КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю 113 прикладна математика

на тему:

СТРАТЕГІЧНИЙ АНАЛІЗ ТРАНСФОРМАЦІЙНИХ ЗМІН НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА-ФОРДА В УМОВАХ СКОРОЧЕНЬ ЕМІСІЙ ПАРНИКОВИХ ГАЗІВ

Виконав студент 4-го курсу
Альошін Ярослав Ігорович

(підпис)

Науковий керівник:
доцент, кандидат фіз.-мат. наук
Коробова Марина Віталіївна

(підпис)

Роботу заслухано на засіданні кафедрі моделювання складних систем
та рекомендовано до захисту, протокол № 18 від 10 червня 2022 р.

Завідувач кафедри МСС доктор техн. наук, доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2022

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ

В даній роботі проведено дослідження міжгалузевої моделі Леонтьєва-Форда та її модифікацій. Проаналізовано алгоритми дій виробництв в умовах емісій парникових газів або інших забруднювачів та проведено їх реалізацію у вигляді застосунку на мові програмування Python. Наведено методику обчислення величини екологічного податку, наведені відповідні обчислення за 2020 рік на основі статистичних даних, які представлені Державною службою статистики України.

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

IDE – Integrated Design Environment, інтегроване середовище розробки

ООН – Організація Об’єднаних Націй

COP26 – the 26th United Nations Climate Change conference, Конференція Організації Об’єднаних Націй зі зміни клімату

DLL – Dynamic Load Libraries, бібліотеки динамічної загрузки

GUI – Graphical user interface, графічний інтерфейс користувача

ВСТУП

Оцінка сучасного стану об'єкта дослідження. Проблема охорони навколишнього середовища та перерозподілу ресурсів є комплексною та має низку питань до вирішення. Науково-технічна та промислова діяльність з кожним роком чинить все більший негативний вплив на природу, тому виникають питання про врахування екологічного фактору при плануванні виробничої діяльності. Дані, отримані з дослідницької лабораторії Mauna Loa Observatory, вказують на постійне зростання викидів парникового газу в атмосферу (див. Рис. 1 та Рис. 2). [4]

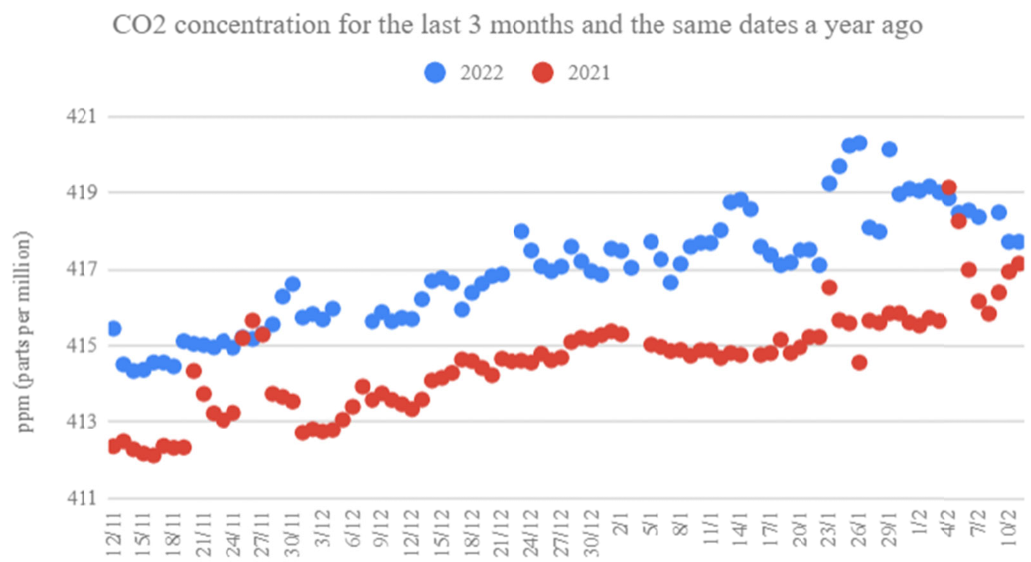

Рисунок 1 – Викиди CO_2 останні три місяці протягом двох років

Особлива роль у розв'язанні принципових проблем природокористування – обґрунтування величини витрат на охорону довкілля з врахуванням соціально-економічного ефекту та розподілу їх у територіальному-галузевому розрізі – належить балансовим еколого-економічним моделям типу «витрати-випуск», а також регіональним та галузевим моделям.

