КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСАШЕВЧЕНКА
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра прикладної статистики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю124 Системний аналіз

на тему:

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З НЕТОЧНО ЗАДАНИМИ ДРОБОВО-ЛІНІЙНИМИ ЦІЛЬОВИМИ ФУНКЦІЯМИ

Виконав студент 4-го курсу
Кубічка Максим Андрійович
____
(підпис)

Науковий керівник:
доктор фіз.-мат. наук, професор
Семенова Наталія Володимирівна
____
(підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____________
(підпис)

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри прикладної статистики
«_05_»______червня______2023 р.,
Протокол №_11_
Завідувач кафедри
док. фіз.-наук І.В.Розора _____________
(підпис)

Київ– 2023

РЕФЕРАТ

Випускна кваліфікаційна робота бакалавра на тему “Розв’язання задач цілочислової оптимізації з неточно заданими дробово-лінійними цільовими функціями”. 45 с., 6 рис., 1 табл., 29 джерел.

АЛГОРИТМИ, ДРОБОВО-ЛІНІЙНА ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ, ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, НЕОДНОЗНАЧНО ЗАДАНІ ДАНІ, ЕКСТРЕМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ, РЕНТАБЕЛЬНІСТЬ ВИРОБНИЦТВА.

Об’єкт дослідження – задачі цілочислової оптимізації з неточно заданими даними.

Мета роботи – розробка і обґрунтування нових математичних моделей і алгоритмів розв’язання задач дробово-лінійної оптимізації за умов неоднозначно заданих даних цільової функції.

Методи дослідження – математичне моделювання, теорія і методи неперервної і цілочислової оптимізації, аналіз даних.

У процесі виконання роботи розроблено математичні моделі та досліджено нові та модифіковано існуючі алгоритми цілочислового дробово-лінійного програмування, створено відповідні програмні засоби для розв’язання задачі цілочислової оптимізації з множинно заданими векторами дробово-лінійної цільової функції, яка має багато практичних застосувань.

Результати роботи можуть бути використані у різних галузях, включаючи фінансову діяльність корпорацій, банків, проєктування та розміщення об'єктів, планування експериментів, керування процесом обробки даних та ін., загалом у сферах, де виникають проблеми, які враховують невизначеність вхідних даних.

ЗМІСТ

ВСТУП

Проблема математичного моделювання економічних, технологічних і соціальних процесів звичайно пов’язана з наявністю неточності і некоректності початкової інформації, що значно ускладнює процес її дослідження та розв’язання оптимізаційних задач, які описують процеси, що моделюються.

Проблема розробки та дослідження моделей та методів розв’язування задач цілочислового програмування з неточно заданою інформацією актуальна як в теоретичному, так і в прикладному відношенні. Вхідні дані таких моделей можуть бути неоднозначно задані, випадкові, керовані та ін. [1].

Задачі оптимізації з дробово-лінійними функціями критеріїв представляють значний інтерес, оскільки вони моделюють відносні показники якості. Дослідження таких задач є актуальними, адже дробово-лінійні функції мають широкий діапазон застосувань у задачах оптимізації деяких відносних показників якості, таких, як собівартість, рентабельність, продуктивність, трудомісткість тощо. Моделі, що використовують такі критерії, відображають тенденції постійного зниження рівня собівартості з розрахунку на одиницю продукції і підвищення якісних показників виробництва при збільшенні масштабів виробництва. [2-4] Оцінки параметрів моделей, що описують різноманітні об’єкти та процеси за умов невизначеності, часто задаються множинами різної структури. Представлені результати ґрунтуються на множинно заданих моделях опису невизначеності, які дозволяють врахувати як статистичні дані, так і будь-яку апріорну інформацію про неточність і невизначеність даних, включаючи експертну інформацію про систематичні помилки, похибки округлення, дискретизації.

РОЗДІЛ 1

ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНИМИ ЦІЛЬОВИМИ ФУНКЦІЯМИ

Важливими є задачі цілочислового програмування, в яких цільові функції є дробово-лінійними, тобто є відношенням двох лінійних функцій і мають вигляд $f(x) = \dfrac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}$, де α, β – скалярні константи. Отже, запишемо задачу дробово-лінійної оптимізації у такому вигляді:

$$\max \left\{ \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \middle| x \in X \right\},$$

де $X = S \cap Z^n, S = \left\{ x \in R^n \middle| Ax \le b, x \ge 0, b \in R^m \right\}$.

Тут $R^n -$ n- вимірний дійсний простір, $Z^n -$ простір цілочислових векторів із R^n, $c, d \in R^n$, матриця $A \in R^{m \times n}$. Зазвичай припускають, що задача дробово-лінійного програмування сформульована коректно, якщо знаменник $d^T x + \beta$ її цільової функції є скрізь додатним на допустимій області *X*.

Зауважимо, що задача лінійного програмування є частковим випадком задачі дробово-лінійної оптимізації, яка отримується з останньої, коли вектор *d* в знаменнику дорівнює нулю.

Розглянемо задачі дробово-лінійного програмування на допустимій множині S.

Задачі дробово-лінійного програмування відносяться до класу задач математичного програмування, де обмеженнями є лінійні функції, а цільова функція − відношення двох лінійних або афінних функцій. Цей розділ математичного програмування був започаткований угорським математиком Мартосом у 1960 році. Такі оптимізаційні задачі є предметом широкого інтересу науковців, вони мають застосування в різних сферах, таких як дослідження операцій, бази даних, інженерія, комбінаторна оптимізація, економіка тощо. У літературі для різних типів дробового програмування є багато різних видів досліджень; деякі з них мають справу з теорією, а деякі з них стосуються методів розв'язання і застосування. Існує багато методів, які було запропоновано для розв'язання задач дробово-лінійного програмування, серед них можна виділити три основні групи методів.

Пряме розв'язання: розглядається задача у початковій формі без зміни ні цільової функції, ні множини обмежень. Цей прийом зацікавив багатьох дослідників, серед них Swarup [5, 6], Gimore and Gomory [7], Martos [8], Sharma та ін. [9] and Cambini and Martein [10].

Параметричний підхід: на відміну від прямого розв'язання, будується задача зі спрощеною метою цільова функція, яка є лінійною комбінацією чисельника та знаменника через параметр без зміни множини обмежень. Вперше його ідентифікували Ісбелл і Мерлоу [11], потім узагальнили в (1967) Дінкельбах [12] для нелінійних дробових задач.

Розв'язання еквівалентної оптимізаційної задачі: заміна змінних дозволяє спростити задачу, потім розв'язування еквівалентної задачі за добре відомими алгоритмами. Ця методика була введена спочатку Чарнсом і Купером [13], а пізніше розроблено Бітрандом та ін. [14], Бабул Хасан та ін. [15], Саха та ін. [16].

Дробово-лінійні цільові функції (або критерії-відношення) часто зустрічаються, зокрема, в галузі фінансової діяльності, що ілюструють наступні приклади [2, 3]:

1) планування фінансової діяльності корпорацій, де потрібно мінімізувати відношення боргу до власних коштів; максимізувати окупність

інвестицій; максимізувати випуск продукції на одного працюючого; мінімізувати відношення фактичних витрат до нормальних;

2) керування статтями банківського балансу, де мінімізується відношення ризикованих вкладень до капіталу; максимізується відношення реального капіталу до необхідного; мінімізується відношення закладних на житло до загальної суми закладних та ін.

Звичайно, дробово-лінійні цільові функції зустрічаються і в багатьох інших галузях. Розглянемо приклад, що стосується залізничного транспорту. Замість максимізації доходу від деякого одиничного рейсу доцільніше максимізувати відношення доходу до тривалості рейсу. У галузі водних ресурсів, наприклад, можна мінімізувати підвищення температури води в річці, що відбувається за рахунок охолодження енергетичного обладнання в річковому басейні. Метою тоді буде мінімізація відношення енергії, що розсіюється, до потоку. В галузі охорони здоров'я критеріями можуть бути відношення витрат до числа лікарняних ліжок, числа санітарок до числа лікарів, числа лікарів до числа хворих. При плануванні університетської освіти важливим є відношення кількості студентів до кількості викладачів, відношення тих, що мають звання, до тих хто їх не має серед професорсько-викладацького складу та інші.

Модель дробово-лінійного програмування спочатку була розроблена для визначення двокритерійної (двоцільової) задачі лінійного програмування. У багатьох задачах, таких як задача керування запасами, задача графіків доставки тощо, оптимізація відношення двох функцій забезпечує більше розуміння ситуації, ніж оптимізація чисельника та знаменника окремо. Тому максимізація відношення розглядається як одночасна максимізація чисельника та мінімізація знаменника, його розв'язок з урахуванням одного розв'язку з кількох оптимальних за Парето розв'язків двокритерійної моделі. У повсякденних життєвих ситуаціях пов’язані проблеми, іноді політичні, можуть зіткнутися з перевіркою відношень між фактичними витратами та стандартними витратами, запаси та продажі тощо, де і чисельник, і знаменник є лінійними. Для компромісу між простотою та адекватністю моделі реального життя, дробове програмування забезпечує більшу точність і водночас виграє і уникає перевантаження розглянутої моделі.

