

Київський національний університет імені Тараса Шевченка Факультет
комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
на тему:

Моделювання та аналіз траєкторій випадкових еволюцій



студентки 4 курсу
Онищенко Дарії Юріївни



Науковий керівник:
доцент, доктор фізико — математичних наук
Самойленко І.В.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та
рекомендована до захисту в ДЕК, протокол №9 від 23 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО



проф. Іксанов О.М.

Київ – 2023

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП	3
1 ПОБУДОВА МОДЕЛІ	6
1.1 Рівняння для еволюції	6
1.2 Основні результати	13
2 ЧИСЛОВІ ПРИКЛАДИ	16
2.1 Програмна реалізація моделі	16
2.2 Аналіз траєкторій випадкових еволюцій за результатами програми	22
2.2.1 Приклад 1, малі ймовірності переходу	22
2.2.2 Приклад 2, малі ймовірності переходу, точкові початкові умови	25
2.2.3 Приклад 3, змішані перехідні ймовірності, симетричні	27
2.2.4 Приклад 4, великі ймовірності переходу, несиметричні	28
3 НЕПЕРЕРВНИЙ ВИПАДОК	31
3.1 Рівняння для неперервної еволюції.....	31
3.2 Телеграфне рівняння.....	32
3.3 Рівняння Клейна-Гордона	34
3.4 Швидкість у прямому та у зворотному напрямках	36
3.5 Розв'язки неперервних рівнянь	39
ВИСНОВКИ	45
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	47

ВСТУП

Актуальність дослідження. В сучасному світі, розуміння та передбачення поведінки складних систем та процесів, які стали необхідною складовою нашого повсякденного життя, має велике значення. Випадкові еволюції, які відбуваються в цих системах, можуть суттєво впливати на їх функціонування та майбутній розвиток. Тому дослідження моделювання та аналізу траєкторій випадкових еволюцій є актуальним і важливим напрямом наукових досліджень.

Одним з основних аспектів актуальності цієї теми є її широкий спектр застосувань у різних дисциплінах. Наприклад, у біології моделювання траєкторій випадкових еволюцій може бути використано для дослідження руху та розповсюдження мікроорганізмів, поширення захворювань або екологічних процесів. Це сприяє розумінню механізмів еволюції та поширення видів, оцінці ризиків поширення хвороб та розробці ефективних стратегій контролю та лікування.

У фізиці, використання моделювання траєкторій випадкових еволюцій може допомогти досліджувати рух частинок у різних середовищах, як от у газі, рідині тощо. Це має важливе значення для отримання глибшого розуміння фізичних процесів, таких як дифузія, термодинамічні властивості та інші явища, які відбуваються на молекулярному рівні.

У соціальних науках моделювання траєкторій випадкових еволюцій відіграє важливу роль у вивченні поведінкових моделей, соціальних мереж та динаміки груп. Це дозволяє аналізувати соціальні процеси, такі як поширення інформації, формування поглядів та соціального впливу. Також, такий підхід може мати практичні застосування для управління соціальними системами, розробки маркетингових стратегій та прийняття рішень.

Крім того, зростаюча обчислювальна потужність та доступність статистичних методів дають можливість здійснювати більш точне моделювання та аналіз траєкторій випадкових еволюцій. Застосування комп'ютерного моделювання та обчислювальної математики дозволяє досліджувати складні системи, які не

можуть бути аналітично розв'язані, та проводити чисельні експерименти для отримання нових уявлень та прогнозування майбутнього розвитку.

В цілому, дослідження, яке спрямоване на моделювання та аналіз траєкторій випадкових еволюцій, має велике значення для різних галузей науки й практичних застосувань. Воно дає змогу розуміти та передбачати складні процеси, які відбуваються в різних системах, а також сприяє розробці ефективних стратегій управління та прийняття рішень. Завдяки поєднанню статистичних методів, обчислювальної математики та постійного росту обчислювальних можливостей, дослідження в цій області стає все більш актуальним і перспективним.

Вищесказане визначає актуальність теми даної бакалаврської роботи, основний зміст якої становлять дослідження моделі пов'язані з моделюванням і аналізом траєкторій випадкових еволюцій.

Об'єкт дослідження – траєкторії випадкових еволюцій.

Предмет дослідження – моделі та аналіз траєкторій випадкових еволюцій.

Мета роботи – дослідити процес випадкової еволюції та розробити моделі для моделювання траєкторій, що виникають у цьому процесі.

Наукові завдання:

розглянути основні концепції та теоретичні моделі випадкових еволюцій;

розробити математичну модель для моделювання траєкторій випадкових еволюційних процесів;

провести числові експерименти для вивчення траєкторій випадкових еволюцій та аналізу їх властивостей;

дослідити вплив параметрів моделі на траєкторії випадкових еволюцій та їх властивості;

отримати та проаналізувати набір рівнянь, які описують траєкторії випадкових еволюцій у двовимірному просторі.

Методи дослідження – опрацювання літератури за даною темою, використання математичної моделі для моделювання випадкових еволюцій та генерації траєкторій, використання комп'ютерних програм та алгоритмів для

симуляції випадкових еволюцій та вивчення їх траєкторій, використання графічних методів для візуалізації траєкторій випадкових еволюцій.

Практичне значення одержаних результатів полягає в розумінні та передбаченні поведінки випадкових еволюцій та їхніх траєкторій, що може мати важливі наслідки в різних сферах.

1 ПОБУДОВА МОДЕЛІ

1.1 Рівняння для еволюції

1917 року Роберт Броун, британський ботанік, відкрив явище, яке сьогодні відоме як «броунівський рух», що є рухом у воді частинок пилу квітів, а у 1905 році Альберт Ейнштейн описав математичну модель для пояснення цього явища. Однак, справжнім проривом в дослідженні явища броунівського руху стала у 1923 році робота Н. Вінера. Н. Вінером в цій роботі була введена нова міра на просторі неперервних функцій, а це дало можливість аксіоматично побудувати випадковий процес, названого його іменем. Тепер ця галузь стала широкою та важливою теорією завдяки внеску таких математиків, як Н. Вінер, А. М. Колмогоров, К. Іто, С.Тейлор, П. Леві, Ф. Найт, В. Феллер тощо. А у важливих роботах Т.Хіди [6] та Ф.Найта [9] висвітлено описання вінерівського процесу.

Однак у природі не існує такого фізичного явища, яке б відповідало вінерівському процесу. Процес Вінера можна розглядати як лише уявну модель для опису фізичного броунівського руху, тому броунівський рух не є еквівалентним вінерівському. Досить зазначити, що частинка пилу не має можливості рухатись неперервно між двома послідовними зіткненнями, що впливає з властивості безперервних траєкторій у процесі Вінера, яка в жодній точці не є диференційованою. В протилежному випадку, ця частинка нескінченну кількість разів стикалась би з молекулами рідини протягом одиниці часу, але це не відповідає реальності. Дана робота буде зосереджена на вивченні й дослідженні моделі, яка відтворює частинку, що може вільно переміщуватись між послідовними двома зіткненнями.

Наведемо подібний приклад та розглянемо процес розповсюдження тепла в певному середовищі від джерела. За відомим фактом, в математичній фізиці подібний процес можна описати рівнянням теплопровідності, яке є параболічним. Параметри цього рівняння перебувають у залежності від характеристик

середовища. А початковий розподіл тепла в середовищі або початкові положення джерела встановлюють початкові умови.

У класичній теорії розглядається подібна вінерівському процесу модель. Ця модель передбачає миттєве розповсюдження від джерела тепла зі швидкістю, яка може бути довільно великою. Можна відзначити, що броунівський рух та процес розповсюдження тепла через переміщення частинок та перенесення його енергії схожі між собою. В обох ситуаціях спостерігається процес дифузії, що має нескінченну швидкість поширення. Але виключно скінченність швидкості розповсюдження є тим фактором, що відрізняє фізичні процеси в природі від їх уявних математичних моделей. Аспекти, що пов'язані з фізичними властивостями таких моделей досліджувало немало вчених, включаючи А.В.Фока та його роботи, що стосуються процесу дифузії світлового променя вздовж однієї осі [3], а також Ю.М.Кляно [2], О.С.Полубинського [4],[5], О.С.Галіцина тощо.

У даній роботі розглядається модель, яка описує рух частинки зі скінченною швидкістю. Отже, випадкова еволюція Маркова має фізичні властивості, такі як обмежена швидкість розповсюдження та вільний пробіг. У досліджуваній моделі можливий рух еволюції лише в обмеженій кількості напрямків.

Потрібно звернути увагу на граничні теореми, що призводять до дифузійних процесів або процесів Вінера, а також рівняння чи системи рівнянь, що моделюють поведінку при граничних умовах певної характеристики випадкової еволюції. Внаслідок цього, використовуючи рівняння та за допомогою медового переходу, можна отримати різноманітні граничні теореми. Ця тема буде розглянута у даній роботі. А також буде розглянута та вивчена поведінка процесу Маркова випадкової еволюції, знайдені рівняння, що описують цей процес, та розглянуті методи розв'язку цих рівнянь.

Слід зазначити, що С. Гольдштейн у 1951 році опублікував свою роботу, що була першою роботою для цього напрямку дослідження [7]. У цій роботі він проводив дослідження одновимірної випадкової еволюції, що керується пуассонівським процесом, що є найпростішою моделлю. В результаті Гольдштейн отримав рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) + 2\lambda \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \vartheta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x), \quad (1.1)$$

$$u(0, x) = f(x), \frac{\partial}{\partial t} u(t, x)|_{t=0} = g(x)$$

Це рівняння називається телеграфним, або ж хвильовим, рівнянням. Тут позначення константи λ означає інтенсивність керуючого процесу, а ϑ означає швидкість частинки. В своїй роботі Гольдштейном було доведено, що щільність розподілу ймовірності координати частинки на прямій задовольняє рівняння (1.1) та її можна знайти, розв'язавши рівняння Коші, якщо задано відповідно початкові умови.

В наступних дослідженнях цього напрямку, проведених вже М.Кацом в 1956 році, було показано, що крім щільностей розподілу, рівняння (1.1) задовольняють також довільний функціонал від траєкторії частинки [1], [8]. А також була знайдена формула розв'язку задачі Коші, яка виглядає як математичне сподівання функції від випадкового процесу, та доведена її правильність для більш загальних рівнянь. Крім цього, було помічено, що модель, при умові, що $\lambda \rightarrow \infty$ та $\vartheta \rightarrow \infty$, так що виконується $\frac{\vartheta^2}{\lambda} \rightarrow \sigma^2$, можна вважати асимптотично вінерівським процесом з коефіцієнтом дифузії σ^2 та без впливу зносу.

У розділі 1 досліджується розподіл положень, або ж станів, однокрокового біноміального процесу, припускаючи, що швидкість на сітці вузлів, а не процес станів, є марковським. З цього припущення, частинка збільшує або зменшує швидкість відповідно до простого(або багатокрокового) процесу на фіксованій сітці з дискретним часом, зберігаючи відповідне рівняння руху. Рівняння руху визначаються як спільна ймовірність для швидкості та стану як функції від часу та стану з матрицею переходу стану, дивитись Розділ 1. Матриця швидкості є наслідком припущення Маркова.

Двофакторний (багатофакторний) розв'язок біноміального ймовірнісного марковського процесу має різні типи розв'язків, дивитись розділ 2. Для дуже малих швидкостей переходів кінцевий розподіл ймовірностей може показувати початкову

інформацію про швидкість і переносити початкові умови в майбутнє, залишаючи невелику кількість залишків. Або ж імовірності швидкості є значними, що сильно перегрупує розподіл у щось, що виглядає як гаусівський процес. Таким чином, кінцевий розподіл може мати окремі піки, що відображають розподіл швидкостей, або, якщо швидкості досить великі, він показує центральний одномодальний розподіл, який підпорядковується середньому значенню.

Для значно меншої сітки і постійних швидкостей рівняння ймовірності сходяться до корельованого набору ймовірностей, які представлені гіперболічними функціями для кожної швидкості в точці стану. Двовимірний випадок може бути перетворений в телеграфне рівняння для щільності стану, яке може бути перетворене в рівняння Клейна-Гордона, якщо швидкості переходу постійні. А також можна визначити середню швидкість зі стану, як показано в розділі 3. Це рівняння можна скласти у двох просторах швидкостей як набір дифузійних рівнянь. Можна знайти пряму і зворотну швидкість, як показано у розділі 3.

Для того, щоб побудувати процес, розглянемо дискретний простір, дискретну часову сітку, як зображено на рисунку 1.1.

