МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**Сідей Марія Іванівна**

УДК 519.21

# ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З ПРОПУСКАМИ

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
**МОКЛЯЧУК Михайло Павлович,**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
**ЄЛЕЙКО Ярослав Іванович,**
Львівський національний університет імені Івана Франка, завідувач кафедри теоретичної та прикладної статистики;
кандидат фізико-математичних наук, доцент
**МЛАВЕЦЬ Юрій Юрійович**
ДВНЗ "Ужгородський національний Університет", доцент кафедри кібернетики та прикладної математики.

Захист відбудеться "02" жовтня 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.
Автореферат розісланий "01" вересня 2017 р.

В.о. вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради Станжицький О.М.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** В епоху інформаційного суспільства однією з важливих задач є обробка зібраних даних та прогнозування майбутніх значень на їх основі. Такі задачі виникають у різних галузях науки, зокрема в теорії автоматичного регулювання, статистичній оптиці і радіофізиці, метеорології, астрономії, океанографії, статистичній гідромеханіці тощо. Чимало явищ, що досліджуються, можна описати за допомогою моделей стаціонарних процесів та послідовностей. Тому й виникають питання про оцінювання невідомих значень стаціонарних випадкових процесів.

Постановка задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації і методів їх розв'язання належить А. М. Колмогорову. Задача екстраполяції стаціонарних процесів досліджується у роботах А. М. Яглома, Н. Вінера, М. Г. Крейна, О.Ханнера, К. Карунена. Грунтовний виклад теорії стаціонарних процесів можна знайти в книгах Ю. Розанова, П. Броквела та Р. Девіса. Серед робіт, в яких досліджуються задачі оцінювання невідомих значень процесів, можна виділити роботи, які присвячені оцінкам значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками. Задачі оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками досліджувались у роботах М. Поурахмаді, А.Г. Міямі, Ю. Касахара, П. Бондона, М. Пелегаті.

Запропонований А. М. Колмогоровим метод розв'язання задач оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів базується на припущенні, що відомі точні значення спектральних щільностей процесів чи послідовностей. В умовах спектральної невизначеності, коли задано лише множини допустимих значень спектральних щільностей, доцільно шукати оцінку, яка б мінімізувала величину середньоквадратичної похибки одразу для всіх можливих щільностей із заданого класу. Такий підхід має назву мінімаксного і вперше запропоновано У. Гренандером у 1957 році для задачі екстраполяції стаціонарного процесу. У 1985 році опубліковано статтю С. А. Кассама та Г. В. Пура, яка містить огляд робастних методів обробки сигналів для деяких моделей спектральної невизначеності. Задачі мінімаксної екстраполяції, інтерполяції та фільтрації функціоналів від невідомих значень стаціонарних процесів та послідовностей досліджуються у роботах М. П. Моклячука. Задачі оптимального оцінювання для векторних стаціонарних послідовностей та процесів досліджуються М. П. Моклячуком та його учнем О. Ю. Масю-ткою. Для періодичного корельованих стаціонарних процесів відповідні задачі розв'язані М. П. Моклячуком та його ученицею І. І. Голі-ченко.

Результати досліджень задач оцінювання функціоналів від процесів та послідовностей з стаціонарними приростами викладено в працях М. П. Моклячука та його учня М. М. Луза.

У дисертаційній роботі досліджуються задачі середньоквадратично оптимального оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками. Задачі досліджено в умовах спектральної визначеності, коли відомі спектральні щільності процесів та послідовностей, та в умовах спектральної невизначеності, коли точні значення спектральних щільностей невідомі, а задано лише класи допустимих значень спектральних щільностей.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана у рамках державної бюджетної науково-дослідної теми №11БФ038-02 «Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей» (номер державної реєстрації 0111U006561) і №16БФ038-02 «Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем» (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

**Мета і завдання дослідження.** Метою роботи є розв'язання задач середньоквадратично оптимального оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками. Вивчаються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками. Завданням дослідження є виведення формул для обчислення середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів за умов спектральної визначеності, коли відома спектральна структура процесів і послідовностей, та встановлення співвідношень для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів в умовах спектральної невизначеності, коли задано лише класи допустимих значень спектральних щільностей.

**Об'єктом дослідження** є стаціонарні послідовності та процеси з пропусками.

**Предметом дослідження** є задачі оптимального в середньоквадратичному сенсі оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками спостережень.

**Методи дослідження.** У роботі використано основні положення спектральної теорії стаціонарних послідовностей та процесів для знаходження оптимальних оцінок лінійних функціоналів. Формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оптимальних оцінок в умовах спектральної визначеності знаходяться за допомогою методу ортогональних проекцій в гільбертових просторах запропонованого А.М. Колмогоровим. В умовах спектральної невизначеності для розв'язання екстремальних задач застосовуються методи опуклої оптимізації.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Усі результати, отримані в дисертації, є новими. Основні з них наступні:

– розв'язано задачі оптимального в середньоквадратичному сенсі оцінювання лінійних функціоналів від стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками (задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації);

– виведено формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оптимальних оцінок лінійних функціоналів у випадку спектральної визначеності, коли задано явний вигляд спектральних щільностей стаціонарних послідовностей та процесів;

– встановлено співвідношення та формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик оптимальних оцінок лінійних функціоналів у випадку спектральної невизначеності для заданих класів допустимих спектральних щільностей, застосовуючи мінімаксний підхід.