У цій роботі досліджено задачі дробово-лінійного програмування з цільовою функцією, вхідні дані якої не задаються точно. Досліджено задачі цілочислової оптимізації за умов неоднозначно заданих коефіцієнтів цільової функції, проаналізовано труднощі, що виникають при розв’язанні задач з коефіцієнтами, заданими множинами їхніх можливих значень. Описано множини невизначеності вхідних даних, запропоновано і проаналізовано різні підходи до розв’язання таких задач. Запропоновано та обґрунтовано алгоритми знаходження розв’язків задачі цілочислової оптимізації з неоднозначно заданими коефіцієнтами дробово-лінійної цільової функції за принципами абсолютно гарантованого результату (песимістичною стратегією) та за оптимістичною стратегією.

1.1 Властивості дробово-лінійних функцій

Розглянемо задачу дробово-лінійної оптимізації такого вигляду

$$\max f(x) = \left\{ \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \mid x \in S \right\}, \text{ де } S = \left\{ x \in R^n \middle| Ax \le b, x \ge 0, b \in R^m \right\}, \quad (1.1)$$

у якій знаменник $d^T x + \beta$ цільової функції додатний всюди на допустимій множині S.

Лема 1.1. [2-4]. Цільова функція $f(x)$ одночасно є псевдоопуклою і псевдоугнутою.

Властивості цільової функції

1. Оскільки цільова функція $f(x)$ задачі (1.1) водночас є псевдоопуклою і псевдоугнутою, то вона також строго квазіопукла і строго квазіугнута відповідно.

2. Оскільки $f(x)$ неперервна, квазіопукла та квазіугнута, то принаймні один оптимальний розв'язок задачі (1.1) досягається у крайній точці многогранника S

3. Якщо $\nabla f(x) = 0$, тобто градієнт цільової функції в точці x дорівнює 0 і оскільки $f(x)$ є водночас псевдоопуклою і псевдоугнутою, то x є глобальним оптимумом $f(x)$.

Лема 1.2. [16]. Задачу дробово-лінійної оптимізації можна записати у наступному еквівалентному вигляді задачі лінійної оптимізації

$\min\left\{(c^1)^T x + \alpha' \mid Ax \le b, x \ge 0\right\}$, де $c^1 = c - \tilde{z}d$, $\alpha' = \alpha - \tilde{z}\beta$,

$\tilde{z} = \dfrac{c^T \tilde{x} + \alpha}{d^T \tilde{x} + \beta}$ є верхньою межею оптимального значення цільової функції, а $x^{\sim}$ є заданим строго допустимим розв'язком (1.1).

Зазначимо, що у задачі дробово-лінійної оптимізації поверхні рівня цільової функції лінійні. Щоб продемонструвати це, розглянемо довільну лінію рівня, що відповідає деякому значенню $\bar{z}$ цільової функції $\bar{z} = \dfrac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}$. Помножимо обидві частини цього рівняння на знаменник $d^T x + \beta$ і одержуємо наступне рівняння $c^T x + \alpha = \bar{z}(d^T x + \beta)$, звідки випливає, що: $\left(c - \bar{z}d\right)^T x = \bar{z}\beta - \alpha$

Отже, отримали лінійне рівняння лінії рівня цієї цільової функції, яке відповідає її значенню $\bar{z}$.

Оскільки $\bar{z}$ було обрано довільно, то зрозуміло, що будь-яка лінія рівня дробово-лінійної цільової функції є лінійною на S за умови, що

$d^T x + \beta > 0 \; \forall x \in S.$

Справедлива теорема.

Теорема 1.1. [4]. Якщо задача дробово-лінійної оптимізації (1.1) має оптимальний розв'язок, то принаймні одна крайня точка з допустимої множини S буде оптимальною.

Незважаючи на те, що лінії рівня цільових функцій лінійні, вони не паралельні між собою (при $c \neq 0, d \neq 0,$ а також $c \neq wd$ для всіх $w \in R$) на відміну від задач класичного лінійного програмування. Замість цього вони розходяться як промені від множини обертання розмірності $n-2$.

Множина обертання – це множина усіх точок перетину нульових ліній рівня чисельника з нульовою лінією рівня знаменника. В просторі R^2 множина обертання називається точкою обертання, а в R^3 – віссю обертання. Математично отже, множина обертань – це множина точок, які одночасно

задовольняють два лінійні рівняння $\begin{array}{l} c^T x = -\alpha, \\ d^T x = -\beta. \end{array}$

Для подання геометричної інтерпретації різних задач дробово-лінійної оптимізації, розглянемо наступні приклади.

Приклад 1. Розглянемо таку дробово-лінійну задачу

$$\max \left\{ \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} = z \right\}$$

за умов $\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$

Допустима множина цієї задачі містить чотири крайні точки.

$x^1 = (2;0) \; z(x^1) = 1/9,$

$x^2 = (3;0) \; z(x^2) = 2/14,$

$x^3 = (3;3)\ z(x^3) = 5/17,\ \ x^4 = (0;3)\ z(x^4) = 1.$

На рисунку 1 вказані відповідні цим точкам значення цільової функції

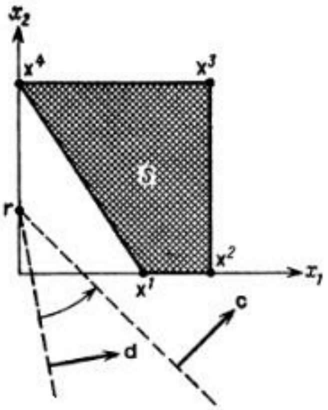


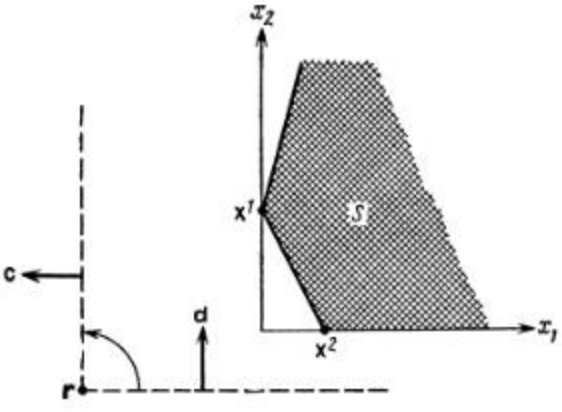
Рис. 1. Ілюстрація до прикладу 1

Зауважимо, що штриховими лініями відзначені нульові лінії рівня чисельника і знаменника, точка обертання *r* має координати (0,1). Круглою стрілкою вказано напрямок зростання дробово-лінійної цільової функції. Таким чином, рухаючись проти годинникової стрілки, бачимо, що оптимальною є точка x^4.

Приклад 2. Розглянемо задачу дробово-лінійного програмування

$$\max\left\{\frac{-x_1 - 3}{x_2 + 1} = z\right\},$$

$$\text{при}\quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ -4x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$



$x^1 = (0;2)$

$x^2 = (1;0)$

$r = (-3;-1)$

2 Рис. 2. Ілюстрація до прикладу 2

Допустима область цієї задачі необмежена. Проводячи обертання лінії рівня проти годинникової стрілки навколо точки r, спостерігаємо неперервне збільшення її значення z у міру руху вздовж необмеженого ребра, що виходить з точки x^1. Однак оптимальне (максимальне) значення r цільової функції обмежене. Точна верхня грань $z = -1/4$ ніколи не досягається.

Припустимо тепер, що ми хочемо не максимізувати, а мінімізувати цільову функцію. Зробивши обертання по часовій стрілці навколо точки r, спостерігаємо неперервне зменшення значення r по мірі руху вздовж необмеженого ребра, що виходить з точки x^2. Однак у цьому випадку оптимальне (мінімальне) значення z необмежено.

Приклад 3. Розглянемо тривимірну задачу дробово-лінійної оптимізації

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{x_1 - x_2}{x_2 - 4}\right. & \left. = z\right\} \\ \text{прн} \quad x_1 & \leqq 8, \\ x_2 & \leqq 2, \\ x_3 & \leqq 2, \\ x_1, x_2, x_3 & \geqq 0. \end{aligned}$$

Для того, щоб знаменник був додатним на множині S, помножимо чисельник і знаменник на -1. Тепер цільова функція набуває наступного вигляду:

$$\max\left\{\frac{-x_1 + x_2}{-x_2 + 4} = z\right\}.$$

Зображуючи цю задачу з векторами $c = (-1,1,0)$ та $d = (0,-1,0)$, отримуємо рис.3. У цьому прикладі вісь обертання – це множина $\{x \in R^3 \mid x_1 = x_2 = 4\}$. Оптимальною множиною тут буде $\gamma = (x_1, x_2)$, а оптимальне значення критерію $z^* = 1$.