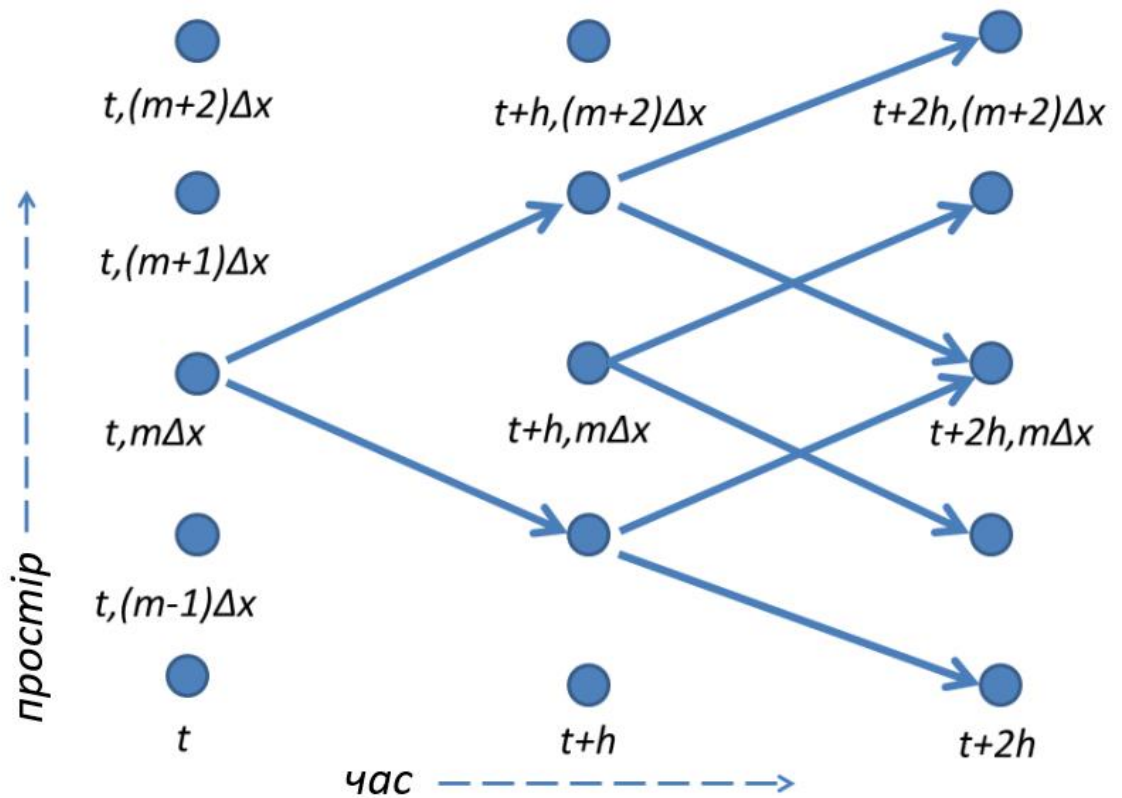


Рис. 1.1. Типові переходи між вузлами середньої сітки

Процес задається вузлами

$$x(t) = m\Delta x, m = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$t = 0, h, 2h, \dots$$

де Δx - малий розмір просторової сітки (по вертикалі), h - дискретна сітка часу (по горизонталі). На рисунку 1.1 зображено процес, який представляє частинку, яка крокує через нескінченну сітку вузлів з дискретними інтервалами часу $0, h, 2h, \dots$

Кожен раз, процес пересувається вгору чи вниз тільки на один вузол від будь-якого вузла в сітці. Очевидно, що процес може рухатись вгору та вниз одночасно по багатьох вузлам, але зараз розглянемо лише найпростіший випадок.

Якщо процес у стані x є марковським, то ймовірність перебування у стані $x(t+h)$ залежить від стану $x(t)$, але не залежить від будь-якого стану до t . Завдяки конструкції, можна побудувати ймовірнісний розподіл для $x(t+h) = m\Delta x, m =$

$\dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ з використанням ймовірностей в $x(t)$. Гаусівське або зворотне рівняння можливо побудувати в такий спосіб, при цьому враховуючи обмеження простору результатів шляхом масштабування $\Delta x \sim \sqrt{h}$ та обчислення кінцевого розподілу зі зростаючими еволюціями [14].

Проте, в цій роботі припускається, що процес є марковським у відношенні до швидкості процесу $(x(t), x(t+h))$, а не до положення стану процесу $x(t)$. Це означає, що будь-який перехід $(x(t), x(t+h))$ залежить від всіх попередніх переходів $(x(t-h), x(t))$, але не залежить від будь-яких попередніх переходів.

Приклад такого процесу зображено на рисунку 1.2.

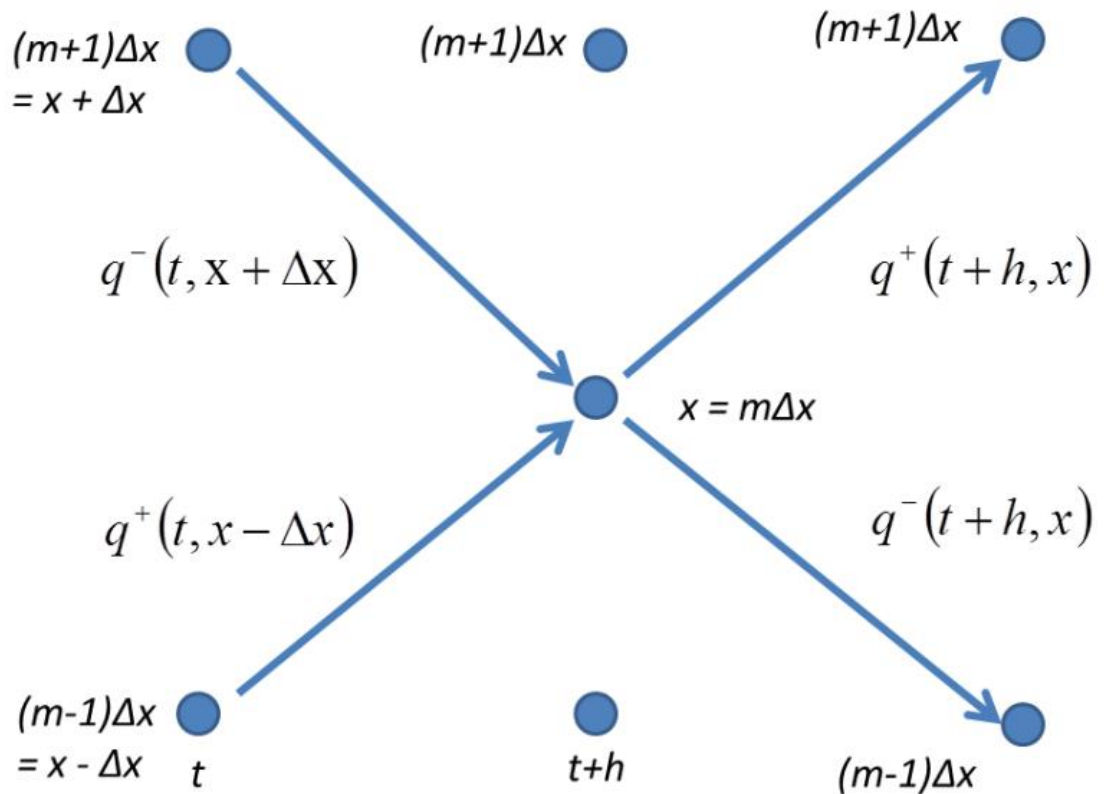


Рис. 1.2. Аналіз вузлових переходів

Якщо частинка в момент часу $t+h$ знаходиться у вузлі посередині сітки, то $x(t+h) = m\Delta x = x$ для деякого m . Оскільки частинка може тільки рухатись вгору або вниз з цього стану, то в момент часу $t+2h$ можливі лише такі результати

$$x(t+2h) = x + \Delta = (m+1)\Delta x$$

або

$$x(t + 2h) = x - \Delta = (m - 1)\Delta x$$

Аналогічно, для того, щоб знаходитись у вузлі сітки $m\Delta x$ у час $t + h$, частинка повинна здійснити крок вниз або вгору від

$$x(t) = x + \Delta = (m + 1)\Delta x$$

або

$$x(t) = x - \Delta = (m - 1)\Delta x$$

Сітка та спільні ймовірності переходу для крокового процесу показані на рисунку 1.2 для вузлів сітки в околі $t + h, m\Delta x$.

Нехай тепер $x = m\Delta x$ на рисунку 1.2, а також нехай

$$q^+(t + h, x) = P[x(t + 2h) = x + \Delta x, x(t + h) = x] \quad (1.2)$$

$$q^-(t + h, x) = P[x(t + 2h) = x - \Delta x, x(t + h) = x] \quad (1.3)$$

буде спільною ймовірністю кроку вгору або вниз після проходження частинки через x .

Оскільки процес швидкості є марковським, то спільний процес (1.2), (1.3) повинен залежати тільки від

$$q^+(t, x - \Delta x) = P[x(t + h) = x, x(t) = x - \Delta x]$$

$$q^-(t, x + \Delta x) = P[x(t + h) = x, x(t) = x + \Delta x]$$

лінійно, або ж іншим чином. Треба зазначити, що $q^+(t + h, x)$, $q^-(t + h, x)$, $q^+(t, x - \Delta x)$, $q^-(t + h, x + \Delta x)$ є спільними розподілами.

Таким чином, марківське припущення вимагає, щоб

$$\begin{pmatrix} q^+(t + h, x) \\ q^-(t + h, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha(t, x) & \beta(t, x) \\ \alpha(t, x) & 1 - \beta(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^+(t, x - \Delta x) \\ q^-(t, x + \Delta x) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

для певних констант $\alpha(t, x)$, $\beta(t, x)$. Требі зазначити, що параметри $\alpha(t, x)$, $\beta(t, x)$ можуть не бути рівними, але обов'язково повинні бути додатними, а також стовпці матриці повинні сумуватись до одиниці для того, щоб зберігати ймовірності. Частинка, після потрапляння в x , може зробити крок тільки вгору або вниз.

Ймовірно параметри $\alpha(t, x)$ враховують ймовірність того, що частинка рухається вниз від x до $x - \Delta x$ за час t після переміщення вгору від $x - \Delta x$ до x за

час $t - h$. Аналогічно, параметри $\beta(t, x)$ враховують ймовірність того, що частинка рухається вгору від x до $x + \Delta x$ за час t після переміщення вниз від $x + \Delta x$ до x за час $t - h$. Зокрема,

$$\alpha(t, x) = P_t[x - \Delta, x, x - \Delta x] - \text{ймовірність перебування в } x(t, x) = \quad (1.5)$$

x та кроку вниз після переміщення з $x(t - h) = x - \Delta$

$$\beta(t, x) = P_t[x + \Delta, x, x + \Delta x] - \text{ймовірність перебування в } x(t, x) = \quad (1.6)$$

x та кроку вгору після переміщення з $x(t - h) = x + \Delta$.

Слід зауважити, що при зменшенні кроку h ці ймовірності закривлення теж стають меншими.

Ймовірнісні щільності $q^+(t, x)$, $q^-(t, x)$ є спільними розподілами частинки, яка знаходиться у положенні $x(t) = x$ і рухається в напрямку вгору або вниз одночасно. Отже, ймовірнісну щільність $\rho(t, x)$ стану можна визначити як

$$P[x(t) = x] = \rho(t, x) = q^+(t, x) + q^-(t, x)$$

що вказує на ймовірність того, що частинка перебуває в стані x в момент часу t . Тепер сумування по всіх $x = m\Delta x$, тобто сумування відбувається по m , дорівнюватиме одиниці.

1.2 Основні результати

Додаючи два рівняння в (1.4), отримуємо

$$\rho(t + h, x) = q^+(t + h, x) + q^-(t + h, x) = q^+(t, x - \Delta x) + q^-(t, x + \Delta x)$$

так що ймовірність знаходження частинки в точці $t + h, x$ складається з ймовірності того, що частинка, крокуючи вниз, опиниться в точці $x + \Delta x$ в момент часу t , та ймовірності того, що частинка, крокуючи вгору, опиниться в точці $x - \Delta x$. Ця умова зберігає ймовірність саме для випадку, коли дозволені тільки кроки вниз чи вгору, і вона чітко визначається рухом частинки.

Також з цього рівняння випливає, що

$$\begin{aligned}\sum_m \rho(t+h, m\Delta x) &= \sum_m q^+(t, (m-1)\Delta x) + \sum_m q^-(t, (m+1)\Delta x) \\ &= \sum_m q^+(t, m\Delta x) + \sum_m q^-(t, m\Delta x) = \sum_m \rho(t, m\Delta x) = 1\end{aligned}$$

а це показує, що ймовірність стану зберігається. До того ж,

$$\sum_m q^+(t, m\Delta) < 1 \quad (1.7)$$

$$\sum_m q^-(t, m\Delta) < 1 \quad (1.8)$$

Для того, щоб почати розв'язання (1.4), розглянемо рисунок 1.3, на якому додатні ймовірності переходу, тобто ймовірності переходу вгору, зображені суцільною лінією, а ймовірності переходу вниз - пунктирною лінією. Перший стовпчик показує початкову нульову лінію та початкові ймовірності $q^+(0, m\Delta x)$ для всіх m . Одночасно існує набір початкових імовірностей у напрямку вниз $q^-(0, m\Delta x)$ для всіх m . Другий стовпчик $q^+(h, m\Delta x)$ побудований з комбінації $q^+(0, m\Delta x)$ та $q^-(0, m\Delta x)$, використовуючи (1.4). З (1.7), (1.8) можна побачити, що ні $q^+(0, m\Delta x)$, ні $q^-(0, m\Delta x)$ не є правильними розподілами, але разом у сумі дорівнюють одиниці. Звідси випливає, що

$$\rho(0, m\Delta x) = q^+(0, m\Delta x) + q^-(0, m\Delta x) \text{ для всіх } m$$

$$q^+(0, m\Delta x) \geq 0 \text{ для всіх } m$$

$$q^-(0, m\Delta x) \geq 0 \text{ для всіх } m$$

$$\sum_m (q^+(0, m\Delta x) + q^-(0, m\Delta x)) = 1$$

є відповідною початковою умовою для процесу.

