Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2019, № 2 (131) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.956
MSC 35R12

THE WELL-POSEDNESS OF MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF DEGENERATE MULTI-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS

S. A. Aldashev
Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Ministry of Education and Science, Kazakhstan, Almaty, E-mail: aldash51@mail.ru

КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев
Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан, E-mail: aldash51@mail.ru

Abstract. Oscillations of elastic membranes in 3D are modelled as degenerate multi-dimensional hyperbolic equations. For applied work, it is important to obtain explicit representations of solution of the studied boundary-value problems. This paper shows the unique solvability and obtains the explicit form of the classical solution of the mixed problem for degenerate multi-dimensional hyperbolic equations.
Keywords: well-posedness, mixed problem, degenerate hyperbolic equations, Bessel function.

Аннотация. Колебания упругих мембран в трехмерном пространстве описывается вырождающимся многомерными гиперболическими уравнениями. При изучении приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. В данной работе показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений.
Ключевые слова: корректность, смешанная задача, вырождающиеся гиперболические уравнения, функция Бесселя.

Введение

Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируется вырождающимся многомерными гиперболическими уравнениями [1, 2]. При изучении приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. В работах автора [3, 4] доказаны существование и единственность классического решения задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. Смешанная задача для этих уравнений в обобщенных пространствах изучена в [5, 6]. Однако вопросы гладкости решений и его представления до сих пор не исследованы.

В данной работе для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Геллерстедта показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи.

1. Постановка задачи и результат

Пусть D_α — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α, обозначим через Γ_α, S_α, S_0, соответственно.

В области D_α рассмотрим взаимно сопряженные вырождающихся многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv t^p \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

$$L^* \upsilon \equiv t^p \Delta_x \upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \tag{1*}$$

где $p = const > 0$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным x=(x_1,..., x_m), $m \geq 2$, а

$$d(x,t) = c - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t.$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1,..., x_m, t к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

В качестве смешанной задачи рассмотрим задачу

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C^1(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta), \quad u_t\Big|_{S_0} = \nu(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta). \tag{2}$$

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, ...$ — пространства Соболева.

Имеет место ([7])

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \le c_1, \ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2 \le c_2, \ c_1, \ c_2 = const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, и $\psi_n^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1,...,m$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\alpha) \subset C(\overline{D}_\alpha)$, $l \ge m+1$, $i = 1,...,m$.

Тогда справедлива

Теорема 1. *Если $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $l > \frac{3m}{2}$ и выполняется условие*

$$\cos\mu_{s,n}\alpha' \ne 0, \ s = 1,2,..., \tag{4}$$

то задача 1 имеет единственное решение, где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $\alpha' = \frac{2}{2+p}\alpha^{\frac{(2+p)}{2}}$, $n = 0,1,\dots$.

Далее докажем теорему 1.

2. Разрешимость задачи 1

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv t^p(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\sigma u}{r^2}) - u_{tt} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \tag{5}$$

где

$$\sigma \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1, \ g_j = (\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2, \ j > 1.$$

Известно [7], что спектр оператора σ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,...$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (5), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$, и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получим [8–10]

$$
\begin{gathered}
t^p \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} t^p \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ t^p \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} t^p \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \widetilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \\
\left. + \left[\widetilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} t^p + \sum_{i=1}^m (\widetilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k) \right] \bar{u}_n^k \right\} = 0.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$
\rho_0^1 t^p \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} t^p \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
\rho_1^k t^p \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} t^p \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} t^p \rho_1^k \bar{u}_1^k = \\
= -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
\rho_n^k t^p \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} t^p \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} t^p \rho_n^k \bar{u}_n^k = \\
= -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \widetilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + [\widetilde{c}_{n-1}^k + \right. \\
\left. + \sum_{i=1}^m (\widetilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k)] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \ldots .
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1, а уравнение (10) — от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместе с (8), приходим к уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\left\{ \bar{u}_n^k \right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ — решение системы (8)–(10), то оно является решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$
t^p \left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k \right) - \bar{u}_{ntt}^k = f_n^k(r, t), \tag{11}
$$

