \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Далі, зміною порядку підсумовування у другому виразі правої частини (3.25)

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2 &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=k-N+1}^k \tilde{\rho}(i)^2 = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=-N+1}^0 \sum_{k=0}^{N-1+i} \tilde{\rho}(i)^2 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i}^{N-1} \tilde{\rho}(i)^2 = \\ &= 2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i)^2 \rightarrow 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)^2, \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.26)$$

де перехід до границі ґрунтується на теоремі про мажоровану збіжність за лемою 3.1.

Аналогічно, для першого виразу у правій частині рівняння (3.25)

$$\frac{4\theta^2 h^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j) = 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i) \rightarrow 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Таким чином

$$N \operatorname{Var}(\xi_N) \rightarrow 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) + 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)^2 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

1.2. Обчислення границі для  $N \operatorname{Cov}(\xi_N, \eta_N)$ . Запишемо

$$\begin{aligned} N \operatorname{Cov}(\xi_N, \eta_N) &= \frac{1}{N} \operatorname{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2, \sum_{j=0}^{N-1} \Delta X_j \Delta X_{j+1} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_j \Delta X_{j+1}), \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\text{Cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_j \Delta X_{j+1}) &= \\
&= \text{Cov}\left(2\theta h \Delta Z_k + (\Delta Z_k)^2, \sum_{r=0}^1 \theta h \Delta Z_{j+r} + \Delta Z_j \Delta Z_{j+1}\right) = \\
&= 2\theta^2 h^2 \sum_{r=0}^1 \text{Cov}(\Delta Z_k, \Delta Z_{j+r}) + \text{Cov}((\Delta Z_k)^2, \Delta Z_j \Delta Z_{j+1}) = \\
&= 2\theta^2 h^2 \sum_{r=0}^1 \tilde{\rho}(k - j - r) + \text{Cov}((\Delta Z_k)^2, \Delta Z_j \Delta Z_{j+1}).
\end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}((\Delta Z_k)^2, \Delta Z_j \Delta Z_{j+1}) &= \mathbb{E}(\Delta Z_k)^2 \Delta Z_j \Delta Z_{j+1} - \mathbb{E}(\Delta Z_k)^2 \mathbb{E} \Delta Z_j \Delta Z_{j+1} = \\
&= \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_j \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_{j+1} + \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_{j+1} \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_j = \\
&= 2 \text{Cov}(\Delta Z_k, \Delta X_j) \text{Cov}(\Delta Z_k, \Delta Z_{j+1}) = 2\tilde{\rho}(j - k)\tilde{\rho}(j - k + 1).
\end{aligned}$$

Аналогічно до випадку (3.26), будемо мати

$$\begin{aligned}
\frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j - k)\tilde{\rho}(j - k + 1) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i + 1) = \\
&= 2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i + 1) \rightarrow 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i + 1),
\end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ , де збіжність останнього ряду впливає з леми 3.1.

Аналогічно до (3.27)

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^1 \frac{2\theta^2 h^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k - j - r) &= \sum_{r=0}^1 \frac{2\theta^2 h^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i - r) = \\
&= \sum_{r=0}^1 2\theta^2 h^2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i - r) \rightarrow \sum_{r=0}^1 2\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i - r) = \\
&= \sum_{r=0}^1 2\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) = 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Отже,

$$N \text{Cov}(\xi_N, \eta_N) \rightarrow 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) + 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i + 1), \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

1.3. Обчислення границі для  $N \text{Var}(\eta_N)$ . Матимемо, що

$$N \text{Var}(\eta_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_j \Delta X_{j+1}).$$

Використовуючи перетворення  $\Delta X_k = \theta h + \Delta Z_k$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_j \Delta X_{j+1}) &= \\ &= \text{Cov}\left(\theta h \sum_{\ell=0}^1 \Delta Z_{k+\ell} + \Delta Z_k \Delta Z_{k+1}, \theta h \sum_{r=0}^1 \Delta Z_{j+r} + \Delta Z_j \Delta Z_{j+1}\right) = \\ &= \sum_{\ell,r=0}^1 \theta^2 h^2 \text{Cov}(\Delta Z_{k+\ell}, \Delta Z_{j+r}) + \text{Cov}(\Delta Z_k \Delta Z_{k+1}, \Delta Z_j \Delta Z_{j+1}) = \\ &= \sum_{\ell,r=0}^1 \theta^2 h^2 \tilde{\rho}(k + \ell - j - r) + \text{Cov}(\Delta Z_k \Delta Z_{k+1}, \Delta Z_j \Delta Z_{j+1}). \end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Delta Z_k \Delta Z_{k+1}, \Delta Z_j \Delta Z_{j+1}) &= \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_{k+1} \Delta Z_j \Delta Z_{j+1} - \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_{k+1} \mathbb{E} \Delta Z_j \Delta Z_{j+1} = \\ &= \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_{k+1} \mathbb{E} \Delta Z_j \Delta Z_{j+1} + \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_j \mathbb{E} \Delta Z_{k+1} \Delta Z_{j+1} + \\ &\quad + \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_{j+1} \mathbb{E} \Delta Z_{k+1} \Delta Z_j - \mathbb{E} \Delta Z_k \Delta Z_{k+1} \mathbb{E} \Delta Z_j \Delta Z_{j+1} = \\ &= (\text{Cov}(\Delta Z_k, \Delta Z_j))^2 + \text{Cov}(\Delta Z_k, \Delta Z_{j+1}) \text{Cov}(\Delta Z_{k+1}, \Delta Z_j) = \\ &= \tilde{\rho}(k - j)^2 + \tilde{\rho}(k - j + 1) \tilde{\rho}(k - j - 1). \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} N \text{Var}(\eta_N) &= \sum_{\ell,r=0}^1 \frac{\theta^2 h^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k + \ell - j - r) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k - j)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k - j + 1) \tilde{\rho}(k - j - 1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

За аналогією до (3.27), перший вираз у правій частині рівності (3.28)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell,r=0}^1 \frac{\theta^2 h^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k + \ell - j - r) &= \sum_{\ell,r=0}^1 \frac{\theta^2 h^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i + \ell - r) = \\ &= \sum_{\ell,r=0}^1 \theta^2 h^2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i + \ell - r) \rightarrow \sum_{\ell,r=0}^1 \theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i + \ell - r) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\ell, r=0}^1 \theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) = 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Згідно з (3.26), для другого виразу у правій частині (3.28) маємо

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2 = \frac{N}{2} \text{Var}(\xi_N) \rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)^2, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Третій вираз може бути обчислений за аналогією до (3.26) наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+1) \tilde{\rho}(k-j-1) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-(N-1)}^j \tilde{\rho}(i-1) \tilde{\rho}(i+1) = \\ &= \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i-1) \tilde{\rho}(i+1) \rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i-1) \tilde{\rho}(i+1) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+2), \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Об'єднавши результати (3.28)–(3.31), отримаємо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Var}(\eta_N) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) (\tilde{\rho}(i) + \tilde{\rho}(i+2)) + 4\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i).$$

1.4. Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N)$ . Перепишемо

$N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N)$  у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N) &= \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2, \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta X_j + \Delta X_{j+1})(\Delta X_{j+2} + \Delta X_{j+3}) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_{j+\alpha} \Delta X_{j+\beta+2}). \end{aligned}$$

Застосувавши перетворення  $\Delta X_k = \theta h + \Delta Z_k$  разом з теоремою Іссерліса, отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_{j+\alpha} \Delta X_{j+\beta+2}) &= \\ &= \text{Cov}((\Delta Z_k)^2, \Delta Z_{j+\alpha} \Delta Z_{j+\beta+2}) + \theta^2 h^2 \sum_{\gamma=0}^1 \text{Cov}(\Delta Z_k, \Delta Z_{j+\alpha+\gamma(\beta+2-\alpha)}) = \\ &= 2\tilde{\rho}(j-k+\alpha) \tilde{\rho}(j-k+\beta+2) + \theta^2 h^2 \sum_{\gamma=0}^1 \tilde{\rho}(j-k+\alpha+\gamma(\beta+2-\alpha)). \end{aligned}$$

Згідно з (3.31)

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{N} \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j-k+\alpha) \tilde{\rho}(j-k+\beta+2) = \\
& = 2 \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+\alpha) \tilde{\rho}(i+\beta+2) \rightarrow \\
& \rightarrow 2 \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha) \tilde{\rho}(i+\beta+2) = 2 \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+\beta+2-\alpha) = \\
& = 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + \tilde{\rho}(i+3) \right).
\end{aligned}$$

Аналогічно до (3.27)

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \frac{2\theta^2 h^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j-k+\alpha+\gamma(\beta+2-\alpha)) = \\
& = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \frac{2\theta^2 h^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i+\alpha+\gamma(\beta+2-\alpha)) = \\
& = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 2\theta^2 h^2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+\alpha+\gamma(\beta+2-\alpha)) \rightarrow \\
& \rightarrow \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 2\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha+\gamma(\beta+2-\alpha)) \rightarrow \\
& = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 2\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) = 16\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N) = 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + \tilde{\rho}(i+3) \right) + 16\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i).$$

1.5 Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N)$ . Використовуючи попередні міркування,

$$\begin{aligned}
N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N) &= \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \Delta X_k \Delta X_{k+1}, \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta X_j + \Delta X_{j+1})(\Delta X_{j+2} + \Delta X_{j+3}) \right) = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_{j+\alpha} \Delta X_{j+\beta+2}).
\end{aligned}$$

Знову застосувавши теорему Іссерліса та перетворення  $\Delta X_k = \theta h + \Delta Z_k$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_{j+\alpha} \Delta X_{j+\beta+2}) &= \\ &= \text{Cov}(\Delta Z_k \Delta Z_{k+1}, \Delta Z_{j+\alpha} \Delta Z_{j+\beta+2}) + \theta^2 h^2 \sum_{\ell, r=0}^1 \text{Cov}(\Delta Z_{k+\ell}, \Delta Z_{j+\alpha+r(\beta+2-\alpha)}) = \\ &= \sum_{\gamma=0}^1 \tilde{\rho}(j-k+\alpha-\gamma) \tilde{\rho}(j-k+1+\beta+\gamma) + \\ &\quad + \theta^2 h^2 \sum_{\ell, r=0}^1 \tilde{\rho}(j-k-\ell+\alpha+r(\beta+2-\alpha)). \end{aligned}$$

Згідно з (3.31)

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j-k+\alpha-\gamma) \tilde{\rho}(j-k+1+\beta+\gamma) &= \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+\alpha-\gamma) \tilde{\rho}(i+\beta+1+\gamma) \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha-\gamma) \tilde{\rho}(i+\beta+1+\gamma), \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Як було наведено вище, ми можемо спростити останній вираз. Тоді ми прийдемо до

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+\beta+1+2\gamma-\alpha) &= \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i) + 2\tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + 2\tilde{\rho}(i+3) + \tilde{\rho}(i+4) \right). \end{aligned}$$

Аналогічно до (3.32)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta, \ell, r=0}^1 \frac{\theta^2 h^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j-k-\ell+\alpha+r(\beta+2-\alpha)) &= \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \ell, r=0}^1 \frac{\theta^2 h^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i-\ell+\alpha+r(\beta+2-\alpha)) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \ell, r=0}^1 \theta^2 h^2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i-\ell+\alpha+r(\beta+2-\alpha)) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \sum_{\alpha, \beta, \ell, r=0}^1 \theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i - \ell + \alpha + r(\beta + 2 - \alpha)) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta, \ell, r=0}^1 \theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) = 16\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N) &= 16\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) + \\
&+ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( \tilde{\rho}(i) + 2\tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + 2\tilde{\rho}(i+3) + \tilde{\rho}(i+4) \right).
\end{aligned}$$

1.6. Обчислення границі для  $N \text{Var}(\zeta_N)$ . Має місце наступне зображення

$$N \text{Var}(\zeta_N) = \frac{1}{N} \sum_{a, b, c, d=0}^1 \sum_{k, j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b+2}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d+2})$$

За допомогою перетворення  $\Delta X_k = \theta h + \Delta Z_k$  та теореми Іссерліса, маємо

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}(\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b+2}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d+2}) = \\
&= \text{Cov}(\Delta Z_{k+a} \Delta Z_{k+b+2}, \Delta Z_{j+c} \Delta Z_{j+d+2}) + \\
&\quad + \theta^2 h^2 \sum_{\ell, r=0}^1 \text{Cov}(\Delta X_{k+a+\ell(b+2-a)}, \Delta X_{j+c+r(d+2-c)}) = \\
&= \sum_{\gamma=0}^1 \tilde{\rho}(j - k - a + c - \gamma(2 + b - a)) \tilde{\rho}(j - k - b + d - \gamma(a - b - 2)) + \\
&\quad + \theta^2 h^2 \sum_{\ell, r=0}^1 \tilde{\rho}(j + c + r(d + 2 - c) - k - a - \ell(b + 2 - a)).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{a, b, c, d, \gamma=0}^1 \sum_{k, j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j - k - a + c - \gamma(2 + b - a)) \tilde{\rho}(j - k - b + d - \gamma(a - b - 2)) = \\
&= \sum_{a, b, c, d, \gamma=0}^1 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i + c - a - \gamma(2 + b - a)) \times \\
&\quad \times \tilde{\rho}(i + d - b - \gamma(a - b - 2)) \rightarrow \\
&\rightarrow \sum_{a, b, c, d, \gamma=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i + c - a - \gamma(2 + b - a)) \tilde{\rho}(i + d - b - \gamma(a - b - 2)),
\end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Після спрощень отримаємо

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 6\tilde{\rho}(i) + 8\tilde{\rho}(i+1) + 3\tilde{\rho}(i+2) + 4\tilde{\rho}(i+3) + 6\tilde{\rho}(i+4) + 4\tilde{\rho}(i+5) + \tilde{\rho}(i+6) \right).$$

Аналогічно до (3.32)

$$\begin{aligned} & \sum_{a,b,c,d,\ell,r=0}^1 \frac{\theta^2 h^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j-k+c+r(d+2-c)-a-\ell(b+2-a)) = \\ &= \sum_{a,b,c,d,\ell,r=0}^1 \frac{\theta^2 h^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i+c+r(d+2-c)-a-\ell(b+2-a)) = \\ &= \sum_{a,b,c,d,\ell,r=0}^1 \theta^2 h^2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left( 1 - \frac{|i|}{N} \right) \tilde{\rho}(i+c+r(d+2-c)-a-\ell(b+2-a)) \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{a,b,c,d,\ell,r=0}^1 \theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+c+r(d+2-c)-a-\ell(b+2-a)) = \\ &= \sum_{a,b,c,d,\ell,r=0}^1 \theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) = 64\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Й таким чином

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Var}(\zeta_N) &= 64\theta^2 h^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 6\tilde{\rho}(i) + 8\tilde{\rho}(i+1) + \right. \\ &\quad \left. + 3\tilde{\rho}(i+2) + 4\tilde{\rho}(i+3) + 6\tilde{\rho}(i+4) + 4\tilde{\rho}(i+5) + \tilde{\rho}(i+6) \right). \end{aligned}$$

1.7. Обчислення границі для  $N \text{Var}(\phi_N)$ . За аналогією до (3.32), маємо

$$\begin{aligned} N \text{Var}(\phi_N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j) = \\ &= \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left( 1 - \frac{|i|}{N} \right) \tilde{\rho}(i) \rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

1.8. Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\xi_N, \phi_N)$ . Використовуючи попередні міркування,

$$N \text{Cov}(\xi_N, \phi_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_j) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(2\theta h \Delta Z_k + (\Delta Z_k)^2, \Delta Z_j) = \frac{2\theta h}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_j) = \\
&= \frac{2\theta h}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j) = 2\theta h \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i) \rightarrow \\
&\rightarrow 2\theta h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

1.9. Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\eta_N, \phi_N)$ . Згідно з описаним вище,

$$\begin{aligned}
N \text{Cov}(\eta_N, \phi_N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_j) = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\theta h \Delta Z_k + \theta h \Delta Z_{k+1} + \Delta Z_k \Delta Z_{k+1}, \Delta Z_j) = \\
&= \sum_{\alpha=0}^1 \frac{\theta h}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_{k+\alpha}, \Delta X_j) = \sum_{\alpha=0}^1 \frac{\theta h}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k+\alpha-j) = \\
&= \sum_{\alpha=0}^1 \theta h \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+\alpha) \rightarrow \sum_{\alpha=0}^1 \theta h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha) = \\
&= \sum_{\alpha=0}^1 \theta h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) = 2\theta h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

1.10. Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\zeta_N, \phi_N)$ . Й остаточно маємо

$$\begin{aligned}
N \text{Cov}(\zeta_N, \phi_N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}((\Delta X_k + \Delta X_{k+1})(\Delta X_{k+2} + \Delta X_{k+3}), \Delta X_j) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_{k+\alpha} \Delta X_{k+2+\beta}, \Delta X_j) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\theta h \Delta Z_{k+\alpha} + \theta h \Delta Z_{k+2+\beta} + \Delta Z_{k+\alpha} \Delta Z_{k+2+\beta}, \Delta Z_j) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \frac{\theta h}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_{k+\alpha+\gamma(2+\beta-\alpha)}, \Delta X_j) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \frac{1\theta h}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+\alpha+\gamma(2+\beta-\alpha)) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \theta h \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+\alpha+\gamma(2+\beta-\alpha)) \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \theta h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha + \gamma(2 + \beta - \alpha)) = \\
& = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^1 \theta h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) = 8\theta h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i), \quad \text{при } N \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

*Частина 2: Доведення асимптотичної нормальності.* Визначимо вектор  $Y_k = (Y_k^{(1)}, Y_k^{(2)}, Y_k^{(3)})^\top$  як

$$Y_k^{(1)} := \Delta Z_k, \quad Y_k^{(2)} := \Delta Z_{k+1}, \quad Y_k^{(3)} := \Delta Z_{k+2} + \Delta Z_{k+3}. \quad (3.33)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\xi_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (Y_k^{(1)} + \theta h)^2, & \eta_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (Y_k^{(1)} + \theta h) (Y_k^{(2)} + \theta h), \\
\zeta_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)} + 2\theta h) (Y_k^{(3)} + \theta h), & \phi_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (Y_k^{(1)} + \theta h).
\end{aligned}$$

Аналогічно до теореми 3.1, доведемо збіжність вектору  $(\phi_N, \xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$  за допомогою теореми Крамера-Вольда. Нехай  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$  — довільні фіксовані та задовольняють умову  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \lambda^2 \neq 0$ . Визначимо наступну функцію:

$$f(y) = \alpha(y_1 + \theta h) + \beta(y_1 + \theta h)^2 + \gamma(y_1 + \theta h)(y_2 + \theta h) + \lambda(y_1 + y_2 + 2\theta h)(y_3 + \theta h),$$

де  $y = (y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  такий, що

$$\alpha\phi_N + \beta\xi_N + \gamma\eta_N + \lambda\zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(Y_k).$$

Отже, нам треба довести, що послідовність

$$\begin{aligned}
& \sqrt{N} \left( \alpha(\phi_N - \mathbb{E}\phi_N) + \beta(\xi_N - \mathbb{E}\xi_N) + \gamma(\eta_N - \mathbb{E}\eta_N) + \lambda(\zeta_N - \mathbb{E}\zeta_N) \right) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (f(Y_k) - \mathbb{E}f(Y_k)) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

збігається до нормального розподілу. Це можна довести використовуючи центральну граничну теорему для стаціонарних векторів [8, теорема 2]. Для того, щоб застосувати цю теорему, достатньо показати, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} r^{(p,l)}(j-k), \quad (3.35)$$

та

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left( r^{(p,l)}(j-k) \right)^2, \quad (3.36)$$

існують для всіх  $p, l \in \{1, 2, 3\}$ , де

$$r^{(p,l)}(k) := \text{Cov} \left( Y_1^{(p)}, Y_{1+k}^{(l)} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

У свою чергу, існування (3.35)–(3.36) впливає з леми 3.1, оскільки використовуючи (3.33) та означення  $\tilde{\rho}$ , ми можемо представити  $r^{(p,l)}$  через  $\tilde{\rho}$  наступним чином:

$$\begin{aligned} r^{(1,1)}(k) &= r^{(2,2)}(k) = \tilde{\rho}(k), & r^{(1,2)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1), & r^{(2,1)}(k) &= \tilde{\rho}(k-1), \\ r^{(1,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k+2) + \tilde{\rho}(k+3), & r^{(3,1)}(k) &= \tilde{\rho}(k-2) + \tilde{\rho}(k-3), \\ r^{(2,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1) + \tilde{\rho}(k+2), & r^{(3,2)}(k) &= \tilde{\rho}(k-1) + \tilde{\rho}(k-2), \\ r^{(3,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1) + 2\tilde{\rho}(k) + \tilde{\rho}(k-1). \end{aligned}$$

Дійсно, наприклад:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left( r^{(1,3)}(j) \right)^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left( \tilde{\rho}(j-k+2) + \tilde{\rho}(j-k+3) \right)^2 = \\ &= \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left( 1 - \frac{|i|}{N} \right) \left( \tilde{\rho}(i+2) + \tilde{\rho}(i+3) \right)^2 = \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left( 1 - \frac{|i|}{N} \right) \tilde{\rho}(i+2)^2 + \\ &\quad + 2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left( 1 - \frac{|i|}{N} \right) \tilde{\rho}(i+2)\tilde{\rho}(i+3) + \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left( 1 - \frac{|i|}{N} \right) \tilde{\rho}(i+3)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+2)^2 + 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+2)\tilde{\rho}(i+3) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+3)^2, \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

де останній ряд збігається як скінченна сума рядів, збіжних за лемою 3.1. За аналогічними міркуваннями, границі визначені у (3.35)–(3.36) існують та скінченні.