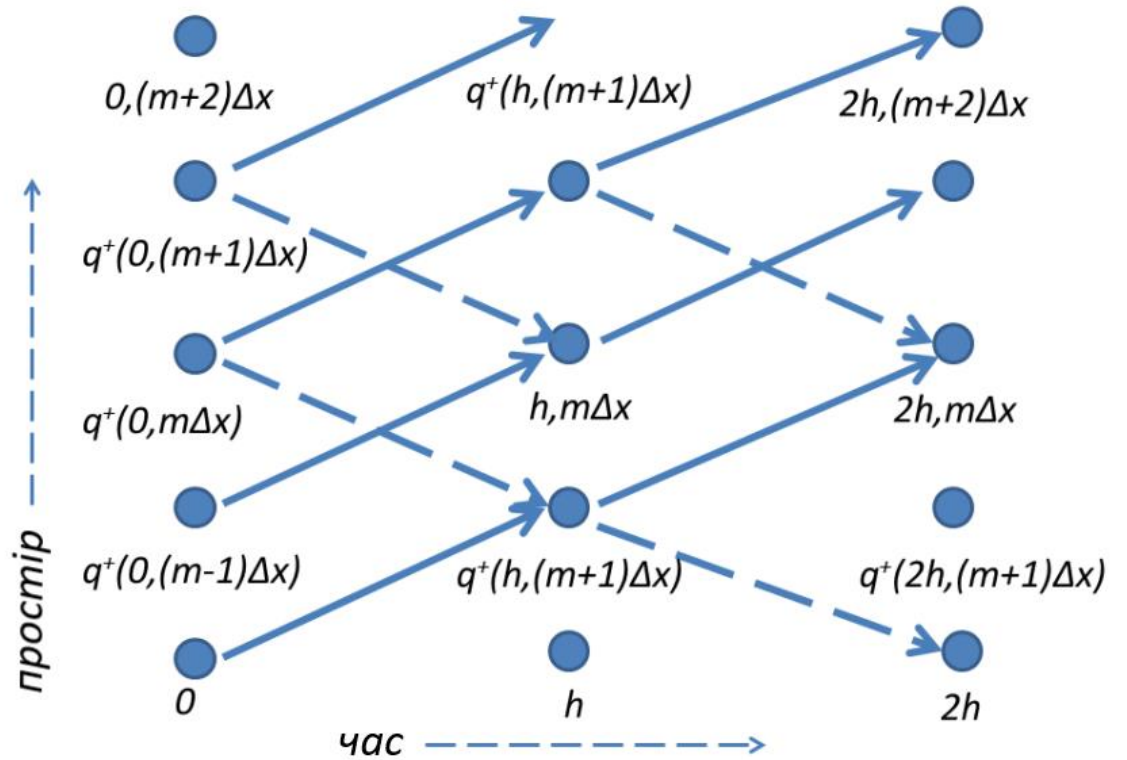


Рис. 1.3. Переходи у початковій сітці/дереві

Якщо частинка, що знаходиться в точці x в момент часу t , переходить в точку $x + \Delta$ в момент часу $t + h$, вона набуває швидкості $\vartheta^+ = \frac{\Delta x}{h} = c$. Аналогічно, якщо частинка крокує вниз до точки Δx , то вона набуває швидкості $\vartheta^- = -\frac{\Delta x}{h} = -c$. Безсумнівно, що символи “+” та “-” у граничних щільностях $q^\pm(t, x)$ також вказують на швидкість частинки, що проходить через x . Якщо є більші кроки від x , де частинка перестрибує багато вузлів, то можуть виникнути швидкості $j c, j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, як кратні швидкості однокрокової частинки.

2 ЧИСЛОВІ ПРИКЛАДИ

2.1 Програмна реалізація моделі

У попередньому розділі було проведено оглядову аналітичну роботу, де розглянуто основні поняття ймовірнісного моделювання та побудову моделі. У цьому розділі застосуємо конкретну модель для моделювання ймовірнісних розподілів.

Для цієї мети використовується мова програмування Python і бібліотека numpy з метою створення та реалізації моделі. Основою цієї моделі є дифузійне рівняння, яке дає змогу змодельовати розподіл ймовірності в заданий момент часу.

Програма була виконана мовою програмування Python. Ця мова була обрана для виконання цього завдання завдяки її широкій популярності, гнучкості та багатій екосистемі бібліотек для наукових обчислень. Використання бібліотеки numpy в цій програмі дозволяє легко та ефективно працювати з масивами даних і виконувати математичні операції. Мова Python також славиться своїм простим і інтуїтивно зрозумілим синтаксисом, що спрощує розробку та налагодження коду.

Щодо візуалізації графіків в Excel, то це зумовлено широким розповсюдженням програми Microsoft Excel та її можливостями для створення інформативних та красивих графіків. Excel на сьогодні є одним із найпопулярніших інструментів для аналізу даних та представлення результатів, тому використовуючи цю програму, з'являється можливість легко візуалізувати результати моделювання розподілів ймовірностей. Більш того, завдяки програмі Excel виникає можливість гнучкого налаштування осей, масштабування даних, додавання підписів і легенди, а це своєю чергою допомагає створити наочні й зрозумілі графіки для подальшого аналізу.

Алгоритм моделювання складається з кількох послідовних етапів:

- 1) Встановлення початкового розподілу ймовірності.

- 2) Ініціалізація змінних і масивів, які будуть зберігати результати моделювання.
- 3) Циклічне обчислення ймовірнісних розподілів на кожному кроці часу.
- 4) Отримання результуючих масивів із розподілами ймовірності, а також масивів із координатами x і часовими моментами t .

Після реалізації моделі переходимо до візуалізації результатів в Excel. Для цього експортуємо результати моделювання у файли CSV та імпортуємо їх у Microsoft Excel.

Всього розглянуто чотири числові приклади із різними заданими параметрами: з малими перехідними ймовірностями, з малими перехідними ймовірностями та точковими початковими умовами, зі змішаними симетричними перехідними ймовірностями, з великими несиметричними перехідними ймовірностями. Створюємо графіки, що відображають початковий та кінцевий розподіли ймовірності для кожного прикладу моделювання.

Тепер розглянемо програмну реалізацію моделі більш детально. На рисунку 2.1 зображено перший рядок програмного коду, в якому імпортуємо бібліотеку `numpy`. Ця бібліотека використовується, адже вона є потужним інструментом для роботи з науковими обчисленнями і обробки числових даних у мові програмування Python. Також бібліотека `numpy` зазвичай широко використовується для виконання математичних операцій та взаємодій з числовими масивами.

```
import numpy as np
```

Рис. 2.1. Імпортування бібліотеки `numpy`

У наступних рядках коду, що відображені на рисунку 2.2, реалізована функція `initial_distribution`, що виконує обчислення початкового розподілу для значення параметра x . Вона приймає три вхідні аргументи:

- c - коефіцієнт масштабування, який регулює амплітуду розподілу;

- x - значення параметра x , для якого проводиться обчислення розподілу;

- σ - стандартне відхилення, що впливає на ширину розподілу.

Функція використовує формулу гаусового розподілу

$$q^+(0, x) = q^-(0, x) = c_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

для обчислення значення розподілу для кожного значення x . Потім вона масштабує результат за допомогою коефіцієнта c . Остаточним результатом функції є повернення початкового розподілу.

```
def initial_distribution(c, x, sigma):
    return c * np.exp(-x**2 / (2 * sigma**2))
```

Рис. 2.2. Визначення функції `initial_distribution`

Далі, рядки, наведені на рисунку 2.3, описують функцію `simulate_distribution`, яка виконує моделювання розподілу на основі заданих параметрів. Функція приймає такі вхідні параметри:

- `alpha_t`: коефіцієнт, який визначає взаємодію між позитивною та негативною частинами розподілу на поточному кроці часу t ;
- `beta_t`: коефіцієнт, який визначає взаємодію між позитивною та негативною частинами розподілу на попередньому кроці часу $t-h$;
- `sigma`: параметр, що впливає на ширину розподілу;
- `delta_x`: крок дискретизації за простором;
- `h`: крок дискретизації за часом;
- `num_steps`: кількість кроків моделювання.

Всередині функція спочатку, за допомогою функції `np.arange`, генерує масиви x і t . Масив x містить значення точок у просторі, а масив t містить значення часу.

Після цього функція ініціалізує масиви `q_plus` і `q_minus` та заповнює їх нульовими значеннями, для цього використовує функцію `np.zeros`. Ці масиви міститимуть на кожному кроці моделювання значення розподілу.

Потім функція виконує обчислення початкового розподілу, використовуючи функцію `initial_distribution`, і зберігає його в `q_plus[0]` і `q_minus[0]`.

Далі, вона розпочинає цикл `for` для виконання кроків моделювання. Функція на кожній ітерації циклу оновлює значення `q_plus` і `q_minus`, для цього використовуючи формули, які відображають взаємодію між позитивною і негативною частинами розподілу. Оновлені значення зберігаються в масивах `q_plus` і `q_minus`.

Нарешті, як результат виконання функції, вона повертає масиви `q_plus`, `q_minus`, `x` і `t`.

```
def simulate_distribution(alpha_t, beta_t, sigma, delta_x, h, num_steps):
    x = np.arange(-6.9, 6.9 + delta_x, delta_x)
    t = np.arange(0, num_steps * h + h, h)
    c = h / delta_x # Corrected coefficient calculation

    q_plus = np.zeros((num_steps + 1, len(x)))
    q_minus = np.zeros((num_steps + 1, len(x)))

    q_plus[0] = initial_distribution(c, x, sigma)
    q_minus[0] = initial_distribution(c, x, sigma)

    for i in range(num_steps):
        q_plus[i + 1, 2:] = (1 - alpha_t) * q_plus[i, 2:] + beta_t * q_minus[i, :-2]
        q_minus[i + 1, :-2] = (1 - beta_t) * q_minus[i, :-2] + alpha_t * q_plus[i, 2:]

    return q_plus, q_minus, x, t
```

Рис. 2.3. Визначення функції `simulate_distribution`

У наступній частині коду, зображеній на рисунку 2.4, визначаються параметри для кожного прикладу. Для визначення розподілів для кожного прикладу та виклику функції `simulate_distribution` використовуються значення `alpha_t`, `beta_t`, `sigma`, `delta_x`, `h` і `num_steps`, які відповідають значенням значення α , β , σ , Δx , h та кількості кроків для кожного прикладу.

```
# Приклад 1
alpha_1 = 0.006
beta_1 = 0.006
sigma_1 = 0.6
delta_x_1 = 0.3
h_1 = 0.003
num_steps_1 = 150

# Приклад 2
alpha_2 = 0.006
beta_2 = 0.006
sigma_2 = 0.1
delta_x_2 = 0.3
h_2 = 0.003
num_steps_2 = 150

# Приклад 3
alpha_3 = 0.015
beta_3 = 0.015
sigma_3 = 1.5
delta_x_3 = 0.3
h_3 = 0.003
num_steps_3 = 150

# Приклад 4
alpha_4 = 0.3
beta_4 = 0.498
sigma_4 = 1.5
delta_x_4 = 0.3
h_4 = 0.003
num_steps_4 = 150
```

Рис. 2.4. Визначення параметрів

У нижченаведеній на рисунку 2.5 частині коду для кожного прикладу викликається функція `simulate_distribution` з відповідними параметрами, і результати розподілу зберігаються у змінних `q_plus_i`, `q_minus_i`, `x_i` та `t_i`, де `i` - індекс прикладу.

Потім виводяться результати для кожного прикладу. Початковий розподіл виводиться за допомогою виразу `q_plus_i[0] + q_minus_i[0]`, що відображає

початкові значення розподілу. Кінцевий розподіл виводиться шляхом обчислення виразу $q_plus_i[-1] + q_minus_i[-1]$, який відображає значення розподілу після закінчення симуляції. На екран результати виводяться у формі матриці, що містить значення розподілу для кожного прикладу.

```
q_plus_1, q_minus_1, x_1, t_1 = simulate_distribution(alpha_1, beta_1, sigma_1, delta_x_1, h_1, num_steps_1)

print("Example 1:")
print("Initial Distribution:")
print(q_plus_1[0] + q_minus_1[0])
print("\nFinal Distribution:")
print(q_plus_1[-1] + q_minus_1[-1])

q_plus_2, q_minus_2, x_2, t_2 = simulate_distribution(alpha_2, beta_2, sigma_2, delta_x_2, h_2, num_steps_2)

print("\nExample 2:")
print("Initial Distribution:")
print(q_plus_2[0] + q_minus_2[0])
print("\nFinal Distribution:")
print(q_plus_2[-1] + q_minus_2[-1])

q_plus_3, q_minus_3, x_3, t_3 = simulate_distribution(alpha_3, beta_3, sigma_3, delta_x_3, h_3, num_steps_3)

print("\nExample 3:")
print("Initial Distribution:")
print(q_plus_3[0] + q_minus_3[0])
print("\nFinal Distribution:")
print(q_plus_3[-1] + q_minus_3[-1])

q_plus_4, q_minus_4, x_4, t_4 = simulate_distribution(alpha_4, beta_4, sigma_4, delta_x_4, h_4, num_steps_4)

print("\nExample 4 (Shifted):")
print("Initial Distribution:")
print(q_plus_4[0] + q_minus_4[0])
print("\nFinal Distribution:")
print(q_plus_4[-1] + q_minus_4[-1])
```

Рис. 2.5. Виведення результатів

Після завершення розробки моделі мовою програмування Python, переходимо до візуалізації результатів використовуючи графіки у програмі Microsoft Excel. Цей процес складається з кількох етапів.