где $f_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r, t) \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (6), с учетом леммы 1 будем иметь

$$
\bar{u}_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \ \bar{u}_{nt}^k(r, 0) = \bar{\nu}_n^k(r), \ \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), k = \overline{1, k_n}, \ n \geq 0. \tag{12}
$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_n^k(t)$, получим

$$t^p\left(\bar{\upsilon}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k\right) - \bar{\upsilon}_{ntt}^k = \overline{f}_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \bar{\upsilon}_{nt}^k(r,0) = \nu_n^k(r), \quad \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n}, \quad n \geq 0, \tag{14}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t) = f_n^k(r,t) + \frac{\lambda_n}{r^2}t^p\psi_n^k + \psi_{ntt}^k,$$

$$\tau_n^k(r) = \bar{\tau}_n^k(r) - \psi_n^k(0),\ \nu_n^k(r) = \overline{\nu}_n^k(r) - \psi_{nt}^k(0).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (13), (14) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k \equiv t^p\left(\upsilon_{nrr}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right) - \upsilon_{ntt}^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{15}$$

$$\upsilon_n^k(r,0) = \widetilde{\tau}_n^k(r), \quad \upsilon_{nt}^k(r,0) = \widetilde{\nu}_n^k(r),\ \upsilon_n^k(1,t) = 0, \tag{16}$$

где

$$\overline{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4},\ \widetilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\overline{f}_n^k(r,t),$$

$$\widetilde{\tau}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\tau_n^k(r),\ \widetilde{\nu}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\nu_n^k(r).$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{17}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{18}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,0) = \upsilon_{1nt}^k(r,0) = 0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{19}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{20}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,0) = \widetilde{\tau}_n^k(r),\ \upsilon_{2nt}^k(r,0) = \widetilde{\nu}_n^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{21}$$

Решение выше указанных задач, рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{22}$$

при этом пусть

$$\widetilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t)R_s(r),\ \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r),\ \tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r). \tag{23}$$

Подставляя (22) в (18), (19), с учетом (23), получим задачу

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}R_s + \mu R_s = 0,\ 0 < r < 1, \tag{24}$$

$$R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{25}$$

$$T_{stt} + \mu t^p T_s(t) = -a_{ns}(t),\ 0 < t < \alpha, \tag{26}$$

$$T_s(0) = 0,\ T_{st}(0) = 0. \tag{27}$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является [11]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{28}$$

где $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Задача (26), (27) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $T_{s,n}(t)$ [1]

$$T_{s,n}(t) + \mu_{s,n}^2 \int\limits_0^t (t-\xi)\xi^p T_{s,n}(\xi) d\xi = -\int\limits_0^t (t-\xi) a_{ns}(\xi) d\xi, \tag{29}$$

которое имеет, и притом единственное, решение.

Подставляя (28) в (23) получим

$$\begin{gathered} r^{-\frac{1}{2}} \widetilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_s r), \; r^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^\infty b_{ns}^k J_\nu(\mu_s r), \\ r^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^\infty e_{ns}^k J_\nu(\mu_s r), \; 0 < r < 1. \end{gathered} \tag{30}$$

Ряды (30) — разложение в ряды Фурье-Бесселя [12], если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \widetilde{f}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{31}$$

$$\begin{gathered} b_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \widetilde{\tau}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \\ e_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \widetilde{\nu}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \end{gathered} \tag{32}$$

где $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, ...$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядка возрастания их величины.

Из (28), (29) получим решение задачи (18), (19) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{33}$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяется из (31).