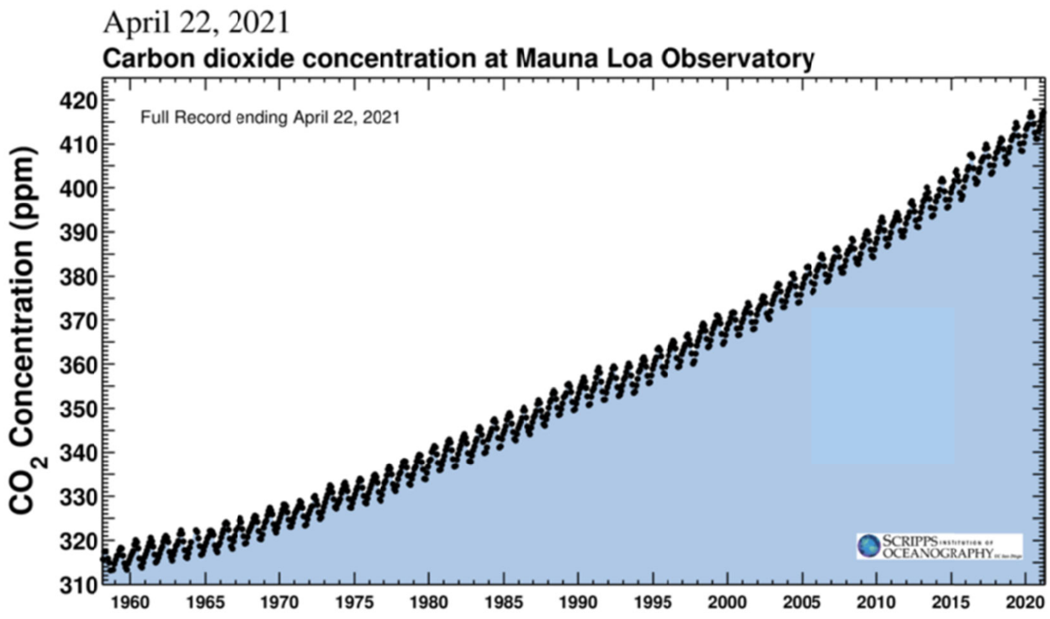

Рисунок 2 – Концентрація CO_2 в атмосфері. 1958-2021

Актуальність роботи. В Україні викиди зменшуються 3 роки поспіль на фоні пандемії COVID-19, однак спостерігаючи за світовою тенденцією нормалізації виробництва та збільшення видобутку корисних копалин, показники знову почнуть зростати. Україна постійно бере участь в екологічних ініціативах, зокрема на минулорічній 26-тій Конференції Сторін Рамкової Конвенції ООН зі зміни клімату (COP26) задля досягнення цілей Паризької угоди:

– утримання зростання середньої світової температури на рівні нижче плюс 2°C;
– мобілізація коштів у розмірі 100 мільярдів доларів США на рік для кліматичних заходів;
– суттєве скорочення викидів до 2030-го року, досягнення нульового рівня до середини сторіччя. [5]

Мета й завдання роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розвинення застосування алгоритмів еколого-економічних математичних моделей, зокрема моделі Леонтьєва-Форда та створення програмного засобу для розв'язування типових задач. Для досягнення цієї мети поставлено такі завдання.

- Дослідити міжгалузеву модель Леонтьєва-Форда.
- Розробити розрахункові алгоритми оптимізації галузевого виробництва та величину екологічного податку.
- Дослідити статистичні дані, приведені Державною службою статистики України.
- Розробити програмне забезпечення на мові програмування Python.

Об'єкт, методи й засоби розроблення. Об'єктом розроблення програмного засобу «Визначення величини екологічного податку та оптимізації виробництва» є процес використання алгоритмів міжгалузевої моделі Леонтьєва-Форда на визначення способу раціонального використання ресурсів та бюджетного наповнення країн задля модернізації промисловості.