Спочатку екпортуємо отримані результати моделювання у файли у форматі CSV, який є дуже зручним та популярним форматом для обміну даними між різними програмами. У цих файлах містяться значення ймовірностей для кожного прикладу моделювання, а також відповідні значення осей x і t .

Після цього відкриваємо програму Microsoft Excel та імпортуємо ці файли формату CSV у програму. Excel має зручний інструмент для імпорту даних із різних джерел, включаючи також файли CSV. Після того, як здійснилось імпортування даних, отримуємо в результаті таблиці, в яких містяться значення ймовірностей та осі x і t .

Наступним етапом створюємо графіки, що відображають початковий та кінцевий розподіли ймовірностей для кожного прикладу моделювання. Для цього витягуємо необхідні дані з таблиці та використовуємо функціонал програми Excel для побудови графіків. Залежно від потреби та вимог щодо виду представлення даних, програмою надається можливість вибирати різні типи графіків, наприклад, лінійні, стовпчасті, точкові та інші.

Налаштовуємо в Excel осі графіків, додаємо підписи осей і легенду для зрозумілості та інформативності графіків для читача. Також завдяки програмі можемо вказати одиниці виміру, масштабувати осі та додати розмітку. Крім того, створюємо легенду, яка допомагає пояснити значення або приклади, що представлені на графіку.

Після цього розміщуємо графіки на окремих аркушах робочої книги або ж розташовуємо їх поряд на одному аркуші для того, щоб була можливість порівняти результати. Можемо створити окремий аркуш для кожного прикладу моделювання, де можна порівняти початковий і кінцевий розподіли ймовірностей. Додаємо підписи до кожного графіка так, щоб вони вказували параметри моделювання, такі як значення α , β , σ , Δx , h та кількість кроків, а також приклади, представлені на графіку.

Таким чином, в результаті виконання візуалізації результатів моделювання в програмі Excel, з'являється змога чітко і наочно представити початковий і кінцевий розподіли ймовірностей для кожного прикладу моделювання. Графіки, що були створені за допомогою функціоналу Excel, стають інформативними та зрозумілими для подальшого аналізу.

2.2 Аналіз траєкторій випадкових еволюцій за результатами програми

2.2.1 Приклад 1, малі ймовірності переходу

На рисунку 2.6 та рисунку 2.7 представлено перший чисельний розв'язок. На них показано числовий розподіл ймовірності розв'язку рівняння (1.4) для випадку, коли ймовірності переходу дуже малі ($\alpha = 0.006$, $\beta = 0.006$ на кожен крок часу). Величина $\Delta x = 0.3$ і крок часу $h = 0.003$, тому дерево розподілу має відносно високу швидкість $0.3/0.003 = \pm 100$. Початковий розподіл імовірностей у момент часу 0 простягається з -6.9 до 6.9 на приблизно 46 вузлах.

Використаємо для цього випадку початкові розподіли $q^+(0, x)$, $q^-(0, x)$ та припустимо набір дискретних гаусових розподілів так, що

$$q^+(0, x) = q^-(0, x) = c_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\rho(0, m\Delta x) = q^+(0, m\Delta x) + q^-(0, m\Delta x)$$

$$\sum_m \rho(0, m\Delta x) = 1$$

де константа c_0 обрана таким чином, щоб $\rho(0, m\Delta x)$ була правильним дискретним розподілом за дискретним параметром m . Цей розподіл $\rho(0, x)$ показано в центрі рисунка 2.6 для середньоквадратичного відхилення, яке дорівнює 0.6.

В цьому випадку розрахункова сітка являє собою дерево, яке починається з нуля і поступово збільшується протягом приблизно 150 кроків часу, де кінцевий час буде $t = 0.45 = 150 * 0.03$. Ефект малих перехідних імовірностей вказує на те, що половина початкових ймовірнісних розв'язків рухається симетрично вгору по сітці зі швидкістю 100, а половина початкового розподілу відправляється вниз по сітці зі швидкістю -100.

Симетричний початковий розподіл з 42 вузлами показує розподіл від -6.9 до 6.9 як центральний розподіл, який показано на рисунку 2.6. Оскільки початкове дерево має розподіл від -6.9 до 6.9, то можна стверджувати, що кінцевий набір

вузлів досягає $-45 - 6.9, 45 + 6.9 = -51.9, 51.9$, що є саме тією межею, яку показано для лівого та правого розподілів на рисунку 2.6. Треба звернути увагу на те, що два лівих та правих розподіли є дуже схожими на початковий розподіл, але не повністю ідентичні, при цьому кількість ймовірностей у цьому розподілі менша, ніж половина початкової щільності ймовірності.

Після того, як початкові розподіли вже визначені, розраховується розподіл за рівнянням (1.4). На рисунку 2.6 показано кінцевий розподіл після 150 часових кроків й початковий розподіл $\rho(0, x)$. На рисунку 2.7 представлено тривимірну картину змін розподілу. Початковий розподіл містить всю ймовірність, яка згодом ділиться навпіл, її половина рухається вгору зі швидкістю 100, а частина - вниз зі швидкістю -100. Кінцеві розподіли є трохи ширшими за початкові розподіли. Треба зауважити, що певна кількість ймовірностей призначена для інтервалу між крайніми точками, порівнюючи рисунок 2.6 та рисунок 2.7.

Фізично цей приклад показує розподіл частинок, які починаються в 46 вузлах між -6.9 та 6.9 на дійсній прямій, а потім рухаються вгору чи вниз з приблизно однаковою ймовірністю. Як тільки частинки починають рухатись вгору чи вниз по сітці, зміна їх напрямку є незначною.

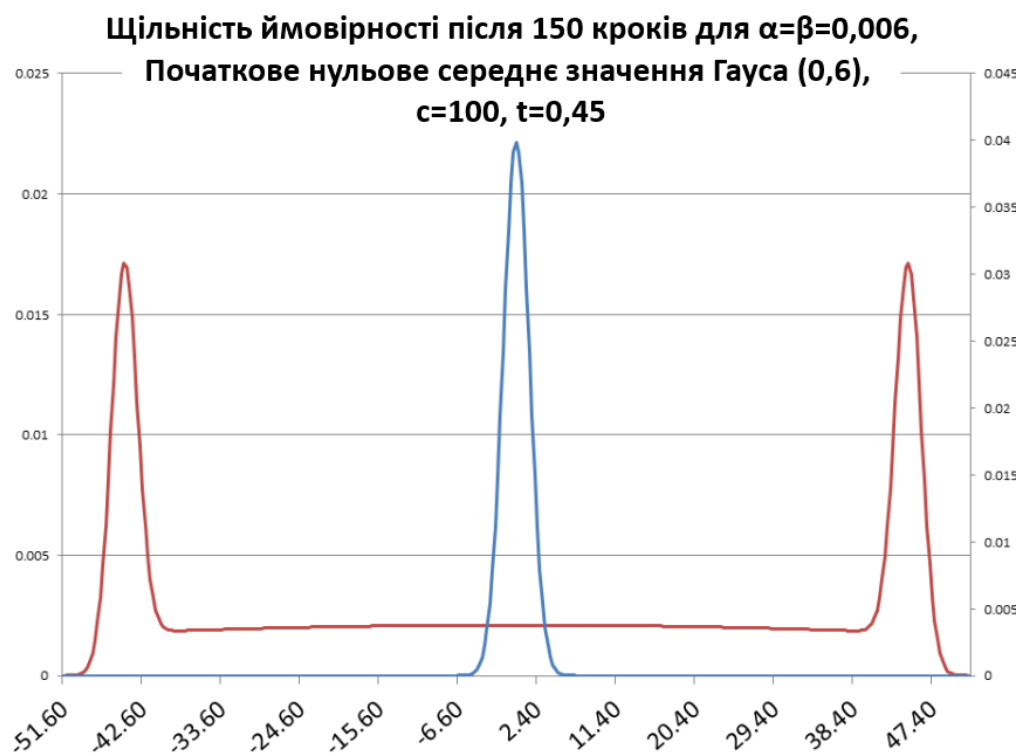


Рис. 2.6. Початкова, кінцева щільність вузлів, малі переходи

**Щільність ймовірності після 150 кроків для $\alpha=\beta=0,006$,
Початкові гауссіани (середнє=0, $\sigma=1,5$), $h=0,003$, $t=0,45$**

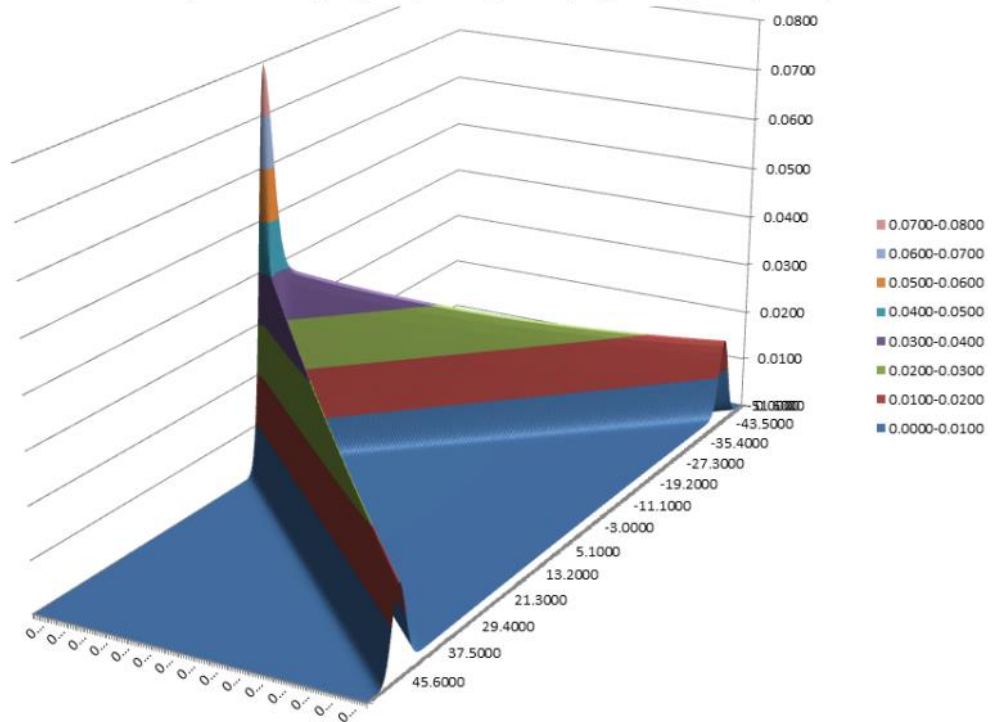


Рис. 2.7. Переміщення вузла в тривимірному просторі, малі переходи

2.2.2 Приклад 2, малі ймовірності переходу, точкові початкові умови

Можна створити більш екстремальну версію попереднього прикладу, взявши початковий розподіл рівним точковій вазі. Для цього прикладу моделювання відбувається аналогічно попередньому прикладу, але тепер початковий розподіл має стандартне відхилення 0.1. Початковий розподіл та кінцевий розподіл після 150 кроків показано на рисунку 2.8. Слід зазначити, що кінцевий розподіл між екстремальними значеннями тепер має чіткий зигзагоподібний характер.

На цьому рисунку можна побачити хаотичний розподіл ймовірностей у кінцевому розподілі, який можна пояснити тим, що частинки можуть рухатись тільки вгору або вниз. Починаючи з вузла 0, частинка може перебувати лише у вузлі +1 або -1 після одного кроку, але не у вузлі 0. Аналогічно, після двох кроків частинка може перебувати лише у вузлах +2, 0+ 2, але не у вузлах +1 або -1.

Кінцевий результат являє собою накладений інтерференційний зразок. Він виникає внаслідок того, що частинкам забороняється залишатися на певних вузлах та через сконцентрований початковий розподіл. В результаті виникає помітна різниця в розподілі між сусідніми вузлами, і різниця в значенні створює інтерференцію. Якщо взяти більш широкий початковий розподіл, то це усуне цей змішаний ефект і відтворить більш безперервний кінцевий розподіл.

Слід зазначити, що характер інтерференції залежить від початкового розподілу та перехідних ймовірностей. З урахуванням малих ймовірностей переходу, інтерференція зменшується зі збільшенням дисперсії початкового розподілу в межах 0.25-0.3 стандартного відхилення. Це було визначено шляхом аналізу рисунку 2.8 при зміні стандартного відхилення початкового розподілу.