**Практичне значення одержаних результатів.** Отримані в роботі результати мають теоретичне значення при вивченні теорії випадкових процесів, а саме теорії стаціонарних послідовностей та процесів, та практичне застосування у задачах теорії часових рядів, теорії передачі інформації, фінансової математики. Результати дослідження можуть бути використані при розв'язанні задач оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів і послідовностей, що спостерігаються з пропусками за їх спостереженнями з шумом чи без.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. За результатами дисертації опубліковано п'ять наукових робіт у фахових виданнях та одна стаття в електронному виданні. Всі роботи опубліковані у співавторстві з науковим керівником, професором Моклячуком М. П. В роботах співавтору належать постановка задач, загальне керівництво роботою та обговорення результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на наукових конференціях та наукових семінарах, а саме:

1. International Conference "Stochastic Processes in Abstract Spaces" (Kyiv, 2015)
2. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Івано-Франківськ, 2016);
3. XIV міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих науковців "Шевченківська весна" (Київ, 2016)
4. XVII міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 2016);
5. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Івано-Франківськ, 2017);
6. Засідання наукового семінару кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Ю. С. Мішури та проф. Ю. В. Козаченка (Київ, 2017);
7. Засідання наукового семінару кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О. Г. (м. Київ, 2017);
8. Засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом проф. Єлейка Я. І. (м. Львів, 2017);

**Публікації.** За результатами дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових публікацій. З них

– 6 статей [1]–[6] у фахових виданнях, серед яких 3 статті [1], [4], [5] у наукових фахових виданнях України, одна стаття [1] з яких надрукована у журналі, англомовна версія якого включена до наукометричної бази Scopus, 2 статті [2], [3] у іноземному журналі, що включений до наукометричної бази Scopus та 1 стаття в електронному журналі [6];

– 5 тез доповідей на наукових конференціях [7] - [11].

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається з анотації, вступу, 3 розділів, які містять підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який містить 101 найменувань та додатку. Повний обсяг роботи – 184 сторінок, в тому числі 160 сторінок основного тексту.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, особистий внесок здобувача та короткий зміст роботи.

**Перший розділ** містить огляд літератури, пов'язаної з темою дисертації, та стислий опис праць, де досліджувались проблеми схожі з розглянутими в дисертаційній роботі.

У першому підрозділі **другого розділу** наведено означення та основні твердження спектральної теорії стаціонарних послідовностей.

У другому підрозділі **другого розділу** досліджено задачу інтерполяції, тобто задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_s\xi = \sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j)\xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності в точках $j \in \mathbb{Z}\setminus S$, де $M_l = \sum_{k=0}^{l}(N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1}\{M_l, M_{l+1}, \ldots, M_l + N_{l+1}\}$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_s\xi$ функціонала $A_s\xi$ має вигляд $\hat{A}_s\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\lambda})Z(d\lambda)$, де $h(e^{i\lambda})$ – спектральна характеристика оцінки. У випадку спектральної визначеності, коли спектральна щільність стаціонарної послідовності відома, знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики лінійної оцінки функціонала $A_s\xi$.

**Теорема 1.** *Нехай* $\xi(j)$ *– стаціонарна стохастична послідовність із спектральною щільністю* $f(\lambda)$ *такою, що* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda)d\lambda < \infty.$ *Середньоквадратичну похибку* $\Delta(h,f)$ *та спектральну характеристику* $h(e^{i\lambda})$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}_s\xi$ *функціонала* $A_s\xi$ *за даними спостережень стаціонарної послідовності* $\xi(j)$ *при* $j \in \mathbb{Z}\setminus S$, *де* $S = \bigcup\limits_{l=0}^{s-1}\{M_l, \ldots, M_l + N_{l+1}\}$ *можна обчислити за формулами*

$$h(e^{i\lambda}) =$$

$$\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j)e^{ij\lambda} - \left(\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} \left(B_s^{-1}a_s\right)_j e^{ij\lambda}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{im\lambda}, \tag{1}$$

$$\Delta(h;f) = \langle B_s^{-1}a_s, a_s \rangle,$$

де $a_s$ – вектор побудований з коефіцієнтів, що визначають функціонал $A_s\xi$, $a_s = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s), \vec{a}_k = (a(M_{k-1}), \ldots, a(M_{k-1}+N_k)),\ k = 1, \ldots, s,$ $B_s$ – матриця розмірності $q \times q$, $q = N_1 + N_2 + \ldots + N_s + s$,

$$B_s = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \ldots & B_{ss} \end{pmatrix},$$

де $B_{mn}$ – матриці розмірності $(N_m+1)\times(N_n+1)$, які утворені коефіцієнтами Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$

$$B_{mn}(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda)e^{-i(k-j)\lambda}d\lambda = r_{k-j}, \quad m,n = 1, \ldots, s,$$
$$k = M_{m-1}, \ldots, M_{m-1}+N_m, j = M_{n-1}, \ldots, M_{n-1}+N_n.$$

Вказаними результатами можна користуватись лише у випадку, коли відомо точний вигляд спектральної щільності. У випадку, коли задано лише клас допустимих спектральних щільностей застосовується мінімаксний метод оцінювання функціоналів.

**Означення 1.** *Для заданого класу спектральних щільностей* $D$ *спектральна щільність* $f_0(\lambda) \in D$ *називається найменш сприятливою в* $D$ *для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала* $A_s\xi$, *якщо*

$$\Delta(f_0) = \Delta(h(f_0); f_0) = \max_{f \in D}\Delta(h(f); f),$$

$h(f_0)$ – це спектральна характеристика оцінки функціонала від невідомих значень стаціонарної послідовності з щільністю $f_0$.