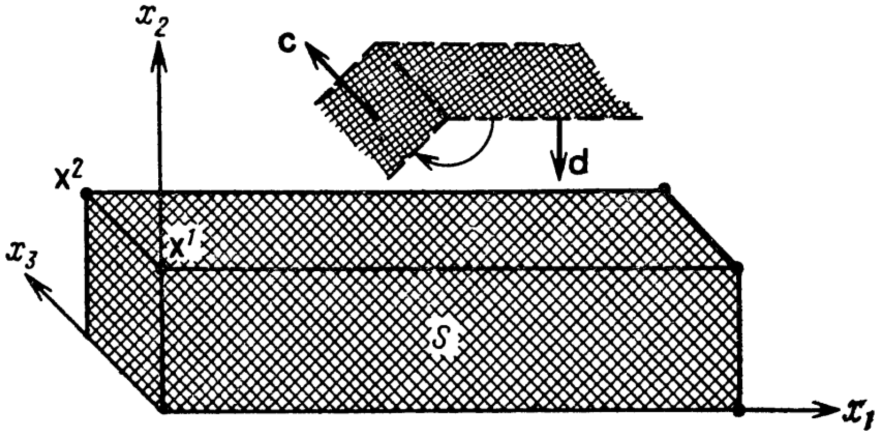


Рис. 3. Ілюстрація до прикладу3

1.2 Метод перетворення змінних

У цьому методі розв'язання дробово-лінійної задачі, як зазвичай, передбачається, що $d^T x + \beta' > 0 \quad \forall x \in S$.

Зробимо заміну змінних

$$\rho = \frac{1}{d^T \mathrm{x} + \beta'}$$

після цього цільова функція набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i x_i \rho) + \alpha\rho.$$

Покладемо

$$y_i = x_i \rho \quad \text{для всіх} \quad i,$$

Отже, задача дробово-лінійної оптимізації набуває такого вигляду:

$$\max\{c^T y + \alpha\rho\}$$

$$\text{за умов} \qquad \frac{Ay}{\rho} = \leqq b,$$

$$(\mathrm{d}^T x + \beta)\rho = 1,$$
$$0 \leqq \mathrm{y} \in R^n, 0 \leqq \rho \in R.$$

Після елементарних перетворень отримуємо формулювання задачі у нових змінних

$$\max\{c^T y + \alpha\rho\}$$
$$\text{за умов}\quad Ay - b\rho = 0,$$
$$d^T y + \beta\rho = 1,$$
$$0 \leqq y \leqq R^n, 0 \leqq \rho \in R$$

З лінійною цільовою функцією, $(m+1)$ обмеженням і $(n+1)$ змінною. Цю задачу можна розв'язати за допомогою симплекс-методу.

Приклад 4. Розглянемо наступну задачу дробово-лінійної оптимізації

$$\max\left\{\frac{x_2 - 5}{-x_1 - x_2 + 9} = z\right\}$$
$$\text{при}\quad 2x_1 + 5x_2 \geqq 10,$$
$$4x_1 + 3x_2 \leqq 20,$$
$$-x_1 + x_2 \leqq 2,$$
$$x_1, x_2 \geqq 0.$$

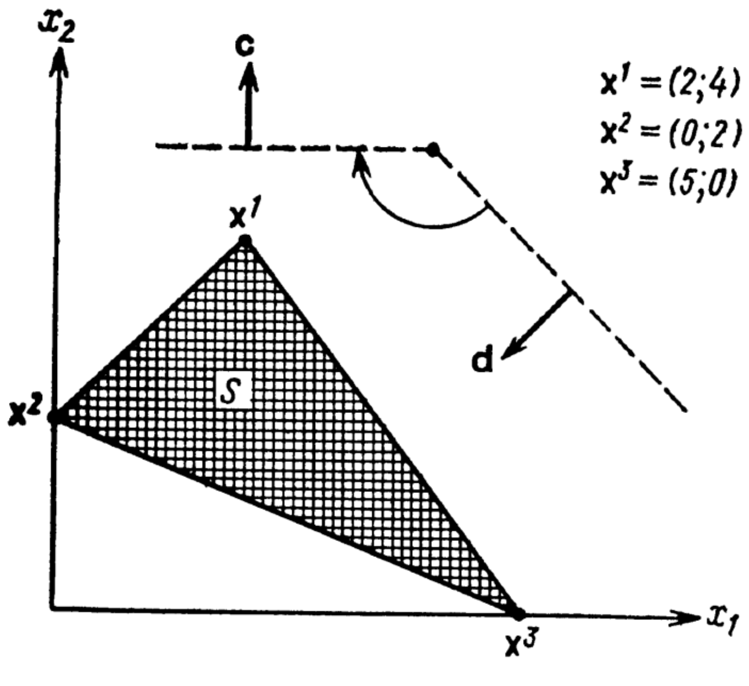


Рис. 4.Ілюстрація до прикладу 4.

Після заміни змінних задача набуває такого вигляду

$\max\{y_2 - 5\rho\}$
при $2y_1 + 5y_2 - 10\rho \geqq 0,$
$4y_1 + 3y_2 - 20\rho \leqq 0,$
$-y_1 + y_2 - 2\rho \leqq 0,$
$-y_1 - y_2 + 9\rho = 1,$
$y_1, y_2, \rho \geqq 0.$

Розвя'зуючи її симплекс-методом, отримуємо такий розв'язок $y_1 = 2/3, y_2 = 4/3$ і $\rho = 1/3$. Отже, оптимальний розв'язок дробово-лінійної задачі $x^1 = (2; 4)$.

1.3 Метод поновлення цільової функції

Цей метод передбачає періодичне перерахування локального градієнту дробово-лінійної функції у точці x

$$\frac{(d^T x + \beta)c - (c^T \bar{x} + \alpha)d}{(d^T \bar{x} + \beta)^2}$$

Задача дробово-лінійної оптимізації розв'язується як послідовність задач лінійного програмування, але після кожного ітерації перераховується за зазначеною формулою локальний градієнт цільової функції. Алгоритм виглядає таким чином.

Алгоритм

Крок 1. Покласти $i = 0$.

Крок 2. Покласти $i = i + 1$.

Крок 3. Визначити локальний градієнт цільової функції точки $x^{(i)}$.
Крок 4. Розв'язати отриману задачу лінійного програмування та визначити крайню точку$x^{(i+1)}$.

Крок 5. Якщо $x^{(i+1)} \neq x^{(i)}$, перейти до кроку 2. Інакше перейти до кроку 6.

Крок 6. $x^{(i)}$ є оптимальним розв'язком задачі дробово-лінійної оптимізації.

Приклад 5. Розглянемо задачу дробово-лінійної оптимізації (рис. 5)

$$\max\left\{\frac{-x_1 + x_2 + 2}{x_2 + 2} = z\right\}$$
$$4x_1 - 3x_2 \geqq 2$$
$$x_1 \quad \leqq 5$$
$$x_1 \quad \geqq 2$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

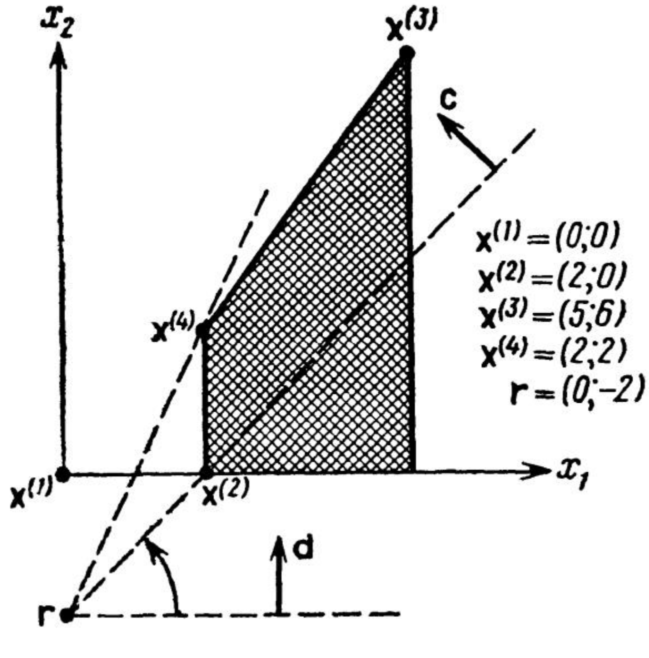


Рис. 5. Ілюстрація до прикладу 5.