В якості інструменту створення програмного засобу було обрано JetBrains PyCharm Community Edition 2021.2.3 – інтегроване середовище розробки (IDE) мовою програмування Python, яке є безкоштовним, вільно поширюваним, з відкритим вихідним кодом.

Python надає великий вибір користувацьких бібліотек – це збірка модулів, об'єктів та підпрограм які забезпечують доступ до функціональних можливостей системи та забезпечують стандартизовані рішення для багатьох проблем. Ключовою рисою цієї мови програмування є зрозумілий інтерфейс та широка вживаність для розв'язування задач з великим набором вхідних та вихідних даних.

Можливі сфери застосування. Дане дослідження та програмний продукт «Визначення величини екологічного податку та оптимізації виробництва» може застосовуватись на виробничих галузевих підприємствах та державних службах різного напряму.

РОЗДІЛ 1

МІЖГАЛУЗЕВА МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА-ФОРДА

1.1 Основні теоретичні поняття

Василь Леонтьєв, американський економіст російського походження, першим запропонував галузеву модель, що охоплює зв'язки економіки та екології, за що і отримав Нобелівську премію з економіки у 1973 році. Пізніше модель була вдосконалена введенням нової групи галузі, що відповідає за знешкодження шкідливих відходів, створених від першочергової галузі матеріального виробництва.

Основні умови моделі виражаються системою рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1, \\ x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2. \end{cases} \quad (1)$$

В системі (1) вектори-колонки

$$x_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T,$$

$$y_1 = (y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1)^T$$

є об'ємом виробництва головної продукції, об'ємом виробництва кінцевої продукції відповідно, а квадратна матриця n-го порядку $A_{11} = (a_{ij}^{11})_1^n$ є коефіцієнтами прямих витрат продукції i на виробництво одиниці продукції j. Вектори-колонки

$$x_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)^T,$$

$$y_2 = (y_1^2, y_2^2, \dots, y_m^2)^T$$

відповідають об'єму знищених забруднювачів та об'єму незнищених забруднювачів, що спричинені виробництвом продукції. Маємо матрицю $A_{12} = (a_{ig}^{12})_{i,g=1}^{n,m}$ – це прямокутна матриця витрат продукції i на одиницю знищення забруднювачів g; $A_{21} = (a_{kj}^{21})_{k,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця випуску забруднювачів k на одиницю вироблення продукції j; $A_{22} = (a_{kg}^{22})_1^m$ –

квадратна матриця випуску забруднювачів k на одиницю знищення забруднювачів g. [1]

Будемо припускати, що усі відповідні коефіцієнти матриць в системі (1) є невід'ємними, тобто

$$a_{ij}^{11} \geq 0, \qquad a_{ig}^{12} \geq 0, \qquad a_{kj}^{21} \geq 0, \qquad a_{kg}^{22} \geq 0.$$

Цей факт відповідає за розповсюдження на всі види виробничої діяльності (матеріальне виробництво та знищення забруднювачів) головної гіпотези основної моделі міжгалузевого балансу:
кількість технологічних способів дорівнює кількості видів продукції та в кожному технологічному способі виробляється лише один вид продукції.

Економічний зміст моделі Леонтьєва-Форда вимагає, щоб усі змінні були невід'ємними, тому в подальшому будемо вважати обов'язковим виконання наступних нерівностей:

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad y_1 \geq 0, \qquad y_2 \geq 0,$$
$$A_{11} \geq 0,\ \ A_{12} \geq 0,\ \ A_{21} \geq 0,\ \ A_{22} \geq 0.$$

Зауваження 1. Матриця невід'ємна тоді і тільки тоді коли кожен її елемент невід'ємний.