**Означення 2.** *Для заданого класу спектральних щільностей* $D$ *спектральна характеристика* $h^0(e^{i\lambda})$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_s\xi$ *називається мінімаксною (робастною), якщо*

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{f\in D} L_2^s(f), \quad \min_{h\in H_D}\max_{f\in D}\Delta(h;f) = \sup_{f\in D}\Delta(h^0;f).$$

**Лема 1.** *Спектральна щільність* $f_0(\lambda)\in D$ *найменш сприятлива в класі* $D$ *для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала* $A_s\xi$, *якщо коефіцієнти Фур'є функції* $f_0^{-1}(\lambda)$ *задають матрицю* $B_s^0$, *що визначає розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{f\in D} \langle B_s^{-1}a_s, a_s\rangle = \langle (B_s^0)^{-1}a_s, a_s\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ обчислюється за формулою (1) за умови, що $h(f_0)\in H_D$.

У підрозділах 2.2.3, 2.2.4 та 2.2.5 розглянуто задачі мінімаксного оцінювання функціонала $A_s\xi$, коли спектральна щільність $f(\lambda)$ належить до одного з класів допустимих спектральних щільностей

$$D_0^- = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda)d\lambda \ge P \right.\right\},$$

$$D_W = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda)\cos(w\lambda)d\lambda = r_w, w = 0,1,\ldots,W \right.\right\},$$

$$D_v^u = \left\{ f(\lambda) \left| 0 \le v(\lambda) \le f(\lambda) \le u(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda)d\lambda = P \right.\right\}.$$

У третьому підрозділі **другого розділу** досліджено задачу інтерполяції, тобто задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі оцінювання лінійного функціонала

$$A_s\xi = \sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j)\xi(j),$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ в точках $j\in \mathbb{Z}\setminus S$, де $\eta(j)$ –

стаціонарно зв’язана з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, $M_l=\sum_{k=0}^{l}(N_k+K_k)$, $N_0=K_0=0$, $S=\bigcup_{l=0}^{s-1}\{M_l,\ldots,M_l+N_{l+1}\}$. Оптимальна лінійна оцінка функціонала $A_s\xi$ має вигляд

$$\hat{A}_s\xi=\int_{-\pi}^{\pi}h(e^{i\lambda})Z_{\xi+\eta}(d\lambda).$$

**Теорема 2.** *Нехай* $\xi(j)$, $\eta(j)$ *– стаціонарні стохастичні послідовності з матрицею спектральних щільностей*

$$F(\lambda)=\begin{pmatrix} f(\lambda) & f_{\xi\eta}(\lambda)\\ f_{\eta\xi}(\lambda) & g(\lambda)\end{pmatrix}$$

такою, що виконується умова мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda<\infty. \qquad (2)$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$, $j\in Z\setminus S$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda})=\frac{A_s(e^{i\lambda})\left(f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)\right)-\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}}(B_s^{-1}R_sa_s)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}, \qquad (3)$$

$$\Delta(h;F)=\langle R_sa_s,B_s^{-1}R_sa_s\rangle+\langle Q_sa_s,a_s\rangle,$$

де $B_s,R_s,Q_s$ – матриці з елементами, що задані формулами,
$j,k\in S$,

$$B_{j,k}^{s}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{1}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda,$$

$$R_{j,k}^{s}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda,$$

$$Q_{j,k}^{s}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{f(\lambda)g(\lambda)-f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda.$$

**Наслідок 1.** *Нехай* $\xi(j)$, $\eta(j)$ *– некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності, які мають спектральні щільності* $f(\lambda)$ *і* $g(\lambda)$, *для яких виконується умова мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)} d\lambda < \infty. \tag{4}$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$, $j \in \mathrm{Z} \setminus S$, можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} - \frac{\sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} (B_s^{-1} R_s a_s)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda)+g(\lambda)}, \tag{5}$$

$$\Delta(h; f,g) = \langle R_s a_s, B_s^{-1} R_s a_s \rangle + \langle Q_s a_s, a_s \rangle,$$

де матриці $R_s$, $B_s$, $Q_s$ визначаються наступними елементами відповідно $k, j \in S$

$$R_{j,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} d\lambda,$$

$$B_{j,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)} d\lambda,$$

$$Q_{j,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} d\lambda.$$

У пункті 2.3.2 розглянуто мінімаксний підхід до задачі інтерполяції стаціонарної послідовності з шумом, що спостерігається з пропусками.

**Лема 2.** *Спектральні щільності* $f^0(\lambda), f^0_{\xi\eta}(\lambda), f^0_{\eta\xi}(\lambda), g^0(\lambda)$, *що задовольняють умову мінімальності (2), формують матрицю спектра-льних щільностей* $F^0(\lambda) \in D$, *яка є найменш сприятливою в класі* $D$ *для лінійної оптимальної інтерполяції функціонала* $A_s\xi$, *якщо коефіцієнти Фур'є функцій*

$$\frac{1}{f^0(\lambda)+f^0_{\xi\eta}(\lambda)+f^0_{\eta\xi}(\lambda)+g^0(\lambda)}, \quad \frac{f^0(\lambda)+f^0_{\xi\eta}(\lambda)}{f^0(\lambda)+f^0_{\xi\eta}(\lambda)+f^0_{\eta\xi}(\lambda)+g^0(\lambda)},$$

$$\frac{f^0(\lambda)g^0(\lambda)-f^0_{\xi\eta}(\lambda)f^0_{\eta\xi}(\lambda)}{f^0(\lambda)+f^0_{\xi\eta}(\lambda)+f^0_{\eta\xi}(\lambda)+g^0(\lambda)}$$

задають матриці $B_s^0, R_s^0, Q_s^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{F\in D}\langle R_s a, B_s^{-1}R_s a\rangle+\langle Q_s a_s, a_s\rangle=\langle R_s^0 a_s,(B_s^0)^{-1}R_s^0 a_s\rangle+\langle Q_s^0 a_s, a_s\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0=h(F^0)$ може бути обчислена за формулою (3), якщо $h(F^0)\in H_D$.