Отже, виконуються умови центральної граничної теореми для стаціонарних векторів [8, теорема 2], звідки впливає шукана слабка збіжність (3.34) до центрованого нормального розподілу.

□

*Зауваження 3.3.* Умова  $H < \frac{1}{2}$  є істотною, оскільки інакше ряди визначені в умові (3.35) були б розбіжні.

### 3.3.2 Асимптотична нормальність оцінок параметрів моделі

У цьому пункті наведемо основний результат про асимптотичні властивості наших оцінок (3.4). Введемо наступне позначення

$$\vartheta = (\theta, H, \kappa^2, \sigma^2)^\top, \quad \widehat{\vartheta}_N = (\widehat{\theta}_N, \widehat{H}_N, \widehat{\kappa}_N^2, \widehat{\sigma}_N^2)^\top, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (3.37)$$

**Теорема 3.4.** Нехай  $H \in (0, \frac{1}{2})$ . Тоді оцінка  $\widehat{\vartheta}_N$  є асимптотично нормальною, а саме:

$$\sqrt{N} \left( \widehat{\vartheta}_N - \vartheta \right) = \sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_N - \theta \\ \widehat{H}_N - H \\ \widehat{\kappa}_N^2 - \kappa^2 \\ \widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( \vec{0}, \Sigma^\theta \right)$$

з асимптотичною коваріаційною матрицею  $\Sigma^\theta$ , що визначається за формулою

$$\Sigma^\theta = g'(\tau_0) \widetilde{\Sigma}^\theta (g'(\tau_0))^\top,$$

де матриця  $\widetilde{\Sigma}^\theta$  визначена у теоремі 3.3 та

$$g'(\tau_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\theta(l-2)}{k^2 h^{2H-1} l(l+2)} & 0 & \frac{-1}{\kappa^2 h^{2H} l \log 2} & \frac{1}{\kappa^2 h^{2H} l(l+2) \log 2} \\ \frac{-4\theta}{h^{2H-1}} \frac{2(l+2)(l-1)+cl(l-2)}{l^2(l+2)} & 0 & \frac{2}{h^{2H}} \frac{(2+c)l+2}{l^2} & \frac{-2}{h^{2H}} \frac{l(c+1)+2}{l^2(l+2)} \\ \frac{4\theta(l^2+4l-4)}{l^2} & \frac{1}{h} & -\frac{4(l+1)}{hl^2} & \frac{2}{hl^2} \end{pmatrix}.$$

де  $c = \log_2 h$  та  $l = 2^{2H} - 2$ .

*Доведення.* Визначимо наступну функцію відносно вектора  $\tau = (\phi, \xi, \eta, \zeta)^\top$ :

$$g(\tau) = (g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau), g_4(\tau))^\top,$$

де

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= g_1(\phi, \xi, \eta, \zeta) = \frac{\phi}{h}, \\ g_2(\tau) &= g_2(\phi, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\zeta - 4\phi^2}{\eta - \phi^2}, \\ g_3(\tau) &= g_3(\phi, \xi, \eta, \zeta) = \frac{\eta - \phi^2}{h^{2g_2(\xi, \eta, \zeta)} (2^{2g_2(\xi, \eta, \zeta)} - 1)}, \\ g_4(\tau) &= g_4(\phi, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{h} \left( \xi - \phi^2 - g_3(\xi, \eta, \zeta) h^{2g_2(\xi, \eta, \zeta)} \right). \end{aligned}$$

Тоді оцінка (3.37) може бути представлена, як

$$\widehat{\vartheta}_N = (\widehat{\theta}_N, \widehat{H}_N, \widehat{\kappa}_N^2, \widehat{\sigma}_N^2)^\top = g(\phi_N, \xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top.$$

Для доведення асимптотичної нормальності  $\widehat{\vartheta}_N$  застосуємо дельта-метод до функції  $g(\tau)$  та послідовності  $\tau_N$ , що є асимптотично нормальною згідно з теоремою 3.3. Для цього нам потрібно, аналогічно до моделі за відсутності тренду, обчислити матрицю  $g'(\tau)$  та показати, що вона є невиродженою у точці  $\tau_0$ . Першим кроком ми запишемо частинні похідні для функції  $g_1$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \phi} = \frac{1}{h}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \zeta} = 0.$$

Далі перейдемо до обчислення частинних похідних функції  $g_2$ . Оскільки

$$g_2(\phi, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\zeta - 4\phi^2}{\eta - \phi^2} = \frac{\log(\zeta - 4\phi^2) - \log(\eta - \phi^2)}{2 \log 2},$$

то будемо мати, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial \phi} &= \frac{1}{2 \log 2} \left( -\frac{8\phi}{\zeta - 4\phi^2} + \frac{2\phi}{\eta - \phi^2} \right) = \frac{\phi(\zeta - 4\eta)}{(\zeta - 4\phi^2)(\eta - \phi^2) \log 2}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial \xi} &= 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{2(\eta - \phi^2) \log 2}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} = \frac{1}{2(\zeta - 4\phi^2) \log 2}. \end{aligned}$$

Для обчислення частинних похідних функцій  $g_3$  та  $g_4$  спочатку зазначимо, що:

$$h^{2g_2(\phi, \xi, \eta, \zeta)} = h^{\log_2 \frac{\zeta - 4\phi^2}{\eta - \phi^2}} = \left( \frac{\zeta - 4\phi^2}{\eta - \phi^2} \right)^{\log_2 h} = \left( \frac{\zeta - 4\phi^2}{\eta - \phi^2} \right)^c,$$

де  $c = \log_2 h$ , та

$$2^{2g_2(\phi, \xi, \eta, \zeta) - 1} - 1 = 2^{\log_2 \frac{\zeta - 4\phi^2}{\eta - \phi^2} - 1} - 1 = \frac{\zeta - 4\phi^2}{2(\eta - \phi^2)} - 1 = \frac{\zeta - 2\eta - 2\phi^2}{2(\eta - \phi^2)}.$$

Отже,

$$g_3(\phi, \xi, \eta, \zeta) = \frac{\eta - \phi^2}{\left( \frac{\zeta - 4\phi^2}{\eta - \phi^2} \right)^c \cdot \frac{\zeta - 2\eta - 2\phi^2}{2(\eta - \phi^2)}} = \frac{2(\eta - \phi^2)^{2+c}}{(\zeta - 4\phi^2)^c \cdot (\zeta - 2\eta - 2\phi^2)}.$$

Таким чином відповідні частинні похідні дорівнюватимуть

$$\frac{\partial g_3}{\partial \phi} = \frac{2}{(\zeta - 4\phi^2)^{2c} \cdot (\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2} \cdot (-2\phi(2+c)(\eta - \phi^2)^{c+1}(\zeta - 2\eta - 2\phi^2) -$$

$$\begin{aligned}
& -(\eta - \phi^2)^{2+c}(-8\phi c(\zeta - 4\phi^2)^{c-1}(\zeta - 2\eta - 2\phi^2) - 4\phi(\zeta - 4\phi^2)^c) = \\
& = -4\phi \left( \frac{\eta - \phi^2}{\zeta - 4\phi^2} \right)^{c+1} \cdot \frac{2(\zeta - 4\phi^2)(\zeta - 3\eta - \phi^2) + c(\zeta - 4\eta)(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)}{(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2}, \\
\frac{\partial g_3}{\partial \xi} & = 0, \\
\frac{\partial g_3}{\partial \eta} & = \frac{2}{(\zeta - 4\phi^2)^c} \cdot \frac{(c+2)(\eta - \phi^2)^{c+1}(\zeta - 2\eta - 2\phi^2) + 2(\eta - \phi^2)^{c+2}}{(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2} = \\
& = 2 \left( \frac{\eta - \phi^2}{\zeta - 4\phi^2} \right)^c \cdot \frac{(\eta - \phi^2)((c+2)(\zeta - 2\eta - 2\phi^2) + 2(\eta - \phi^2))}{(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2}, \\
\frac{\partial g_3}{\partial \zeta} & = -2(\eta - \phi^2)^{2+c} \cdot \frac{c(\zeta - 4\phi^2)^{c-1}(\zeta - 2\eta - 2\phi^2) + (\zeta - 4\phi^2)}{(\zeta - 4\phi^2)^{c+1}(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2} = \\
& = -2 \left( \frac{\eta - \phi^2}{\zeta - 4\phi^2} \right)^{c+1} \frac{(\eta - \phi^2)(c(\zeta - 2\eta - 2\phi^2) + (\zeta - 4\phi^2))}{(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2}.
\end{aligned}$$

Функція  $g_4$  може бути записана, як

$$\begin{aligned}
g_4(\xi, \eta, \zeta) & = \frac{1}{h} \left( \xi - \phi^2 - \frac{\eta - \phi^2}{h^{2g_2(\xi, \eta, \zeta)}(2^{2g_2(\xi, \eta, \zeta)} - 1)} * h^{2g_2(\xi, \eta, \zeta)} \right) = \\
& = \frac{1}{h} \left( \xi - \phi^2 - \frac{2(\eta - \phi^2)^2}{\zeta - 2\eta - 2\phi^2} \right).
\end{aligned}$$

А отже, ми отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_4}{\partial \phi} & = \frac{1}{h} \left( 2\phi - \frac{-8\phi(\eta - \phi^2)(\zeta - 2\eta - 2\phi^2) + 8\phi(\eta - \phi^2)^2}{(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2} \right) = \\
& = \frac{2\phi}{h} \cdot \frac{(\zeta - 2\eta - 2\phi^2 + 2\eta - 2\phi^2)^2 - 8(\eta - \phi^2)^2}{(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2} = \\
& = \frac{2\phi((\zeta - 4\phi^2)^2 - 8(\eta - \phi^2)^2)}{h(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2}, \\
\frac{\partial g_4}{\partial \xi} & = \frac{1}{h}, \\
\frac{\partial g_4}{\partial \eta} & = \frac{(-1)}{h} \cdot \frac{4(\eta - \phi^2)(\zeta - 2\eta - 2\phi^2) - 2(\eta - \phi^2)^2(-2)}{(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2} = \\
& = \frac{4(\eta - \phi^2)(\eta + 3\phi^2 - \zeta)}{h(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2}, \\
\frac{\partial g_4}{\partial \zeta} & = \frac{2(\eta - \phi^2)^2}{h(\zeta - 2\eta - 2\phi^2)^2}.
\end{aligned}$$

Остаточно ми отримаємо наступну матрицю похідних:

$$g'(\tau) = g'(\phi, \xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \phi} & \frac{\partial g_1}{\partial \xi} & \frac{\partial g_1}{\partial \eta} & \frac{\partial g_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \phi} & \frac{\partial g_2}{\partial \xi} & \frac{\partial g_2}{\partial \eta} & \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \phi} & \frac{\partial g_3}{\partial \xi} & \frac{\partial g_3}{\partial \eta} & \frac{\partial g_3}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial g_4}{\partial \phi} & \frac{\partial g_4}{\partial \xi} & \frac{\partial g_4}{\partial \eta} & \frac{\partial g_4}{\partial \zeta} \end{pmatrix},$$

та у точці  $\tau = \tau_0$

$$g'(\tau_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\theta(l-2)}{k^2 h^{2H-1} l(l+2)} & 0 & \frac{-1}{\kappa^2 h^{2H} l \log 2} & \frac{1}{\kappa^2 h^{2H} l(l+2) \log 2} \\ \frac{-4\theta}{h^{2H-1}} \frac{2(l+2)(l-1)+cl(l-2)}{l^2(l+2)} & 0 & \frac{2}{h^{2H}} \frac{(2+c)l+2}{l^2} & \frac{-2}{h^{2H}} \frac{l(c+1)+2}{l^2(l+2)} \\ \frac{4\theta(l^2+4l-4)}{l^2} & \frac{1}{h} & -\frac{4(l+1)}{hl^2} & \frac{2}{hl^2} \end{pmatrix}.$$

де  $c = \log_2 h$  та  $l = 2^{2H} - 2$ . Враховуючи структуру отриманої матриці, її визначник буде дорівнювати визначнику, обчисленому у теоремі 3.2, помноженому на  $\frac{1}{h}$ :

$$\det(g'(\tau_0)) = -\frac{1}{2^{2H+1} \kappa^2 h^{4H+2} (2^{2H-1} - 1)^2 \log 2}.$$

Отриманий визначник є коректно визначеним при  $H \in (0, \frac{1}{2})$  та не дорівнює нулю. Отже, шукана матриця похідних є невинродженою при  $\tau = \tau_0$  та дельта-метод може бути застосований, див. [24, теорема В.6]. Зі застосування цього методу випливає твердження теореми та зазначена формула для обчислення асимптотичної коваріаційної матриці  $\Sigma^\theta$ .  $\square$

### 3.3.3 Моделювання

Проведемо перевірку отриманих теоретичних результатів за допомогою чисельного моделювання траєкторій процесу (3.1). Для кожної згенерованої траєкторії обчислюватимемо асимптотичні коваріаційні матриці визначені у теоремах 3.3 та 3.4 використовуючи оцінки (3.4) невідомих параметрів моделі. Для кожного розглянутого набору параметрів генеруватимемо 1000 траєкторій процесу  $X_t$  й обчислюватимемо вибіркві середні (Сер.) й стандартні відхилення (Ст.В.) для значень оцінок, середнє оцінене теоретичне стандартне відхилення (О.Ст.В.) — середній квадратний корінь з оціненої асимптотичної дисперсії поділений на  $N$  ( $\sqrt{\hat{\Sigma}_{ii}^\theta}/N$ ) та ймовірність покриття (Йм.П.) для  $\alpha = 5\%$  на основі оцінок для асимптотичних дисперсій.

Аналогічно до випадку за відсутності тренду, для чисельної апроксимації граничних коваріаційних матриць ряди другого порядку вигляду (3.8) будуть обраховуватись як сума двох збіжних рядів

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha)\tilde{\rho}(i + \beta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha)\tilde{\rho}(i + \beta) + \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + 1 - \alpha)\tilde{\rho}(i + 1 - \beta)$$

де  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ . При цьому, ряди вигляду  $\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha)\tilde{\rho}(i + \beta)$  будемо чисельно оцінювати з точністю  $\delta = 10^{-4}$  обчислюючи суму  $S_m = \sum_{i=0}^m \tilde{\rho}(i + \alpha)\tilde{\rho}(i + \beta)$  з найменшим таким  $m$ , що  $|S_m - S_{m-1}| < 10^{-4}$ . У свою чергу, ряди першого порядку вигляду (3.9) обраховуватимуться за допомогою наступного представлення:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) = \tilde{\rho}(0) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\rho}(i),$$

де ряди  $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\rho}(i)$  апроксимуються з точністю  $\delta = 10^{-4}$  обчисленням суми  $S_m = \sum_{i=0}^m \tilde{\rho}(i)$  з найменшим таким  $m$ , що  $|S_m - S_{m-1}| < 10^{-4}$ .

Отримані апроксимації будуть використовуватись для обчислення асимптотичних коваріаційних матриць, визначених теоремами 3.3 та 3.4. Для симуляцій ми будемо використовуватись лише значення  $H \in (0, \frac{1}{2})$ , оскільки при  $H = \frac{1}{2}$  модель (3.1) є неідентифіковною, а при  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$  ряди першого порядку, визначені у (3.9), будуть розбіжні за лемою 3.1, а отже не будуть визначені відповідні асимптотичні коваріаційні матриці. Додатково, у випадках, коли оцінений параметр  $\hat{H}_N$  буде виходити за межі  $(0, \frac{1}{2})$ , то асимптотичні коваріаційні матриці й відповідні статистики (О.Ст.В. та Йм.П.) будуть вважатись невизначеними.

Для оцінок  $\hat{\theta}_N^2, \hat{H}_N, \hat{\sigma}_N^2, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\Sigma}_N^0$  та фіксованого кроку  $h = 1$  ми варіюватимемо горизонт спостережень  $T = h(2^n + 3)$  для  $n \in \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ . У всіх симуляціях використовуватимемо значення  $\theta = 0.5, \sigma = 1.5$  та  $\kappa = 2.5$ .

У представлених результатах симуляцій спостерігаємо, що ймовірність покриття та оцінка асимптотичної дисперсії демонструють кращі результати для менших значень індексу  $N$  у порівнянні зі значеннями параметра  $H$  ближчими до  $1/2$ , де побудовані оцінки демонструють меншу швидкість збіжності, й це збігається з висновками моделювань отриманих у [26]. При цьому наша оцінка асимптотичної коваріаційної матриці допоміжних статистик (3.3), побудована у теоремі 3.3, залишається достатньо точною для будь-яких значень  $H \in (0, \frac{1}{2})$ , що збігається з нашими висновками для моделі за відсутності тренду. Відповідні

Табл. 3.9. Оцінка  $\widehat{H}_N$  при  $\theta = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 2.25$ ,  $\kappa^2 = 6.25$  ( $h = 1$ )

$H$			$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	$\widehat{H}_N$	Сер.	0.0935	0.0925	0.0983	0.10023	0.1001	0.1002	0.1001
		Ст.В.	0.2522	0.1240	0.0628	0.03152	0.0159	0.0080	0.0039
		О.Ст.В.	0.2501	0.1242	0.0621	0.03102	0.0155	0.0078	0.0039
		Йм.П.%	100.00	100.00	97.843	94.4945	93.600	94.100	94.700
0.25	$\widehat{H}_N$	Сер.	0.2526	0.2427	0.2514	0.2491	0.2509	0.2506	0.2501
		Ст.В.	0.3643	0.1648	0.0803	0.0420	0.0200	0.0102	0.0052
		О.Ст.В.	0.3355	0.1651	0.0808	0.0402	0.0200	0.0100	0.0050
		Йм.П.%	100.00	100.00	98.100	95.538	94.600	93.800	93.400
0.4	$\widehat{H}_N$	Сер.	0.4556	0.3770	0.3977	0.4001	0.4008	0.4006	0.4002
		Ст.В.	0.7684	0.4077	0.1728	0.0788	0.0406	0.0194	0.0098
		О.Ст.В.	0.6580	0.3725	0.1729	0.0821	0.0402	0.0200	0.0100
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	96.815	96.597	98.709	95.983

результати чисельного моделювання представлені у таблиці 3.13. Отже, отримані результати свідчать про те, що асимптотична коваріаційна матриця  $\Sigma^\theta$ , отримана у теоремі 3.4 є більш чутливою до змін у параметрах моделі у порівнянні з асимптотичною матрицею допоміжних статистик з теореми 3.1.