Локальний градієнт в точці $x^{(1)}$ має вигляд

$$\frac{2c - 2d}{2^2} = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Розв'язуючи задачу лінійного програмування з вектор-рядком цільової функції $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, отримуємо точку $x^{(2)}$. В точці $x^{(2)}$ градієнт дорівнює $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Розв’язуючи задачу лінійного програмування з вектор-рядоком цільової функції $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, отримуємо точку $\mathbf{x}^{(3)}$. Градієнт в точці $\mathbf{x}^{(3)}$дорівнює $\left(-\frac{8}{64}, \frac{5}{64}\right)$.

Розв’язуючи відповідну задачу лінійного програмування с з вектор-рядоком $\left(-\frac{8}{64}, \frac{5}{64}\right)$, отримуємо точку $x^{(4)}$. В точці $x^{(4)}$гридієнт дорівнює $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

Розв’язуючи задачу лінійного програмування з вектор-рядоком цільової $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$, отримуємо точку $\mathbf{x}^{(5)} = \mathbf{x}^{(4)}$. Отже, точка $(2; 2)$ – оптимальне рішення і при цьому $z^* = \frac{1}{2}$.

Інший варіант реалізації запропонованого підходу – перерахування локального градієнту цільової функції в кожній новій крайній точці, що отримується. Для задачі дробово-лінійної оптимізації з прикладу 5 це привело до оптимального розв’язку шляхом меншого числа переходів $\left(x^{(1)} \to x^{(2)} \to x^{(4)} \text{ замість } x^{(1)} \to x^{(2)} \to x^{(4)} \to x^{(3)} \to x^{(4)}\right)$. Зазначимо, що у разі необмеженої області допустимих розв’язків метод із поновленням цільової функції не гарантує отримання оптимальногорозв’язку.

Приклад 6. Розглянемо наступну задачу дробово-лінійного програмування (рис. 6):

$$\max\left\{\frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 5x_2} = z\right\}$$
$$\text{при} \quad -x_1 + x_2 \leqq 1,$$
$$x_1 - x_2 \leqq 5,$$
$$x_1 + 2x_2 \geqq 5,$$
$$x_1, x_2 \geqq 0.$$

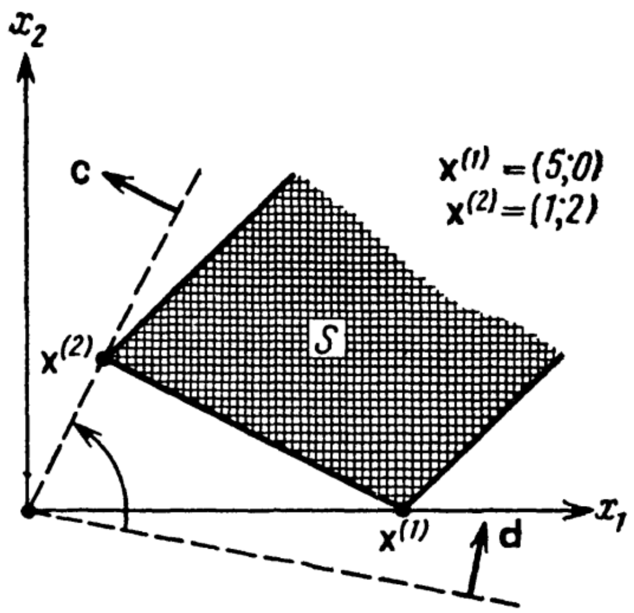


Рис. 6. Ілюстрація до прикладу 6.

Застосовуючи другий варіант методу поновлення цільової функції (з перерахуванням градієнта в кожній новій крайній точці), після етапу I симплекс-методу ми прийшли б до точки$x^{(1)}$, у якій градієнт цільової функції дорівнює $\left(0,\frac{11}{5}\right)$. Оскільки необмеженому ребру, що виходить з точки $x^{(1)}$, відповідало б найбільше додатне значення відносної оцінки $c_j - z_j$, то за допомогою методу поновлення цільової функції не можна було б знайти оптимальну крайню точку $x^{(2)} = (1; 2)$.

РОЗДІЛ 2

ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З НЕОДНОЗНАЧНО ЗАДАНОЮ ЦІЛЬОВОЮ ФУНКЦІЄЮ

Різноманітність, а часто і суперечливість різних вимог до системи чи об'єкту, що проєктується або оптимізується, неповнота інформації, неточність моделей, що застосовуються, неминуче приводять до того, що реальні задачі оптимізації приходиться розв'язувати в умовах невизначеності.

Задачі дискретної оптимізації з невизначеною цільовою функцією – це клас задач оптимізації, в яких треба знайти найкраще (мінімальне або максимальне) значення цільової функції, але сама ця функція є невизначеною, відомо її вигляд і задано множини можливих значень її коефіцієнтів.

Більшість параметрів практичних задач математичного програмування, як правило, мають похибки в оцінці. Натомість методи, що використовуються для розв'язання цих задач, передбачають точні значення параметрів моделей.

Існує кілька підходів для опису невизначеності в лінійній цільовій функції [17], деякі з яких будуть розглянуті у цьому розділі, особливо в контексті цілочислового програмування та неточно заданої дробово-лінійної цільової функції. Крім того, розглянуто випадок, коли відомо лише те, що коефіцієнти дробово-лінійної цільової функції задачі цілочислового програмування належать визначеним множинам. Задачі з

Розглянемо задачу дробово-лінійної цілочислової оптимізації

$$(P) \qquad \max\left\{\frac{c^T x+\alpha}{d^T x+\beta} \middle| x \in X\right\},$$

$$X=\left\{x \in Z^n \subset R^n \middle| Ax \le b, x \ge 0, b \in R^m\right\}.$$

Тут Z^n– множина цілочислових векторів в R^n. Припустимо, що параметри допустимої множини (A та b) визначені точно, а невизначеність виникає лише у коефіцієнтах дробово-лінійної цільової функції. Такі обставини не є рідкістю в реальному світі. Коефіцієнти дробово-лінійної цільової функції, як правило, відображають вартість або доходи, які можуть бути визначені з певною помилкою і іноді приймаються до певної міри довільно. Інша причина для аналізу проблем з неточно визначеними параметрами полягає в спрощенні моделі математичного програмування, яка відображає реальні обставини. Наприклад, часто ігнорують нелінійністю дробово-лінійної цільової функції або залежністю деяких показників від часу. Є різні ступені невизначеності, що впливають на цільову функцію, і в кожному випадку використовуються різні стратегії.

2.1 Різні види невизначеності у дробово-лінійній цільовій функції

Найчастіше зустрічається випадок, коли

(I) цільову функцію задають вектори c і d, при цьому додаткової інформації про можливі зміни коефіцієнтів цільової функції немає.

В даному випадку задача (P) де $c=\bar{c},\ \ d=\bar{d}$ може розв’язуватись і оптимальний розв’язок x^0 або буває декілька оптимальних розв’язків можуть бути отримані.

Ми можемо очікувати, що потенційні зміни коефіцієнтів дробово-лінійної цільової функції будуть "незначними" настільки, щоб не поставити під сумнів валідність отриманих розв'язків. Однак, навіть при цьому висновку, існують певні нюанси. Наприклад, при яких змінах векторів c і d

розв'язок x^0 все ще вважається оптимальним (або ε-оптимальним), або який з отриманих розв'язків витримує найбільші зміни цих векторів ?

Більш формально: потрібно визначити для заданого оптимального вектора x^0 множини векторів $C(x^0)$ і $D(x^0)$ усіх векторів $\tilde{c}, \tilde{d}$, таких, що $\tilde{c} \in C(x^0), \tilde{d} \in D(x^0)$ тоді і тільки тоді, коли x^0 є оптимальним (ε-оптимальним) розв’язком задачі.

$$\max\left\{ \frac{\tilde{c}^T x + \alpha}{\tilde{d}^T x + \beta} \middle| x \in X \right\},$$

Інший аспект цього питання – як малі зміни векторів c і d вплинуть на оптимальне значення задачі (*P*). Всі ці питання пов'язані з аналізом стійкості, який активно розвивається в області цілочислової оптимізації [18-22].

Зазначений підхід можна вважати пасивним. Фактично приймаємо розв’язок x^0 за вірний, не дивлячись на те, що аналіз стійкості в основному здійснюється на основі гіпотези, що вибір x^0 є найкращим.

Інший випадок зустрічається, коли

(II) задані множини C і D всіх можливих векторів c, d цільової функції.