**Лема 3.** *Нехай стаціонарні послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ некорельовані. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$ та $g_0(\lambda)$, що задовольняють умову мінімальності (4), найменш сприятливі в класі $D=D_f\times D_g$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій*

$$(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}$$

задають матриці $B_s^0, R_s^0, Q_s^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g)\in D}\langle R_s a_s, B_s^{-1}R_s a_s\rangle+\langle Q_s a_s, a_s\rangle=\langle R_s^0 a_s,(B_s^0)^{-1}R_s^0 a_s\rangle+\langle Q_s^0 a_s, a_s\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0=h(f_0,g_0)$ обчислюється за формулою (5) за умови, що $h(f_0,g_0)\in H_D$.

У пунктах 2.3.3, 2.3.4 та 2.3.5 розв'язано задачі мінімаксного оцінювання функціонала $A_s\xi$ у випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам допустимих спектральних щільностей $D_f^0\times D_g^0$, $D_v^u\times D_\varepsilon$ та $D^2_{\varepsilon_1}\times D^1_{\varepsilon_2}$, де

$$D_f^0=\left\{f(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)d\lambda\le P_1\right.\right\}, \quad D_g^0=\left\{g(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\lambda)d\lambda\le P_2\right.\right\},$$

$$D_v^u=\left\{f(\lambda)\left|v(\lambda)\le f(\lambda)\le u(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)d\lambda\le P_1\right.\right\},$$
$$D_\varepsilon=\left\{g(\lambda)\left|g(\lambda)=(1-\varepsilon)g_1(\lambda)+\varepsilon w(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\lambda)d\lambda\le P_2\right.\right\},$$

$$D_{\varepsilon_1}^2=\left\{f(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\lambda)-f_1(\lambda)\right|^2d\lambda\le\varepsilon_1\right.\right\},$$
$$D_{\varepsilon_2}^1=\left\{g(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g(\lambda)-g_1(\lambda)\right|d\lambda\le\varepsilon_2\right.\right\}.$$

У четвертому пункті **другого розділу** досліджено задачу екстраполяції, тобто задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала
$$A\xi=\sum_{j=0}^{\infty}a(j)\xi(j),$$
від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ в точках $j\in\mathbb{Z}_-\setminus S=\{\ldots,-2,-1\}\setminus S$, де $\eta(j)$ – стаціонарно зв'язана з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, $S=\bigcup_{l=1}^{s}\{-M_l-N_l,-M_l-N_l+1,\ldots,-M_l\}$, $M_l=\sum_{k=0}^{l}(N_k+K_k)$, $N_0=0$, $K_0=0$. Позначимо $T=S\cup\{0,1,\ldots\}$.

**Теорема 3.** *Нехай $\xi(j)$ і $\eta(j)$ – стаціонарні послідовності з матрицею спектральних щільностей $F(\lambda)$ такою, що виконана умова мінімальності (2). Припустимо, що коефіцієнти $\{a(j),j\ge0\}$, які визначають функціонал $A\xi$, задовольняють умови*
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|a(k)\right|<\infty,\quad\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|a(k)\right|^2<\infty.$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h;f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$, $j\in\mathbb{Z}_-\setminus S$, можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda})=\frac{A(e^{i\lambda})(f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda))}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}-\frac{\sum_{k\in T}(B^{-1}Ra)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)},$$

$$\Delta(h;F)=\langle Ra,B^{-1}Ra\rangle+\langle Qa,a\rangle,$$

де вектор $a=(\vec{a}_s,\vec{a}_{s-1},\ldots,\vec{a}_1,\vec{a})$ складається з компонент $\vec{a}_k=(a(-M_k-N_k),a(-M_k-N_k+1),\ldots,a(-M_k)),k=1,2,\ldots,s,$ та вектора $\vec{a}=(a(0),a(1),\ldots)$ побудованого з коефіцієнтів, які визначають функціонал $A\xi$. $B$, $R$, $Q$ – лінійні оператори у просторі $\lambda_2$, що визначаються матрицями з елементами $k,j\in T$

$$b_{k-j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{1}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda,$$
$$r_{k-j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda,$$
$$q_{k-j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{f(\lambda)g(\lambda)-f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda.$$

Зауважимо, що якщо потрібно знайти лише прогноз стаціонарної послідовності за даними спостережень з пропусками, то вектор $a$ має вигляд $a=(0,0,\ldots,0,\vec{a})$, де перші $|S|=\sum_{k=1}^{s}(N_k+1)$ елементів рівні нулю, а останній елемент $\vec{a}=(a(0),a(1),\ldots)$ побудований з коефіцієнтів, які визначають функціонал $A\xi$.