Табл. 3.10. Оцінка  $\widehat{\sigma}_N^2$  при  $\theta = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 2.25$ ,  $\kappa^2 = 6.25$  ( $h = 1$ )

$H$			$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	$\widehat{\sigma}_N^2$	Сер.	2.6481	2.2573	2.1847	2.2235	2.2423	2.2476	2.2494
		Ст.В.	1.1740	0.9185	0.5952	0.2968	0.1449	0.0729	0.0351
		О.Ст.В.	2.9146	1.4187	0.6404	0.3003	0.1481	0.0739	0.0369
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.569	95.596	95.200	95.700	95.700
0.25	$\widehat{\sigma}_N^2$	Сер.	3.6456	2.9484	2.3319	2.1661	2.2041	2.2332	2.2452
		Ст.В.	1.6258	1.3263	1.0319	0.7428	0.3688	0.1853	0.0935
		О.Ст.В.	5.0317	2.5208	1.4949	0.7878	0.3816	0.1879	0.0933
		Йм.П.%	100.00	94.977	93.112	93.813	96.100	95.200	94.300
0.4	$\widehat{\sigma}_N^2$	Сер.	5.6821	5.4706	4.5431	3.4776	2.6655	2.2155	2.1882
		Ст.В.	1.8311	1.7265	1.7115	1.5328	1.2756	0.9317	0.5582
		О.Ст.В.	12.580	6.9087	4.2235	3.1358	2.0535	1.1712	0.5808
		Йм.П.%	99.495	73.316	69.288	78.662	89.136	94.624	96.285

Табл. 3.11. Оцінка  $\hat{\kappa}_N^2$  при  $\theta = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 2.25$ ,  $\kappa^2 = 6.25$  ( $h = 1$ )

$H$				$N$					
				$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$
0.1	$\hat{\kappa}_N^2$	Сер.	10.199	6.7111	6.3188	6.2798	6.2584	6.2527	6.2509
		Ст.В.	31.076	2.9581	0.6486	0.2985	0.1465	0.0747	0.0355
		О.Ст.В.	2.8760	1.3996	0.6304	0.2953	0.1455	0.0725	0.0362
		Йм.П.%	100.00	99.854	98.274	94.895	95.100	94.900	94.800
0.25	$\hat{\kappa}_N^2$	Сер.	15.577	12.712	7.1065	6.3762	6.2980	6.2676	6.2553
		Ст.В.	88.586	70.015	4.6762	0.8004	0.3686	0.1847	0.0937
		О.Ст.В.	4.8893	2.4529	1.4576	0.7677	0.3710	0.1825	0.0906
		Йм.П.%	100.00	92.779	92.280	93.002	95.700	94.600	93.700
0.4	$\hat{\kappa}_N^2$	Сер.	7.9033	8.9002	16.301	20.014	8.5023	6.5251	6.3212
		Ст.В.	35.401	33.767	93.602	158.18	12.442	1.2954	0.5757
		О.Ст.В.	12.123	6.6486	4.0812	3.0463	2.0029	1.1443	0.5672
		Йм.П.%	98.485	72.280	67.416	77.389	88.089	94.516	95.683

Табл. 3.12. Оцінка  $\hat{\theta}_N$  при  $\theta = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 2.25$ ,  $\kappa^2 = 6.25$  ( $h = 1$ )

$H$				$N$					
				$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$
0.1	$\hat{\theta}_N$	Сер.	0.4981	0.5015	0.5013	0.5005	0.5002	0.5001	0.5000
		Ст.В.	0.0933	0.0464	0.0237	0.0113	0.0058	0.0030	0.0015
		О.Ст.В.	0.0821	0.0425	0.0226	0.0117	0.0059	0.0029	0.0015
		Йм.П.%	86.773	89.781	91.909	95.996	95.400	94.800	95.000
0.25	$\hat{\theta}_N$	Сер.	0.5032	0.5000	0.5015	0.5002	0.4999	0.4999	0.5000
		Ст.В.	0.1020	0.0486	0.0244	0.0121	0.0058	0.0029	0.0015
		О.Ст.В.	0.1019	0.0511	0.0237	0.0116	0.0059	0.0030	0.0015
		Йм.П.%	91.916	92.308	91.805	91.886	94.200	94.900	95.300
0.4	$\hat{\theta}_N$	Сер.	0.5050	0.5025	0.5015	0.5012	0.5003	0.5000	0.5001
		Ст.В.	0.1305	0.0605	0.0282	0.0134	0.0066	0.0032	0.0016
		О.Ст.В.	0.1341	0.0702	0.0338	0.0155	0.0072	0.0034	0.0017
		Йм.П.%	94.950	97.409	97.378	96.975	95.026	96.559	95.582

Табл. 3.13. Ймовірність покриття оцінок  $(\phi_N, \xi_N, \eta_N, \zeta_N)$  при  $\theta = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 2.25$ ,  $\kappa^2 = 6.25$  ( $h = 1$ )

$H$		$N$						
		$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	$\phi_N$	86.773	89.781	91.909	95.996	95.400	94.800	95.000
	$\xi_N$	94.444	94.161	93.851	95.095	95.000	95.300	94.400
	$\eta_N$	97.884	95.329	95.685	94.995	93.400	95.100	95.100
	$\zeta_N$	99.471	99.124	96.332	95.395	94.100	94.300	95.500
0.25	$\phi_N$	91.916	92.308	91.805	91.886	94.200	94.900	95.300
	$\xi_N$	94.910	95.290	96.200	94.929	95.900	95.500	95.900
	$\eta_N$	97.605	96.860	95.843	93.915	94.700	95.300	94.300
	$\zeta_N$	99.102	99.058	97.387	96.146	95.100	94.700	94.500
0.4	$\phi_N$	94.950	97.409	97.378	96.975	95.026	96.559	95.582
	$\xi_N$	95.455	93.523	93.633	95.382	95.550	94.946	95.482
	$\eta_N$	96.970	97.409	96.255	95.860	95.812	94.516	95.080
	$\zeta_N$	100.00	99.741	97.753	96.975	97.513	96.452	94.880

Зауважимо, що, аналогічно до випадку за відсутності тренду, для малого розміру вибірки  $N$  має місце певний відсоток ітерацій у яких деякі оцінки (3.4) є невизначеними (Невиз.%) або отримані оцінки для параметра  $H$  у результаті виходять поза межі інтервалу  $(0, \frac{1}{2})$  ( $H$  Поз.%). Аналогічно до випадку за відсутності тренду, у таких випадках асимптотична коваріаційна матриця не може бути обчислена, оскільки ряди, з яких вона складається, (3.8) є розбіжними. Відсоток відповідних ітерацій наведено у таблиці 3.14.

При цьому, для моделі за наявності тренду не спостерігалось проблем зі швидкістю апроксимації для граничних асимптотичних коваріацій, з якими ми зіштовхнулись у моделі за відсутності тренду. Це може бути пов'язано з тим, що у цьому випадку ми працюємо з дробовим броунівським рухом з короткотерміною залежністю ( $H \in (0, \frac{1}{2})$ ), й відповідна автоковаріаційна функція швидше прямує до нуля. Це також збігається з нашими попередніми висновками, оскільки для моделі за відсутності тренду ця проблема з'являлась саме у випадку довготермінової залежності ( $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ).

Табл. 3.14. Відсоток ітерацій з невизначеними оцінками або з необчислювальною коваріаційною матрицею для попередніх симуляцій

$H$		$N$						
		$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	Невиз.%	27.0	9.1	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
	$H$ Поз.%	35.2	22.4	6.8	0.1	0.0	0.0	0.0
0.25	Невиз.%	44.5	29.9	15.7	1.4	0.0	0.0	0.0
	$H$ Поз.%	22.1	6.4	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
0.4	Невиз.%	60.4	47.5	44.6	37.2	23.6	7.0	0.4
	$H$ Поз.%	19.8	13.9	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0

### 3.4 Висновки

У третьому розділі розглянуто модель змішаного дробового броунівського руху за відсутності та за наявності тренду  $\theta t$ .

Визначено властивості автоковаріаційної функції та умови збіжності автоковаріаційних рядів першого ( $H < \frac{1}{2}$ ) та другого порядків ( $H < \frac{3}{4}$ ).

Виведено умови асимптотичної нормальності як одночасних оцінок невідомих параметрів, так й допоміжних статистик для обох моделей. Визначено явний вигляд відповідних асимптотичних коваріаційних матриць.

Відповідні теоретичні висновки проілюстровані чисельним моделюванням. Отримані результати показують збіжність оцінок асимптотичної коваріації для визначених моделей, й відповідно підтверджують отримані теоретичні напрацювання. Додатково, досліджено проблеми пов'язані з чисельною апроксимацією граничних коваріаційних матриць для процесів суміші дробового броунівського руху за наявності тренду при довготерміновій залежності ( $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ).

## Розділ 4

# Оцінювання параметрів суміші двох дробових броунівських рухів

### 4.1 Визначення моделі

Розглянемо наступний стохастичний процес:

$$X_t = \kappa B_t^{H_1} + \sigma B_t^{H_2}, \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

де  $B^{H_1}$  та  $B^{H_2}$  — незалежні дробові броунівські рухи з індексами Хюрста  $H_1$  та  $H_2$  відповідно. Наша задача полягає в одночасному оцінюванні чотирьох невідомих параметрів  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $\kappa^2$ ,  $\sigma^2$  на основі спостережуваних  $\{X_{kh}, k = 0, 1, 2, \dots, N + 7\}$ ,  $h > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Для того, щоб зазначена модель була ідентифіковна, будемо вважати, що  $0 < H_1 < H_2 < 1$ ,  $\sigma > 0$ , та  $\kappa > 0$  у цьому розділі.

Нехай крок  $h > 0$  — фіксований. Припустимо, що процес  $X$  визначений у (4.1) спостерігається у точках  $t_k = kh$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N + 7$ . Позначимо приріст цього процесу наступним чином:

$$\Delta X_k := X_{(k+1)h} - X_{kh} = \kappa \Delta B_k^{H_1} + \sigma \Delta B_k^{H_2}.$$

Прирости  $\{\Delta X_k, k \geq 0\}$  утворюють стаціонарну гауссову послідовність, при цьому її автоковаріаційна функція матиме наступний вигляд:

$$\tilde{\rho}(i) = \text{Cov}(\Delta X_0, \Delta X_i) = \kappa^2 h^{2H_1} \rho(i, H_1) + \sigma^2 h^{2H_2} \rho(i, H_2), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

де

$$\rho(i, H) := \frac{1}{2} \left( |i+1|^{2H} - 2|i|^{2H} + |i-1|^{2H} \right) \quad (4.3)$$

позначає зазначену у попередньому розділі автоковаріаційну функцію стаціонарної послідовності  $\{B_{k+1}^H - B_k^H, k \geq 0\}$ . Випишемо певні властивості отриманої послідовності, які будуть використовуватись у подальшому.

**Лема 4.1.** Для довільних  $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$  та  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha) \tilde{\rho}(i + \beta) < \infty. \quad (4.4)$$

*Доведення.* Будемо мати, що

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}^2(i) \leq 2\kappa^4 h^{4H_1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho^2(i, H_1) + 2\sigma^4 h^{4H_2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho^2(i, H_2) < \infty,$$

за другим твердженням леми 3.1. Тоді, використавши нерівність Коші-Буняковського, отримаємо для усіх  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ :

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i + \alpha) \tilde{\rho}(i + \beta) \leq \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}^2(i + \alpha) \cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}^2(i + \beta)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}^2(i) < \infty. \quad \square$$

**Лема 4.2.** Гауссова послідовність  $\Delta X_k, k = 0, 1, \dots$ , є стаціонарною та ергодичною.

*Доведення.* Оскільки процеси  $B^{H_1}$  та  $B^{H_2}$  — незалежні центровані гауссові процеси зі стаціонарними приростами, то  $\{\Delta X_k, k \geq 0\}$  — стаціонарна гауссова послідовність з  $\mathbb{E}\Delta X_k = 0$ . Таким чином, щоб довести ергодичність  $\Delta X_k$ , достатньо показати, що її автоковаріаційна функція  $\tilde{\rho}(k)$  збігається до нуля при  $k \rightarrow \infty$ . У свою чергу, зазначений факт випливає із застосування першого твердження леми 3.1 до автоковаріацій  $\rho(k, H_1)$  та  $\rho(k, H_2)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(k) &= \kappa^2 h^{2H_1} \rho(k, H_1) + \sigma^2 h^{2H_2} \rho(k, H_2) \sim \\ &\sim \kappa^2 h^{2H_1} H_1 (2H_1 - 1) k^{(2H_1-2)} + \sigma^2 h^{2H_2} H_2 (2H_2 - 1) k^{(2H_2-2)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при  $k \rightarrow \infty$ . □

## 4.2 Побудова консистентних оцінок

Лема 4.2 дозволяє застосувати ергодичну теорему для побудови одночасних оцінок шуканих параметрів. А саме, якщо  $s: \mathbb{R}^{l+1} \rightarrow \mathbb{R}$  — борелівська функція

така, що  $\mathbb{E} |s(\Delta X_0, \Delta X_1, \dots, \Delta X_l)| < \infty$ , тоді

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s(\Delta X_k, \Delta X_{k+1}, \dots, \Delta X_{k+l}) \rightarrow \mathbb{E} s(\Delta X_0, \Delta X_1, \dots, \Delta X_l) \quad (4.5)$$

м. н., при  $N \rightarrow \infty$ . Основна ідея полягає в обранні чотирьох різних збіжних послідовностей, за допомогою вибору різних функцій  $s$ , щоб потім побудувати шукані оцінки як розв'язки відповідної системи з чотирьох рівнянь. Відповідно, визначимо наступні чотири допоміжні статистики:

$$\begin{aligned} \xi_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh})^2, & \eta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+2)h} - X_{kh})^2, \\ \zeta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+4)h} - X_{kh})^2, & \phi_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+8)h} - X_{kh})^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Визначимо також  $\vartheta = (H_1, H_2, \kappa^2, \sigma^2)^\top$ .

**Лема 4.3.** Для моделі (4.1) мають місце наступні збіжності м.н. при  $N \rightarrow \infty$ :

- (i)  $\xi_N \rightarrow \mathbb{E} \xi_1 = \kappa^2 h^{2H_1} + h^{2H_2} =: w_1(\vartheta)$ ,
- (ii)  $\eta_N \rightarrow \mathbb{E} \eta_1 = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{2H_2} =: w_2(\vartheta)$ ,
- (iii)  $\zeta_N \rightarrow \mathbb{E} \zeta_1 = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{4H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{4H_2} =: w_3(\vartheta)$ ,
- (iv)  $\phi_N \rightarrow \mathbb{E} \phi_1 = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{6H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{6H_2} =: w_4(\vartheta)$ .

*Доведення.* (i) Застосувавши функцію  $s(x_0) = x_0^2$  до (4.5), отримаємо

$$\begin{aligned} \xi_N \xrightarrow{P1} \mathbb{E} X_h^2 &= \mathbb{E} \left( \kappa B_h^{H_1} + \sigma B_h^{H_2} \right)^2 = \kappa^2 \mathbb{E} (B_h^{H_1})^2 + \sigma^2 \mathbb{E} (B_h^{H_2})^2 = \\ &= \kappa^2 h^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2}, N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(ii) Використовуючи  $s(x_0, x_1) = (x_0 + x_1)^2$  у (4.5), будемо мати

$$\begin{aligned} \eta_N \xrightarrow{P1} \mathbb{E} X_{2h}^2 &= \mathbb{E} \left( \kappa B_{2h}^{H_1} + \sigma B_{2h}^{H_2} \right)^2 = \kappa^2 \mathbb{E} (B_{2h}^{H_1})^2 + \sigma^2 \mathbb{E} (B_{2h}^{H_2})^2 = \\ &= \kappa^2 h^{2H_1} 2^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{2H_2}, N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(iii) Підставивши  $s(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^2$  до (4.5):

$$\begin{aligned} \zeta_N \xrightarrow{P1} \mathbb{E} X_{4h}^2 &= \mathbb{E} \left( \kappa B_{4h}^{H_1} + \sigma B_{4h}^{H_2} \right)^2 = \kappa^2 \mathbb{E} (B_{4h}^{H_1})^2 + \sigma^2 \mathbb{E} (B_{4h}^{H_2})^2 = \\ &= \kappa^2 h^{2H_1} 4^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 4^{2H_2} = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{4H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{4H_2}, N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(iv) Остаточно, використовуючи функцію  $s(x_0, \dots, x_7) = (\sum_{i=0}^7 x_i)^2$  у (4.5), отримаємо збіжність

$$\begin{aligned} \phi_N \xrightarrow{P_1} \mathbb{E} X_{8h}^2 &= \mathbb{E} \left( \kappa B_{8h}^{H_1} + \sigma B_{8h}^{H_2} \right)^2 = \kappa^2 \mathbb{E} (B_{8h}^{H_1})^2 + \sigma^2 \mathbb{E} (B_{8h}^{H_2})^2 = \\ &= \kappa^2 h^{2H_1} 8^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 8^{2H_2} = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{6H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{6H_2}, N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Введемо наступні позначення:

$$w(\vartheta) := (w_1(\vartheta), w_2(\vartheta), w_3(\vartheta), w_4(\vartheta))^\top, \quad (4.7)$$

$$\tau_N = (\xi_N, \eta_N, \zeta_N, \phi_N)^\top, N \in \mathbb{E}, \quad \tau_0 = (\mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\eta_1, \mathbb{E}\zeta_1, \mathbb{E}\phi_1)^\top. \quad (4.8)$$

Тоді  $w(\vartheta) = \tau_0$ . Таким чином, для визначення оцінок невідомих параметрів  $(H_1, H_2, \kappa^2, \sigma^2)^\top$  нам необхідно побудувати функцію  $g$  таку, що  $g(\tau_0) = w^{-1}(\tau_0)$ . Тоді шукані оцінки будуть визначатись як  $(\widehat{H}_N^{(1)}, \widehat{H}_N^{(2)}, \widehat{\kappa}_N^2, \widehat{\sigma}_N^2)^\top := g(\tau_N)$ .