Далее, подставляя (28) в (20), (21), с учетом (23), получим задачу

$$V_{stt} + \mu_{s,n}^2 t^p V_s(t) = 0, \; 0 < t < \alpha,$$

$$V_s(0) = b_{ns}^k, \; V_{st}(0) = e_{ns}^k,$$

в которой, произведя замену

$$T_s(t) = V_s(t) - b_{ns}^k - t e_{ns}^k \tag{34}$$

приходим к следующей задаче

$$T_{stt} + \mu_{s,n}^2 t^p T_s(t) = -q_{ns}^k(t), \tag{35}$$

$$T_s(0) = 0, \; T_{st}(0) = 0, \tag{36}$$

$$q_{ns}^k(t) = \mu_{s,n}^2 t^p (b_{ns}^k + t e_{ns}^k).$$

Задачи (35), (36) сводится также к интегральному уравнению (29), где вместо $a_{ns}^k(t)$ берется $q_{ns}^k(t)$.

Из (28), (29), (34) найдем решение задачи (20), (21)

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{37}$$

где b_{ns}^k, e_{ns}^k находятся из (32).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) $(n = 0)$, а затем (9), (12)$(n = 1)$ и т.д., найдем последовательно все $\upsilon_n^k(r,t)$ из (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (33), (37), $k = \overline{1, k_n}$, $n \geq 0$.

Итак, в области D_α, имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta) Lu dH = 0. \tag{38}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ — плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(D_\alpha)$ [13].

Отсюда и из (38), следует, что

$$\int\limits_{D_\alpha} f(r,\theta,t) Lu dD_\alpha = 0$$

и

$$Lu = 0, \ \forall (r,\theta,t) \in D_\alpha.$$

Таким образом, решением задачи (1) является ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{39}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ находятся из (33), (37).

Имеют место следующие свойства нулей функций Бесселя [12]:

1. Если $\mu_{\nu,1}, \mu_{\nu,2}, ...$ — положительные нули функций $J_\nu(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то
$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu+1,1} < \mu_{\nu,2} < \mu_{\nu+1,2} < \mu_{\nu,3} < ..., \ \nu > -1.$$
2. Пусть μ_ν, μ'_ν, μ''_ν являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $J''_\nu(z)$ соответственно. Тогда
$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}, \ \nu > 0,$$
$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)}, \ \nu > 0,$$
$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \mu''_\nu < \sqrt{(\nu^2-1)}, \ \nu > 1.$$

Также справедливы формулы [2, 12]:

$$\begin{gathered} \sin z = z(1 - z\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}[J_n(nz)]^2), \\ J_\nu(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}} \cos(z - \tfrac{\pi}{2}\nu - \tfrac{\pi}{4}) + 0(\tfrac{1}{z^{3/2}}), \ \nu \geq 0, \\ 2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z). \end{gathered} \tag{40}$$

Применяя признак Даламбера и упомянутые свойства, доказывается, что ряды (33), (37) и продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно. Далее используя формулы (40) и оценки [7]

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \ \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \ j=\overline{1,m-1}, \ q=0,1,\dots, \quad (41)$$

а также леммы и ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\tau(r,\theta), \ \nu(r,\theta), \ \psi(t,\theta)$, показывается, что полученное решение (39) принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$.

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлена.

3. Единственность решения задачи 1

Для этого сначала построим решение краевой задачи для сопряженного уравнения (1*) с данными

$$\upsilon\big|_{\Gamma_\alpha}=0, \ \upsilon\big|_{S_\alpha}=0, \ \upsilon_t\big|_{S_\alpha}=\nu(r,\theta)=\bar{\nu}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \ k=\overline{1,k_n}, \ n\geq 0, \quad (42)$$

где $\bar{\nu}_n^k(r) \in G, \ G$ — множество функций $\nu(r)$ из класса $C\left([0,1]\right) \cap C^1\left((0,1)\right)$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [13].