У пунктах 2.4.3, 2.4.4 та 2.4.5 для множин допустимих спектральних щільностей $D_W\times D_0$, $D_v^u\times D_\varepsilon$ та $D_{\varepsilon_1}^1\times D_{\varepsilon_2}$ знайдено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності.

У п’ятому підрозділі **другого розділу** досліджено задачу фільтрації, тобто задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi=\sum_{j\in Z^S}a(j)\xi(-j),$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ в точках $j\in\mathbb{Z}_-\setminus S$, де $\eta(j)$ – стаціонарно зв’язана з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність,

$S=\bigcup\limits_{l=1}^{s}\{-(M_l+N_l),\ldots,-M_l\}$, $Z^S=\{1,2,\ldots\}\setminus S^+$, $S^+=\bigcup\limits_{l=1}^{s}\{M_l,\ldots,M_l+N_l\}$, $M_0=0$, $N_0=0$.

**Теорема 4.** *Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ – стаціонарно зв'язані між собою стаціонарні стохастичні послідовності з матрицею спектральних щільностей $F(\lambda)$ такою, що виконується умова мінімальності (2). Припускаємо, що коефіцієнти $\{a(j), j\in Z^S\}$, які визначають функціонал $A\xi$, задовольняють наступні умови*

$$\sum_{k\in Z^S}|a(k)|<\infty,\ \sum_{k\in Z^S}(k+1)|a(k)|^2<\infty.$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$, $j\in\mathbb{Z}_-\setminus S$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda})=\frac{A(e^{i\lambda})(f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda))}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}-\frac{\sum\limits_{k\in T}(B^{-1}Ra)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}.$$

$$\Delta(h;F)=\langle Ra,B^{-1}Ra\rangle+\langle Qa,a\rangle,$$

де вектор $a$ має вигляд $a=(\vec{0}_0,\vec{a}_1,\vec{0}_1,\vec{a}_2,\vec{0}_2,\ldots,\vec{a}_i,\vec{0}_i,\ldots,\vec{a}_s,\vec{0}_s,\vec{a}_{s+1})$, де $\vec{0}_0$ складається з $|S|+1$ нулів, $|S|=\sum\limits_{k=1}^{s}(N_k+1)$ – кількість пропусків, вектори $\vec{0}_i$, $i=1,2,\ldots,s$, складаються з $N_i+1$ нулів, інші вектори побудовані з коефіцієнтів, що визначають функціонал $A\xi$

$$\vec{a}_1=(a(1),\ldots,a(M_1-1)),$$
$$\vec{a}_i=(a(M_{i-1}+N_{i-1}+1),\ldots,a(M_i-1)),\quad i=2,\ldots,s,$$
$$\vec{a}_{s+1}=(a(M_s+N_s+1),a(M_s+N_s+2),\ldots).$$

$B$, $R$, $Q$ – лінійні оператори у просторі $\ell_2$, що визначаються матрицями з елементами, $k,j\in T$,

$$b_{k-j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{1}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda,$$
$$r_{k-j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k+j)\lambda}\frac{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda,$$
$$q_{k-j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(k-j)\lambda}\frac{f(\lambda)g(\lambda)-f_{\xi\eta}(\lambda)f_{\eta\xi}(\lambda)}{f(\lambda)+f_{\xi\eta}(\lambda)+f_{\eta\xi}(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda.$$

У підрозділах 2.5.3, 2.5.4 та 2.4.5 розв'язано задачі мінімаксного (робастного) оцінювання лінійного функціонала $A\xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам допустимих щільностей $D_{\varepsilon_1}\times D_{\varepsilon_2}$, $D_{\varepsilon}^{1}\times D_{v}^{u}$, $D_{\varepsilon}^{2}\times D_{v}^{u}$.

У першому підрозділі **третього розділу** наведено означення стаціонарного процесу та основні твердження спектральної теорії стаціонарних процесів.

У другому підрозділі **третього розділу** досліджено задачу інтерполяції, тобто задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_s\xi=\sum_{l=1}^{s}\int_{-M_l-N_l}^{-M_l}a(t)\xi(t)dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t)+\eta(t)$ при $t\in \mathbb{R}\setminus S$, де $\eta(t)$ – некорельований з $\xi(t)$ стаціонарний процес, $S=\bigcup_{l=1}^{s}[-M_l-N_l,\ldots,-M_l]$, $M_l=\sum_{k=0}^{l}(N_k+K_k)$, $N_0=0$, $K_0=0$. Оптимальна лінійна оцінка функціонала $A_s\xi$ має вигляд

$$\hat{A}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}h(e^{i\lambda})(Z_{\xi}(d\lambda)+Z_{\eta}(d\lambda)).$$

**Теорема 5.** *Нехай* $\xi(t)$, $\eta(t)$ *– некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності* $f(\lambda)$ *і* $g(\lambda)$, *для яких виконується умова мінімальності*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\gamma(\lambda)|^2}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda<\infty,\quad \gamma(\lambda)=\sum_{l=1}^{s}\int_{-M_l-N_l}^{-M_l}\alpha(t)e^{it\lambda}dt, \tag{6}$$

де $\gamma(\lambda)$ – деяка ненульова функція експоненціального типу. Спектра-льну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h;f,g)$ оцінки функціонала $A_s\xi$ можна обчислити за формулами

$$\begin{gathered}h(e^{i\lambda})=A_s(e^{i\lambda})\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}-\frac{C_s(e^{i\lambda})}{f(\lambda)+g(\lambda)},\\ C_s(e^{i\lambda})=\sum_{l=1}^{s}\int_{-M_l-N_l}^{-M_l}(B_s^{-1}R_s a)(t)e^{it\lambda}dt,\quad t\in S,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\Delta(h;f,g)=\langle R_s a,B_s^{-1}R_s a\rangle+\langle Q_s a,a\rangle,$$