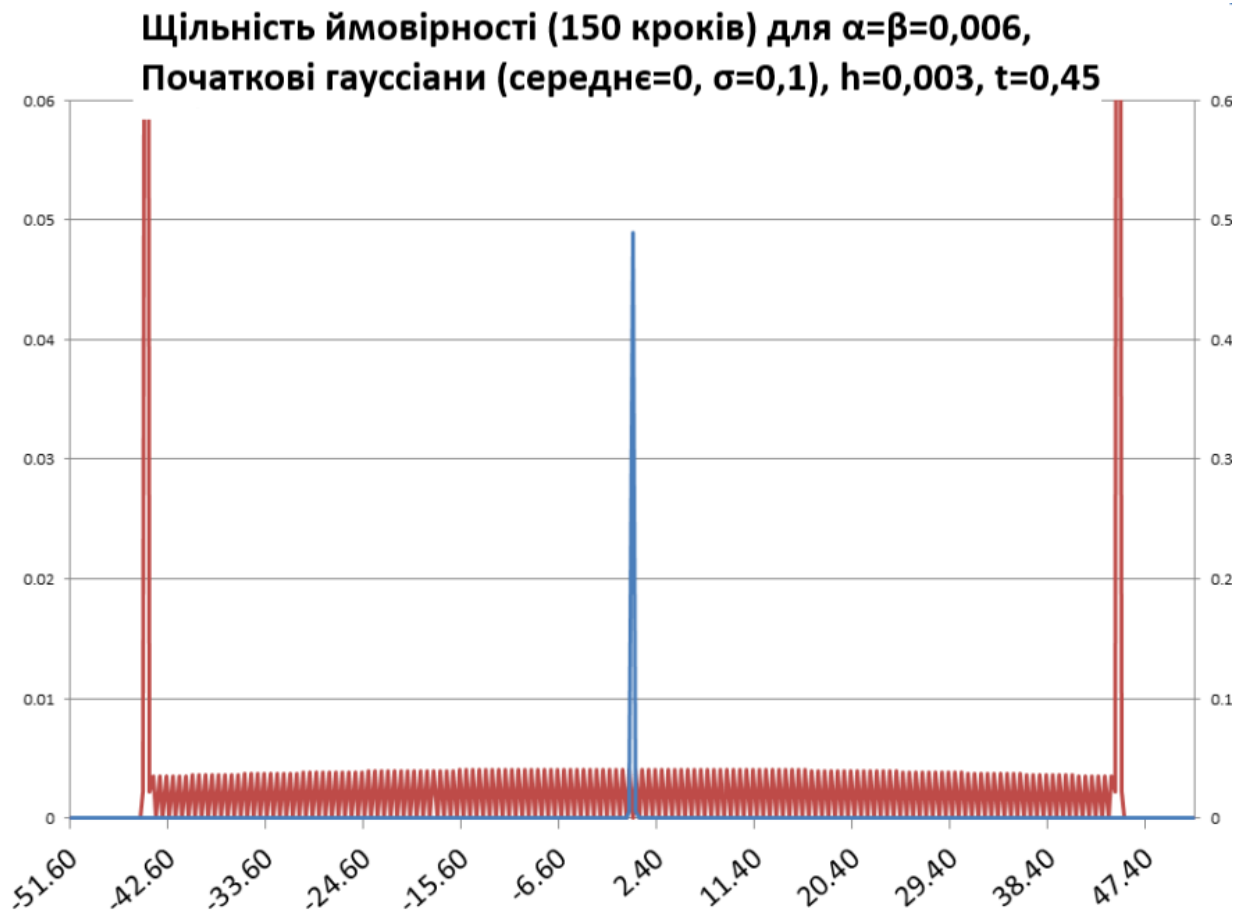


Рис. 2.8. Надзвичайно вузька початкова концентрація ймовірностей

2.2.3 Приклад 3, змішані перехідні ймовірності, симетричні

У третьому прикладі ймовірності переходу набагато більші, так що частина ймовірностей переміщується до країв згідно з вимогами до швидкості, а інша частина розподілу осідає в середині. Рисунок 2.9 та 2.10 показують більш збалансований випадок, де стандартне відхилення початкових розподілів знову повертається до 1.5, але тепер ймовірності переходу збільшуються до $\alpha = 0.015 = 1.5\%$, $\beta = 0.015 = 1.5\%$. Більша частина кінцевого розподілу знаходиться поза межами розв'язку, обмеженого значеннями -45.00 та 45.00 , проте деякі частинки все ж таки потрапляють туди.

Порівнюючи рисунок 2.10 з рисунком 2.7, можна побачити, що більша частина розподілу знаходиться між крайніми вузлами. Також розмір розподілів в крайніх точках -51.9 та 51.9 став трохи меншим, що відображає дифузію ймовірності в область між крайніми точками. З рисунку 2.9 видно, що остаточний розподіл виглядає приблизно гаусівським, але має значні “вуха” на крайніх значеннях.

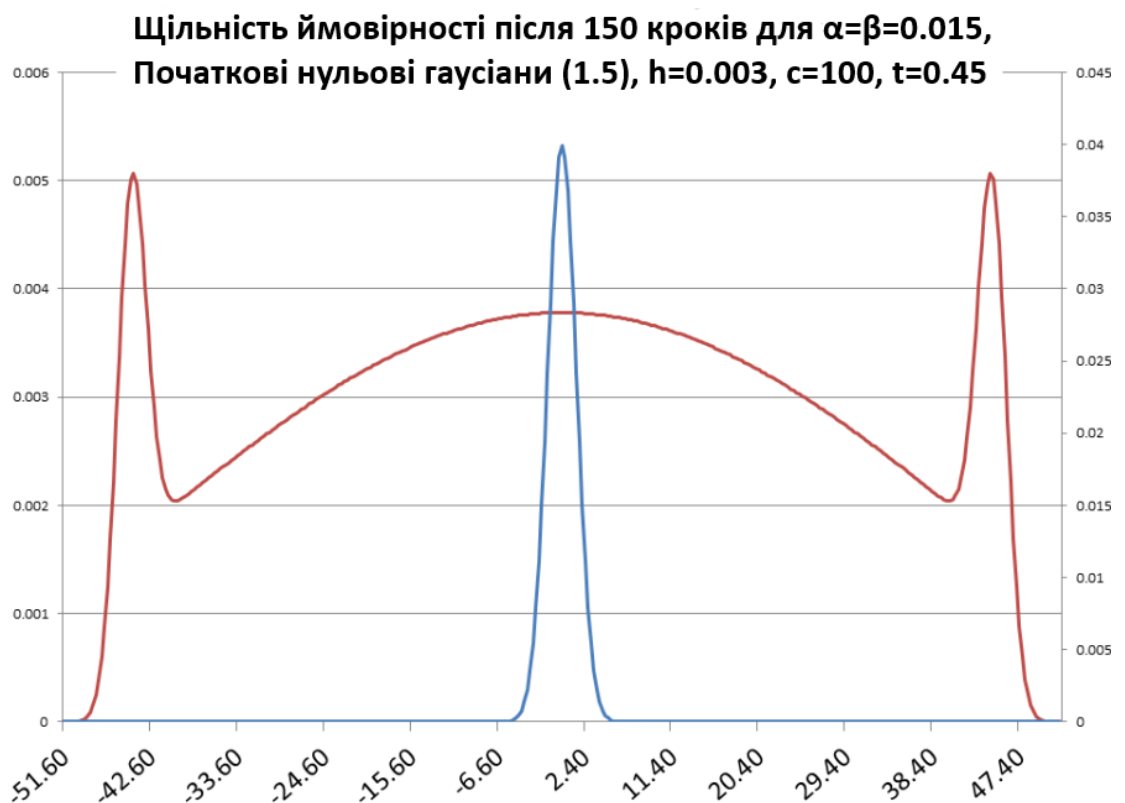


Рис. 2.9. Початкова, кінцева щільність вузлів, змішані переходи

**Щільність ймовірності (150 кроків) для $\alpha=\beta=0.015$,
Початкові гаусіани (середнє=0, $\sigma=1.5$), $h=0.003$, $t=0.45$.**

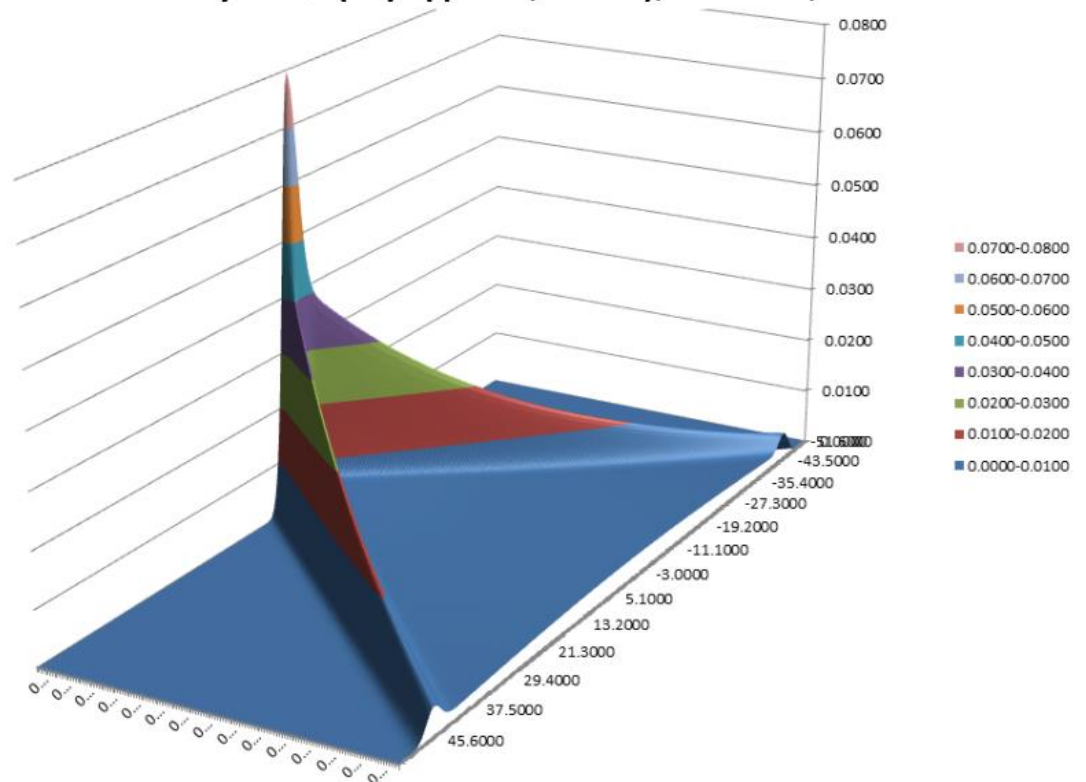


Рис. 2.10. Переміщення вузла в тривимірному просторі, змішані переходи

2.2.4 Приклад 4, великі ймовірності переходу, несиметричні

На рисунку 2.11 та рисунку 2.12 зображено приклад побудови сітки для випадку, коли ймовірності переходів набагато більші та несиметричні. У цьому випадку крайні розподіли зникнуть, оскільки вони можуть бути отримані лише за умови, що частинки не відхиляються від прямої траєкторії, що є малоімовірним, враховуючи 150 кроків. Також кроки рекомбінації генерують розподіл, який набагато більше зосереджений в середині, показуючи криву в напрямку більшого параметра переходу.

Рисунок 2.11 зображує початковий та кінцевий розподіл для 150 кроків. Кінцевий розподіл виглядає як гаусівський, але стандартне відхилення збільшилося і змістилося від центру. Початковий розподіл був зосереджений навколо нуля, а

потім змістився до 10.99 у момент часу 0.45, тоді як стандартне відхилення почалося з 1.5, як у початковому розподілі, а потім змінилося до приблизно 16.2 у кінцевий момент часу $t = 0.45$.