Решение задачи (1*), (42) будем искать в виде (6), где функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п. 2, функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют систему уравнений (8)–(10), где $\tilde{a}_{in}^k, \ a_{in}^k, \ \tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\tilde{a}_{in}^k, \ -a_{in}^k, \ -\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k, \ i=1,...,m, \ k=\overline{1,k_n}, \ n\geq 0$.

Далее, из краевого условия (42), в силу (6), получим

$$\bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0, \ \bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha)=0, \ \bar{\upsilon}_{nt}^k(r,\alpha)=\bar{\nu}_n^k(r), \ k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\dots . \quad (43)$$

Как ранее замечено, каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде (11). Как в п. 2, нетрудно показать, что задача (11), (43) имеет также единственное решение.

Таким образом, решение задачи (1*), (42) в виде ряда (39) построено, которое в силу (40), (41) принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$.

Из определения сопряженных операторов $L, \ L^*$ [14] имеем

$$\upsilon Lu - uL^*\upsilon = -\upsilon P(u) + uP(\upsilon) - u\upsilon Q,$$

где

$$P(u) = t^p \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos\left(N^\perp, x_i\right) - u_t \cos\left(N^\perp, t\right),$$

$$Q = \sum_{i=1}^m a_i \cos\left(N^\perp, x_i\right) - b\cos\left(N^\perp, t\right),$$

а $N^\perp$ — внутреняя нормаль к границе ∂D_α. По формуле Грина, имеем

$$\int\limits_{D_\alpha} (\upsilon Lu - uL^*\upsilon) dD_\alpha = \int\limits_{\partial D_\alpha} \left[\left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial N} \right) M + u\upsilon Q \right] ds, \quad (44)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = t^p \sum_{i=1}^{m} \cos\left(N^{\perp}, x_i\right) - \cos\left(N^{\perp}, t\right) \frac{\partial}{\partial t},$$

$$M^2 = t^{2p} \sum_{i=1}^{m} \cos^2\left(N^{\perp}, x_i\right) + \cos^2\left(N^{\perp}, t\right).$$

Из (44), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (42) получим

$$\int\limits_{S_\alpha} \nu(r,\theta) u(r,\theta,\alpha) ds = 0. \tag{45}$$

Поскольку линейная оболочка система функций $\{\overline{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна $L_2(S_\alpha)$ [13], то из (45) заключаем, что $u(r,\theta,\alpha) = 0$, $\forall (r,\theta) \in S_\alpha$.

Таким образом, мы приходим к задаче Дирихле:

$$Lu = 0, \ u\big|_{S_0} = 0, \ u\big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \ u\big|_{S_\alpha} = 0,$$

которая имеет нулевое решение, если выполняется условие (4) [3].

Следовательно, единственность решения задачи 1 установлена и теорема 1 доказана.

Замечание 1. Отметим, что корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений показана в [15].

Литература

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 724 с.
3. Алдашев С. А. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Геллерстедта. *Нелинейные колебания.* 2014. № 4. С. 3–12.
4. Алдашев С. А. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина. *Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика.* 2012. Вып. 26. № 5 (124). С. 12–25.
5. Краснов М. Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. *Матем. сб.* 1959. Т. 49 (91). С. 29–84.
6. Барановский Ф. Т. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождющегося на начальной плоскости. *Ученые записки Ленингр. пед. института.* 1958. Т. 183. С. 23–58.
7. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва: Физматгиз, 1962. 254 с.
8. Алдашев С. А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений. *Дифференц. уравнения.* 1998. Т. 34. № 1. С. 64–68.

9. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994. 170 с.
10. Алдашев С. А. Критерий существования собственных функций спектральной задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. *Дифференц. уравнения.* 2005. Т. 41. № 6. С. 795–801.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1965. 703 с.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 295 с.
13. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 543 с.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. Москва: Наука, 1981. 550 с.
15. Алдашев С. А. Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором. *Укр. матем. журнал.* 2017. Т. 69. № 7. С. 992–999.

Поступила: 01.02.2019 / Принята: 24.05.2019