де $B_s$, $R_s$, $Q_s$ – лінійні оператори в просторі $L_2(S)$, що задаються рівностями

$$(B_s x)(t) \quad = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{s}\int_{-M_l-N_l}^{-M_l} x(u)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)}\,\frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)}\,d\lambda du,$$

$$(R_s x)(t) \quad = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{s}\int_{-M_l-N_l}^{-M_l} x(u)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)}\,\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}\,d\lambda du,$$

$$(Q_s x)(t) \quad = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{s}\int_{-M_l-N_l}^{-M_l} x(u)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)}\,\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}\,d\lambda du,$$

$$x(t)\in L_2(S), \quad t\in S.$$

У пункті 3.2.2 розглянуто мінімаксний (робастний) метод оцінювання функціонала у випадку спектральної невизначеності за умови, що задано клас допустимих спектральних щільностей.

**Лема 4.** *Спектральні щільності* $f_0(\lambda)\in D_f$, $g_0(\lambda)\in D_g$, *що задовольняють умову мінімальності (6), найменш сприятливі в класі* $D = D_f\times D_g$ *для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала* $A_s\xi$, *якщо коефіцієнти Фур'є функцій*

$$(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}, \quad f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}$$

задають оператори $B_s^0, R_s^0, Q_s^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g}\langle R_s a, B_s^{-1}R_s a\rangle + \langle Q_s a, a\rangle = \langle R_s^0 a, (B_s^0)^{-1}R_s^0 a\rangle + \langle Q_s^0 a, a\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за формулою (7) за умови, що $h(f_0, g_0)\in H_D$.

У пунктах 3.2.3 та 3.2.4 розв'язано задачі мінімаксного оцінювання функціонала $A_s\xi$ у випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам допустимих спектральних щільностей $D_0\times D_\varepsilon$ та $D_{\varepsilon_1}\times D_{\varepsilon_2}^2$, де

$$D_0 = \left\{ f(\lambda) \,\middle|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\lambda \le P_1 \right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \,\middle|\, g(\lambda) = (1-\varepsilon)g_1(\lambda)+\varepsilon w(\lambda), \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)d\lambda \le P_2 \right\},$$

$$D_{\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda) \middle| f(\lambda) = (1-\varepsilon_1) f_1(\lambda) + \varepsilon_1 w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \le P_1 \right\},$$
$$D_{\varepsilon_2}^2 = \left\{ g(\lambda) \middle| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda \le \varepsilon_2 \right\}.$$

У третьому підрозділі **третього розділу** розв’язано задачу екстраполяції, тобто задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \int_0^{\infty} a(t)\xi(t)dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t)+\eta(t)$ при $t \in \mathbb{R}^- \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^{s} [-M_l - N_l, \ldots, -M_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^{l} (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$. Процес $\eta(t)$ – некорельований з $\xi(t)$ стаціонарний процес. Позначимо $T = S \cup [0, +\infty)$.

**Теорема 6.** *Нехай* $\xi(t)$, $\eta(t)$ *– некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності* $f(\lambda)$ *і* $g(\lambda)$, *для яких виконується умова мінімальності (6), де* $\gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} \alpha(t) e^{it\lambda} dt$. *Припустимо, що функція* $a(t)$, *яка визначає функціонал* $A\xi$, *задовольняє умови*

$$\int_0^{\infty} |a(t)| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} t |a(t)|^2 dt < \infty.$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оцінки функціонала $A\xi$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)},$$
$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^{s} \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (B^{-1}Ra)(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} (B^{-1}Ra)(t) e^{it\lambda} dt,$$

$$\Delta(h; f, g) = \langle Ra, B^{-1}Ra \rangle + \langle Qa, a \rangle,$$

де функція $a(t)$, має вигляд $a(t) = 0, t \in S, a(t) = a(t), t \ge 0$, а $B$, $R$, $Q$ – лінійні оператори в просторі $L_2(T)$, що задаються рівностями

$$(Bx)(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{s}\int_{-M_l-N_l}^{-M_l}x(u)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(u-t)}}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda du$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}x(u)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(u-t)}}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda du, \tag{8}$$

$$(Rx)(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{s}\int_{-M_l-N_l}^{-M_l}x(u)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(u-t)}f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda du$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}x(u)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(u-t)}f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda du,$$

$$(Qx)(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{s}\int_{-M_l-N_l}^{-M_l}x(u)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(u-t)}f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda du$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}x(u)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(u-t)}f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}d\lambda du, \tag{9}$$

$x(t)\in L_2(T),\quad t\in T.$

У пунктах 3.3.3 та 3.3.4 розв'язано задачі мінімаксного оцінювання функціонала $A\xi$ у випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам допустимих спектральних щільностей $D_0\times D_\varepsilon^1$ та $D_v^u\times D_0$, де

$$D_\varepsilon^1=\left\{g(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(\lambda)-g_1(\lambda)\right|d\lambda\le\varepsilon\right.\right\},$$
$$D_v^u=\left\{f(\lambda)\left|v(\lambda)\le f(\lambda)\le u(\lambda),\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)d\lambda\le P_1\right.\right\}.$$

У четвертому підрозділі **третього розділу** розв'язано задачу фільтрації, а саме задачу оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi=\int_{R^s}a(t)\xi(-t)dt,$$

від невідомих значень стаціонарного процесу $\xi(t)$ за даними спостережень процесу $\xi(t)+\eta(t)$ при $t \in \mathrm{R}^- \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^{s}[-M_l - N_l, \ldots, -M_l]$, $R^s = [0, \infty) \setminus S^+$, $S^+ = \bigcup_{l=1}^{s}[M_l, \ldots, M_l + N_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^{l}(N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$.