**Теорема 4.1.** Нехай  $0 < H_1 < H_2 < 1$ . Тоді статистика

$$\widehat{\vartheta} := (\widehat{H}_N^{(1)}, \widehat{H}_N^{(2)}, \widehat{\kappa}_N^2, \widehat{\sigma}_N^2)^\top, \quad (4.9)$$

з компонентами

$$\widehat{H}_N^{(1)} = \frac{1}{2} \log_{2^+} \left( \frac{\eta_N \zeta_N - \xi_N \phi_N + d_N}{2(\eta_N^2 - \xi_N \zeta_N)} \right), \quad (4.10)$$

$$\widehat{H}_N^{(2)} = \frac{1}{2} \log_{2^+} \left( \frac{\eta_N \zeta_N - \xi_N \phi_N - d_N}{2(\eta_N^2 - \xi_N \zeta_N)} \right), \quad (4.11)$$

$$\widehat{\kappa}_N^2 = \left( \frac{2(\eta_N^2 - \xi_N \zeta_N)}{\eta_N \zeta_N - \xi_N \phi_N + d_N} \right)^{\log_2 h} \frac{\xi_N d_N + 2\eta_N^3 - 3\xi_N \eta_N \zeta_N + \xi_N^2 \phi_N}{2d_N}, \quad (4.12)$$

$$\widehat{\sigma}_N^2 = \left( \frac{2(\eta_N^2 - \xi_N \zeta_N)}{\eta_N \zeta_N - \xi_N \phi_N - d_N} \right)^{\log_2 h} \frac{\xi_N d_N - 2\eta_N^3 + 3\xi_N \eta_N \zeta_N - \xi_N^2 \phi_N}{2d_N} \quad (4.13)$$

де

$$d_N := (\xi_N^2 \phi_N^2 - 6\xi_N \eta_N \zeta_N \phi_N - 3\eta_N^2 \zeta_N^2 + 4\eta_N^3 \phi_N + 4\xi_N \zeta_N^3)_+^{1/2} \quad (4.14)$$

є строго консистентною оцінкою вектору параметрів  $\vartheta = (H_1, H_2, \kappa^2, \sigma^2)^\top$ .

Тут

$$(x)_+^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

*Доведення.* Необхідно розв'язати наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi_1 &= \kappa^2 h^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2}, \\ \mathbb{E}\eta_1 &= \kappa^2 h^{2H_1} 2^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{2H_2}, \\ \mathbb{E}\zeta_1 &= \kappa^2 h^{2H_1} 2^{4H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{4H_2}, \\ \mathbb{E}\phi_1 &= \kappa^2 h^{2H_1} 2^{6H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{6H_2}.\end{aligned}$$

Позначимо  $u = \kappa^2 h^{2H_1}$ ,  $v = \sigma^2 h^{2H_2}$ ,  $x = 2^{2H_1}$ ,  $y = 2^{2H_2}$ ,  $\xi = \mathbb{E}\xi_1$ ,  $\eta = \mathbb{E}\eta_1$ ,  $\zeta = \mathbb{E}\zeta_1$ ,  $\phi = \mathbb{E}\phi_1$ . Відповідними замінами отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\xi = u + v, \quad (4.15)$$

$$\eta = ux + vy, \quad (4.16)$$

$$\zeta = ux^2 + vy^2, \quad (4.17)$$

$$\phi = ux^3 + vy^3. \quad (4.18)$$

Використовуючи рівняння (4.15) та (4.16) виразимо змінні  $u$  та  $v$  через  $x$  та  $y$ . Помноживши перше рівняння на  $x$  та  $y$  отримаємо

$$\xi x = ux + vx, \quad (4.19)$$

$$\xi y = uy + vy. \quad (4.20)$$

З рівнянь (4.19) та (4.16) випливає

$$v = \frac{\eta - \xi x}{y - x}. \quad (4.21)$$

Аналогічно, рівняння (4.20) та (4.16) дають

$$u = \frac{\eta - \xi y}{x - y}. \quad (4.22)$$

Поєднавши (4.21) та (4.22) з (4.17), отримаємо

$$\begin{aligned}\zeta &= x^2 \cdot \frac{\eta - \xi y}{x - y} + y^2 \cdot \frac{\eta - \xi x}{y - x} = \\ &= \frac{1}{y - x} (-\eta x^2 + \xi y x^2 + \eta y^2 - \xi x y^2) = \\ &= \frac{1}{y - x} (-\xi(y - x)xy + \eta(y^2 - x^2)) = \\ &= -\xi xy + \eta(y + x),\end{aligned}$$

й таким чином

$$\zeta = -\xi xy + \eta(y + x). \quad (4.23)$$

У свою чергу, з поєднання (4.21) та (4.22) з (4.18) випливає

$$\begin{aligned} \phi &= x^3 \cdot \frac{\eta - \xi y}{x - y} + y^3 \cdot \frac{\eta - \xi x}{y - x} = \\ &= \frac{1}{y - x} (-\eta x^3 + \xi y x^3 + \eta y^3 - \xi x y^3) = \\ &= \frac{1}{y - x} (-\xi(y^2 - x^2)xy + \eta(y^3 - x^3)) = \\ &= -\xi(y + x)xy + \eta(y^2 + xy + x^2), \end{aligned}$$

а отже

$$\phi = -\xi(y + x)xy + \eta(y^2 + xy + x^2). \quad (4.24)$$

Помноживши рівняння (4.23) на  $x + y$  отримаємо

$$\zeta(x + y) = -\xi(x + y)xy + \eta(y^2 + 2xy + x^2). \quad (4.25)$$

Остаточо, з віднімання (4.24) від (4.25) випливає

$$\zeta(x + y) - \phi = \eta xy, \quad \zeta x - \eta xy = \phi - \zeta y, \quad x(\zeta - \eta y) = \phi - \zeta y,$$

$$x = \frac{\phi - \zeta y}{\zeta - \eta y}, \quad (4.26)$$

та аналогічно

$$y = \frac{\phi - \zeta x}{\zeta - \eta x}. \quad (4.27)$$

Одночасно з цим, ми можемо отримати вирази для  $x$  та  $y$  з (4.23):

$$\zeta = -\xi xy + \eta y + \eta x, \quad \zeta - \eta y = x(\eta - \xi y),$$

$$x = \frac{\zeta - \eta y}{\eta - \xi y}, \quad (4.28)$$

та для  $y$ :

$$y = \frac{\zeta - \eta x}{\eta - \xi x}, \quad (4.29)$$

З рівнянь (4.26) та (4.28) випливає

$$\frac{\phi - \zeta y}{\zeta - \eta y} = \frac{\zeta - \eta y}{\eta - \xi y}, \quad (\eta - \xi y)(\phi - \zeta y) = (\zeta - \eta y)^2,$$

$$\eta\phi - \xi\phi y - \zeta\eta y + \xi\zeta y^2 = \zeta^2 - 2\eta\zeta y + \eta^2 y^2,$$

а отже має місце наступне квадратичне рівняння відносно змінної  $y$ :

$$y^2 (\eta^2 - \xi\zeta) - y (\eta\zeta - \xi\phi) + (\zeta^2 - \eta\phi) = 0. \quad (4.30)$$

Тоді

$$y = \frac{\eta\zeta - \xi\phi \pm \sqrt{D}}{2(\eta^2 - \xi\zeta)}, \quad (4.31)$$

де

$$\begin{aligned} D &= (\eta\zeta - \xi\phi)^2 - 4(\eta^2 - \xi\zeta)(\zeta^2 - \eta\phi) \\ &= (\eta\zeta)^2 - 2\xi\eta\zeta\phi + (\xi\phi)^2 - 4(\eta\zeta)^2 + 4\eta^3\phi + 4\xi\zeta^3 - 4\xi\eta\zeta\phi \\ &= \xi^2\phi^2 - 6\xi\eta\zeta\phi - 3\eta^2\zeta^2 + 4\eta^3\phi + 4\xi\zeta^3. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Аналогічно, з рівнянь (4.27) та (4.29) отримаємо

$$x^2 (\eta^2 - \xi\zeta) - x (\eta\zeta - \xi\phi) + (\zeta^2 - \eta\phi) = 0. \quad (4.33)$$

Таким чином,  $x$  та  $y$  ( $y > x$ ) є двома різними коренями одного квадратичного рівняння ((4.30) та (4.33)), що визначаються рівнянням (4.31). При цьому, згідно до рівнянь (4.15)–(4.18):

$$\begin{aligned} \eta\zeta - \xi\phi &= (ux + vy)(ux^2 + vy^2) - (u + v)(ux^3 + vy^3) = \\ &= u^2x^3 + uvx^2y + uvxy^2 + v^2y^3 - u^2x^3 - uvx^3 - v^2y^3 - uvv^3 = \\ &= -uv(x^3 - x^2y - xy^2 + y^3) = -uv(y^2 - x^2)(y - x) = \\ &= -uv(y - x)^2(y + x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta^2 - \xi\zeta &= (ux + vy)^2 - (u + v)(ux^2 + vy^2) = \\ &= u^2x^2 + 2uvxy + v^2y^2 - u^2x^2 - uvx^2 - v^2y^2 - uvv^2 = \\ &= -uv(y^2 - 2xy + x^2) = -uv(y - x)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta^2 - \eta\phi &= (ux^2 + vy^2)^2 - (ux + vy)(ux^3 + vy^3) = \\ &= u^2x^4 + 2uvx^2y^2 + v^2y^4 - u^2x^4 - uvx^3y - uvxy^3 - v^2y^4 = \\ &= -uvxy(x^2 - 2xy + y^2) = -uvxy(y - x)^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} D &= (\eta\zeta - \xi\phi)^2 - 4(\eta^2 - \xi\zeta)(\zeta^2 - \eta\phi) = \\ &= u^2v^2(y-x)^4(y+x)^2 - 4u^2v^2xy(y-x)^4 = \\ &= u^2v^2(y-x)^4(y^2 - 2xy + x^2) = u^2v^2(y-x)^6 > 0. \end{aligned}$$

Таким чином, дискримінант є коректно визначеним та відповідне квадратичне рівняння має мати два різні корені. З рівняння (4.31) матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{\eta\zeta - \xi\phi \pm \sqrt{D}}{2(\eta^2 - \xi\zeta)} &= \frac{-uv(y-x)^2(y+x) \pm uv(y-x)^3}{-2uv(y-x)^2} = \\ &= \frac{-1}{2} \cdot (-y-x \pm (y-x)), \end{aligned}$$

звідки випливає

$$x = \frac{\eta\zeta - \xi\phi + \sqrt{D}}{2(\eta^2 - \xi\zeta)}, \quad y = \frac{\eta\zeta - \xi\phi - \sqrt{D}}{2(\eta^2 - \xi\zeta)}.$$

Враховуючи, що  $x = 2^{2H_1}$  та  $y = 2^{2H_2}$ , отримаємо:

$$2^{2H_1} = \frac{\eta\zeta - \xi\phi + \sqrt{D}}{2(\eta^2 - \xi\zeta)}, \quad 2^{2H_2} = \frac{\eta\zeta - \xi\phi - \sqrt{D}}{2(\eta^2 - \xi\zeta)},$$

й таким чином остаточно будемо мати наступне:

$$H_1 = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\eta\zeta - \xi\phi + \sqrt{D}}{2(\eta^2 - \xi\zeta)} \right), \quad (4.34)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\eta\zeta - \xi\phi - \sqrt{D}}{2(\eta^2 - \xi\zeta)} \right). \quad (4.35)$$

Також, з рівняння (4.21) випливає:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\eta - \xi x}{y - x} = \frac{2(\eta^2 - \xi\zeta)(\eta - \xi x)}{-2\sqrt{D}} = \frac{2\eta^3 - 2\xi\eta\zeta - \xi\eta\zeta + \xi^2\phi - \xi\sqrt{D}}{-2\sqrt{D}} = \\ &= \frac{\xi\sqrt{D} - 2\eta^3 + 3\xi\eta\zeta - \xi^2\phi}{2\sqrt{D}}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $\sigma^2 h^{2H_2} = v$  та  $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$ , отримаємо:

$$\sigma^2 = \left( \frac{2(\eta^2 - \xi\zeta)}{\eta\zeta - \xi\phi - \sqrt{D}} \right)^{\log_2 h} \cdot \left( \frac{\xi\sqrt{D} - 2\eta^3 + 3\xi\eta\zeta - \xi^2\phi}{2\sqrt{D}} \right). \quad (4.36)$$

Й аналогічно:

$$\kappa^2 = \left( \frac{2(\eta^2 - \xi\zeta)}{\eta\zeta - \xi\phi + \sqrt{D}} \right)^{\log_2 h} \cdot \left( \frac{\xi\sqrt{D} + 2\eta^3 - 3\xi\eta\zeta + \xi^2\phi}{2\sqrt{D}} \right). \quad (4.37)$$

Формули (4.34)–(4.37) надають явний вигляд оберненої функції  $g = w^{-1}$ , де  $w$  визначена рівнянням (4.7) така, що для  $w(\vartheta) = \tau_0$  матимемо  $g(\tau_0) = \vartheta$ . Отже, підставивши строго консистентну оцінку  $\tau_N$  замість  $\tau_0$  до рівнянь (4.34)–(4.37), отримаємо у результаті строго консистентну оцінку  $\hat{\vartheta}_N = (\hat{H}_N^{(1)}, \hat{H}_N^{(2)}, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2)^\top$  для  $\vartheta = (H_1, H_2, \kappa^2, \sigma^2)^\top$ , яка визначається рівняннями (4.10)–(4.13)  $\square$

## 4.3 Асимптотична нормальність оцінок

### 4.3.1 Асимптотична нормальність допоміжних статистик

Дослідимо асимптотичні властивості побудованих допоміжних статистик.

**Теорема 4.2.** Нехай  $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$ . Тоді вектор  $\tau_N$ , визначений у (4.8), є асимптотично нормальним, а саме

$$\sqrt{N}(\tau_N - \tau_0) = \sqrt{N} \begin{pmatrix} \xi_N - \mathbb{E}\xi_1 \\ \eta_N - \mathbb{E}\eta_1 \\ \zeta_N - \mathbb{E}\zeta_1 \\ \phi_N - \mathbb{E}\phi_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\vec{0}, \tilde{\Sigma})$$

з асимптотичною коваріаційною матрицею  $\tilde{\Sigma}$ , що може бути представлена у явному вигляді як

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_{11} & \tilde{\Sigma}_{12} & \tilde{\Sigma}_{13} & \tilde{\Sigma}_{14} \\ \tilde{\Sigma}_{12} & \tilde{\Sigma}_{22} & \tilde{\Sigma}_{23} & \tilde{\Sigma}_{24} \\ \tilde{\Sigma}_{13} & \tilde{\Sigma}_{23} & \tilde{\Sigma}_{33} & \tilde{\Sigma}_{34} \\ \tilde{\Sigma}_{14} & \tilde{\Sigma}_{24} & \tilde{\Sigma}_{34} & \tilde{\Sigma}_{44} \end{pmatrix}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{11} &= 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)^2, & \tilde{\Sigma}_{12} &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) (4\tilde{\rho}(i) + 4\tilde{\rho}(i+1)), \\ \tilde{\Sigma}_{22} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) (12\tilde{\rho}(i) + 16\tilde{\rho}(i+1) + 4\tilde{\rho}(i+2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_{13} &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 8\tilde{\rho}(i) + 12\tilde{\rho}(i+1) + 8\tilde{\rho}(i+2) + 4\tilde{\rho}(i+3) \right), \\
\tilde{\Sigma}_{23} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 28\tilde{\rho}(i) + 48\tilde{\rho}(i+1) + 32\tilde{\rho}(i+2) + 16\tilde{\rho}(i+3) + 4\tilde{\rho}(i+4) \right), \\
\tilde{\Sigma}_{33} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 88\tilde{\rho}(i) + 160\tilde{\rho}(i+1) + 124\tilde{\rho}(i+2) + 80\tilde{\rho}(i+3) + \right. \\
&\quad \left. + 40\tilde{\rho}(i+4) + 16\tilde{\rho}(i+5) + 4\tilde{\rho}(i+6) \right), \\
\tilde{\Sigma}_{14} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 16\tilde{\rho}(i) + 28\tilde{\rho}(i+1) + 24\tilde{\rho}(i+2) + 20\tilde{\rho}(i+3) + \right. \\
&\quad \left. + 16\tilde{\rho}(i+4) + 12\tilde{\rho}(i+5) + 8\tilde{\rho}(i+6) + 4\tilde{\rho}(i+7) \right), \\
\tilde{\Sigma}_{24} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 60\tilde{\rho}(i) + 112\tilde{\rho}(i+1) + 96\tilde{\rho}(i+2) + 80\tilde{\rho}(i+3) + \right. \\
&\quad \left. + 64\tilde{\rho}(i+4) + 48\tilde{\rho}(i+5) + 32\tilde{\rho}(i+6) + 16\tilde{\rho}(i+7) + 4\tilde{\rho}(i+8) \right), \\
\tilde{\Sigma}_{34} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 216\tilde{\rho}(i) + 416\tilde{\rho}(i+1) + 376\tilde{\rho}(i+2) + 320\tilde{\rho}(i+3) + \right. \\
&\quad \left. + 256\tilde{\rho}(i+4) + 192\tilde{\rho}(i+5) + 132\tilde{\rho}(i+6) + 80\tilde{\rho}(i+7) + \right. \\
&\quad \left. + 40\tilde{\rho}(i+8) + 16\tilde{\rho}(i+9) + 4\tilde{\rho}(i+10) \right), \\
\tilde{\Sigma}_{44} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 688\tilde{\rho}(i) + 1344\tilde{\rho}(i+1) + 1260\tilde{\rho}(i+2) + 1136\tilde{\rho}(i+3) + \right. \\
&\quad \left. + 984\tilde{\rho}(i+4) + 816\tilde{\rho}(i+5) + 644\tilde{\rho}(i+6) + 480\tilde{\rho}(i+7) + \right. \\
&\quad \left. + 336\tilde{\rho}(i+8) + 224\tilde{\rho}(i+9) + 140\tilde{\rho}(i+10) + 80\tilde{\rho}(i+11) + \right. \\
&\quad \left. + 40\tilde{\rho}(i+12) + 16\tilde{\rho}(i+13) + 4\tilde{\rho}(i+14) \right).
\end{aligned}$$

*Доведення.* Аналогічно до попередніх теорем 3.1 та 3.3 присвяченим асимптотичній нормальності допоміжних статистик у моделі змішаного дробового броунівського руху, доведення складається з двох частин: обчислення явного вигляду асимптотичної коваріаційної матриці  $\tilde{\Sigma}$  та доведення асимптотичної нормальності. При цьому ми будемо мати справу з центрованими приростами як у теоремі 3.1, проте з інакшими допоміжними статистиками.

*Частина 1: Обчислення асимптотичної коваріаційної матриці.*

Визначимо явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці  $\tilde{\Sigma}$  обчи-

сливши границі при  $N \rightarrow \infty$  для наступних дисперсій та коваріацій:  $N \text{Var}(\xi_N)$ ,  $N \text{Var}(\eta_N)$ ,  $N \text{Var}(\zeta_N)$ ,  $N \text{Var}(\phi_N)$ ,  $N \text{Cov}(\xi_N, \eta_N)$ ,  $N \text{Cov}(\xi_N, \zeta_N)$ ,  $N \text{Cov}(\xi_N, \phi_N)$ ,  $N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N)$ ,  $N \text{Cov}(\eta_N, \phi_N)$ ,  $N \text{Cov}(\zeta_N, \phi_N)$ .