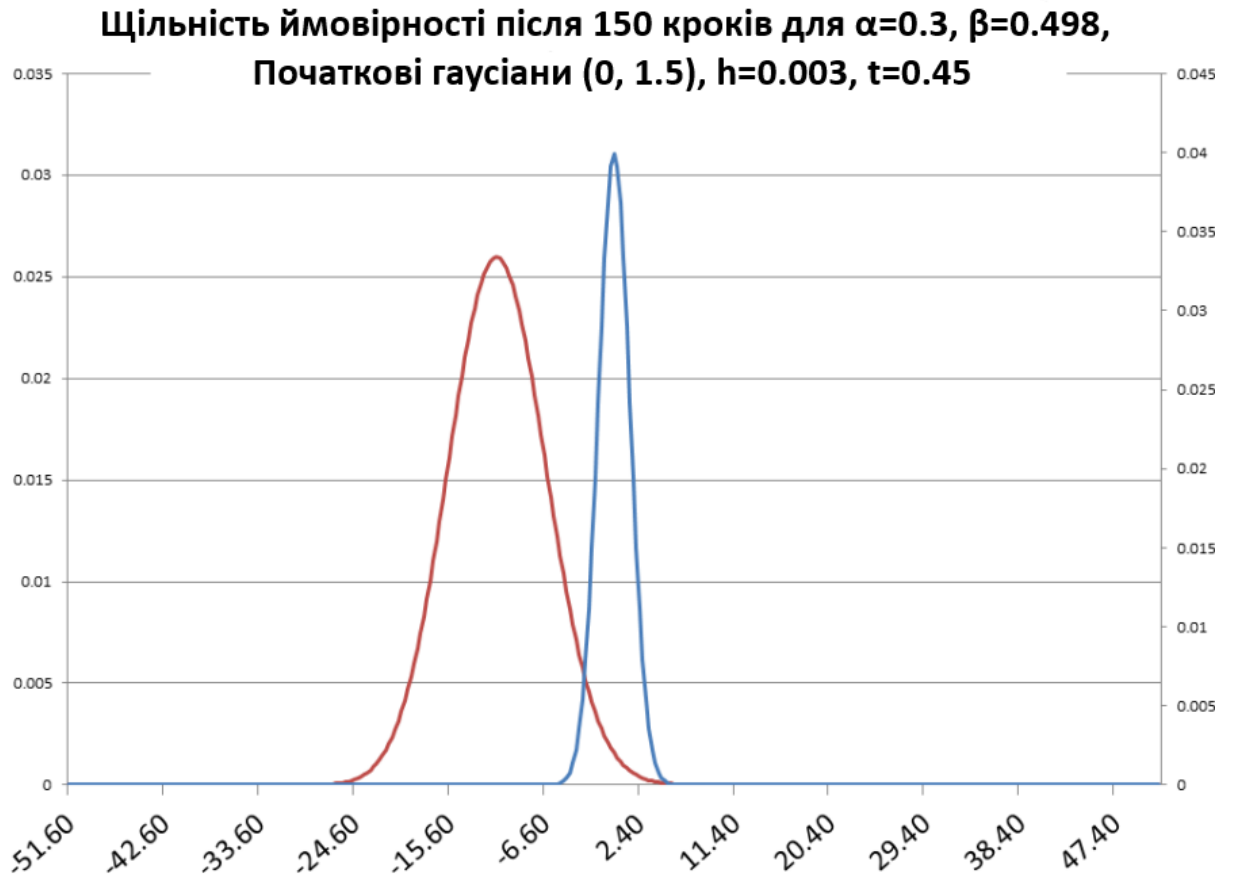


Рис. 2.11. Початкова, кінцева щільність вузлів, великі переходи

Щільність ймовірності (150 кроків) для $\alpha=0.3$, $\beta=0.498$,
Початкові гаусіани (0, 1.5), $h=0.003$, $t=0.45$.

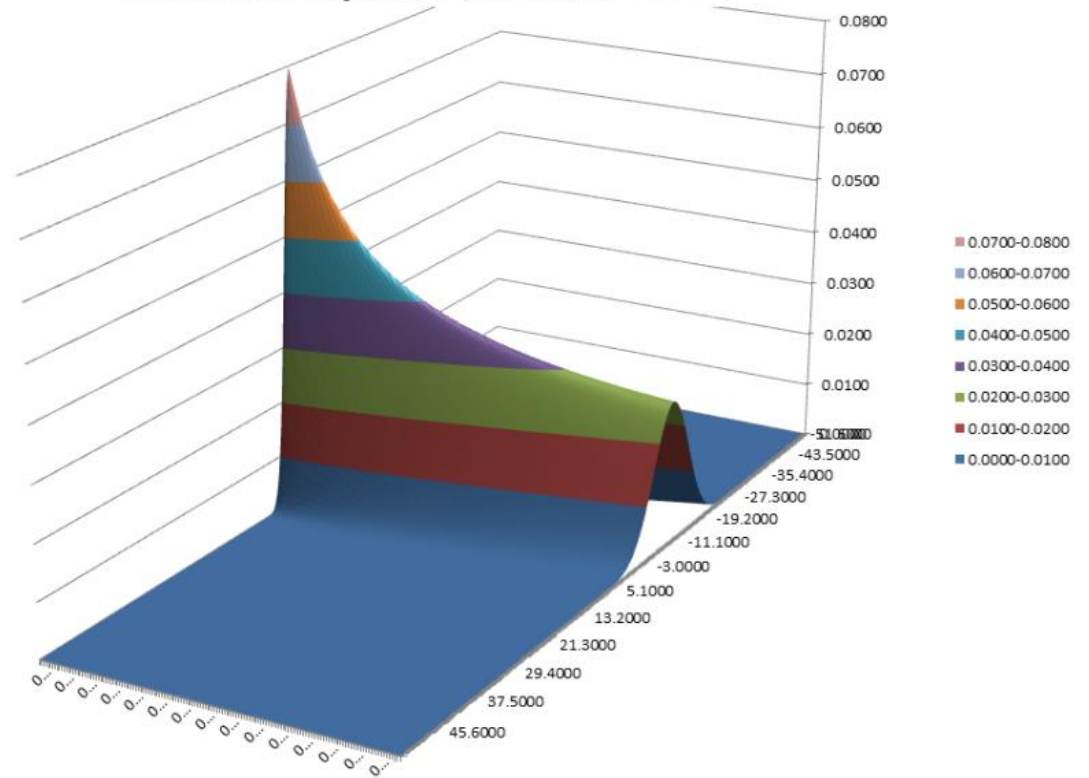


Рис. 2.12. Переміщення вузла в тривимірному просторі, великі переходи

3 НЕПЕРЕРВНИЙ ВИПАДОК

3.1 Рівняння для неперервної еволюції

Рівняння (1.4) можна перетворити на неперервне, для цього припускаючи відповідне обмеження $\Delta/h \rightarrow c$. Припустимо, що $\Delta/h = c$, а це означає, що швидкість частинки завжди постійна. Тоді частинка рухається тільки зі швидкістю, що дорівнює c або $-c$. Також припустимо, що ймовірності α та β змінюються як швидкості, які зменшуються зі зменшенням h , так що

$$\alpha(t, x) \rightarrow \alpha(t, x)h$$

$$\beta(t, x) \rightarrow \beta(t, x)h$$

Тоді для ймовірності положення частинки можна побудувати двофакторний стрибкоподібний процес.

Щоб застосувати ці обмеження до рівняння (1.4), треба ввести константу c та змінити ймовірності як швидкості, а також розкрити складові Δx , щоб отримати

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} q^+(t+h, x) \\ q^-(t+h, x) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 - \alpha(t, x)h & \beta(t, x)h \\ \alpha(t, x)h & 1 - \beta(t, x)h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^+(t, x) - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} q^+(t, x) + O(\Delta^2 x) \\ q^-(t, x) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} q^-(t, x) + O(\Delta^2 x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

так, що

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} q^+(t+h, x) \\ q^-(t+h, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha(t, x)h & \beta(t, x)h \\ \alpha(t, x)h & 1 - \beta(t, x)h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^+(t, x) \\ q^-(t, x) \end{pmatrix} \\ & + \Delta x \begin{pmatrix} 1 - \alpha(t, x)h & \beta(t, x)h \\ \alpha(t, x)h & 1 - \beta(t, x)h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} q^+(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial x} q^-(t, x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Слід звернути увагу на те, що в останній частині рівняння є складові $h\Delta x$, якими можна знехтувати через те, що вони є малими.

Залишаючи головні складові, отримуємо

$$\begin{pmatrix} q^+(t+h, x) - q^+(t, x) \\ q^-(t+h, x) - q^-(t, x) \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} -\alpha(t, x) & \beta(t, x) \\ \alpha(t, x) & -\beta(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^+(t, x) \\ q^-(t, x) \end{pmatrix} \\ + \Delta x \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} q^+(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial x} q^-(t, x) \end{pmatrix}$$

тому ділимо на h , обчислюємо границю і отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q^+(t, x) \\ q^-(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha(t, x) & \beta(t, x) \\ \alpha(t, x) & -\beta(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^+(t, x) \\ q^-(t, x) \end{pmatrix} + c \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -q^+(t, x) \\ q^-(t, x) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

при цьому беручи $\Delta \downarrow 0$, $h \downarrow 0$ і покладаючи $\Delta/h = c$. Складову h^2 ігноруємо, оскільки вони на порядок менші.

Переупорядковуючи це рівняння, отримуємо

$$\frac{\partial q^+(t, x)}{\partial t} + c \frac{\partial q^+(t, x)}{\partial x} + \alpha(t, x)q^+(t, x) = \beta(t, x)q^-(t, x) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial q^-(t, x)}{\partial t} - c \frac{\partial q^-(t, x)}{\partial x} + \beta(t, x)q^-(t, x) = \alpha(t, x)q^+(t, x) \quad (3.3)$$

що є набором зв'язаних рівнянь конвекції, які описують потік ймовірності по сітці. Цей тип рівняння має вигляд гіперболічного одновимірного телеграфного рівняння для поведінки хвиль напруги та струму в лінії передачі з втратами, хоча знаки різні [16] або [21]. У цьому випадку є лише початкові умови у вигляді початкових щільностей $q^+(0, x)$, $q^-(0, x)$ і, як правило, відсутні граничні умови типу Діріхле (залежні від часу фіксовані границі x). Границі Діріхле виникають лише тоді, коли у часі потік ймовірностей обмежений.

3.2 Телеграфне рівняння

Рівняння (3.2), (3.3) можна перетворити у двовимірне телеграфне рівняння. Як і раніше, нехай $\rho(t, x) = q^+(t, x) + q^-(t, x)$, а також визначимо $\varphi(t, x) = q^+(t, x) - q^-(t, x)$, тоді рівняння (3.1) та (3.2), (3.3) можна переписати як

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) = -c \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = -c \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x) - 2\alpha(t, x)q^+(t, x) + 2\beta(t, x)q^-(t, x)$$

або підставляючи

$$q^+(t, x) = \frac{\rho(t, x) + \varphi(t, x)}{2}$$

та

$$q^-(t, x) = \frac{\rho(t, x) - \varphi(t, x)}{2}$$

це зводиться до

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) = -c \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = -c \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x) - \epsilon(t, x)\rho(t, x) - \gamma(t, x)\varphi(t, x) \quad (3.5)$$

де $\epsilon(t, x) = \alpha(t, x) - \beta(t, x)$ та $\gamma(t, x) = \alpha(t, x) + \beta(t, x)$.

Якщо $\alpha(t, x) = \alpha$ та $\beta(t, x) = \beta$, то, прирівнявши до констант $\gamma(t, x)$, $\epsilon(t, x)$, це рівняння можна ще більше скоротити. Позначимо $\gamma(t, x) = \gamma$, $\epsilon(t, x) = \epsilon$ і підставимо похідну за часом з рівняння (3.4) в друге рівняння (3.5) та звідси отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(t, x) &= -c \frac{\partial}{\partial x} \left(-c \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x) - \epsilon \rho(t, x) - \gamma \varphi(t, x) \right) \\ &= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(t, x) + c\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x) + c\gamma \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) \end{aligned}$$

що стає

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(t, x) + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(t, x) + c\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x) \quad (3.6)$$

використовуючи (3.4) для останнього члена рівняння.

Це двовимірне телеграфне рівняння, яке має затухання як у часі t , так і в просторовій координаті x . Слід звернути увагу на різні застосування, пов'язані з хвилями напруги та струму в [17], [19], хоча вони, як правило, мають додаткові умови типу Діріхле. Також задача Коші для телеграфного рівняння на основі його моделювання одновимірною марковською випадковою еволюцією має подібний вигляд до [23] з використанням граничних умов Коші. Існують застосування

стохастичних процесів в біології, які породили телеграфне рівняння з границями Коші [12].

В літературі було запропоновано використовувати телеграфне рівняння в статистиці для опису руху частинок зі скінченними швидкостями, на відміну від моделей дифузійного типу. Перші роботи в цій галузі відносяться до [15], [20]. В [18] і в [11] показано телеграфні рівняння, подібні до (3.2), (3.3) і (3.6) для локальних ймовірностей. Це рівняння використовується для обчислення спільних ймовірностей, а не умовних ймовірностей, які є об'єктом дослідження в даній роботі. Для представлення марковського процесу з використанням телеграфних стрибкоподібних процесів та ринкових моделей слід дивитись [22].

Це рівняння можна звести до загасаючого рівняння Клейна-Гордона, яке буде описано в підрозділі 3.3. Слід зауважити, що в цьому випадку початкова умова вимагає початкової функції для $\rho(t, x)$, а також $\varphi(t, x)$, що задовольняє (3.4) і (3.5).

3.3 Рівняння Клейна-Гордона

Рівняння (3.6) легко перетворити на рівняння Клейна-Гордона наступним чином.

Теорема 3.1. Для подальшого спрощення рівняння (3.6) припустимо, що розв'язок можна записати у вигляді

$$\rho(t, x) = e^{-\frac{\epsilon}{2c}x - \frac{\gamma}{2}t} \psi(t, x) \quad (3.7)$$

для сталих ϵ , γ , тоді

$$\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + \eta^2 \psi \quad (3.8)$$

з $4\eta^2 = 4\alpha\beta = (\gamma^2 - \epsilon^2)$.

Доведення: Запишемо ймовірність стану у вигляді

$$\rho(t, x) = e^{Ax+Bt} \psi(t, x)$$

Тоді для перших двох доданків в (3.6)

$$\gamma \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = \gamma e^{Ax+Bt} \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} + B\psi \right)$$

$$\frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial t^2} = e^{Ax+Bt} \left(\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} + B^2 \psi \right)$$

або

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} &= e^{Ax+Bt} \left(\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} + (2B + \gamma) \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} + (B^2 + \gamma B) \psi \right) \\ &= e^{Ax+Bt} \left(\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\gamma^2}{4} \psi \right) \end{aligned}$$

якщо використаємо $\beta = -\frac{\gamma}{2}$ для відкидання похідної першого порядку.