**Теорема 7.** *Нехай* $\xi(t)$, $\eta(t)$ *– некорельовані стаціонарні стохастичні процеси, які мають спектральні щільності* $f(\lambda)$ *і* $g(\lambda)$ *такі, що виконується умова мінімальності (6), де* $\gamma(\lambda) = \int_{R^s} \alpha(t) e^{it\lambda} dt$. *Нехай функція* $a(t)$, *яка визначає функціонал* $A\xi$, *задовольняє умови*

$$\int_{R^s} |a(t)| dt < \infty, \quad \int_{R^s} t|a(t)|^2 dt < \infty. \tag{10}$$

Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(h; f, g)$ оцінки функціонала $A\xi$ можна обчислити за формулами

$$h(e^{i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} - \frac{C(e^{i\lambda})}{f(\lambda)+g(\lambda)},$$

$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^{s} \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} (B^{-1}Ra)(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^{\infty} (B^{-1}Ra)(t) e^{it\lambda} dt,$$

$$\Delta(h; f, g) = \langle Ra, B^{-1}Ra \rangle + \langle Qa, a \rangle,$$

де $a(t)$ функція виду $a(t) = 0$, $t \in S$, $a(t) = a(t)$, $t \in R^s$, $a(t) = 0$, $t \in S^+$. $B$, $Q$, $R$ – лінійні оператори в просторі $L_2(T)$, що визначаються рівностями (8), (9) та формулою

$$(Rx)(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{s} \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} x(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda(u+t)} f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} d\lambda du$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} x(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(u+t)} f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} d\lambda du, \quad x(t) \in L_2(T), \quad t \in T.$$

У пунктах 2.3.3 та 2.3.4 розв'язано задачі мінімаксного оцінювання функціонала $A\xi$ у випадку, коли спектральні щільності належать класам допустимих щільностей $D^1_{\varepsilon_1} \times D^2_{\varepsilon_2}$ та $D_{\varepsilon_1} \times D^1_{\varepsilon_2}$.

**Подяка. Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Моклячуку Михайлу Павловичу за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу та підтримку в роботі.**

## ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню задач оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінюваня функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками. Задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації сформульовано та розв’язано в умовах спектральної визначеності та спектральної невизначеності. У випадку спектральної невизначеності, коли задано явний вигляд спектральних щільностей послідовностей та процесів, отримано формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оцінок лінійних функціоналів. У випадку спектральної невизначеності, коли точний вигляд спектральних щільностей невідомий, але задано множини їх допустимих значень, застосовано мінімаксний (робастний) метод оцінювання лінійних функціоналів та встановлено рівняння для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик.

У дисертації отримано наступні нові наукові результати:

– знайдено формули, що дозволяють обчислити значення середньо-квадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками в умовах спектральної визначеності;
– сформульовано та запропоновано розв’язки задач мінімаксної (робастної) інтерполяції, екстраполяції та фільтрації функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей з пропусками, отримано співвідношення, яким задовольняють найменш сприятливі спектральні щільності та формули, які визначають мінімаксні спектральні характеристики;
– наведено формули для обчислення спектральних характеристик та середньоквадратичних похибок оптимальних оцінок лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних процесів за

спостереженнями з пропусками;

– сформульовано та наведено розв'язки задач мінімаксної (робастної) інтерполяції, екстраполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками, виведено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики.

Сформульовані в роботі результати досліджень мають теоретичне значення при вивченні теорії випадкових процесів та можуть бути застосовані при розв'язанні задач теорії часових рядів, теорії передачі інформації, фінансової математики. Приклади використання отриманих результатів оцінювання наведено для конкретних функціоналів з вказаними спектральними щільностями.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ


1. Моклячук М. П. Інтерполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2015. — Вип. 93. — С. 142–155. (english translation in Theory Probability and Mathematical Statistics — 2016. — Vol. 93. — P. 153–167.)
2. Moklyachuk M. Interpolation Problem for Stationary Sequences with Missing Observations/ M. Moklyachuk, M. Sidei// Statistics, Optimization & Information Computing. — 2015. — Vol. 3, No. 3.— P. 259–275.
3. Moklyachuk M. Filtering problem for stationary sequences with missing observations/ M. Moklyachuk, M.Sidei// Statistics, Optimization & Information Computing. — 2016. — Vol. 4, No. 4. — P. 308–325.
4. Moklyachuk M. P. Extrapolation problem for functionals of stationary processes with missing observations/ M. P. Moklyachuk, M. I. Sidei// Буковинський математичний журнал. — 2016.— Том 4, № 1-2. — С. 122–129.
5. Moklyachuk M. P. Interpolation of functionals of stationary processes with missing observations/ M. P. Moklyachuk, M. I.Sidei// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2016. — № 1. — С. 24–30.
6. Moklyachuk M. Filtering problem for functionals of stationary processes with missing observations/ M. Moklyachuk, M. Sidei// Communication in