1.1 Обчислення границі для  $N \text{Var}(\xi_N)$ . Використовуючи теорему Іссерліса та стаціонарність послідовності  $\{\Delta X_k\}$ , запишемо

$$\text{Cov}((\Delta X_k)^2, (\Delta X_j)^2) = 2 \text{Cov}((\Delta X_k), (\Delta X_j))^2 = 2\tilde{\rho}(k-j)^2.$$

Таким чином, отримаємо

$$\begin{aligned} N \text{Var}(\xi_N) &= \frac{1}{N} \text{Var} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2 \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}((\Delta X_k)^2, (\Delta X_j)^2) = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2. \end{aligned}$$

Далі, змінивши порядок сумування, матимемо

$$\begin{aligned} N \text{Var}(\xi_N) &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=k-N+1}^k \tilde{\rho}(i)^2 = \frac{2}{N} \sum_{i=-N+1}^0 \sum_{k=0}^{N-1+i} \tilde{\rho}(i)^2 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i}^{N-1} \tilde{\rho}(i)^2 = \\ &= 2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i)^2 \rightarrow 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)^2, \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.38)$$

де перехід до границі ґрунтується на теоремі про мажоровану збіжність та лемі 4.1.

1.2. Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\xi_N, \eta_N)$ . Запишемо

$$\begin{aligned} N \text{Cov}(\xi_N, \eta_N) &= \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2, \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta X_j + \Delta X_{j+1})^2 \right) = \\ &= \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2, \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{a,b=0}^1 \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a,b=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}). \end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса,

$$\begin{aligned} \text{Cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}) &= \\ &= \mathbb{E}(\Delta X_k)^2 \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b} - \mathbb{E}(\Delta X_k)^2 \mathbb{E} \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\Delta X_k \Delta X_{j+a} \mathbb{E}\Delta X_k \Delta X_{j+b} + \mathbb{E}\Delta X_k \Delta X_{j+b} \mathbb{E}\Delta X_k \Delta X_{j+a} = \\
&= 2 \operatorname{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_{j+a}) \operatorname{Cov}(\Delta X_k, \Delta X_{j+b}) = 2\tilde{\rho}(j+a-k)\tilde{\rho}(j+b-k).
\end{aligned}$$

Таким чином, аргументуючи аналогічно до (4.38), маємо:

$$\begin{aligned}
N \operatorname{Cov}(\xi_N, \eta_N) &= \sum_{a,b=0}^1 \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j+a-k)\tilde{\rho}(j+b-k) = \\
&= \sum_{a,b=0}^1 \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i+b-a) = \\
&= 2 \sum_{a,b=0}^1 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i+b-a) \rightarrow \\
&\rightarrow 2 \sum_{a,b=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)\tilde{\rho}(i+b-a) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) (4\tilde{\rho}(i) + 4\tilde{\rho}(i+1)),
\end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ , де збіжність отриманого ряду впливає з леми 4.1.

1.3. Обчислення границі для  $N \operatorname{Var}(\eta_N)$ . Будемо мати:

$$\begin{aligned}
N \operatorname{Var}(\eta_N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Cov}\left(\sum_{a,b=0}^1 \Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b}, \sum_{c,d=0}^1 \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d}\right) = \\
&= \sum_{a,b,c,d=0}^1 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Cov}(\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d}).
\end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}(\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d}) = \\
&= \mathbb{E}\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b} \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d} - \mathbb{E}\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b} \mathbb{E}\Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d} = \\
&= \mathbb{E}\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b} \mathbb{E}\Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d} + \mathbb{E}\Delta X_{k+a} \Delta X_{j+c} \mathbb{E}\Delta X_{k+b} \Delta X_{j+d} + \\
&\quad + \mathbb{E}\Delta X_{k+a} \Delta X_{j+d} \mathbb{E}\Delta X_{j+c} \Delta X_{k+b} - \mathbb{E}\Delta X_{k+a} \Delta X_{k+b} \mathbb{E}\Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d} = \\
&= \mathbb{E}\Delta X_{k+a} \Delta X_{j+c} \mathbb{E}\Delta X_{k+b} \Delta X_{j+d} + \mathbb{E}\Delta X_{k+a} \Delta X_{j+d} \mathbb{E}\Delta X_{j+c} \Delta X_{k+b} = \\
&= \operatorname{Cov}(\Delta k + a, \Delta X_{j+c}) \operatorname{Cov}(\Delta X_{k+b}, \Delta X_{j+d}) + \\
&\quad + \operatorname{Cov}(\Delta X_{k+a}, \Delta X_{j+d}) \operatorname{Cov}(\Delta X_{k+b}, \Delta X_{j+c}) = \\
&= \tilde{\rho}(k-j+c-a)\tilde{\rho}(k-j+d-b) + \tilde{\rho}(k-j+c-b)\tilde{\rho}(k-j+d-a) = \\
&= \sum_{\gamma=0}^1 \tilde{\rho}(k-j+c-a+\gamma(a-b))\tilde{\rho}(k-j+d-b+\gamma(b-a)).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
N \operatorname{Var}(\eta_N) &= \sum_{a,b,c,d,\gamma=0}^1 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+c-a+\gamma(a-b)) \times \\
&\quad \times \tilde{\rho}(k-j+d-b+\gamma(b-a)) \\
&= \sum_{a,b,c,d,\gamma=0}^1 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\
&\quad \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) \rightarrow \\
&\rightarrow \sum_{a,b,c,d,\gamma=0}^1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) = \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \sum_{a,b,c,d,\gamma=0}^1 \tilde{\rho}(i+d-c+a-b+2\gamma(b-a)),
\end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Спростивши отриманий вираз, отримаємо:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \operatorname{Var}(\eta_N) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left(12\tilde{\rho}(i) + 16\tilde{\rho}(i+1) + 4\tilde{\rho}(i+2)\right).$$

#### 1.4. Обчислення границі для $N \operatorname{Cov}(\xi_N, \zeta_N)$ .

Перепишемо  $N \operatorname{Cov}(\xi_N, \zeta_N)$  у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
N \operatorname{Cov}(\xi_N, \zeta_N) &= \frac{1}{N} \operatorname{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2, \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{a,b=0}^3 \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b} \right) = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{a,b=0}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Cov} \left( (\Delta X_k)^2, \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b} \right).
\end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса:

$$\begin{aligned}
N \operatorname{Cov}(\xi_N, \zeta_N) &= \sum_{a,b=0}^3 \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j+a-k) \tilde{\rho}(j+b-k) = \\
&= \sum_{a,b=0}^3 \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+b-a) = \\
&= 2 \sum_{a,b=0}^3 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+b-a) \rightarrow \\
&\rightarrow 2 \sum_{a,b=0}^3 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+b-a) =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) (8\tilde{\rho}(i) + 12\tilde{\rho}(i+1) + 8\tilde{\rho}(i+2) + 4\tilde{\rho}(i+3)),$$

при  $N \rightarrow \infty$ , де останній ряд є збіжним за лемою 4.1.

1.5. Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N)$ . Матимемо:

$$\begin{aligned} N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N) &= \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b=0}^1 \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{c,d=0}^3 \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a,b=0}^1 \sum_{c,d=0}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov} (\Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d}). \end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса:

$$\begin{aligned} N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N) &= \sum_{a,b,\gamma=0}^1 \sum_{c,d=0}^3 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(k-j+d-b+\gamma(b-a)) = \\ &= \sum_{a,b,\gamma=0}^1 \sum_{c,d=0}^3 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{a,b,\gamma=0}^1 \sum_{c,d=0}^3 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \sum_{a,b,\gamma=0}^1 \sum_{c,d=0}^3 \tilde{\rho}(i+d-c+a-b+2\gamma(b-a)), \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Спростивши отриманий вираз:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Cov}(\eta_N, \zeta_N) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 28\tilde{\rho}(i) + 48\tilde{\rho}(i+1) + \right. \\ &\quad \left. + 32\tilde{\rho}(i+2) + 16\tilde{\rho}(i+3) + 4\tilde{\rho}(i+4) \right). \end{aligned}$$

1.6. Обчислення границі для  $N \text{Var}(\zeta_N)$ . Запишемо:

$$N \text{Var}(\zeta_N) = \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b=0}^3 \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{c,d=0}^3 \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d} \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{a,b,c,d=0}^3 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}(\Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d}).$$

За теоремою Іссерліса:

$$\begin{aligned} N \text{Var}(\zeta_N) &= \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b,c,d=0}^3 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(k-j+d-b+\gamma(b-a)) = \\ &= \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b,c,d=0}^3 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b,c,d=0}^3 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b,c,d=0}^3 \tilde{\rho}(i+d-c+a-b+2\gamma(b-a)), \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Спростивши отриманий вираз, отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Var}(\zeta_N) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 88\tilde{\rho}(i) + 160\tilde{\rho}(i+1) + \right. \\ &\quad \left. + 124\tilde{\rho}(i+2) + 80\tilde{\rho}(i+3) + 40\tilde{\rho}(i+4) + 16\tilde{\rho}(i+5) + 4\tilde{\rho}(i+6) \right). \end{aligned}$$

1.7. Обчислення границі для  $N \text{Cov}(\xi_N, \phi_N)$ . Маємо:

$$\begin{aligned} N \text{Cov}(\xi_N, \phi_N) &= \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2, \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{a,b=0}^7 \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a,b=0}^7 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}). \end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса:

$$N \text{Cov}(\xi_N, \phi_N) = \sum_{a,b=0}^7 \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j+a-k) \tilde{\rho}(j+b-k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a,b=0}^7 \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+b-a) = \\
&= 2 \sum_{a,b=0}^7 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+b-a) \rightarrow \\
&\rightarrow 2 \sum_{a,b=0}^7 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+b-a),
\end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Після спрощення:

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} N \operatorname{Cov}(\xi_N, \phi_N) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left(16\tilde{\rho}(i) + 28\tilde{\rho}(i+1) + 24\tilde{\rho}(i+2) + \right. \\
&\quad \left. + 20\tilde{\rho}(i+3) + 16\tilde{\rho}(i+4) + 12\tilde{\rho}(i+5) + 8\tilde{\rho}(i+6) + 4\tilde{\rho}(i+7)\right).
\end{aligned}$$

1.8. Обчислення границі для  $N \operatorname{Cov}(\eta_N, \phi_N)$ . Матимемо:

$$\begin{aligned}
N \operatorname{Cov}(\eta_N, \phi_N) &= \frac{1}{N} \operatorname{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b=0}^7 \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{c,d=0}^7 \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{a,b=0}^7 \sum_{c,d=0}^7 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Cov}(\Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d}).
\end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса:

$$\begin{aligned}
N \operatorname{Cov}(\eta_N, \phi_N) &= \sum_{a,b,\gamma=0}^7 \sum_{c,d=0}^7 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+c-a+\gamma(a-b)) \times \\
&\quad \times \tilde{\rho}(k-j+d-b+\gamma(b-a)) = \\
&= \sum_{a,b,\gamma=0}^7 \sum_{c,d=0}^7 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\
&\quad \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) \rightarrow \\
&\rightarrow \sum_{a,b,\gamma=0}^7 \sum_{c,d=0}^7 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\
&\quad \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) = \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \sum_{a,b,\gamma=0}^7 \sum_{c,d=0}^7 \tilde{\rho}(i+d-c+a-b+2\gamma(b-a)),
\end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Спростивши вирази, отримаємо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \operatorname{Cov}(\eta_N, \phi_N) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 60\tilde{\rho}(i) + 112\tilde{\rho}(i+1) + 96\tilde{\rho}(i+2) + \right. \\ \left. + 80\tilde{\rho}(i+3) + 64\tilde{\rho}(i+4) + 48\tilde{\rho}(i+5) + 32\tilde{\rho}(i+6) + 16\tilde{\rho}(i+7) + 4\tilde{\rho}(i+8) \right).$$

1.9. Обчислення границі для  $N \operatorname{Cov}(\zeta_N, \phi_N)$ . Будемо мати:

$$N \operatorname{Cov}(\zeta_N, \phi_N) = \frac{1}{N} \operatorname{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b=0}^3 \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{c,d=0}^7 \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d} \right) = \\ = \frac{1}{N} \sum_{a,b=0}^3 \sum_{c,d=0}^7 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Cov}(\Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d}).$$

За теоремою Іссерліса:

$$N \operatorname{Cov}(\zeta_N, \phi_N) = \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b=0}^3 \sum_{c,d=0}^7 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ \times \tilde{\rho}(k-j+d-b+\gamma(b-a)) = \\ = \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b=0}^3 \sum_{c,d=0}^7 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left( 1 - \frac{|i|}{N} \right) \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) \rightarrow \\ \rightarrow \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b=0}^3 \sum_{c,d=0}^7 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) = \\ = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b=0}^3 \sum_{c,d=0}^7 \tilde{\rho}(i+d-c+a-b+2\gamma(b-a)),$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Спростивши отримані вирази,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \operatorname{Cov}(\zeta_N, \phi_N) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 216\tilde{\rho}(i) + 416\tilde{\rho}(i+1) + 376\tilde{\rho}(i+2) + \right. \\ \left. + 320\tilde{\rho}(i+3) + 256\tilde{\rho}(i+4) + 192\tilde{\rho}(i+5) + 132\tilde{\rho}(i+6) + \right. \\ \left. + 80\tilde{\rho}(i+7) + 40\tilde{\rho}(i+8) + 16\tilde{\rho}(i+9) + 4\tilde{\rho}(i+10) \right).$$

1.10. Обчислення границі для  $N \text{Var}(\phi_N)$ . Маємо:

$$\begin{aligned} N \text{Var}(\phi_N) &= \frac{1}{N} \text{Cov} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{a,b=0}^7 \Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{c,d=0}^7 \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a,b,c,d=0}^7 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov} (\Delta X_{j+a} \Delta X_{j+b}, \Delta X_{j+c} \Delta X_{j+d}). \end{aligned}$$

За теоремою Іссерліса,

$$\begin{aligned} N \text{Var}(\phi_N) &= \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b,c,d=0}^7 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(k-j+d-b+\gamma(b-a)) = \\ &= \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b,c,d=0}^7 \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b,c,d=0}^7 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i+c-a+\gamma(a-b)) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(i+d-b+\gamma(b-a)) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \sum_{\gamma=0}^1 \sum_{a,b,c,d=0}^7 \tilde{\rho}(i+d-c+a-b+2\gamma(b-a)), \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Після спрощень, остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Var}(\phi_N) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left( 688\tilde{\rho}(i) + 1344\tilde{\rho}(i+1) + 1260\tilde{\rho}(i+2) + \right. \\ &\quad + 1136\tilde{\rho}(i+3) + 984\tilde{\rho}(i+4) + 816\tilde{\rho}(i+5) + 644\tilde{\rho}(i+6) + 480\tilde{\rho}(i+7) + \\ &\quad + 336\tilde{\rho}(i+8) + 224\tilde{\rho}(i+9) + 140\tilde{\rho}(i+10) + 80\tilde{\rho}(i+11) + 40\tilde{\rho}(i+12) + \\ &\quad \left. + 16\tilde{\rho}(i+13) + 4\tilde{\rho}(i+14) \right). \end{aligned}$$

Частина 2: Доведення асимптотичної нормальності.

Визначимо  $Y_k = \left( Y_k^{(1)}, Y_k^{(2)}, Y_k^{(3)}, Y_k^{(4)} \right)^T$  як

$$\begin{aligned} Y_k^{(1)} &:= \Delta X_k, & Y_k^{(2)} &:= \Delta X_{k+1}, & Y_k^{(3)} &:= \Delta X_{k+2} + \Delta X_{k+3} \\ Y_k^{(4)} &:= \Delta X_{k+4} + \Delta X_{k+5} + \Delta X_{k+6} + \Delta X_{k+7}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\xi_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( Y_k^{(1)} \right)^2, & \eta_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)} \right)^2, \\ \zeta_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)} + Y_k^{(3)} \right)^2, \\ \phi_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)} + Y_k^{(3)} + Y_k^{(4)} \right)^2.\end{aligned}$$

Застосуємо теорему Крамера-Вольда для доведення асимптотичної нормальності вектора  $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N, \phi_N)^\top$ . Нехай параметри  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$  — довільні фіксовані, що задовольняють умову  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \lambda^2 \neq 0$ . Введемо наступну функцію

$$\begin{aligned}f(y) &= \alpha y_1^2 + \beta(y_1 + y_2)^2 + \gamma(y_1 + y_2 + y_3)^2 + \lambda(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2, \\ y &= (y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

таку, що

$$\alpha \xi_N + \beta \eta_N + \gamma \zeta_N + \lambda \phi_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(Y_k).$$

Таким чином, для доведення асимптотичної нормальності допоміжних статистик необхідно показати, що послідовність

$$\begin{aligned}\sqrt{N} \left( \alpha(\xi_N - \mathbb{E}\xi_1) + \beta(\eta_N - \mathbb{E}\eta_1) + \gamma(\zeta_N - \mathbb{E}\zeta_1) + \lambda(\phi_N - \mathbb{E}\phi_1) \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left( f(Y_k) - \mathbb{E}f(Y_k) \right)\end{aligned}\quad (4.40)$$

збігається до нормального розподілу. Для цього застосуємо центральну граничну теорему для стаціонарних векторів [8, теорема 4]. Для її застосування необхідно показати, що виконується наступна умова:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| r^{(p,l)}(j) \right|^q < \infty, \quad \text{для всіх } p, l \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.41)$$

де

$$r^{(p,l)}(k) := \text{Cov} \left( Y_1^{(p)}, Y_{1+k}^{(l)} \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

та  $q$  — ранг Ерміта функції  $f$  відносно випадкового вектора  $Y_1$ .

При цьому, аналогічно до випадку розглянутого у теоремі 3.1, за рахунок центрованості приростів цей ранг Ерміта  $q \geq 2$ . Вираз  $f(Y_1)$  є поліномом другого порядку відносно центрованих нормально розподілених випадкових величин  $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, Y_1^{(3)}, Y_1^{(4)}$ , який при цьому містить виключно члени другого порядку. Таким чином, згідно з теоремою Іссерліса, математичне сподівання добутку  $f(Y_1)$  з будь-якою величиною  $Y_1^{(t)}$ ,  $t \in \{1, 2, 3\}$ , буде дорівнювати нулю. Усі члени отриманого многочлену будуть мати форму  $\mathbb{E}G_1G_2G_3$ , де  $(G_1, G_2, G_3)^\top$  — центрований багатовимірний нормально розподілений випадковий вектор та за теоремою Іссерліса  $\mathbb{E}G_1G_2G_3 = 0$ . Отже, математичне сподівання добутку многочлена  $f(Y_1)$  з будь-яким поліномом першого порядку відносно  $\{Y_1\}$  (з довільною лінійною комбінацією  $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, Y_1^{(3)}, Y_1^{(4)}$ ) буде дорівнювати нулю, а отже ранг Ерміта  $q$  функції  $f$  відносно  $Y_1$  не дорівнює одиниці.