Ми стикаємося з такою проблемою, коли, наприклад, можна встановити границі для зміни вартості, але неможливо знати точні величини, що будуть реально відбуватися. Цей випадок також стосується задач, де коефіцієнти цільової функції вимірюються з відомими похибками. Іноді неможливо встановити точні значення коефіцієнтів, але можна визначити між ними функціональні зв'язки. В усіх цих випадках замість єдиних векторів c, d цільової функції маємо визначену множину, що містить всі можливі значення цих векторів.

Різні підходи можуть застосовуватися для розв’язання некласично сформульованих задач математичного програмування.

Звичайно, можливо обрати будь-які вектори із множин C і D відповідно і розв'язати задачу (P) з цими векторами. Проте, загалом, не існує визначеного правила для такого вибору. Також можна розглянути цю задачу як задачу багатокритерійного програмування (в загальному випадку з нескінченною кількістю цільових функцій) і спробувати знайти недоміновані розв'язки.

Також можливе застосування різних підходів. Якщо допустити, що c і d є стохастичними змінними і:

(III) імовірнісний розподіл цих векторів відомий. У такому випадку особа, яка приймає рішення, має на вибір різні стратегії, які визначаються очікуваним прибутком та рівнем ризику.

Назвемо два найбільш популярних підходи.

Перший підхід полягає у виборі допустимого вектора $x^E \in X$, який максимізує очікуване значення прибутку. Просто бачити, що в даному випадку може бути розв'язана наступна цілочислова задача лінійного програмування.

$$x^E = \arg\max \left\{ \frac{\bar{c}^T x + \alpha}{\bar{d}^T x + \beta} \middle| x \in X \right\},$$

де $\bar{c} = E(c), \bar{d} = E(d)$. $E(\cdot)$ означає математичне сподівання.

Другий підхід полягає у знаходженні допустимого розв'язку $x^v \in X$, що мінімізує дисперсію прибутку за умови, що математичне сподівання прибутку не менше, ніж задане значення q. У цьому випадку отримуємо задачу нелінійного програмування.

2.2 Оптимістична та песимістична стратегії розв'язання задачі

Для роботи з моделями, вхідні дані яких задані не однозначно, а множинами їхніх можливих значень, відомі підходи неточного та узагальненого математичного програмування [1, 23, 24] або в іншій термінології – дві основні стратегії побудови розв'язків для задач цілочислового програмування вигляду (P) – оптимістична і песимістична (консервативна) [17, 25]. Отже, існують дві крайні екстремальні стратегії: песимістична та оптимістична, які при заданих множинах C і D можливих значень векторів цільової функції забезпечують мінімально гарантоване значення цільової функції задачі та максимально можливе значення відповідно.

Песимістична стратегія полягає у пошуку допустимого вектора $x^{**} \in X,$ який дає найбільше значення серед усіх можливих розв'язків на множині X, враховуючи припущення, що вектори $c \in C$ і $d \in D$ є найгіршими із усіх можливих.

Це означає, що для будь-якого $x \in X$, де $X = \left\{ x \in R^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0,\ x \in Z^n \right\}$ справедливі наступні співвідношення:

$$\min_{c \in C, d \in D} f\left(x^*\right) \ge \min_{c \in C, d \in D} f\left(x\right), \tag{2.1}$$

тут $f(x) = \dfrac{\langle c, x \rangle + \alpha}{\langle d, x \rangle + \beta},$

Песимістична стратегія дає мінімально гарантоване значення цільової функції $\underline{v}(P, f)$, де

$$\underline{v}(P, f) = \max\left\{ \min\left\{ \frac{\langle c, x \rangle + \alpha}{\langle d, x \rangle + \beta} \mid c \in C,\ d \in D \right\} \mid x \in X \right\}. \tag{2.2}$$

Оптимістична стратегія полягає у виборі допустимого вектора $x^{**} \in X,$ який максимізує цільову функцію задачі, враховуючи припущення, що вектор цільової функції найбільш придатний, це значить для будь-якого $x \in X$ виконано наступне співвідношення:

$$\max_{c \in C, d \in D} f\left(x^{**}\right) \ge \max_{c \in C, d \in D} f\left(x\right) \tag{2.3}$$

Оптимістична стратегія дає верхню границю для всіх можливих значень цільової функції, де $\overline{v}(P, f)$

$$\overline{v}(P, f) = \max\left\{\max\left\{\frac{\langle c, x\rangle + \alpha}{\langle d, x\rangle + \beta} \mid c \in C, d \in D\right\} \mid x \in X\right\}. \quad (2.4)$$

Визначивши значення $\underline{v}(P, f)$ і $\overline{v}(P, f)$, можна охарактеризувати задачу та її стійкість до змін вхідних даних. Інформація про оптимальні розв'язки x^{*} і x^{**}, отримані відповідно за песимістичною і оптимістичною стратегією, становить інтерес для особи, що приймає рішення, оскільки вони відповідають різним ситуаціям, що моделюються.

Варто встановити зв'язки між випадками (II) і (I).

Наприклад, задано множини C і D і для деяких $c \in C, d \in D$ отримуємо оптимальний розв'язок x^0 задачі (P). Тоді справедливе твердження

Твердження 2.1. [17] *Якщо* $C \subseteq C(x^0)$, $D \subseteq D(x^0)$, то $x^* = x^{**} = x^0$, що безпосередньо випливає із визначення областей стійкості $C(x^0)$ і $D(x^0)$.

Іноді ми маємо підмножини $\tilde{C}(x^0)$ і $\tilde{D}(x^0)$ множин $C(x^0)$, $D(x^0)$ отримані як недорогий побічний продукт розв'язання задачі (P). У цьому випадку можна використати у твердженні 2.1 інформацію про $\tilde{C}(x^0)$ замість $C(x^0)$.і $\tilde{D}(x^0)$ замість $D(x^0)$.

2.3 Екстремальні стратегії для задач з множинно заданими векторами цільової функції

Проаналізуємо дві екстремальні стратегії, що були визначені у підрозділі 2.2. Припускаємо, що в задачі (P) матриця обмежень $A \in R^{m \times n}$ та вектор $b \in R^m$ фіксовані. Тоді допустима множина $X = \left\{x \in R^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0, x \in Z^n\right\}$ також буде незмінною.

Припустимо, що множина X не порожня. Будь-яка реалізація векторів цільової функції належить відповідно заданим множинам $C \subseteq R^n, D \subseteq R^n$.

Песимістична стратегія, визначена у підрозділі 2.2, приводить до наступної max-min задачі:

$$x^* = \arg\max_{x\in X}\min_{c\in C,\, d\in D} f(x) = \frac{\langle c,x\rangle + \alpha}{\langle d,x\rangle + \beta}, \tag{2.5}$$

Задачу (2.5) можна переформулювати за допомогою вводу додаткової змінної $t \in R$ у такий спосіб:

$$\max t$$

$$t \le \frac{\langle c,x\rangle + \alpha}{\langle d,x\rangle + \beta} \quad \text{для будь-яких } c\in C,\ d\in D, \tag{2.6}$$

$$x \ge 0,\ x \in Z^n,\ t \in R.$$

Задача (2.6) – це задача змішано цілочислового програмування з однією неперервною змінною t. Якщо хоча б одна з множин C і D не є обмеженою (що часто відбувається), то ми маємо справу з задачею з нескінченною кількістю обмежень. Задачі з лінійною цільовою функцією більш загального вигляду з неточно заданими матрицями обмежень і векторами правих частин обмежень досліджені в роботах [25, 26]. Перший з двох алгоритмів, описаних в цьому підрозділі, використовує фундаментальні принципи методів, які застосовуються до задач оптимізації з нескінченною кількістю обмежень в дискретному контексті.

Другий алгоритм будує послідовності цілочислових векторів $\{x^k\}$ і дійсних векторів $\{c^k\}, \{d^k\}, k = 0,1,2,\ldots$ шляхом розв'язання допоміжних задач , (S_k) і (L_k), (Z_k).

2.4 Загальна схема методу

У загальному випадку, стратегії для розв'язання задач оптимізації з нескінченною множиною обмежень, зокрема при дискретному підході, застосовуються в контексті теорії алгоритмічної оптимізації і охоплюють наступні етапи:

1. Формулювання задачі: Оптимізаційна задача має бути виражена як математична модель.

2. Перетворення задачі: задачу оптимізації слід представити у вигляді математичної моделі. Коли мова йде про випадки з нескінченною кількістю обмежень, це зазвичай передбачає, що обмеження визначаються через функцію з нескінченною областю визначення.

3. Розв'язування задачі. Коли маємо справу з задачею, яка містить обмежену кількість обмежень, вона може бути вирішена за допомогою відповідного алгоритму оптимізації. Вибір специфічного методу може залежати від особливостей задачі і може включати такі методи, як симплекс-метод, градієнтний спуск, метод внутрішньої точки або генетичні алгоритми.