Аналогічно для двох доданків праворуч

$$\begin{aligned} c\epsilon \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} &= c\epsilon e^{Ax+Bt} \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} + A\psi \right) \\ c^2 \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x^2} &= c^2 e^{Ax+Bt} \left(\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + 2A \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} + A^2 \psi \right) \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x^2} + c\epsilon \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} &= e^{Ax+Bt} \left(c^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + (2c^2 A + c\epsilon) \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} + Ac(Ac + \epsilon) \psi \right) \\ &= e^{Ax+Bt} \left(c^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\epsilon^2}{4} \psi \right) \end{aligned}$$

якщо використаємо $A = -\frac{\epsilon}{2c}$ для відкидання похідної першого порядку.

Ці два результати зводять рівняння (3.6) до

$$\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{\gamma^2 - \epsilon^2}{4} \psi = c^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + \eta^2 \psi$$

з визначенням для η , наведеним вище.

Залежно від типу застосування, існує багато розв'язків цього рівняння. Один цікавий розв'язок рівняння (3.8) дорівнює

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= AI_0(\xi) + BK_0(\xi) \\ \xi &= \frac{\eta}{c} \sqrt{K(t, x)} \end{aligned}$$

$$K(t, x) = c^2 t^2 - x^2$$

де $I_0(\cdot)$, $K_0(\cdot)$ - модифіковані функції Бесселя першого порядку. Один особливо цікавий факт полягає в тому, що якщо $\psi(t, x)$ є рівнянням до (3.8), то

$$\psi^* \left(\frac{t - \frac{x\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}, \frac{x - \vartheta t}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \right) \quad (3.9)$$

є розв'язком і для довільної швидкості ϑ .

Уявімо досить велику масу, таку, що $\gamma \ll 1$, яка рухається зі швидкістю ϑ , тоді використовуючи (3.9), маємо, що

$$\rho(t, x) = e^{-\frac{\epsilon}{2c}x - \frac{\gamma}{2}t} \psi^*(t, x) \approx \psi^*(t, x)$$

є щільністю ймовірності, що огинає пряму траєкторію руху основної маси зі швидкістю ϑ . В цьому випадку γ мале, оскільки більша маса має малу дисперсію, так що $\gamma \approx 0$ та складова x в експоненціальній залежності зникає. Також припускається, що ϵ мала при дуже великій швидкості c . Отже, $\epsilon/c \approx 0$ і складова x від експоненти зникає, а наближення зберігається.

Це хвильове рівняння Клейна-Гордона широко використовується в релятивістській квантовій механіці для знаходження безспінової вільної частинки для хвильової функції. Рівняння (3.8) застосовується до дійсного рівняння після коригування в пов'язане з тахіонами [13] або транспортними рівняннями [10].

3.4 Швидкість у прямому та у зворотному напрямках

Щоб дізнатися про середнє положення частинки, яка проходить через x , треба розглянути ймовірність виходу з одного вузла. Використовуючи теорему Баєса на рівняннях (1.4) та (1.5), (1.6), будь-яка частинка, яка покидає стан x в момент часу t , має швидкість $\pm c$ з ймовірністю

$$P[x(t+h) = x + \Delta x | x(t) = x] = \frac{P[x(t+h) = x + \Delta x, x(t) = x]}{P[x(t) = x]} = \frac{q^+(t, x)}{\rho(t, x)}$$

$$P[x(t+h) = x - \Delta x | x(t) = x] = \frac{P[x(t+h) = x - \Delta x, x(t) = x]}{P[x(t) = x]} = \frac{q^-(t, x)}{\rho(t, x)}$$

тому що $q^\pm(t, x) = P[x(t + h) = x \pm \Delta x | x(t) = x]$ є спільною ймовірністю, див. (1.4) та (1.5), (1.6).

Звідси очікування швидкості виходу частинки за умови перебування в стані x в момент часу t дорівнює

$$\vartheta(t, x) = c \frac{q^+(t, x) - q^-(t, x)}{\rho(t, x)} = c \frac{\varphi(t, x)}{\rho(t, x)} \quad (3.10)$$

де $\varphi(t, x) = q^+(t, x) - q^-(t, x)$.

Отже, різниця між двома щільностями $q^+(t, x)$ та $q^-(t, x)$ також має фізичну інтерпретацію.

Для зворотної швидкості розглянемо кроки в сітці, що закінчуються в $x(t) = x$ перед обчисленням середнього значення. Отже, за визначенням, знову можемо використати теорему Баєса

$$\begin{aligned} P[x(t - h) = x + \Delta x | x(t) = x] &= \frac{P[x(t - h) = x + \Delta x, x(t) = x]}{P[x(t) = x]} \\ &= \frac{q^+(t - h, x + \Delta x)}{\rho(t, x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[x(t - h) = x - \Delta x | x(t) = x] &= \frac{P[x(t - h) = x - \Delta x, x(t) = x]}{P[x(t) = x]} \\ &= \frac{q^+(t - h, x - \Delta x)}{\rho(t, x)} \end{aligned}$$

зосередившись тепер на ймовірності потрапити у точку x , яка виходить з $x + \Delta x$ зі швидкістю $-c$, або виходить з $x - \Delta x$ зі швидкістю c .

Можна визначити швидкість руху назад і прискорення, використовуючи інверсію рівняння (1.4).

Теорема 3.2. Гіперболічне двовимірне рівняння (3.2), (3.3), яке має пряму швидкість (3.10), також має прискорення, що дорівнює

$$a_t(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\vartheta(t, x) - \vartheta^-(t, x)}{h} = -c\epsilon(t, x) - \vartheta(t, x)\gamma(t, x)$$

де визначається як швидкість частинки, яка закінчується на x - швидкість у зворотному напрямку.

Доведення: Зворотна швидкість, завдяки використанню аргументу Баєса, як і раніше, набуває вигляду

$$\vartheta^-(t, x) = c(P[x(t-h) = x - \Delta x | x(t) = x] - P[x(t-h) = x + \Delta x | x(t) = x])$$

що дорівнює

$$\begin{aligned} \vartheta^-(t, x) &= c \left(\frac{P[x(t-h) = x - \Delta x, x_t = x]}{P[x_t = x]} - \frac{P[x(t-h) = x + \Delta x, x_t = x]}{P[x_t = x]} \right) \\ &= c \left(\frac{q^+(t-h, x - \Delta x)}{\rho(t, x)} - \frac{q^-(t-h, x + \Delta x)}{\rho(t, x)} \right) \\ &= \frac{c}{\rho(t, x)} (q^+(t-h, x - \Delta x) - q^-(t-h, x + \Delta x)) \end{aligned}$$

Це можна спростити за допомогою інтегрування рівняння (1.4), починаючи з того, що

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q^+(t-h, x - \Delta x) \\ q^-(t-h, x + \Delta x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \alpha(t-h, x)h & \beta(t-h, x)h \\ \alpha(t-h, x)h & 1 - \beta(t-h, x)h \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q^+(t, x) \\ q^-(t, x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D_{t-h}} \begin{pmatrix} 1 - \beta(t-h, x)h & -\beta(t-h, x)h \\ -\alpha(t-h, x)h & 1 - \alpha(t-h, x)h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^+(t, x) \\ q^-(t, x) \end{pmatrix} \quad (3.11) \\ &= \frac{1}{D_{t-h}} \begin{pmatrix} (1 - h\beta(t-h, x))q^+(t, x) - h\beta(t-h, x)q^-(t, x) \\ -hq^+(t, x)\alpha(t-h, x) + (1 - h\alpha(t-h, x))q^-(t, x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D_{t-h}} \begin{pmatrix} q^+(t, x) - h\beta(t-h, x)\rho(t, x) \\ q^-(t, x) - h\alpha(t-h, x)\rho(t, x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

з матричним визначником

$$\begin{aligned} D_{t-h} &= (1 - h\beta(t-h, x))(1 - h\alpha(t-h, x)) - h^2\beta(t-h, x)\alpha(t-h, x) \\ &= 1 - h(\beta(t-h, x) + \alpha(t-h, x)) = 1 - h\gamma(t-h, x) \end{aligned}$$

Підставивши це в рівняння (3.11), маємо

$$\begin{aligned} \vartheta^-(t, x) &= \frac{c}{\rho(t, x)} (q^+(t-h, x - \Delta x) - q^-(t-h, x + \Delta x)) \\ &= \frac{c}{D_{t-h}\rho(t, x)} (q^+(t, x) - q^-(t, x) + h(\alpha(t-h, x) - \beta(t-h, x))\rho(t, x)) \\ &= \frac{\vartheta(t, x) + ch\epsilon(t-h, x)}{D_{t-h}} = \frac{\vartheta(t, x) + ch\epsilon(t-h, x)}{1 - h\gamma(t-h, x)} \end{aligned}$$

за допомогою $\epsilon(t-h, x) = \alpha(t-h, x) - \beta(t-h, x)$

Тепер розширимо за зростаючими порядками h

$$\begin{aligned}\vartheta^-(t, x) &= \frac{\vartheta(t, x) + ch\epsilon(t - h, x)h}{1 - h\gamma(t - h, x)} \\ &= (\vartheta(t, x) + ch\epsilon(t - h, x))(1 + h\gamma(t - h, x) + \dots) \\ &= \vartheta(t, x) + c\epsilon(t - h, x)h + \vartheta(t, x)\gamma(t - h, x)h + \dots\end{aligned}$$

або в межах границі

$$a_t(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\vartheta(t, x) - \vartheta^-(t, x)}{h} = -c\epsilon(t, x) - \vartheta(t, x)\gamma(t, x)$$

при цьому використовуючи

$$\epsilon(t, x) = \lim_{h \downarrow 0} (\alpha(t - h, x) - \beta(t - h, x))$$

$$\gamma(t, x) = \lim_{h \downarrow 0} (\alpha(t - h, x) + \beta(t - h, x)).$$

Отже, це практичне визначення прискорення через точку x . Слід зауважити, що в цьому доведенні були проігноровані технічні питання границь та неперервності для $\alpha(t, x)$, $\beta(t, x)$.

3.5 Розв'язки неперервних рівнянь

Рівняння (3.2), (3.3), телеграфне рівняння (3.6) та рівняння Клейна-Гордона (3.8) мають розв'язки для випадку, коли існують певні початкові умови Коші. Це стосується розподілів для початкового стану та початкової швидкості.

Тут ситуація дещо відрізняється від звичайних застосувань в електромагнетизмі, інвестуванні або попередніх ймовірнісних дослідженнях тим, що розподіл визначається як сума $q^+(t, x)$, $q^-(t, x)$, а для телеграфного рівняння зазвичай не передбачено початкового розподілу.

Однак, досить просто показати наступне.

Теорема 3.3. Використовуючи позначення з теореми 3.1 з $\eta^2 = (\beta^2 - \alpha^2)/4$ з початковими умовами

$$\rho(0, x) = q^+(0, x) + q^-(0, x)$$

розв'язок рівнянь (3.2), (3.3) і (3.6) матиме вигляд

$$q^+(t, x) = e^{-\frac{\epsilon}{2c}x - \frac{\gamma}{2}t} \psi^+(t, x) \quad (4.1)$$

$$q^-(t, x) = e^{-\frac{\epsilon}{2c}x - \frac{\gamma}{2}t} \psi^-(t, x) \quad (4.2)$$

$$\rho(t, x) = q^+(t, x) + q^-(t, x) \quad (4.3)$$

де

$$\psi^\pm(t, x) = \frac{\psi^\pm(x + ct) + \psi^\pm(x - ct)}{2} + \frac{ct\eta}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi^\pm(z) \frac{I_0\left(\frac{\eta}{c} \xi(t, x - z)\right)}{\xi(t, x - z)} dz$$

з

$$\psi^\pm(x) = e^{\frac{\epsilon}{2c}x} q^\pm(0, x)$$

$$\xi = \sqrt{c^2 t^2 - x^2}$$

Доведення. Рівняння (3.8) являє собою рівняння Клейна-Гордона для функції загальної просторової щільності ймовірності $\rho(t, x)$. Воно було отримане з (3.6) і (3.7). Однак, можна використати ці рівняння, щоб показати, що телеграфне рівняння (3.6) справедливе і для $\varphi(t, x)$. Але у цьому випадку початкові умови будуть іншими.

Оскільки і сума $\rho(t, x)$, і різниця $\varphi(t, x)$ задовольняють телеграфне рівняння, то їх різниця та їх сума також задовольняють телеграфне рівняння (3.6). Оскільки

$$q^+(t, x) = (\rho(t, x) + \varphi(t, x))/2,$$

$$q^-(t, x) = (\rho(t, x) - \varphi(t, x))/2$$

також задовольняють телеграфне рівняння після перетворення за допомогою експоненціальної залежності (3.7), вони також задовольняють рівняння Клейна-Гордона. Отже, $\rho(t, x)$, $\varphi(t, x)$, $q^+(t, x)$, $q^-(t, x)$, хоча і з різними умовами, але задовольняють рівняння Клейна-Гордона.