Тоді, оскільки  $q \geq 2$ , то для виконання умови (4.41) достатньо показати, що

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| r^{(p,l)}(j) \right|^2 < \infty, \quad \text{для всіх } p, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.42)$$

У свою чергу, (4.42) випливає з леми 4.2, (4.39) та визначення  $\tilde{\rho}$ , оскільки ми можемо виразити усі комбінації  $r^{(p,l)}$  через  $\tilde{\rho}$  як:

$$\begin{aligned} r^{(1,1)}(k) &= r^{(2,2)}(k) = \tilde{\rho}(k), & r^{(1,2)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1), & r^{(2,1)}(k) &= \tilde{\rho}(k-1), \\ r^{(1,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k) + \tilde{\rho}(k+2) + \tilde{\rho}(k+3), & r^{(3,1)}(k) &= \tilde{\rho}(k-2) + \tilde{\rho}(k-3), \\ r^{(2,3)}(k) &= +\tilde{\rho}(k+1) + \tilde{\rho}(k+2), & r^{(3,2)}(k) &= \tilde{\rho}(k-1) + \tilde{\rho}(k-2), \\ r^{(3,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1) + 2\tilde{\rho}(k) + \tilde{\rho}(k-1), \\ r^{(1,4)}(k) &= \tilde{\rho}(k+4) + \tilde{\rho}(k+5) + \tilde{\rho}(k+6) + \tilde{\rho}(k+7), \\ r^{(4,1)}(k) &= \tilde{\rho}(k-4) + \tilde{\rho}(k-5) + \tilde{\rho}(k-6) + \tilde{\rho}(k-7), \\ r^{(2,4)}(k) &= \tilde{\rho}(k+3) + \tilde{\rho}(k+4) + \tilde{\rho}(k+5) + \tilde{\rho}(k+6), \\ r^{(4,2)}(k) &= \tilde{\rho}(k-3) + \tilde{\rho}(k-4) + \tilde{\rho}(k-5) + \tilde{\rho}(k-6), \\ r^{(3,4)}(k) &= \tilde{\rho}(k+2) + 2\tilde{\rho}(k+2) + 2\tilde{\rho}(k+3) + 2\tilde{\rho}(k+4) + \tilde{\rho}(k+5), \\ r^{(4,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k-2) + 2\tilde{\rho}(k-2) + 2\tilde{\rho}(k-3) + 2\tilde{\rho}(k-4) + \tilde{\rho}(k-5), \\ r^{(4,4)}(k) &= \tilde{\rho}(k-3) + 2\tilde{\rho}(k-2) + 3\tilde{\rho}(k-1) + 4\tilde{\rho}(k) \\ &\quad + 3\tilde{\rho}(k+1) + 2\tilde{\rho}(k+2) + \tilde{\rho}(k+3). \end{aligned}$$

Для усіх зазначених виразів дійсно буде мати місце збіжність ряду (4.42),

наприклад ряд

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( r^{(1,3)}(k) \right)^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\tilde{\rho}(k+2) + \tilde{\rho}(k+3))^2 = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k+2)^2 + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k+2)\tilde{\rho}(k+3) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k+3)^2, \end{aligned}$$

буде збігатись як скінченна сума рядів, збіжних за лемою 4.1. Аналогічно, інші ряди визначені у (4.42) також збігаються.

З отриманого випливає виконання умови центральної граничної теореми для стаціонарних векторів, звідки отримується шукана слабка збіжність (4.40) до центрованого нормального розподілу.  $\square$

### 4.3.2 Асимптотична нормальність оцінок параметрів моделі

У цьому пункті доведемо основний результат про асимптотичну нормальність наших одночасних оцінок (4.9), побудованих у теоремі 4.1.

**Теорема 4.3.** *Нехай  $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$ . Тоді оцінка  $\hat{\vartheta}_N$  є асимптотично нормальною, а саме*

$$\sqrt{N} \left( \hat{\vartheta}_N - \vartheta \right) = \sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N^{(1)} - H_1 \\ \widehat{H}_N^{(2)} - H_2 \\ \widehat{\kappa}_N^2 - \kappa^2 \\ \widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( \vec{0}, \Sigma^M \right)$$

з асимптотичною коваріаційною матрицею  $\Sigma^M$ , що визначається за формулою

$$\Sigma^M = (w'(\vartheta))^{-1} \widetilde{\Sigma} (w'(\vartheta))^{-\top},$$

де  $\widetilde{\Sigma}$  визначена у теоремі 4.2 та

$$w'(\vartheta) = \begin{pmatrix} 2\kappa^2 h^{2H_1} \log h & 2\sigma^2 h^{2H_2} \log h & h^{2H_1} & h^{2H_2} \\ 2\kappa^2 (2h)^{2H_1} \log(2h) & 2\sigma^2 (2h)^{2H_2} \log(2h) & (2h)^{2H_1} & (2h)^{2H_2} \\ 2\kappa^2 (4h)^{2H_1} \log(4h) & 2\sigma^2 (4h)^{2H_2} \log(4h) & (4h)^{2H_1} & (4h)^{2H_2} \\ 2\kappa^2 (8h)^{2H_1} \log(8h) & 2\sigma^2 (8h)^{2H_2} \log(8h) & (8h)^{2H_1} & (8h)^{2H_2} \end{pmatrix}.$$

*Доведення.* Для того, щоб довести твердження теореми, ми застосуємо дельта-метод (див. [24, теорема В.6]) до функції  $g$  побудованої у теоремі 4.2 та послідовності  $\tau_N$ , що є асимптотично нормальною за теоремою 4.2, а також використаємо

теорему про обернене перетворення. Для застосування дельта-методу необхідно обчислити матрицю похідних  $g'$  та показати її невиродженість. Але при цьому, враховуючи складну структуру отриманої функції, ми натомість обчислимо матрицю похідних  $w'$  для функції  $w$  визначеної у (4.7) та застосуємо теорему про обернене перетворення у точці  $\vartheta$ . Оскільки функція  $g$  є оберненою функцією відносно  $w$ , то матриця  $g' = (w')^{-1}$ . Таким чином, нам тоді необхідно обчислити матрицю  $w'(\vartheta)$  та показати її невиродженість.

Почнемо з обчислення частинних похідних функції  $w_1$ . Оскільки

$$w_1(H_1, H_2, \kappa^2, \sigma^2) = \kappa^2 h^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial H_1} &= 2 \log h \kappa^2 h^{2H_1}, & \frac{\partial w_1}{\partial H_2} &= 2 \log h \sigma^2 h^{2H_2}, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \kappa^2} &= h^{2H_1}, & \frac{\partial w_1}{\partial \sigma^2} &= h^{2H_2}. \end{aligned}$$

Далі, для функції  $w_2$ :

$$w_2(H_1, H_2, \kappa^2, \sigma^2) = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{2H_2} = \kappa^2 e^{2H_1 \log(2h)} + \sigma^2 e^{2H_2 \log(2h)},$$

а отже буде мати місце наступне:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial H_1} &= 2 \log(2h) \kappa^2 h^{2H_1} 2^{2H_1}, & \frac{\partial w_2}{\partial H_2} &= 2 \log(2h) \sigma^2 h^{2H_2} 2^{2H_2}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial \kappa^2} &= h^{2H_1} 2^{2H_1}, & \frac{\partial w_2}{\partial \sigma^2} &= h^{2H_2} 2^{2H_2}. \end{aligned}$$

Аналогічно, для функції  $w_3$ :

$$w_3(H_1, H_2, \kappa^2, \sigma^2) = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{4H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{4H_2} = \kappa^2 \exp^{2H_1 \log(4h)} + \sigma^2 \exp^{2H_2 \log(4h)},$$

звідки випливає:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_3}{\partial H_1} &= 2 \log(4h) \kappa^2 h^{2H_1} 2^{4H_1}, & \frac{\partial w_3}{\partial H_2} &= 2 \log(4h) \sigma^2 h^{2H_2} 2^{4H_2}, \\ \frac{\partial w_3}{\partial \kappa^2} &= h^{2H_1} 2^{4H_1}, & \frac{\partial w_3}{\partial \sigma^2} &= h^{2H_2} 2^{4H_2}. \end{aligned}$$

Й остаточно для функції  $w_4$ :

$$w_4(H_1, H_2, \kappa^2, \sigma^2) = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{6H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{6H_2} = \kappa^2 \exp^{2H_1 \log(4h)} + \sigma^2 \exp^{2H_2 \log(8h)},$$

з чого в результаті матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_4}{\partial H_1} &= 2 \log(8h) \kappa^2 h^{2H_1} 2^{6H_1}, & \frac{\partial w_4}{\partial H_2} &= 2 \log(8h) \sigma^2 h^{2H_2} 2^{6H_2}, \\ \frac{\partial w_4}{\partial \kappa^2} &= h^{2H_1} 2^{6H_1}, & \frac{\partial w_4}{\partial \sigma^2} &= h^{2H_2} 2^{6H_2}. \end{aligned}$$

Таким чином отримаємо наступну матрицю похідних:

$$w'(\vartheta) = \begin{pmatrix} 2 \log(h) \kappa^2 h^{2H_1} & 2 \log(h) \sigma^2 h^{2H_2} & h^{2H_1} & h^{2H_2} \\ 2 \log(2h) \kappa^2 (2h)^{2H_1} & 2 \log(2h) \sigma^2 (2h)^{2H_2} & (2h)^{2H_1} & (2h)^{2H_2} \\ 2 \log(4h) \kappa^2 (4h)^{2H_1} & 2 \log(4h) \sigma^2 (4h)^{2H_2} & (4h)^{2H_1} & (4h)^{2H_2} \\ 2 \log(8h) \kappa^2 (8h)^{2H_1} & 2 \log(8h) \sigma^2 (8h)^{2H_2} & (8h)^{2H_1} & (8h)^{2H_2} \end{pmatrix}.$$

Тепер обчислимо її визначник й покажемо її невиродженість, що дозволить нам застосувати дельта-метод. Матимемо:

$$\begin{aligned} \det(w'(\vartheta)) &= 4\kappa^2 \sigma^2 h^{4H_1+4H_2} \begin{vmatrix} \log(h) & \log(h) & 1 & 1 \\ \log(2h) 2^{2H_1} & \log(2h) 2^{2H_2} & 2^{2H_1} & 2^{2H_2} \\ \log(4h) 4^{2H_1} & \log(4h) 4^{2H_2} & 4^{2H_1} & 4^{2H_2} \\ \log(8h) 8^{2H_1} & \log(8h) 8^{2H_2} & 8^{2H_1} & 8^{2H_2} \end{vmatrix} = \\ &= 4\kappa^2 \sigma^2 h^{4H_1+4H_2} \log 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2^{2H_1} & 2^{2H_2} & 2^{2H_1} & 2^{2H_2} \\ 2 \cdot 2^{4H_1} & 2 \cdot 2^{4H_2} & 2^{4H_1} & 2^{4H_2} \\ 3 \cdot 2^{6H_1} & 3 \cdot 2^{6H_2} & 2^{6H_1} & 2^{6H_2} \end{vmatrix} = \\ &= 4\kappa^2 \sigma^2 h^{4H_1+4H_2} \log 2 \left( \begin{vmatrix} 2^{2H_1} & 2^{2H_2} & 2^{2H_2} \\ 2 \cdot 2^{4H_1} & 2 \cdot 2^{4H_2} & 2^{4H_2} \\ 3 \cdot 2^{6H_1} & 3 \cdot 2^{6H_2} & 2^{6H_2} \end{vmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \begin{vmatrix} 2^{2H_1} & 2^{2H_2} & 2^{2H_1} \\ 2 \cdot 2^{4H_1} & 2 \cdot 2^{4H_2} & 2^{4H_1} \\ 3 \cdot 2^{6H_1} & 3 \cdot 2^{6H_2} & 2^{6H_1} \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{vmatrix} 2^{2H_1} & 2^{2H_2} & 2^{2H_2} \\ 2 \cdot 2^{4H_1} & 2 \cdot 2^{4H_2} & 2^{4H_2} \\ 3 \cdot 2^{6H_1} & 3 \cdot 2^{6H_2} & 2^{6H_2} \end{vmatrix} = -2^{2H_1} 2^{10H_2} + 4 \cdot 2^{4H_1} 2^{8H_2} - 3 \cdot 2^{6H_1} 2^{6H_2},$$

та

$$\begin{vmatrix} 2^{2H_1} & 2^{2H_2} & 2^{2H_1} \\ 2 \cdot 2^{4H_1} & 2 \cdot 2^{4H_2} & 2^{4H_1} \\ 3 \cdot 2^{6H_1} & 3 \cdot 2^{6H_2} & 2^{6H_1} \end{vmatrix} = 2^{10H_1} 2^{2H_2} + 3 \cdot 2^{6H_1} 2^{6H_2} - 4 \cdot 2^{8H_1} 2^{4H_2},$$

то остаточно отримаємо

$$\det(w'(\vartheta)) = -4\kappa^2 \sigma^2 h^{6H_1+6H_2} \log(2) \left(2^{2H_2} - 2^{2H_1}\right)^4 \neq 0.$$

Звідси випливає, що отримана матриця похідних є невиродженою та коректно визначеною за умов теореми, а отже те ж саме виконується й для відповідної матриці похідних оберненої функції  $g'(\tau_0) = (w'(\vartheta))^{-1}$  за теоремою про обернене перетворення. Відповідно, дельта-метод може бути застосований й з нього випливає твердження теореми, а також формула для асимптотичної коваріаційної матриці  $\Sigma^M$  визначеної з використанням оберненої матриці похідних  $w'(\vartheta)$ .  $\square$

## 4.4 Моделювання

Проаналізуємо отримані теоретичні результати чисельним моделюванням. Для кожної отриманої траєкторії ми оцінюватимемо асимптотичні коваріаційні матриці, визначені у теоремі 4.2 та теоремі 4.3, використовуючи значення оцінок (4.10)–(4.13). Для кожного набору параметрів з  $0 < H_1 < H_2 < 1$  ми генеруємо 1000 траєкторій процесу  $X$  та обчислюємо вибіркові середні (Сер.) й стандартні відхилення (Ст.В.) для отриманих значень оцінок, а також відсоток ітерацій зі сталою  $d_N$  (4.14) рівною нулю. Додатково, для  $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$  ми обчислюємо середнє оцінене теоретичне стандартне відхилення (О.Ст.В.) – середній квадратний корінь з оціненої асимптотичної дисперсії поділений на  $N$  ( $\sqrt{\hat{\Sigma}_{ii}^M}/N$ ) та ймовірність покриття (Йм.П.) для  $\alpha = 5\%$  на основі оцінок для асимптотичних дисперсій. Ці статистики обчислюватимуться лише для  $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$ , виключаючи інтервал  $(\frac{3}{4}, 1)$  на якому ряди виду (4.4) будуть розбіжні за лемою 4.1. Відповідно, асимптотична коваріаційна матриця та відповідні статистики (О.Ст.В. та Йм.П.) будуть невизначені. Більш того, оцінки О.Ст.В. та Йм.П. будуть також вважатись невизначеними у випадках коли будь-який з оцінених індексів  $\hat{H}_N$  буде виходити за межі  $(0, \frac{3}{4})$  або стала  $d_N$ , визначена у (4.14), буде нульовою (тобто, у випадках коли визначник  $D$  визначений у теоремі 4.1 рівнянням (4.32) не є додатнім).

Для того, щоб чисельно апроксимувати граничні коваріації з теореми 4.2, ряди вигляду (4.4) будемо представляти як суму двох збіжних рядів

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha)\tilde{\rho}(i+\beta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha)\tilde{\rho}(i+\beta) + \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+1-\alpha)\tilde{\rho}(i+1-\beta)$$

де  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ .

Далі, ряди  $\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha)\tilde{\rho}(i+\beta)$  будемо чисельно оцінювати з точністю  $\delta = 10^{-3}$ , обчислюючи часткову суму  $S_m = \sum_{i=0}^m \tilde{\rho}(i+\alpha)\tilde{\rho}(i+\beta)$  з найменшим таким  $m$ , що  $|S_m - S_{m-1}| < 10^{-3}$ . Отримані апроксимації будуть використовуватись для обчислення асимптотичної коваріаційної матриці  $\tilde{\Sigma}$ , визначеної у теоремі 4.2.

Для  $\widehat{H}_N^{(1)}, \widehat{H}_N^{(2)}, \widehat{\kappa}_N^2, \widehat{\sigma}_N^2, \widehat{\Sigma}_N^M$  та фіксованого  $h = 1$  ми змінюємо горизонт  $T = h(2^n + 3)$  при  $n \in \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ . Для моделювання використовуються значення параметрів  $\sigma = 1$  та  $\kappa = 1$ .

Результати застосування оцінок параметрів, представлені у таблицях 4.1–4.4, демонструють, що побудовані оцінки працюють тим краще, чим більше різниця між параметрами Хюрста  $H_1$  та  $H_2$ . Цей вплив є особливо помітним при оцінюванні параметрів дисперсій  $\kappa^2$  та  $\sigma^2$ , оскільки знаменник у формулах (4.12) та (4.13) прямує до 0, коли різниця між індексами Хюрста прямує до нуля. Також, чим менша ця різниця, тим більшим є відсоток ітерацій, для яких  $d_N$  є рівною нулю, що представлено у таблиці 4.5. Також спостерігаємо, що побудовані оцінки працюють краще для більших значень параметрів  $H_1$  та  $H_2$ . Це також може бути спричинено впливом різниці між параметрами  $H_1$  та  $H_2$ , оскільки значна частина чисельників та знаменників у побудованих оцінках залежать від відповідної різниці, як було продемонстровано у доведенні теореми 4.1. Також більші значення параметрів  $H_1$  та  $H_2$  можуть призводити до більш точної оцінки різниці  $\widehat{H}_N^{(2)} - \widehat{H}_N^{(1)}$  у сенсі відношення між побудованою оцінкою та її відхиленням, й відповідно - меншим відсотком ітерацій для яких ця оцінена різниця є від'ємною.