4. Перевірка розв’язку. Після отримання розв’язку задачі, необхідно переконатися, що він відповідає всім початковим обмеженням. Додатковий аналіз може бути необхідним, особливо, якщо були застосовані методи апроксимації або релаксації.

5. Ітераційне уточнення (продовження). Можна використати ітераційний процес для уточнення розв’язку. Зокрема, можна змінити апроксимації або релаксації, які були використані для перетворення задачі, або змінити параметри алгоритму оптимізації. Після цього, знову розв'язується задача і перевіряється новий розв'язок. Цей процес повторюється, поки не буде знайдено розв'язок, який задовольняє всі обмеження.

6. Аналіз розв'язку. Врешті-решт, коли знайдеться розв'язок, що задовольняє всі обмеження, потрібно оцінити його, визначити його оптимальність та визначити його вплив на реальні обставини, які намагалися симулювати.

Це загальна схема може бути адаптована в залежності від специфіки конкретної задачі.

2.5 Алгоритм 2.1

Алгоритм, описаний у цьому підрозділі, використовує ключові принципи методів, що використовуються для розв’язання задач оптимізації з нескінченною кількістю обмежень у дискретному контексті.

Опис алгоритму 2.1

1. Вибираємо $c^0 \in C, d^0 \in D$.

$k := 1$.

2. Розв’язуємо задачу (P_k).

$\max t,$

$$t \le \frac{\langle c^j, x\rangle + \alpha}{\langle d^j, x\rangle + \beta},\ j = 0,1,\dots,k-1,$$

$x \in X$.

Нехай $x^k,\ t^k$ – оптимальний розв’язок задачі (P_k).

3. Розв’язуємо задачу (L_k):

$$\min\left\{\left\langle c, x^k\right\rangle \mid c \in C\right\}$$

і задачу (Z_k):

$$\max\left\{\left\langle d, x^k\right\rangle \mid d \in D\right\}$$

Нехай c^k та d^k – відповідно оптимальні розв’язки задач (L_k) і (Z_k).

Якщо $\dfrac{\langle c^k, x\rangle + \alpha}{\langle d^k, x\rangle + \beta} \ge t^k$, то алгоритм завершує свою роботу з отриманням x^k – оптимального розв’язку задачі (2.5) і значення цільової функції $f(x^*) = t^k$, інакше покладаємо $k := k+1$ і переходимо до пункту 2.

Справедливе твердження

Твердження 2.2. Якщо множини C і D – скінченні, то алгоритм 2.1 розв'язує задачу (2.5) за скінченну кількість кроків.

Доведення. Щоб довести скінченність алгоритму 2.1, покажемо, що жоден із векторів x^k не може бути повторений до оптимальності, оскільки, якщо $x^k = x^l$, $l > k$, то $\left(c^k\right)^T x^k = \left(c^l\right)^T x^l$, $\left(d^k\right)^T x^k = \left(d^l\right)^T x^l$, $\dfrac{\left\langle c^k, x\right\rangle + \alpha}{\left\langle d^k, x\right\rangle + \beta} = t^l$ і виконується критерій зупинки алгоритму.

Припустимо, що алгоритм закінчився після l кроків. Для доведення справедливості алгоритму 2.1 помітимо, що для будь-якого k задача $\left(P_k\right)$ є релаксацією задачі (2.5). Тому досить довести, що якщо для пари $\left(t^l, x^l\right)$ виконується критерій зупинки (тобто $t^l \le \dfrac{\left\langle c^l, x\right\rangle + \alpha}{\left\langle d^l, x\right\rangle + \beta}$, де c^l та d^l – відповідно оптимальні розв'язки задач $\left(L_l\right)$ і $\left(Z_l\right)$. Тоді $\left(t^l, x^l\right)$ є допустимим розв'язком задачі (2.5).

Щоб це зробити, маємо переконатися в тому, що

$$t^l \le \frac{c^T x^l + \alpha}{d^T x^l + \beta} \quad \text{для будь-яких } c \in C,\ d \in D, \tag{2.7}$$

це випливає прямо з визначення задач $\left(L_l\right)$ і $\left(Z_l\right)$ і того факту, що критерій оптимальності алгоритму 2.1 виконується. Маємо

$t^l \le \dfrac{c^T x^l + \alpha}{d^T x^l + \beta} = \dfrac{\min\left\{c^T x^l + \alpha \mid c \in C\right\}}{\max\left\{d^T x^l + \beta \mid d \in D\right\}}$, що еквівалентно нерівностям (2.6).

2.6 Алгоритм 2.2

У алгоритмі 2.1 для будь-якого k задача $\left(P_k\right)$ є змішано-цілочисловою (з однією неперервною змінною). Тому виконання цього пункту алгоритму може потребувати багато часу. Можна модифікувати цей пункт шляхом заміни задачі $\left(P_k\right)$ практично більш легкою задачею $\left(S_k\right)$, що полягає у знаходженні допустимого цілочислового розв'язку системи лінійних нерівностей. Формальний опис цієї модифікації наступний:

<u>Опис алгоритму 2.1</u>

1. Вибираємо допустимий розв'язок $x^1 \in X$,

$k:=1,\ t:=-\infty,\ \bar{x}:=x^1$

2. *Р*озв'язуємо задачу (L_k)

$$\min\left\{\left\langle c, x^k\right\rangle \mid c \in C\right\}$$

і задачу (Z_k)

$$\max\left\{\left\langle d, x^k\right\rangle \mid d \in D\right\}.$$

Нехай c^k та d^k – відповідно оптимальні розв'язки задач $\left(L_k\right)$ і $\left(Z_k\right)$, покладемо $t^k = \dfrac{\left\langle c^k, x\right\rangle + \alpha}{\left\langle d^k, x\right\rangle + \beta}$.

Якщо $t^k > t$, то $t:=t^k,\ \bar{x}:=x^k;$ перейти до 3.

3. Знаходимо розв'язок наступної системи обмежень $\left(S_k\right)$

$$t < \frac{\left(c^j\right)^T x + \alpha}{\left(d^j\right)^T x + \beta}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

$$Ax \le b, \quad x \ge 0, x \in Z^n.$$

Якщо система (S_k) несумісна, то алгоритм 2.2 завершує свою роботу: в цьому разі $\bar{x}$ є оптимальним розв'язком задачі (2.5) і $f(x^*)=t$.

Інакше: нехай x^{k+1} означає розв'язок системи (S_k), покладемо $k=k+1$. Перейти до пункту 2.

Доведення справедливості і скінченності алгоритму 2.2 таке ж, як і у випадку алгоритму 2.1. Замість розв'язання задачі (P_k) на оптимальність, досить знайти у пункті 3 допустимий розв'язок системи нерівностей, що зменшує поточне значення t. Цей пункт може бути здійснений за допомогою будь-якої переборної схеми. Схожа структура алгоритму виникає, коли використовується метод декомпозиції Бендерса [4, 27] у змішано цілочисловому програмуванні. Результати, представлені у пункті 3 алгоритму, наводять на думку, що у пункті 3 може бути придатною схема гілок та меж, використовувана в псевдобулевому програмуванні.

Однак, можна припустити, що в алгоритмі 2.2 задачі (L_k) і (Z_k) розв'язуються більше число разів, ніж у алгоритмі 2.1. Відповідно до цього факту алгоритм 2.2, очевидно може застосовуватися у випадках, коли задачі (L_k) і (Z_k) можуть бути розв'язані ефективно. Така ситуація виникає, коли ці задачі можуть бути розв'язані аналітично, наприклад, якщо C та D – кулі в просторі R^n, або коли легко реоптимізувати задачі (L_k) і (Z_k) для наступних розв'язків x^k.

Як показано вище, основним недоліком алгоритму 2.1 є необхідність розв'язування цілочислової підзадачі (P_k), що взагалі є NP-важкою задачею [28].

Зазначимо важливу перевагу алгоритму 2.1. На будь-якому кроці цього алгоритму можна визначити межі оптимального значення цільової функції задачі і тому обчислення можна зупинити, визначивши при цьому наближений розв'язок задачі, враховуючи його точність.

Нехай для будь-якого k $z^k = \max\left\{\dfrac{\left\langle c^q, x^q\right\rangle + \alpha}{\left\langle d^q, x^q\right\rangle + \beta},\ q = 0,1,\ldots,k\right\}$ і r – це будь-який індекс q, для якого цей максимум досягається. Тоді, вибираючи c^r, d^r, x^r як наближений розв’язок, маємо:

$$z^k \le f(x^*) \le t^k .$$

В обох алгоритмах, описаних вище, початкова задача фактично розбивається на три підзадачі: одна на множині *X*, інші на множинах *C* і *D*, які послідовно розв’язуються.