Розв'язок рівняння Клейна-Гордона за умов Коші має вигляд

$$\begin{aligned} \psi(t, x) = & \frac{\psi(x + ct) + \psi(x - ct)}{2} + \frac{ct\eta}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) \frac{I_0\left(\frac{\eta}{c} \sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2}\right)}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2}} d\xi \\ & + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \theta(\xi) K_0(m \sqrt{c^2 t^2 - (x - \xi)^2}) d\xi \end{aligned}$$

де

$$\psi(0, x) = \psi(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(0, x) = \theta(x)$$

Враховуючи той факт, що умовна похідна невідома, можна вилучити член $\theta(t, x)$ вище та ввести відповідну початкову умову для окремих щільностей. Використовуючи (3.7), ці початкові умови мають вигляд

$$q^+(0, x) = e^{-\frac{\epsilon}{2c}x} \psi^+(x)$$

або

$$q^-(0, x) = e^{-\frac{\epsilon}{2c}x} \psi^-(x)$$

Таким чином, інвертування дає $\psi^\pm(0, x) = e^{\frac{\epsilon}{2c}x} q^\pm(0, x)$, що є початковими умовами, наведеними в (4.1), (4.2), (4.3).

Отримане рівняння є розв'язком рівняння Клейна-Гордона з використанням початкових умов для $q^+(0, x)$, $q^-(0, x)$. Для того, щоб знайти розв'язок телеграфного рівняння, потрібна експонента, як у (3.7), для будь-якого початкового випадку, що пояснює рівняння в (4.1), (4.2), (4.3). Рівняння для $q^+(t, x)$, $q^-(t, x)$ є однофакторними рівняннями, і тому описана вище процедура повинна знайти єдиний розв'язок.

З іншого боку, якщо γ та c стають великими так, що $\gamma, c \gg 1$, то рівняння (3.6) можна представити у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) = \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(t, x) + \frac{c\epsilon}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(t, x) \quad (4.4)$$

та, оскільки $1/\gamma \ll 1$, останній член в границі зникає, і це дає

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) = \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(t, x) + \frac{c\epsilon}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x)$$

що є рівнянням дифузії з дисперсією $\sigma^2 = \frac{c^2}{\gamma}$ та дрейфом $-\frac{c\epsilon}{\gamma}$.

Фактично, якщо до того ж $\alpha = \beta$, то $\epsilon = \alpha - \beta = 0$ та $\gamma = 2\alpha$, так що рівняння (4.4) зводиться до

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) = \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(t, x) = \frac{c^2}{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(t, x)$$

що є суттєвим поняттям дифузії.

Результат не викликає подиву, адже велике значення γ свідчить про високу ймовірність перемикання швидкостей у довільному стані x . Броунівський рух має велику швидкість c , яка не має межі, а також здатність швидко змінювати напрям руху з нескінченно великою швидкістю.

Теорема 3.4. Для невеликих значень γ швидкість середнього значення залишається рівною початковому значенню, в той час як для великих значень γ і великих значень c середня швидкість середнього значення стає

$$\vartheta_0 = -\frac{c\epsilon}{\gamma}.$$

Разом з цим

$$E[x^2(t)] \approx \frac{2c^2t}{\gamma} + E[x(t)]^2$$

для $\gamma \gg 1$ та $\gamma t \gg 1$.

Доведення. Інтегрування рівняння (3.6) показує, що

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(t, x)dx + \gamma \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(t, x)dx = -c\epsilon$$

так, що

$$\frac{d^2}{dt^2} E[x(t)] + \gamma \frac{d}{dt} E[x(t)] = -c\epsilon.$$

Розв'язок цього є простим

$$\vartheta_t = \frac{d}{dt} E[x(t)] = -\frac{c\epsilon}{\gamma} + \left(\vartheta_0 + \frac{c\epsilon}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} \quad (4.5)$$

де

$$\vartheta_0 = \frac{d}{dt} E[x(0)]$$

просте посилення на початкову швидкість. Очевидно, що тоді частинка має початкову швидкість ϑ_0 , але через деякий час $\gamma t \ll 1$ отримуємо

$$\vartheta_{\infty} = -\frac{c\epsilon}{\gamma}.$$

З інтегрування (4.5) ще раз маємо

$$E[x(t)] = E[x(0)] - \frac{c\epsilon t}{\gamma} + \left(\vartheta_0 + \frac{c\epsilon}{\gamma} \right) \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma}$$

$$\approx E[x(0)] - \frac{c\epsilon t}{\gamma} \approx E[x(0)] + \vartheta_{\infty} t$$

якщо $\gamma \gg 1$ та $\gamma t \gg 1$.

Рівняння (3.6) також показує, що

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(t, x) dx + \gamma \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(t, x) dx = 2c^2 - 2c\epsilon E[x(t)]$$

так що

$$\frac{d}{dt} E[x^2(t)] = e^{-\gamma t} E[x^2(0)] + \frac{2c^2}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) - 2c\epsilon \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} E[x(s)] ds \quad (4.6)$$

Останній член в цьому рівнянні стає

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} E[x(s)] ds &\approx \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \left(E[x(0)] - \frac{c\epsilon s}{\gamma} \right) ds \\ &= \frac{E[x(0)]}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{c\epsilon}{\gamma} \left(\frac{t}{\gamma} - \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma^2} \right) \\ &\approx \frac{E[x(0)]}{\gamma} - \frac{c\epsilon t}{\gamma^2} \end{aligned}$$

Тоді, виходячи з цього, рівняння (4.6) стає

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[x^2(t)] &\approx \frac{2c^2}{\gamma} - \frac{2c\epsilon E[x(0)]}{\gamma} + \frac{2c^2 \epsilon^2 t}{\gamma^2} \\ &\approx \frac{2c^2}{\gamma} - \frac{2c\epsilon}{\gamma} \left(E[x(0)] - \frac{c\epsilon s}{\gamma} \right) \\ &\approx \frac{2c^2}{\gamma} + \vartheta_{\infty} (E[x(0)] + \vartheta_{\infty} t) \\ &\approx \frac{2c^2}{\gamma} + \frac{d}{dt} E[x(t)]^2 \end{aligned}$$

так що

$$E[x^2(t)] \approx \frac{2c^2 t}{\gamma} + E[x(t)]^2.$$

Цей результат показує, що розподіл відповідає гаусівській дифузії, оскільки дисперсія зростає з часом, а решта членів мають порядок $1/\gamma$.

Однак, якщо $\alpha(t, x)$ та $\beta(t, x)$ явно залежать від стану x і часу t , то потрібен інший підхід.

ВИСНОВКИ

У даній роботі було досліджено модель руху частинки, використовуючи двофакторні стрибкові процеси. Ці процеси описують рух частинки зі сталою швидкістю, та ймовірності α і β змінюються на кожному кроці сітки. Шляхом застосування граничних умов було отримано неперервне рівняння, що являє собою систему зв'язаних гіперболічних рівнянь, які можуть бути зведені до телеграфного рівняння або затухаючого рівняння Клейна-Гордона.

Запропоновані рівняння можуть бути використані у різних областях, включаючи моделювання електричних і струмових хвиль у лініях передавання, стохастичних процесів в біології та у фінансових моделях. Телеграфне рівняння може бути використане для опису руху частинок з обмеженими швидкостями, тоді як затухаюче рівняння Клейна-Гордона пов'язане з релятивістською квантовою механікою і тахіонами.

Також було отримано загальну формулу розв'язку для затухаючого рівняння Клейна-Гордона, в якій використовуються модифіковані функції Бесселя. Цей розв'язок можна застосувати для того, щоб визначити середнє положення частинки, а також для встановлення залежностей між швидкістю, прискоренням та часом і просторовими координатами.

На графіках, що були побудовані в цій роботі, демонструється вплив ймовірностей переходу (α і β) на форму та поширення розподілу ймовірностей. Візуально на графіках можна спостерігати, що високі значення перехідних ймовірностей призводять до широких і розсіяних розподілів, тоді як нижчі значення ймовірностей створюють вужчі та сфокусовані розподіли. Крім цього, початкові умови впливають на форму і характеристики розподілу ймовірностей. Більш розсіяний початковий розподіл робить його ширшим і менш концентрованим, тоді як розподіл зі сконцентрованими початковими значеннями буде мати вищий пік та більшу концентрацію ймовірності.

Аналіз цих графіків також дає змогу виявити зміну розподілу ймовірностей із плином часу. У всіх розглянутих прикладах можна спостерігати збільшення

розмаху розподілів і охоплення більшого діапазону значень. Симетрія або асиметрія перехідних ймовірностей відображається у симетрії розподілу ймовірностей. Якщо ймовірності переходу є симетричними, то це призводить до симетричних розподілів, тоді як асиметричні ймовірності спричиняють спотворення розподілів зі зміщенням імовірнісної маси в одному напрямку. При обмежених рухах і ймовірностях переходу можуть спостерігатися інтерференційні моделі та коливання в кінцевому розподілі, що проявляється чергуванням піків і спадів на графіку.

Графіки виконують важливу роль у порівнянні та вивченні впливу параметрів і умов на розподіли ймовірностей, а також в аналізі їхньої динаміки в часі. З їх допомогою з'являється можливість виявити ключові фактори, що впливають на характеристики розподілів, а також графіки надають цінну інформацію для подальших досліджень.

Таким чином, дана робота дає змогу краще зрозуміти й описати рух частинки, використовуючи двофакторні стрибкові процеси та пов'язані з ними рівняння. Отримані результати та висновки роботи можуть бути корисними для подальших досліджень у галузі фізики та математики, а також для практичного застосування в різних наукових та інженерних галузях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. - М.: Наука, 1967.-176 с.
2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. - Киев: Наукова думка, 1976. - 310 с.
3. Фок В.А. Решение одной задачи теории диффузии по методу конечных разностей и приложение его к диффузии света// Труді Государственного оптического института, 1926. - Т. 4, вып. 34. - 32 с.
4. Фуцич В.И., Галицын А.С., Полубинский А.С. Новая математическая модель диффузионного процесса с конечной скоростью// Докл. АН УССР. Сер.А. - 1988. - №8. - С. 22-27.
5. Фуцич В.И., Галицын А.С., Полубинский А.С. О новой математической модели процесса теплопроводности// Укр. Матем. Журнал. - 1990. - 42, №2. - С. 234-245.
6. Хида Т. Броуновское движение. - М.: Наука, 1987. - 304 с.
7. Goldstein S. On diffusion by discontinuous movements and the telegraph equation// Quart.J.Mech.Appl.Math. - 1951. - 4. - P. 129-156.
8. Кас М. A stochastic model related to the telegrapher's equation// Rocky Mount.J.Math. - 1974. - 4. - P. 497-509.
9. Knight F.B. Essentials of Brownian motion and diffusion. - Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1981. - 201 p.
10. Anno, P.D., Klein Gordon Acoustics Theory, Thesis, Coloradon School of Mines (1993).
11. Boguna, M., Porra'J.M., Masoliver J, Generalization of the persistent random walk to dimensions greater than 1, Physical Review E 58 (6) (Dec 1998).
12. Codling, E.A., Plank, M.J., Benhamou, S., Random Walk in Biology, Journal of Royal Society Interface 5 (25) 813-834.
13. Feinberg, G, The Possibility of Faster Than Light, Physical Review 159, Volume 5 (1967).

14. Feller, W, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley and Sons, Volume I and II (1966, 1971).
15. Goldstein, S, On diffusion by discontinuous movements and the telegraph equation, Quarter Journal Mechanics Applied Mathematics 4 (129-156).
16. Harrington. R.F., Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill (1961).
17. Hosseini, M.M., Tauseef Mohyud-Din, S, Hosseini, S.M. and Heydari, M., Study on Hyperbolic Telegraph Equations by Using Homotopy Analysis Method, Studies in Nonlinear Sciences 1, (2) (2010) 50-56.
18. Iacus, S.M., Statistical analysis of the inhomogeneous telegraphers process, Cornell University Library arXiv.org, arxiv Engine, <http://arxiv.org/abs/math/0011059v1> (2000).
19. Javidi, M., Nyamoradi, N., Numerical solution of telegraph equation using LT inversion Technique, International Journal of Advanced Mathematical Sciences, 1 (2) (2013) 64-77.
20. Kac, M., A stochastic model related to the Telegraphers equation, Rocky Mountain Journal Mathematics 4 (1974) 497-509. Reprinted from: M. Kac, Some stochastic problems in physics and mathematics, Colloquium lectures in the pure and applied sciences, No. 2, hectographed, Field Research Laboratory, Socony Mobil Oil Company, Dallas, TX (1956) 102-122.
21. Mittal, R.C., Bhatia, R. Numerical solution to second order one dimensional Telegraph Equation by cubic B-spline collocation method, Applied Mathematics and Computation 220, (2013) 496-506.
22. Ratanov, N., Telegraph processes with jump diffusion and complete market models, Cornell University Library arXiv.org, <http://arxiv.org/pdf/1311.5464.pdf> (2013).
23. Samoilenko, I.V., Turbin, A.F. A probability method for the solution of the telegraph equation with real analytic initial conditions, Ukrainian Mathematical Journal 52 (8) (2000).