При цьому спостерігаємо, що чим більшою є різниця між істинними значеннями індексів  $H_1$  та  $H_2$ , тим ближчим стає О.Ст.В. до емпіричного стандартного відхилення оцінок та там ближчим стає Йм.П. до теоретичних 95%. При цьому, аналогічні результати спостерігаються й для оцінок асимптотичної дисперсії допоміжних статистик (4.6), асимптотична коваріаційна матриця яких була побудована у теоремі 4.2, що продемонстровано у таблиці 4.6 оцінками ймовір-

Табл. 4.1. Оцінка  $\widehat{H}_N^{(1)}$  при  $\sigma^2 = 1, \kappa^2 = 1 (h = 1)$ 

$H_1$	$H_2$		$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	0.3	Сер.	0.0722	0.0434	-0.0230	-0.1009	-0.0844	0.0482	0.0842
		Ст.В.	0.5041	0.4727	0.5063	0.5160	0.4459	0.1629	0.0791
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.7648	0.7039	1.1629	0.3871	0.2011	0.1239	0.0812
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	92.18	75.61	75.58	87.91
0.1	0.5	Сер.	0.0184	-0.0455	-0.0009	0.0674	0.0953	0.0988	0.0991
		Ст.В.	0.5618	0.5945	0.3733	0.1710	0.0824	0.0414	0.0205
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	1.1951	0.5894	0.2696	0.1457	0.0829	0.0439	0.0222
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.30	89.82	93.76	96.85	96.50
0.1	0.7	Сер.	-0.0408	-0.0071	0.0773	0.0945	0.1002	0.0998	0.1005
		Ст.В.	0.5931	0.3828	0.1513	0.0715	0.0342	0.0179	0.0090
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.7428	0.3223	0.1516	0.0742	0.0375	0.0188	0.0094
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	99.30	97.09	95.90	95.40
0.1	0.9	Сер.	0.0131	0.0725	0.0886	0.0956	0.0972	0.0986	0.0993
		Ст.В.	0.3842	0.1554	0.0707	0.0350	0.0187	0.0113	0.0075
0.3	0.5	Сер.	0.2096	0.1797	0.1161	0.0665	0.1731	0.2658	0.2901
		Ст.В.	0.5181	0.5738	0.4782	0.5254	0.3445	0.1209	0.0564
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	1.1101	1.0150	0.7507	0.4497	0.2337	0.1124	0.0570
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	100.00	92.01	87.11	90.80
0.3	0.7	Сер.	0.1748	0.1524	0.2330	0.2764	0.2931	0.2989	0.3001
		Ст.В.	0.5138	0.4661	0.2630	0.1165	0.0563	0.0263	0.0137
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	1.4395	0.5732	0.2682	0.1248	0.0566	0.0277	0.0138
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	100.00	98.32	96.30	95.60
0.3	0.9	Сер.	0.1863	0.2636	0.2863	0.2934	0.2969	0.2983	0.2988
		Ст.В.	0.4268	0.1859	0.0824	0.0423	0.0211	0.0124	0.0078
0.5	0.7	Сер.	0.4213	0.3300	0.2774	0.3367	0.4563	0.4859	0.4974
		Ст.В.	0.6302	0.6258	0.5085	0.3908	0.1461	0.0763	0.0367
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	2.0105	1.2367	0.8386	0.4502	0.1964	0.0830	0.0366
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	100.00	99.84	99.09	98.09
0.5	0.9	Сер.	0.3188	0.3701	0.4577	0.4878	0.4943	0.4975	0.4986
		Ст.В.	0.5170	0.4018	0.1477	0.0627	0.0299	0.0162	0.0095
0.7	0.9	Сер.	0.5487	0.4918	0.5172	0.5854	0.6706	0.6898	0.6957
		Ст.В.	0.6543	0.6735	0.4569	0.2908	0.0914	0.0396	0.0193

Табл. 4.2. Оцінка  $\widehat{H}_N^{(2)}$  при  $\sigma^2 = 1, \kappa^2 = 1 (h = 1)$ 

$H_1$	$H_2$		$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	0.3	Сер.	0.2296	0.2845	0.3834	0.5157	0.4571	0.3634	0.3182
		Ст.В.	0.5205	0.6239	0.5643	0.5944	0.3578	0.1543	0.0594
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	2.2888	2.0419	1.4188	0.8483	0.4334	0.1937	0.0791
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	99.88
0.1	0.5	Сер.	0.5437	0.6554	0.6072	0.5302	0.5093	0.5024	0.5003
		Ст.В.	0.6078	0.5234	0.2668	0.0985	0.0411	0.0193	0.0094
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.9381	0.5332	0.2632	0.1158	0.0481	0.0218	0.0107
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	100.00	99.66	98.37	96.80
0.1	0.7	Сер.	0.7912	0.7303	0.7069	0.7018	0.7006	0.7000	0.7001
		Ст.В.	0.4123	0.1341	0.0554	0.0254	0.0126	0.0066	0.0032
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.3193	0.1257	0.0557	0.0265	0.0139	0.0064	0.0032
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	99.77	95.98	94.50	94.70
0.1	0.9	Сер.	0.8818	0.8825	0.8882	0.8930	0.8959	0.8979	0.8991
		Ст.В.	0.1599	0.0601	0.0381	0.0272	0.0201	0.0151	0.0121
0.3	0.5	Сер.	0.4179	0.4999	0.5838	0.6819	0.5997	0.5329	0.5097
		Ст.В.	0.6199	0.6409	0.5791	0.4784	0.2349	0.0921	0.0418
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.9471	0.7822	0.6198	0.3870	0.1737	0.0861	0.0412
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	100.00	97.81	90.36	90.90
0.3	0.7	Сер.	0.7636	0.8383	0.7481	0.7094	0.7023	0.7007	0.7004
		Ст.В.	0.5831	0.4365	0.1412	0.0574	0.0271	0.0128	0.0066
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.4241	0.1793	0.0914	0.0466	0.0256	0.0130	0.0065
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.38	90.74	93.60	95.30	94.00
0.3	0.9	Сер.	0.9267	0.8926	0.8898	0.8936	0.8954	0.8975	0.8981
		Ст.В.	0.2765	0.0827	0.0440	0.0301	0.0213	0.0166	0.0130
0.5	0.7	Сер.	0.5823	0.6867	0.8179	0.8324	0.7494	0.7181	0.7056
		Ст.В.	0.6097	0.6288	0.5302	0.3556	0.1229	0.0581	0.0265
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.5033	0.2277	0.1997	0.1055	0.0672	0.0422	0.0245
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.54	82.13	78.62	85.38	92.58
0.5	0.9	Сер.	0.8978	0.9350	0.8980	0.8936	0.8939	0.8965	0.8978
		Ст.В.	0.5267	0.2147	0.0793	0.0413	0.0274	0.0198	0.0150
0.7	0.9	Сер.	0.7878	0.8862	0.9672	0.9309	0.9021	0.8963	0.8965
		Ст.В.	0.6431	0.5628	0.4037	0.1334	0.0578	0.0316	0.0213

Табл. 4.3. Оцінка  $\hat{\kappa}_N^2$  при  $\sigma^2 = 1, \kappa^2 = 1 (h = 1)$ 

$H_1$	$H_2$		$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	0.3	Сер.	NaN	NaN	NaN	Inf	1.0591	1.0732	1.0460
		Ст.В.	NaN	NaN	NaN	NaN	0.7876	0.6474	0.4604
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.3622	4.9405	5.0730	2.8475	1.5443	0.9266	0.6165
		Йм.П.%	100.00	100.00	93.08	80.66	70.73	74.27	89.53
0.1	0.5	Сер.	NaN	Inf	1.1104	1.0594	1.0340	1.0098	1.0006
		Ст.В.	NaN	NaN	0.6161	0.4314	0.2528	0.1333	0.0672
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.4678	2.4422	1.0822	0.5453	0.2928	0.1484	0.0743
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.30	92.92	96.15	97.97	96.20
0.1	0.7	Сер.	Inf	1.0400	1.0183	1.0054	1.0035	1.0004	1.0010
		Ст.В.	NaN	0.4440	0.2538	0.1260	0.0623	0.0330	0.0164
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	1.8115	0.6744	0.2911	0.1395	0.0693	0.0346	0.0173
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	100.00	97.79	95.70	95.70
0.1	0.9	Сер.	1.0054	0.9872	0.9878	0.9922	0.9950	0.9972	0.9987
		Ст.В.	0.3366	0.1663	0.0823	0.0437	0.0264	0.0177	0.0132
0.3	0.5	Сер.	NaN	NaN	Inf	1.0451	1.0379	1.0466	1.0232
		Ст.В.	NaN	NaN	NaN	0.8444	0.7341	0.5658	0.3768
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.8428	4.2202	3.2605	2.1396	1.0325	0.6043	0.3862
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	96.51	83.23	77.25	84.00
0.3	0.7	Сер.	NaN	1.1084	1.0696	1.0255	1.0106	1.0026	1.0017
		Ст.В.	NaN	NaN	0.5169	0.3305	0.1797	0.0877	0.0455
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	3.5137	1.3194	0.6535	0.3286	0.1770	0.0917	0.0461
		Йм.П.%	100.00	100.00	0.9979	0.9074	0.9496	0.9570	0.9460
0.3	0.9	Сер.	Inf	0.9970	0.9867	0.9887	0.9923	0.9955	0.9968
		Ст.В.	NaN	0.2908	0.1463	0.0802	0.0436	0.0285	0.0201
0.5	0.7	Сер.	NaN	NaN	Inf	1.0557	1.0674	1.0502	1.0270
		Ст.В.	NaN	NaN	NaN	0.7737	0.6163	0.4567	0.2703
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.6051	2.2181	2.1464	1.2319	0.7646	0.4713	0.2722
		Йм.П.%	100.00	100.00	92.17	77.05	78.14	86.29	93.96
0.5	0.9	Сер.	NaN	1.0008	0.9750	0.9800	0.9814	0.9905	0.9940
		Ст.В.	NaN	0.5558	0.3666	0.1997	0.1057	0.0621	0.0402
0.7	0.9	Сер.	NaN	NaN	-Inf	0.9524	0.9568	0.9572	0.9690
		Ст.В.	NaN	NaN	NaN	0.6566	0.4605	0.2777	0.1643

Табл. 4.4. Оцінка  $\hat{\sigma}_N^2$  при  $\sigma^2 = 1, \kappa^2 = 1 (h = 1)$ 

$H_1$	$H_2$		$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	0.3	Сер.	NaN	NaN	NaN	Inf	0.9764	0.9499	0.9781
		Ст.В.	NaN	NaN	NaN	NaN	0.7882	0.6480	0.4606
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.3572	4.9387	5.0724	2.8472	1.5442	0.9265	0.6165
		Йм.П.%	100.00	100.00	93.08	80.25	70.95	74.27	89.53
0.1	0.5	Сер.	NaN	-Inf	0.8916	0.9408	0.9656	0.9902	0.9995
		Ст.В.	NaN	NaN	0.6168	0.4320	0.2527	0.1334	0.0672
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.4647	2.4412	1.0818	0.5452	0.2928	0.1484	0.0748
		Йм.П.%	100.00	100.00	99.54	93.07	96.15	97.87	96.40
0.1	0.7	Сер.	-Inf	0.9609	0.9795	0.9941	0.9959	0.9994	0.9989
		Ст.В.	NaN	0.4474	0.2513	0.1245	0.0617	0.0326	0.0162
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	1.8071	0.6716	0.2897	0.1388	0.0690	0.0344	0.0172
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	100.00	97.49	95.90	96.20
0.1	0.9	Сер.	1.0170	1.0253	1.0273	1.0157	1.0099	1.0064	1.0067
		Ст.В.	0.5639	0.3708	0.2810	0.2096	0.1452	0.1039	0.0784
0.3	0.5	Сер.	NaN	NaN	-Inf	0.9554	0.9623	0.9536	0.9769
		Ст.В.	NaN	NaN	NaN	0.8435	0.7340	0.5662	0.3768
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.8407	4.2199	3.2605	2.1396	1.0325	0.6043	0.3862
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	96.80	83.23	77.03	84.00
0.3	0.7	Сер.	NaN	-Inf	0.9327	0.9886	0.9978	0.9984	0.9982
		Ст.В.	NaN	NaN	0.5156	0.3295	0.1787	0.0872	0.0453
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	3.5101	1.3180	0.6527	0.3283	0.1768	0.0915	0.0460
		Йм.П.%	100.00	100.00	100.00	90.61	95.07	95.50	94.80
0.3	0.9	Сер.	-Inf	1.0177	1.0233	1.0235	1.0092	1.0092	1.0044
		Ст.В.	NaN	0.4173	0.2704	0.1891	0.1256	0.1035	0.0803
0.5	0.7	Сер.	NaN	NaN	-Inf	0.9450	0.9323	0.9497	0.9730
		Ст.В.	NaN	NaN	NaN	0.7735	0.6158	0.4568	0.2702
		$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.5998	2.2161	2.1461	1.2318	0.7645	0.4712	0.2721
		Йм.П.%	100.00	100.00	91.71	77.05	78.30	86.42	94.06
0.5	0.9	Сер.	NaN	1.0025	1.0274	1.0277	1.0211	1.0122	1.0075
		Ст.В.	NaN	0.6212	0.4051	0.2374	0.1476	0.1002	0.0726
0.7	0.9	Сер.	NaN	NaN	Inf	1.0399	1.0375	1.0414	1.0288
		Ст.В.	NaN	NaN	NaN	0.6359	0.4416	0.2525	0.1337

Табл. 4.5. Відсоток (%) ітерацій зі сталою  $d_N$  рівною нулю при  $\sigma^2 = 1, \kappa^2 = 1 (h = 1)$ 

$H_1$	$H_2$	$N$						
		$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	0.3	2.9	1.3	0.3	0	0	0	0
0.1	0.5	1.1	0.1	0	0	0	0	0
0.1	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0
0.1	0.9	0	0	0	0	0	0	0
0.3	0.5	3.8	1.5	0.1	0	0	0	0
0.3	0.7	0.9	0	0	0	0	0	0
0.3	0.9	0.1	0	0	0	0	0	0
0.5	0.7	3.5	2.2	0.1	0	0	0	0
0.5	0.9	0.6	0	0	0	0	0	0
0.7	0.9	4.3	1.1	0.4	0	0	0	0

ності покриття. Відповідна таблиця також демонструє, що для великих значень параметрів  $H_1$  та  $H_2$ , точність оцінок (4.6) є меншою для більших кроків приростів процесу (тобто,  $\phi_N$  є менш точною, ніж  $\zeta_N$ , що є менш точною ніж  $\eta_N$ , що є менш точною ніж  $\xi_N$ ). На жаль відсоток ітерацій для яких асимптотична коваріаційна матриця  $\hat{\Sigma}_N^M$  є невизначеною достатньо високий, проте помітно зменшується зі збільшенням розміру вибірки, що представлено у таблиці 4.7. Це є наслідком того, що оцінені  $\hat{H}_N^{(1)}, \hat{H}_N^{(2)}$  порушують умови теореми 4.3. При цьому, відсоток ітерацій з невизначеною  $\hat{\Sigma}_N^M$  зменшується при збільшенні різниці між істинними значеннями  $H_1$  та  $H_2$ .

Додатково, проводячи представлене моделювання, ми зіштовхнулись з проблемою оцінювання граничних коваріацій, аналогічною до продемонстрованої для моделі змішаного дробового броунівського руху за відсутності тренду (3.2) у пункті 3.2.3. А саме, чим ближчі параметри  $H_1$  та  $H_2$  до значення 0.75, тим менша швидкість чисельної апроксимації граничних коваріацій для побудованих оцінок. Для дослідження цього ефекту, ми провели моделювання для наступного ряду:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i)^2. \quad (4.43)$$

Ми оцінювали (4.43) знаходячи найменше  $m \in \mathbb{N}$  та  $S_m = \sum_{i=0}^m \tilde{\rho}(i)^2$  такі, що для певного фіксованого  $\delta$  виконується  $|S_m - S_{m-1}| \leq \delta$ .

Відповідне оцінювання було проведено для  $\delta \in \{10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7},$

Табл. 4.6. Ймовірність покриття (%) для оцінок  $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N, \phi_N)^\top$  при  $\sigma^2 = 1, \kappa^2 = 1$  ( $h = 1$ )

$H_1$	$H_2$		$N$						
			$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	0.3	$\xi_N$	94.29	92.19	95.38	94.24	94.68	92.25	93.14
		$\eta_N$	100.0	98.44	99.23	99.59	98.67	99.27	98.95
		$\zeta_N$	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	99.88
		$\phi_N$	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
0.1	0.5	$\xi_N$	95.06	94.55	94.20	94.25	93.54	94.41	95.10
		$\eta_N$	98.77	97.52	97.45	99.12	97.73	98.27	98.50
		$\zeta_N$	97.53	100.0	98.84	99.41	98.75	99.19	99.20
		$\phi_N$	100.0	100.0	99.54	99.26	99.55	99.19	99.40
0.1	0.7	$\xi_N$	95.83	95.11	96.33	95.24	94.48	94.00	94.40
		$\eta_N$	93.75	95.49	97.10	94.66	94.68	94.10	93.70
		$\zeta_N$	90.62	95.11	93.82	91.88	91.77	90.00	91.10
		$\phi_N$	88.54	92.48	91.31	89.91	90.26	87.50	88.60
0.3	0.5	$\xi_N$	95.00	95.28	95.21	95.64	94.36	95.77	94.80
		$\eta_N$	95.00	96.23	97.01	96.51	97.34	97.29	96.50
		$\zeta_N$	96.67	98.11	98.20	97.67	99.06	98.70	97.80
		$\phi_N$	100.0	99.06	97.01	98.84	98.90	98.81	97.90
0.3	0.7	$\xi_N$	96.15	94.21	94.24	92.70	93.07	94.00	93.70
		$\eta_N$	98.72	93.82	94.65	92.18	91.71	91.80	91.40
		$\zeta_N$	96.15	93.05	91.98	90.61	90.35	89.40	89.00
		$\phi_N$	93.59	93.44	89.51	87.22	88.88	86.90	85.70
0.5	0.7	$\xi_N$	89.36	96.15	95.85	91.06	94.18	92.56	94.27
		$\eta_N$	87.23	97.69	92.17	87.68	91.04	89.16	90.88
		$\zeta_N$	89.36	96.92	87.56	84.30	88.52	86.81	87.91
		$\phi_N$	91.49	97.69	85.25	82.37	86.95	84.60	86.00

Табл. 4.7. Відсоток (%) ітерацій з невизначеною асимптотичною коваріаційною матрицею  $\hat{\Sigma}_N^M$  при  $\sigma^2 = 1$ ,  $\kappa^2 = 1$  ( $h = 1$ )

$H_1$	$H_2$	$N$						
		$2^8$	$2^{10}$	$2^{12}$	$2^{14}$	$2^{16}$	$2^{18}$	$2^{20}$
0.1	0.3	96.50	93.60	87.00	75.70	54.90	31.60	14.00
0.1	0.5	91.90	79.80	56.90	32.20	11.80	1.60	0
0.1	0.7	90.40	73.40	48.20	13.80	0.40	0	0
0.3	0.5	94.00	89.40	83.30	65.60	36.20	7.70	0
0.3	0.7	92.20	74.10	51.40	23.30	4.70	0	0
0.5	0.7	95.30	87.00	78.30	58.60	36.40	23.40	5.70

Табл. 4.8. Збіжність ряду (4.43) при  $\sigma^2 = 1$ ,  $\kappa^2 = 1$  та  $H_1 = 0.1$  ( $h = 1$ )

$H_2$		$N$						
		$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$2^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$
0.3	$m$	4	8	16	35	76	168	377
	$S_m$	4.45362	4.45427	4.45445	4.45451	4.45452	4.45452	4.45453
0.5	$m$	3	4	7	12	22	42	78
	$S_m$	4.18198	4.18203	4.18206	4.18207	4.18208	4.18208	4.18208
0.7	$m$	$5.9 \cdot 10^6$	$4.9 \cdot 10^7$	$7.2 \cdot 10^7$	$7.2 \cdot 10^7$	$7.2 \cdot 10^7$	$7.2 \cdot 10^7$	$7.2 \cdot 10^7$
	$S_m$	9981.86	35818.4	45796.6	45796.6	45796.6	45796.6	45796.6

$10^{-8}$ ,  $10^{-9}$ } при  $\sigma = 1$ ,  $\kappa = 1$ ,  $H_1 = 0.1$  та  $H_2 \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$ . Результати цього моделювання представлені у таблиці 4.8. Як бачимо, для оцінювання  $S_m$  з точністю  $\delta = 10^{-9}$  при  $H_2 = 0.3$  потрібно лише декілька сотень ітерацій, у той час як при  $H_2 = 0.7$  потрібні десятки мільйонів ітерацій. При цьому, зменшення точності з  $10^{-4}$  до  $10^{-3}$  практично немає ефекту на оцінені значення  $S_m$  для малих  $H_2$ , але для великих  $H_2$  це може призвести до істотної різниці.

Беручи до уваги результати моделювань у попередньому розділі, можемо зробити висновок, що така проблема збіжності автоковаріаційних рядів має місце саме для моделей з дробовим броунівським рухом при довготерміновій залежності ( $H > \frac{1}{2}$ ).

## 4.5 Висновки

У четвертому розділі було розглянуто задачу оцінювання параметрів моделі лінійної суміші двох незалежних дробових броунівських рухів.

Було доведено ергодичність послідовності приростів процесу та введено допоміжні статистики для оцінювання параметрів моделі. На основі цього, було побудовано строго консистентні одночасні оцінки параметрів при  $0 < H_1 < H_2 < 1$ .

Було досліджено асимптотичні властивості відповідних допоміжних статистик, умови їх асимптотичної нормальності ( $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$ ) та виведено явний вигляд їх асимптотичної коваріаційної матриці.

На основі теореми про обернене перетворення та дельта-методі, було визначено умови асимптотичної нормальності ( $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$ ) для оцінок та визначена формула для обчислення їх асимптотичної коваріаційної матриці.

Для побудованих оцінок було проведено чисельне моделювання. Отримані обчислення підтверджують виведені теоретичні результати та висновки з третього розділу.

## Висновки

У дисертаційній роботі одержано наступні результати.