2.7 Розв’язання за оптимістичною стратегією

Оптимістична стратегія, визначена у підрозділі 2.2, приводить до наступної max-max задачі:

$$x^* = x^{**} = \arg\max_{x \in X} \max_{c \in C,\, d \in D} f(x) = \frac{\langle c, x\rangle + \alpha}{\langle d, x\rangle + \beta}, \tag{2.7}$$

Задачу (2.7) можна переформулювати за допомогою вводу додаткової змінної $t \in R$ у такий спосіб:

$\max t:$

$$\exists c \in C, d \in D, \quad t \le \frac{\left\langle c^k, x\right\rangle + \alpha}{\left\langle d^k, x\right\rangle + \beta},, \tag{2.6}$$

$$x \ge 0, x \in Z^n, t \in R.$$

2.7.1 Алгоритм 2.3

1. Вибираємо $c^1 \in C, d^1 \in D$.

$k:=1$.

2. Розв'язуємо задачу (P_k).

$\max t,$

$$t \le \frac{\langle c^k, x\rangle + \alpha}{\langle d^k, x\rangle + \beta}, \quad x \in X.$$

$x \in X$.

Нехай x^k, t^k – оптимальний розв'язок задачі (P_k).

3. Розв'язуємо задачу (L_k):

$$\max\left\{\left\langle c, x^k\right\rangle \mid c \in C\right\}$$

і задачу (Z_k):

$$\min\left\{\left\langle d, x^k\right\rangle \mid d \in D\right\}$$

Нехай c^k та d^k – відповідно оптимальні розв'язки задач (L_k) і (Z_k).

Якщо $\dfrac{\left\langle c^k, x\right\rangle + \alpha}{\left\langle d^k, x\right\rangle + \beta} = t^k$, то алгоритм завершує свою роботу з отриманням x^k – оптимального розв'язку задачі (2.5) і значення цільової функції $f(x^*) = t^k$, інакше покладаємо $k:=k+1$ і переходимо до пункту 2.

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

3.1 Економічна постановка та формалізація задач з дробово-лінійною цільовою функцією

Значна частина галузей економіки випускає продукцію чи послуги, які вимірюються цілими числами, це, наприклад, приладо- і машинобудування, легка промисловість та ін. Разом з тим в інших галузях, в яких продукція за специфікою не є цілочисловою застосовуються новітні технології виробництва і пакування. У результаті продукція, що випускається, має цілочисловий вимір, а це означає, що загальна лінійна модель, яка застосовується для планування обсягів виробництва, має включати обмеження на цілочислові значення невід'ємних змінних. Наявність таких обмежень ускладнює методи розв'язання зазначених задач оптимізації.

В економічних обґрунтуваннях дуже важливо використовувати не тільки абсолютні фінансові показники (дохід, прибуток, витрати), а й відносні (загальна рентабельність, рентабельність оборотних активів, собівартість реалізованої продукції). Відносні показники завжди більш адекватно характеризують фінансові результати господарської діяльності, оскільки у дробово-лінійних задачах оптимізації вони не задаються як наперед заданими, а розраховуються залежно від оптимальних обсягів виробництва.

З викладеного можна зробити висновок, що дробово-лінійні та цілочислові задачі можуть дуже широко використовуватись в економічних розрахунках, їх застосування дасть можливість отримати оптимальний план з урахуванням особливостей економічної постановки задач на практиці.

Частина економічних показників вимірюється на основі певних співвідношень, що математично формалізуються як дробові числа (продуктивність праці, фондовіддача, ефективність інвестицій). Вони можуть використовуватись у задачах оптимізації як цільова функція. У таких випадках задача оптимізації стає нелінійною і вимагає використання певних процедур для зведення дробово-лінійної задачі до лінійної.

Під час розв'язування економічних задач часто як критерій оптимальності використовують показники рентабельності, продуктивності праці тощо, які математично виражаються дробово-лінійними функціями.

Отже, загальну економіко-математичну модель у цьому випадку записують таким чином (розглянемо задачу визначення оптимальних обсягів виробництва продукції): позначимо c_j – прибуток від реалізації одиниці j -го виду продукції, тоді загальний прибуток становитиме $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$; d_j – витрати на виробництво одиниці j -го виду продукції; $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ – загальні витрати на виробництво. У випадку максимізації рентабельності виробництва цільова функція матиме вигляд

$$\max z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}$$

за умов виконання обмежень за ресурсами

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Передбачається, що знаменник цільової функції в області допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю. Необхідність математичної постановки і розв'язання зазначених задач пов'язана, перш за все, з економічною доцільністю.

3.2 Модель розподілу капітальних вкладень за перевантажувальними комплексами

При розвитку транспортних вузлів необхідно оптимально розподілити капітальні вкладення за критерієм максимуму ефективності капітальних вкладень.

Введемо позначення:

i – номер транспортного вузла;

n – кількість всіх транспортних вузлів;

k – номер перевантажувального комплекса;

m_i – кількість всіх перевантажувальних комплексів i-го транспортного вузла;

q – номер можливого варіанту розвитку;

r – кількість всіх можливих варіантів розвитку q;

s – вид ресурсів, що виділяються для розвитку перевантажувальних комплексів;

l – кількість всіх видів ресурсів;

t – рік планового періоду;

T – кількість років планового періду;

p_{ikq} – приріст прибутку на k-му перевантажувальному комплексі i-го транспортного вузла згідно з q-им варіантом розвитку;

d_{ikq} – капітальні вкладення для розвитку k-го перевантажувального комплексу i-го транспортного вузла згідно з q-им варіантом розвитку;

L – ліміт капітальных вкладень на розвиток всіх перевантажувальних комплексів;

b_{ikq}^{st} – витрати s-го виду ресурсів у t-му році на розвиток k-го перевантажувального комплексу i-го транспортного вузла згідно з q-им варіантом;

B^{st} – кількість ресурсів s-го виду, що виділяються у t-му році;

x_{ikq} – шукана величина, що дорівнює 1, якщо на k-му перевантажувальному комплексі i-го транспортного вузла ухвалено q-й варіант розвитку, і дорівнює 0 у протилежному випадку.

Математична модель. Знайти максимум ефективності капітальних вкладень

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{q=1}^{r} p_{ikq}x_{ikq}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{q=1}^{r} d_{ikq}x_{ikq}} \to \max$$

за обмежень: на ліміт капітальних вкладень

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{q=1}^{r} d_{ikq}x_{ikq} \le L,$$

на інші види ресурсів

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{q=1}^{r} b_{ikq}^{st} \le B^{st} \quad \left(s=1,2,...,l;\, t=1,2,...,T\right),$$

на вибір одного варіанту

$$\sum_{q=1}^{r} x_{ikq} \le 1 \quad \left(i=1,2,...,n;\, k=1,2,...m_i\right),$$

на цілочисельність змінних

$$x_{ikq}\left(1-x_{ikq}\right)=0 \quad \left(i=1,2,...,n;\, k=1,2,...,m;\, q=1,2,...,l\right).$$

В цій моделі вхідні дані коефіцієнтів цільової функції можуть бути задані не точно, тобто матриці $P=\left\{p_{ikq}\right\}$ і $D=\left\{d_{ikq}\right\}$ задані множинами їхніх можливих значень, тобто $P \in \mathrm{P} \subset \mathrm{R}^{n \times m_i \times r}$, а $D \in \mathrm{D} \subset \mathrm{R}^{n \times m_i \times r}$.

Економіко-математичні моделі, що враховують неточно задану інформацію більш адекватно описують реальні процеси, що досліджуються, дають можливість отримувати кращі результати та широко використовуються на практиці, зокрема при розв’язуванні задач на транспорті та в інших галузях, наприклад, при визначенні перевезень вантажів.

3.3 Задачі визначення рентабельності виробництва

3.3.1 Визначення порядку засівання ділянок з метою отримання максимальної рентабельності виробництва

На p ділянках з заданими площами $g_1, g_2, \dots, g_s$ засівається s культур $(m < s)$. Визначено мінімальну та максимальну допустимі площі для кожної ділянки, засіяної кожною культурою. Відома необхідність витрати ресурсів кожного виду для вирощуванні однієї культури на 1 га площі ділянки для цієї культури. Відомі врожайність культури та прибуток з 1 га ділянки. Задано мінімально необхідний обсяг продукції j-ї культури. Відомі витрати на 1 га ділянки, засіяної кожною культурою. Необхідно визначити, які ділянки та як засівати, щоб забезпечити максимальну рентабельність виробництва, за умови, що кожна ділянка засівається лише однією культурою та одна культура може бути посіяна лише на одній ділянці.