Optimization Theory. — 2016. — Article ID 21. — 18 p. URL: http://cot.mathres.org/issues/COT201621.pdf

7. Moklyachuk M. P. Interpolation problem for stationary sequences with missing observations/ M. P. Moklyachuk, M. I. Sidei// International conference "Stochastic Processes in Abstract Spaces", October 14-16, 2015, Kyiv, Ukraine (program and abstracts) — 2015. — P. 39.
8. Моклячук М. П. Задача інтерполяції стаціонарних послідовностей/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Івано - Франківськ 24-27 лютого 2016 р.(тези доповідей) — 2016. — С. 40–41.
9. Сідей М. І. Екстраполяція стаціонарних послідовностей за спостереженнями з пропусками/ М. І. Сідей// XIV міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих науковців "Шевченківська весна", 6-8 квітня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. — 2016. — С. 68–72.
10. Моклячук М. П. Оцінювання невідомих значень стохастичної стаціонарної послідовності за спостереженнями із пропусками/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19-20 травня, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики.— К.: НТУУ "КПІ", 2016. — С. 113–117.
11. Моклячук М. П. Задача фільтрації стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками/ М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Івано - Франківськ, 22-25 лютого 2017 р.(тези доповідей) — 2017. — С. 41–42.

## АНОТАЦІЯ

**Сідей М. І. Оцінки функціоналів від стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2017.

У дисертаційній роботі досліджуються задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів за спостереженнями з пропусками у випадках спектральної визначеності та спектральної невизначеності.

Знайдено спектральні характеристики та значення середньоквадратичних похибок оцінок невідомих значень функціоналів від стаціонарних послідовностей та процесів з пропусками у тому випадку, коли спектральна структура таких процесів та послідовностей відома. У тому випадку, коли задано лише допустимі множини спектральних щільностей, знайдено формули та співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок.

*Ключові слова*: стаціонарна стохастична послідовність, стаціонарний стохастичний процес, оптимальна оцінка, спектральна характеристика, середньоквадратична похибка, мінімаксна (робастна) оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

## АННОТАЦИЯ

**Сидей М. И. Оценки функционалов от стационарных процессов по наблюдениям с пропусками.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко МОН Украины, Киев, 2017.

В диссертационной работе исследуются задачи интерполяции, экстраполяции и фильтрации линейных функционалов от неизвестных значений стационарных последовательностей и процессов по наблюдениям с пропусками в случаях спектральной определенности и спектральной неопределенности.

Найдено спектральные характеристики и значения среднеквадратических ошибок оценок неизвестных значений функционалов от стационарных последовательностей и процессов с пропусками в том случае, когда спектральная структура таких процессов и последовательностей известна. В том случае, когда задано лишь допустимые множества спектральных плотностей, найдены формулы и соотношения, которые определяют наименее благоприятные спектральные плотности и минимаксне (робастные) спектральные характеристики оптимальных оценок.

*Ключевые слова*: стационарная последовательность, стационарный процесс, оптимальная оценка, спектральная характеристика, среднеквадратическая ошибка, минимаксная (робастная) оценка, наименее благоприятная спектральная плотность, минимаксная спектральная характеристика.

## ABSTRACT

**Sidei M.I. Estimates of functionals from stationary processes with missing observations.**– Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.05 – Probability theory and mathematical statistics. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, MES of Ukraine, Kyiv, 2017.

The work is devoted to investigation of problems of the mean-square optimal linear estimation of functionals of unknown values of stationary sequences and processes with missing values. Problems of interpolation, extrapolation and filtering are considered in two cases, in the case of spectral certainty, when spectral densities of the observed sequences and processes are exactly known, and in the case of spectral uncertainty, when full information on densities is unavailable but the sets of admissible spectral densities are given. In the case of spectral certainty, formulas that determine spectral characteristics and values of mean-square errors of estimates of functionals are obtained. These results can be used in the theory of random processes and optimization theory, but in practice the information on spectral densities is not complete and this method is not effective. If it is possible to describe sets of admissible values of densities, one can use the minimax robust method of estimating. This method is to find the estimate that minimizes the maximum values of the mean-square error for all densities from the certain class of admissible densities. For given classes of admissible spectral densities formulas and relations that determine the least favorable spectral densities and the minimax characteristics of optimal estimates are found.

The main results obtained in the work are the following:

– formulas for calculating spectral characteristics and values of mean-square errors of the optimal estimates of the linear functionals which depend on unknown values of stationary sequences with missing values are obtained under condition of spectral certainty;

– problems of minimax interpolation, extrapolation and filtering of functionals of unknown values of stationary sequences with missing values are solved under condition of spectral uncertainty, formulas and relations that determine the least favorable spectral densities and the minimax characteristics of optimal estimates of functionals are proposed;

– formulas which allow to calculate spectral characteristics and values of mean-square errors of the optimal estimates of the linear functionals which depend on unknown values of stationary processes with missing values are obtained under the condition of spectral certainty;

– problems of minimax interpolation, extrapolation and filtering of functionals of the stationary processes with missing values are stated and solved in the case of spectral uncertainty, formulas and relations for finding the least favorable spectral densities and the minimax characteristics of optimal estimates of functionals are derived.

Results described in PhD Thesis have a theoretical significance for the random processes theory and practical application to the problems of time series, signal processing, econometrics.

*Key words*: stationary sequence with missing observations, stationary process with missing observations, optimal estimate, spectral characteristic, mean-square error, minimax (robust) estimate, least favorable spectral density, minimax spectral characteristic.