1. Розглянуто модель лінійної структурної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі. Визначено мінімальний набір параметрів для ідентифікованості моделі. Побудовано строго консистентні одночасні оцінки для всіх невідомих параметрів.
2. У випадку нормально розподілених компонент моделі, визначено умови асимптотичної нормальності, виведено явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці та відокремлено групи асимптотично незалежних оцінок.
3. Визначено умови асимптотичної нормальності та відокремлення груп асимптотично незалежних оцінок для загального випадку без визначення конкретного розподілу, проте з додатковими обмеженнями на саму модель.
4. Для випадку нормально розподілених компонент проведено моделювання побудованих оцінок та відповідних асимптотичних дисперсій. Отримані чисельні результати показали збіжність оцінок до дійсних значень параметрів та наближення середнього оціненого теоретичного стандартного відхилення до емпіричного стандартного відхилення, що підтверджує теоретичні результати. Досліджено поведінку оцінок для різних конфігурацій моделі.
5. Розглянуто лінійну модель змішаного дробового броунівського руху за відсутності тренду та за наявності тренду, встановлено асимптотичні властивості вже існуючих ергодичних оцінок невідомих параметрів моделей, побудованих у [26]. Визначено умови збіжності рядів першого та другого порядку для автоковаріацій приростів.
6. Для лінійної моделі змішаного дробового броунівського руху за відсутності тренду доведено асимптотичну нормальність ергодичних оцінок параме-

трів  $(\widehat{H}_N, \widehat{\kappa}_N^2, \widehat{\sigma}_N^2)^\top$  та відповідних допоміжних статистик  $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$  для параметра Хюрста  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . Виведено явний вигляд відповідних асимптотичних коваріаційних матриць.

7. Проведено моделювання для моделі змішаного дробового броунівського руху за відсутності тренду для різних значень параметра Хюрста на інтервалі  $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . Отримані результати підтверджують теоретичні висновки, а також відповідають висновкам отриманим у [26]. Додатково розглянуто проблему чисельної апроксимації граничних коваріацій у випадку довготермінової залежності та порівняння застосування відповідних ергодичних оцінок із застосуванням оцінок максимальної вірогідності.
8. Для лінійної моделі змішаного дробового броунівського руху за наявності тренду доведено асимптотичну нормальність ергодичних оцінок параметрів та відповідних допоміжних статистик для параметра Хюрста  $H \in (0, \frac{1}{2})$ . Визначено явні формули для відповідних асимптотичних коваріаційних матриць.
9. Проведено моделювання для моделі змішаного дробового броунівського руху за наявності тренду для різних значень параметра Хюрста на інтервалі  $(0, \frac{1}{2})$ . Результати симуляцій підтверджують теоретичні висновки, а також відповідають висновкам отриманим у [26].
10. Розглянуто лінійну модель суміші двох незалежних дробових броунівських рухів. Доведено ергодичність та визначено умови збіжності автоковаріаційних рядів другого порядку для послідовності приростів процесу. Визначено допоміжні статистики, на основі яких побудовано строго консистентні одночасні оцінки невідомих параметрів моделі для  $0 < H_1 < H_2 < 1$ .
11. Досліджено асимптотичну поведінку побудованих оцінок та відповідних допоміжних статистик для лінійної моделі суміші двох незалежних дробових броунівських рухів. Визначено умови їх асимптотичної нормальності та виведено формули для їх асимптотичних коваріаційних матриць для параметрів Хюрста  $0 < H_1 < H_2 < \frac{3}{4}$ .
12. Проведено чисельне моделювання побудованих у роботі оцінок параметрів для моделі суміші двох дробових броунівських рухів. Отримані результати демонструють збіжність оцінок до теоретичних значень та підтверджують отримані теоретичні результати.

## Список використаних джерел

1. Кукуш О. Г., Яковлев М. С. Побудова консистентних оцінок параметрів лінійної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі // IX Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Київ, Україна : ФОП Кушнір Ю. В. 28–29 грудня 2020. С. 92–94.
2. Ральченко К. В., Яковлев М. С. Оцінювання параметрів моделі суміші двох дробових броунівських рухів // XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Київ, Україна. 11–12 жовтня 2023. С. 180–181. Режим доступу: <https://matan.kpi.ua/media/2023/kravchuk-conf-2023/kravchuk2023-abstracts.pdf>.
3. Яковлев М. С. Групи асимптотично незалежних оцінок у моделі із сумішшю класичної і берксонівської похибки у регресорі // XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 15-16 квітня 2021. С. 30–31.
4. Яковлев М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху з узагальненням на випадок лінійного тренду // XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях». Харків, Україна : Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. 12-14 травня 2023. С. 16–19.
5. Яковлев М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху з розширенням на випадок тренду // XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика,

комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2023. С. 68–69.

6. Яковлев М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху // Всеукраїнська науково-практична конференція «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання». Київ, Україна : УДУ імені Михайла Драгоманова. 18-20 січня 2023. С. 52–55.
7. Яковлев М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху за наявності тренду // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 1-3, 2023. Режим доступу: [https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts\\_2023/PS/Yakovliev-Ralchenko.pdf](https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Yakovliev-Ralchenko.pdf).
8. Arcones M.A. Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors // *The Annals of Probability*. 1994. Vol. 22, no. 4. P. 2242–2274.
9. Avetisian D., Ralchenko K. Parameter estimation in mixed fractional stochastic heat equation // *Modern Stochastics. Theory and Applications*. 2023. Vol. 10, no. 2. P. 175–195.
10. Banna O., Mishura Y., Ralchenko K., Shklyar, S. Fractional Brownian motion. Approximations and projections. Wiley-ISTE, 2019, 288 p.
11. Cai C., Chigansky P., Kleptsyna M. Mixed Gaussian processes: a filtering approach // *The Annals of Probability*. 2016. Vol. 44, no. 4. P. 3032–3075.
12. Carroll R.J., Ruppert D., Stefanski L.A., C.M. Crainiceanu. Measurement error in nonlinear models: a modern perspective. 2nd ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006. Vol. 105 of Monogr. Stat. Appl. Probab., 455 p.
13. Cheng C.-L., Van Ness J.W. Statistical regression with measurement error. Arnold, London; co-published by Oxford University Press, New York, 1999. Vol. 6 of Kendall's Library of Statistics.
14. Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion // *Bernoulli*. Official Journal of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability. 2001. Vol. 7, no. 6. P. 913–934.

15. Crowder M.J. Maximum likelihood estimation for dependent observations // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Methodological. 1976. Vol. 38, no. 1. P. 45–53.
16. Dozzi M., Mishura Y., Shevchenko G. Asymptotic behavior of mixed power variations and statistical estimation in mixed models // Statistical Inference for Stochastic Processes. An International Journal Devoted to Time Series Analysis and the Statistics of Continuous Time Processes and Dynamical Systems. 2015. Vol. 18, no. 2. P. 151–175.
17. Dufitinema J., Pynnönen S., Sottinen T. Maximum likelihood estimators from discrete data modeled by mixed fractional Brownian motion with application to the Nordic stock markets // Communications in Statistics. Simulation and Computation. 2022. Vol. 51, no. 9. P. 5264–5287.
18. El-Nouty C. The fractional mixed fractional Brownian motion // Statistics & Probability Letters. 2003. Vol. 65, no. 2. P. 111–120.
19. Filatova D. Mixed fractional Brownian motion: some related questions for computer network traffic modeling // 2008 International Conference on Signals and Electronic Systems / IEEE. 2008. P. 393–396.
20. Henry O.T. Long memory in stock returns: some international evidence // Applied financial economics. 2002. Vol. 12, no. 10. P. 725–729.
21. He X., Chen W. The pricing of credit default swaps under a generalized mixed fractional Brownian motion // Physica A. Statistical Mechanics and its Applications. 2014. Vol. 404. P. 26–33.
22. Isserlis I. On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables // Biometrika. 1918. Vol. 12, no. 1/2. P. 134–139.
23. Kolmogorov A. N. Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum // Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS (N.S.). 1940. Vol. 26. P. 115–118.
24. Kubilius K., Mishura Y., Ralchenko K. Parameter estimation in fractional diffusion models. Bocconi University Press & Springer, 2017. Vol. 8 of Bocconi & Springer Series, 390 p. ISBN: 978-3-319-71029-7; 978-3-319-71030-3.

25. Kukush A. G., Yakovliev M. S. Consistent estimation in linear regression model under a mixture of classical and berkson errors in covariate // International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”. Kyiv, Ukraine. June 1-4, 2021. P. 93.
26. Kukushi A., Lohvinenko S., Mishura Y., Ralchenko K. Two approaches to consistent estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion with trend // Statistical Inference for Stochastic Processes. An International Journal Devoted to Time Series Analysis and the Statistics of Continuous Time Processes and Dynamical Systems. 2022. Vol. 25, no. 1. P. 159–187.
27. Kukush A., Shklyar S., Masiuk S., Likhtarov I., Kovgan L., Carroll R.J., Bouville A. Methods for estimation of radiation risk in epidemiological studies accounting for classical and berkson errors in doses // The International Journal of Biostatistics. 2011. Jan. Vol. 7, no. 1. P. 1–30. Access mode: <http://dx.doi.org/10.2202/1557-4679.1281>.
28. Kukush O.G., Tsaregorodtsev Ya.V., Shklyar S.V. Asymptotically independent estimators in a structural linear model with measurement errors // Ukrainian Mathematical Journal. 2017. Vol. 68, no. 11. P. 1741–1745.
29. Likhtarov I., Kovgan L., Masiuk S., Talerko M., Chepurny M., Ivanova O., Gerasyenko V., Boyko Z., Voillequó P., Drozdovitch V., Bouville A. Thyroid cancer study among ukrainian children exposed to radiation after the chornobyl accident: improved estimates of the thyroid doses to the cohort members // Health Physics. 2014. Mar. Vol. 106, no. 3. P. 370–396. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1097/HP.0b013e31829f3096>.
30. Major P. Non-central limit theorem for non-linear functionals of vector valued Gaussian stationary random fields // arXiv:1901.04086 [math.PR]. 2019.
31. Mandelbrot B., Van Ness J.W. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications // SIAM Review. 1968. Vol. 10, no. 4. P. 422–437. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1137/1010093>.
32. Masiuk S., Shklyar S., Kukush A., Carroll R., Kovgan L., Likhtarov I. Estimation of radiation risk in presence of classical additive and Berkson multiplicative errors in exposure doses // Biostatistics. 2016. Jan. Vol. 17, no. 3. P. 422–436. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1093/biostatistics/kxv052>.

33. Masiuk S.V., Kukush A.G., Shklyar S.V., Chepurny M.I., Likhtarov I.A. Radiation risk estimation: based on measurement error models. 2nd ed. De Gruyter, Berlin, 2017. Vol. 5 of De Gruyter Series in Mathematics and Life Sciences, 238 p.
34. Miao Y., Ren W., Ren Z. On the fractional mixed fractional Brownian motion // *Applied Mathematical Sciences*. 2008. Vol. 2, no. 33-36. P. 1729–1738.
35. Mishura Y. Maximum likelihood drift estimation for the mixing of two fractional brownian motions // *Trends in Mathematics*. Springer International Publishing, 2016. P. 263–280.
36. Mishura Y., Ralchenko K., Shklyar S. Maximum likelihood drift estimation for Gaussian process with stationary increments // *Austrian Journal of Statistics*. 2017. Vol. 46, no. 3-4. P. 67–78.
37. Mishura Y. Ralchenko K., Shklyar S. Parameter estimation for Gaussian processes with application to the model with two independent fractional Brownian motions // *Stochastic processes and applications*. Springer, Cham, 2018. Vol. 271 of Springer Proc. Math. Stat. P. 123–146.
38. Mishura Y., Ralchenko K., Zhelezniak H. Numerical approach to the drift parameter estimation in the model with two fractional Brownian motions // *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. 2022. July. P. 1–15. Access mode: <https://doi.org/10.1080/03610918.2022.2099556>.
39. Mishura Y. S. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Vol. 1929 of Lecture Notes in Mathematics.
40. Mishura Y., Voronov I. Construction of maximum likelihood estimator in the mixed fractional–fractional Brownian motion model with double long-range dependence // *Modern Stochastics. Theory and Applications*. 2015. Vol. 2, no. 2. P. 147–164.
41. Mishura Y., Zili M. Stochastic analysis of mixed fractional Gaussian processes. ISTE Press, London; Elsevier Ltd, Oxford, 2018, 194 p.
42. Mishura Y., Voronov I. Construction of maximum likelihood estimator in the mixed fractional–fractional Brownian motion model with double long-range dependence // *Modern Stochastics: Theory and Applications*. 2015. July. Vol. 2, no. 2. P. 147–164. Access mode: <https://doi.org/10.15559/15-vmsta28>.

43. Nourdini I., Peccati G., Podolskij M. Quantitative Breuer-Major theorems // *Stochastic Processes and their Applications*. 2011. Vol. 121, no. 4. P. 793–812.
44. Nourdin I. Selected aspects of fractional Brownian motion. Springer, Milan; Bocconi University Press, Milan, 2012. Vol. 4 of Bocconi & Springer Series, 122 p. ISBN: 978-88-470-2822-7; 978-88-470-2823-4.
45. Paxson V., Floyd S. Wide area traffic: the failure of Poisson modeling // *IEEE/ACM Transactions on networking*. 1995. Vol. 3, no. 3. P. 226–244.
46. Ralchenko K., Yakovliev M. Asymptotic normality of parameter estimators for mixed fractional Brownian motion with trend // *Austrian Journal of Statistics*. 2023. Aug. Vol. 52, no. SI. P. 127–148. Access mode: <https://doi.org/10.17713/ajs.v52iSI.1770>.
47. Ralchenko K., Yakovliev M. Asymptotically normal estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*. 2023. Dec. no. 2. P. 54–62. Access mode: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.6>.
48. Ralchenko K., Yakovliev M. Parameter estimation for fractional mixed fractional Brownian motion based on discrete observations // *Modern Stochastics: Theory and Applications*. 2023. Vol. 11, no. 1. P. 1–29. Access mode: <https://doi.org/10.15559/23-VMSTA234>.
49. Rostek S., Schobel R. A note on the use of fractional Brownian motion for financial modeling // *Economic Modelling*. 2013. Vol. 30. P. 30–35.
50. Sun L. Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion // *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*. 2013. Vol. 392, no. 16. P. 3441–3458.
51. Thäle C. Further remarks on mixed fractional Brownian motion // *Applied Mathematical Sciences*. 2009. Vol. 38. P. 1885–1901.
52. Xiao W.-L., Zhang W.-G., Zhang X.-L. Maximum-likelihood estimators in the mixed fractional Brownian motion // *Statistics. A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 2011. Vol. 45, no. 1. P. 73–85.
53. Xiao W.-L., Zhang W.-G., Zhang X., Zhang X. Pricing model for equity warrants in a mixed fractional Brownian environment and its algorithm // *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*. 2012. Vol. 391, no. 24. P. 6418–6431.

54. Yakovliev M. Asymptotically normal estimators in linear regression model under a mixture of classical and Berkson measurement errors // Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”. Tashkent, Uzbekistan. February 20-21, 2021. P. 93–96.
55. Yakovliev M., Kukush A. Estimation in a linear errors-in-variables model under a mixture of classical and Berkson errors // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2021. Vol. 8, no. 3. P. 373–386. Access mode: <https://doi.org/10.15559/21-VMSTA186>.
56. Zhang P., Sun Q., Xiao W.-L. Parameter identification in mixed Brownian–fractional Brownian motions using Powell’s optimization algorithm // Economic Modelling. 2014. Vol. 40. P. 314–319.
57. Zhang W.-G, Xiao W.-L., He C.-X. Equity warrants pricing model under Fractional Brownian motion and an empirical study // Expert Systems with Applications. 2009. Vol. 36, no. 2. P. 3056–3065.
58. Zhang W.G., Xiao W.L., He C.X. Equity warrants pricing model under fractional Brownian motion and an empirical study // Expert Systems with Applications. 2009. Vol. 36, no. 2. P. 3056–3065.
59. Zili M. On the mixed fractional Brownian motion // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. JAMSA. 2006. P. Art. ID 32435, 9.

## Додаток

### Список публікацій здобувача за темою дисертації

#### Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Ralchenko K., Yakovliev M. Asymptotic normality of parameter estimators for mixed fractional Brownian motion with trend // Austrian Journal of Statistics. 2023. Aug. Vol. 52, no. SI. P. 127–148. <https://doi.org/10.17713/ajs.v52iSI.1770>
2. Ralchenko K., Yakovliev M. Parameter estimation for fractional mixed fractional Brownian motion based on discrete observations // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2023. P. 1–29. <https://doi.org/10.15559/23-VMSTA234>
3. Ralchenko K., Yakovliev M. Asymptotically normal estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences. 2023. Dec. no. 2. P. 54–62. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.6>
4. Yakovliev M., Kukush A. Estimation in a linear errors-in-variables model under a mixture of classical and Berkson errors // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2021. Vol 8, no. 3. P. 373–386. <https://doi.org/10.15559/21-VMSTA186>

#### Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Кукуш О. Г., Яковлев М. С. Побудова консистентних оцінок параметрів лінійної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі // IX Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Київ, Україна : ФОП Кушнір Ю. В. 28–29 грудня 2020. С. 92–94.

2. Яковлєв М. С. Групи асимптотично незалежних оцінок у моделі із сумішшю класичної і берксонівської похибки у регресорі // XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 15-16 квітня 2021. С. 30–31.
3. Яковлєв М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху // Всеукраїнська науково-практична конференція «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання». Київ, Україна : УДУ імені Михайла Драгоманова. 18-20 січня 2023. С. 52–55.
4. Яковлєв М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху з розширенням на випадок тренду // XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2023. С. 68–69.
5. Яковлєв М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху з узагальненням на випадок лінійного тренду // XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях». Харків, Україна : Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. 12-14 травня 2023. С. 16–19.
6. Яковлєв М. С., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху за наявності тренду // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 1-3, 2023. [https://www.imath.kiev.ua/young/youngconf2023/Abstracts\\_2023/PS/Yakovliev-Ralchenko.pdf](https://www.imath.kiev.ua/young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Yakovliev-Ralchenko.pdf)
7. Ральченко К. В., Яковлєв М. С. Оцінювання параметрів моделі суміші двох дробових броунівських рухів // XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. м. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 11–12 жовтня 2023. С. 180–181.

8. Yakovliev M. Asymptotically normal estimators in linear regression model under a mixture of classical and Berkson measurement errors // Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”. Tashkent, Uzbekistan. February 20-21, 2021. P. 93–96.
9. Kukush A. G., Yakovliev M. S. Consistent estimation in linear regression model under a mixture of classical and berkson errors in covariate // International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”. Kyiv, Ukraine. June 1-4, 2021. P. 93.

## **Відомості про апробацію результатів дисертації**

### **Конференції**

1. IX Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 28–29 грудня, 2020, Київ, Україна.
2. Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”, February 20-21, 2021, Tashkent, Uzbekistan.
3. XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», 15–16 квітня, 2021, Київ, Україна.
4. International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”, June 1-4, 2021, Kyiv, Ukraine.
5. Всеукраїнська науково-практична конференція «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання», 18-20 січня, 2023, Київ, Україна.
6. XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики», 14 квітня, 2023, Київ, Україна.
7. XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», 12-14 травня, 2023, Харків, Україна.

8. International Conference of Young Mathematicians, June 1-3, 2023, Kyiv, Ukraine.
9. XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 11–12 жовтня 2023 року, КПІ ім. Ігоря Сікорського., м. Київ, Україна.
10. 23rd European Young Statisticians Meeting, September 11-15, 2023, Ljubljana, Slovenia.