Побудуємо математичну модель даної задачі у вигляді евклідової комбінаторної задачі на множині розміщень [29]. Нехай $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\} -$ мультимножина площ ділянок. Тоді всі можливі вибірки з мультимножини G утворюють загальну множину розміщень $E_m^m(G)$, де n– кількість різних елементів G. Використаємо позначення: $x_j -$ площа ділянки, що засіяна j-ю культурою; $S_{j\,\min}, S_{j\,\max} -$ мінімально и максимально допустимі площі посіву j-ї культури; $\omega_j -$ урожайність j-ї культури з 1 га ділянки; $c_j -$ прибуток з 1 га ділянки, засіяної j -ю культурою; $c_0 -$ прибуток, який не залежить від того, як засіваються ділянки; $Q_j -$ мінімально необхідний обсяг продукції j-ї культури; $d_j -$ витрати на 1 га ділянки, засіяної j-ю культурою; d_0 – витрати, які не залежать від того, як засіваються ділянки, r – кількість видів виробничих ресурсів; b_p — наявні кількості виробничих ресурсів p -го виду; α_{pj} — витрати ресурсів p-го виду на 1 га ділянки, засіяної j-ю культурою.

Тоді математична модель задачі набуває вигляду:

знайти пару $\left(f\left(x^*\right), x^*\right)$ таку, що

$$F(x^*) = \max_{x \in R^m} \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{m} d_j x_j + d_0}, x^* = \arg\max_{x \in R^m} \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{m} d_j x_j + d_0}$$

за комбінаторної умови

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_{mw}^m(G) \subset R^m,$$

та додаткових лінійних обмежень:

на посівні площі

$$S_{j\,\min} \leq x_j \leq S_{j\max} \forall j \in J_{:n};$$

на використання ресурсів

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{pj} x_j \leq b_p \forall p \in J_r;$$

на обсяг одержуваної продукції

$$x_j \omega_j \geq Q_j \quad \forall j \in J_m.$$

В цій моделі вектори $c = (c_1, c_2, ..., c_m)$ і $d = (d_1, d_2, ..., d_m)$ задані множинами можливих значень, тобто $c \in C, d \in D$.

ВИСНОВКИ

У процесі виконання дипломної роботи розроблено математичні моделі, досліджено нові та модифіковано існуючі алгоритми цілочислового дробово-лінійного програмування, створено відповідні програмні засоби для розв’язання задачі цілочислової оптимізації з множинно заданими векторами дробово-лінійної цільової функції, яка має багато практичних застосувань.

Результати роботи можуть бути використані у різних галузях, включаючи фінансову діяльність корпорацій, банків, проєктування та розміщення об'єктів, планування експериментів, керування процесом обробки даних та ін., загалом у сферах, де виникають проблеми, які враховують невизначеність вхідних даних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Семенова Н.В. Методы поиска гарантирующих и оптимистических решений задач целочисленной оптимизации в условиях неопределенности данных. *Кибернетика и систем. анализ*. 2007. № 1. С. 103–114.

2. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв’язання К.: Наук. думка, 2009. 266 с.

3. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1992. 504 с.

4. Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем. Пер. с англ. М.: Наука, 1975. 432 с.

5. Swarup K. Linear fractional functional programming. *Oper. Res*. 1962. **110.** P. 380-387.

6. Swarup K. Linear fractional functional programming. *Oper. Res*. 1965. **13.** P. 1029-1036.

7. Gimore P.C. and. Gomory R.E. Linear programming approach to the cutting stock problem-part 2. Oper. Res. 1963. **11**.

8. B. Martos, Hyperbolic programming. Nav. Res. Logist. Q. **11** P. 135-155.

9. Sharma J.K., Gupta A.K. and Gupta M.P. Extension of simplex technic for solving programming problems. *Indian J. PureAppl. Math*. 1980. **11.** P. 961-968.

10. Cambini A. and. Martein L. A modified version of Martos's algorithm for the linear fractional problem. *Methods Oper. Res*. **53.** P. 33-44.

11. Lustig I.J. Feasibility issues in a primal-dual interior point method for linear programming. *Math. Program*. 1991.**49** 145. P. 1991-162.

12. Dinkelbach W. On nonlinear fractional programming. *Manage. Sci*.

1967. **13.** P. 492-498.

13. Charnes A. and Cooper W.W. Programming with linear functional. Nav. Res. Logist. Q. 1962. **9**. P. 181-186.

14. M. Babul Hasan and Acharjee S. Solving LFP by converting it into a single LP. Int. J. Oper. Res. 2011. **8**. P. 1-14.

15. S.K. Saha, M.R. Hossain, M.K. Uddin and R.N. Mondal, A new approach of solving linear fractional programming problem by using computer algorithm. *Open J. Optim*. 2015 **4**. 74-86.

16. Adaptive projection methods for linear fractional programming Bennani A, Benterki D. and Grar H. *RAIRO*-Operations Research. 2021. **55** S2383–S2392 RAIRO Operations Research https://doi.org/10.1051/ro/202009

17. Libura M. Integer programming problems with inexact objective function. *Contr. and Cyber*. 1980. **9**, N 4. P.189–202.

18. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. К.: Наук. думка, 1995. 171 с.

19. Lebedeva, T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability of vector problems of integer optimization: Relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N. 4. P. 551–558.

20. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N. 2. P. 228–233.

21. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Стійкість за векторним критерієм задачі частково цілочислової оптимізації з квадратичними критеріальними функціями. *Допов.Нац. акад.наук Укр.* 2020. №10. С. 15–21.

22. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability and regularization of vector optimization problems under possible criteria disturbances.

Cybernetics and Systems Analysis. 2022, Vol. 58, N 5. P. 721–726.

23. Falk J.E. Exact solution of inexact linear programs. *Oper. Res*. 1976, **24**. P. 783–787.

24. Soyster A.L. Convex programming with set-inclusive constraints and application to inexact linear programming. Oper. Res. – 1973. – **21**. – P. 1154–1157.

25. Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Декомпозиционный подход к решению некоторых задач целочисленного программирования с неточными данными. *Журн. вычисл. математики и матем. физики*. 1990. **29**, №5. С. 786–791.

26. Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования. *Кибернетика*. 1989. № 2. С. 42–47.

27. Benders J.F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*. 1962. Vol. 4. P. 38–252.

28. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 416 с.

29. Емец О.А., Черненко О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. К.: Наук. думка, 2011. 154 с.

.

ДОДАТКИ

Додаток А

Реалізація алгоритму 2.1

```
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog
def solve_Pk(c0, d0, alpha, beta, X):
    # Розв'язуємо задачу лінійного програмування для максимізації t
    res = linprog(-c0, A_ub=d0.reshape(1, -1),
                  b_ub=np.array([X]), method='highs')
    t = -res.fun
    x = res.x
    return x, t
def solve_Lk(xk, C):
    # Знаходимо вектор c^k, що мінімізує скалярний добуток c^k і x^k
    ck = min(C, key=lambda c: np.dot(c, xk))
    return ck
def solve_Zk(xk, D):
    # Знаходимо вектор d^k, що максимізує скалярний добуток d^k і x^k
    dk = max(D, key=lambda d: np.dot(d, xk))
    return dk
def check_stop_condition(ck, dk, xk, tk):
    # Перевіряємо умову зупинки
    return np.dot(ck, xk) / np.dot(dk, xk) >= tk
def main_algorithm(C, D, alpha, beta, X):
    # Ініціалізація
    c0 = C[0]
    d0 = D[0]
    k = 1
    while True:
        # Розв'язуємо задачу (Pk)
        xk, tk = solve_Pk(c0, d0, alpha, beta, X)
        # Розв'язуємо задачі (Lk) та (Zk)
        ck = solve_Lk(xk, C)
        dk = solve_Zk(xk, D)
        # Перевіряємо умову зупинки
        if check_stop_condition(ck, dk, xk, tk):
            break
        # Оновлюємо c0 та d0
        c0 = ck
        d0 = dk
```

```
        k += 1
    return xk, tk
# Параметри задачі
C = np.array([[10, 11, 12], [1, 2, 3]])
D = np.array([[12, 2, 3], [10, 11, 12]])
alpha = 1
beta = 1
X = 1
# Виконання алгоритму
x_opt, t_opt = main_algorithm(C, D, alpha, beta, X)
print("Оптимальний розв'язок:", x_opt)
print("Оптимальне значення t:", t_opt)
```

Цей код використовує мову програмування Python і декілька бібліотек, які зазвичай використовуються для наукових обчислень:

numpy: це бібліотека Python для роботи з масивами. Вона надає високопродуктивні багатовимірні масиви і інструменти для роботи з цими масивами.

scipy.optimize.linprog: це функція з бібліотеки SciPy, яка використовується для розв`язування задач лінійного програмування.