Зауваження 2. Систему (1) міжгалузевої моделі Леонтьєва-Форда частіше розглядаємо як узагальнення класичної схеми міжгалузевого балансу

$$x = Ax + y.$$

Дана схема чудово працює у випадку розгляду відкритої економічної системи. Мається на увазі, коли невиробниче споживання $\tilde{y}$ менше ніж чистий імпорт i окремих видів продукції, тобто ця продукція імпортується і для виробничого споживання також. З цього випливає, що кінцева продукція y для цих галузей є від'ємною

$$y = \tilde{y} - i < 0.$$

Тоді, групуючи галузі з недодатною кінцевою продукцією в блок $(x_2, -y_2)$, а галузі з додатною в блок (x_1, y_1), одержимо підтвердження умов невід'ємності матриць $A_{11}, A_{12}\, A_{21}, A_{22}$, і модель міжгалузевого балансу у вигляді системи (1), де $y_1 > 0$, $y_2 \geq 0$. Ці твердження дійсні для моделі Леонтьєва-Форда, та підтверджують можливість її використання при дослідженні міжгалузевих балансів відкритих економік. [2]

1.2 Умови існування невід’ємних розв’язків

Через економічну складову міжгалузевої моделі та обов’язкові умови, що накладаються на елементи системи (1), потрібно дослідити виникнення та перевірку невід’ємності розв’язків.

Розглянемо друге рівняння моделі

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2.$$

Ця сума відповідає на питання, яким є обсяг забруднення для основного та допоміжних видів виробничої діяльності. Вектор x_2 залежить не лише від припустимих об’ємів незнищуваних забруднювачів y_2, а й від суми в цілому. Максимальні припустимі значення y_2 визначаються прийнятими стандартами якості та захисту навколишнього середовища, встановленими державою, або умовами економічної рівноваги, проте вони можуть враховуватись виходячи з реальних техніко-економічних можливостей підприємства. Знищення забруднювачів має сенс при виконанні умови

$$y_2 \leq A_{21}x_1 + A_{22}x_2.$$

Перейдемо до розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1). Підставимо знайдене x_2 в перше рівняння і розв’яжемо відносно x_1, аналогічну дію проведемо для другого рівняння. В результаті отримаємо

$$x_1 = (E_1 - A_1)^{-1}[y_1 - A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}y_2], \tag{2}$$

$$x_2 = (E_2 - A_2)^{-1}[-y_2 + A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}y_1],$$

де E_1 та E_2 – діагональні одиничні матриці -го та m-го порядку відповідно, аналогічно і матриці A_1 та A_2, які мають наступний вигляд

$$A_1 = A_{11} + A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}A_{21},$$

$$A_2 = A_{22} + A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}A_{12}.$$

Отримавши розв'язок системи (1) у вигляді x_1 та x_2, можемо записати узагальнений векторний вигляд моделі:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (E_1 - A_1)^{-1} & (E_1 - A_1)^{-1}A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1} \\ (E_2 - A_2)^{-1}A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} & (E_2 - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, отримали явний вигляд оберненої матриці системи алгебраїчних рівнянь (1):

$$B = \begin{bmatrix} E_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Матриця B є блочною, і кожен елемент-блок матриці має свій економічний зміст:

B_{11} – коефіцієнти повних затрат виробленої продукції на одиницю кінцевої продукції;

B_{12} – коефіцієнти повних затрат виробленої продукції на одиницю зменшення незнищених забруднювачів;

B_{21} – коефіцієнти необхідного знищення забруднювачів на одиницю кінцевої продукції;

B_{22} – коефіцієнти необхідного знищення забруднювачів на одиницю зменшення незнищених забруднювачів.

Виходячи з цього, за допомогою даних коефіцієнтів можемо дещо інакше записати систему (1):

$$x_1 = B_{11}y_1 - B_{12}y_2,$$

$$x_2 = B_{21}y_1 - B_{22}y_2.$$

Приведемо поняття продуктивності економічної системи в математичній моделі, що залежить від умови існування невід'ємних розв'язків, зокрема матриці прямих затрат A. Продуктивна економічна система повинна містити таку матрицю коефіцієнтів A, яка при відповідних допустимих пропорціях розвитку виробництва забезпечувала б можливість одержання готової кінцевої продукції. Тобто, матриця A продуктивна, якщо виконується умова

$$(E - A)x = y > 0.$$

Умови щодо невід'ємності матриці повних матеріальних витрат B достатньо для продуктивності матриці A, тобто

$$B = (E - A)^{-1} \geq 0.$$

Узагальнимо поняття продуктивної блочної матриці A з невід'ємними елементами

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}: \tag{3}$$

Для продуктивності (3) необхідно вимагати одночасної продуктивності матриць A_{11}, A_{22}, A_1, A_2. Тоді, необхідною і достатньою умовою невід'ємності розв'язків моделі, що розглядається, при продуктивності матриці системи (3), за умови, що $y_1 > 0$, $y_2 \geq 0$, буде виконання $x_2 \geq 0$, тобто

$$(E_2 - A_2)^{-1}[-y_2 + A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}y_1] \geq 0.$$

Достатньою умовою невід'ємності розв'язків при продуктивності матриці A, при $y_1 > 0, y_2 \geq 0$ буде виконання нерівності

$$A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}y_1 \geq y_2 \tag{4}$$

або навіть

$$A_{21}y_1 \geq y_2.$$

Економічний зміст таких умов наступний: випуск основної та допоміжної продукції буде допустимо реалізований, якщо повний випуск забруднювачів, одержаний при виробництві кінцевої продукції в обсязі y_1, не менший, ніж об'єм незнищених забруднювачів y_2. [3]

1.3 Модифікація міжгалузевої моделі Леонтьєва-Форда

Введемо у розгляд нову галузь – галузь, що знищує парникові гази в еквіваленті CO_2, фіксуючи умову існування лише цього забруднювача. Враховуємо можливе створення нового забруднення в процесі знищення парникових газів. Тоді є потреба в тому, щоб зробити зміни в параметрах базової моделі (1).

Наприклад, замість векторів-стовпців

$$x_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)^T, \qquad y_2 = (y_1^2, y_2^2, \dots, y_m^2)^T,$$

у відповідній моделі будемо розглядати наступні скаляри:

x_{m+1} – обсяг знищених парникових газів,

y_{m+1} – обсяг незнищених парникових газів.

Тоді модифікація моделі Леонтьєва-Форда з відповідними змінами розглядається у такому вигляді:

$$x = Ax + ux_{m+1} + y,$$
$$x_{m+1} = vx + wx_{m+1} - y_{m+1}.$$

Проведемо аналогію у позначеннях модифікованої моделі з класичною, вираженою системою (1): $A = A_{11}$, $x = x_1$, $y = y_1$. У ролі матриці A_{12} виступатиме вектор-стовпчик u витрат кожного з видів продукції, які необхідні для знищення одиниці забруднення (парникових газів); матриця A_{21} виражена вектор-рядком v емісій парникових газів при виробництві кожного з видів продукції:

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \geq 0,$$
$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \geq 0.$$

У ролі матриці A_{22} буде вектор w викидів парникових газів при знищенні одиниці забруднень, елементи якого мають обмеження $0 \leq w < 1$.

Також в деяких джерелах можна зустріти такий модифікований варіант моделі:

$$x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + Dy_2 + y_1,$$
$$x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2, \tag{5}$$

де Dy_2 – витрати на обслуговування викидів парникових газів, зокрема, це плата за дозволи на викиди. $D = (d_{ig}^{12})_{i,g=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця витрат продукції i на одиницю викидів забруднювача g. Для модифікацій міжгалузевої моделі зберігаються всі властивості, притаманні класичній моделі Леонтьєва-Форда.

Модель (5) можна подати у загальному вигляді

$$Au = C,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} E_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E_2 - A_{22} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$C = \begin{pmatrix} E_1 & D \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

E_1, E_2 – блоки матриць з одиничними діагональними елементами, 0 – матриця нульових елементів. Введемо «збурену», в елементах матриць A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\bar{A}u = \bar{C}$ (тут $\bar{A}, \bar{C}$ – збурені матриця та стовпчик відповідно). Неважко переконатись, що $\overline{A^{-1}} \times C = u$, де матриця $\overline{A^{-1}}$ є оберненою до $\bar{A}$, що означає оберненість до матриці A (3), в якій проведено заміщення довільного *k-го* стовпчика (A_k) матриці обмежень стовпцем

$$\overline{A_k} = A_k + A'_k.$$

Твердження 1. Для проведення розрахунків будемо використовувати загальну формулу розрахунку компонент вектора розв’язку $\overline{u_0}$, який обраховується в результаті збурення вектора-стовпця A_k матриці обмежень A, у такому вигляді:

$$\overline{u_0} = u_0 - \frac{u_{0k}}{L_{kk}} L'_k\ , \tag{7}$$

причому

$$\overline{L_{kk}} = 1 + (A^{-1})_k \times A'_k L'_k = A^{-1} \times A'_k.$$

Зауваження. Формула (7), яка наведена в твердженні 1 – це спосіб подання рівняння прямої у параметричній формі, де u_0 – початковий вектор, L'_k – вектор нормалі, $-\frac{u_{0k}}{L_{kk}}$ – значення параметра заміщення впродовж вектора L'_k від u_0. Значення компонент вектора L'_k та $-\frac{u_{0k}}{L_{kk}}$ формує величина збурення в довільному стовпці з номером k. [1]

РОЗДІЛ 2

ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МІЖГАЛУЗЕВОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА-ФОРДА

2.1 Інструменти розробки

Мова програмування Python – високорівнева інтерпретована мова, в якій підтримується кілька парадигм програмування, розроблена для полегшеної читабельності, чіткості та функціональності. Основною особливістю даної мови є наявність стандартних та користувацьких DLL бібліотек, що дозволяють отримати доступ до уже реалізованої логіки у вигляді функцій та змінних для розширення можливостей застосунку без написання власного коду.

Основні переваги Python:

- Максимальна зрозумілість для користувача;
- Покращена продуктивність;
- Інтерпретована мова з динамічною типізацією;
- Безкоштовна з відкритим вихідним кодом;
- Велика кількість готових бібліотек для використання;
- Портативна.

Окрема треба зазначити недоліки Python:

- Мала швидкість компіляції/виконання;
- Неоптимізоване використання пам’яті комп’ютера;
- Слабкість в мобільному програмуванні;
- Помилки виконання(Runtime Errors) в зв’язку з динамічною типізацією.

Окремо варто виділити бібліотеки Pandas, Numpy, Tkinter, Scipy, які використовуються в цьому проекті. Numpy та Scipy вживані в широкому спектрі розв’язуваних задач, зокрема матричні та диференціальні обчислення. Бібліотека Pandas формує основний інструмент в аналізі даних, завдяки можливістю завантажувати файли сторонніх програм, таких як: EXCEL, MATLAB та файлів з розширенням .JSON, .HTML, .SQL, .SAS тощо; зручним використанням бібліотечних функцій для маніпулювання даними та їх візуалізацією. Tkinter це стандартна бібліотека мови Python для організації діалогів у програмі за допомогою віконного графічного інтерфейсу (GUI).

JetBrains PyCharm – інтегроване середовище розробки, яке складається з редактора програмного коду, інструменти для відлагодження та складання програм. Також містить інтерпретатор, можливість написання автоматизованих тестів та систему контролю версій.

Переваги, які надає JetBrains PyCharm:

- Зручний інтерфейс, добре підходить для редагування коду програми. Вбудована функція підсвічування коду для зручності його читання.
- Відповідність дужок, авто-доповнення. Корисно у випадках пошуку незакритих дужок, без яких програма не може бути запущена через виникнення синтаксичної помилки.
- Вбудований інструмент завантаження бібліотек, підтримка фреймворків різного типу та редактор інших мов програмування, наприклад JavaScript, TypeScript тощо.
- Наявні користувацькі гарячі клавіші, можливість налаштувати їх поєднання під окремого користувача. [7]

2.2 Алгоритми визначення трансформаційних змін

У результаті дослідження вище наведеного матеріалу, можемо розглянути два алгоритми визначення нової схеми поведінки підприємства, в умовах технологічних модифікацій, на основі галузевих даних. Дані алгоритми основані на модифікації (6) міжгалузевої моделі Леонтьєва-Форда та збурення елементів матриці, і дозволяють визначати зміни в обсягах валового випуску при зміні технологічних матриць еколого-економічної моделі (3).

Перший алгоритм оснований на методі збурення одного рядка або стовпчика базисної технологічної матриці, що дозволяє проводити точні та конкретні зміни у виробництві підприємства. Отже, проведемо дослідження впливу змін k-го стовпця матриці обмежень A у вигляді $\overline{A_k} = A_k + A'_k$ на розв'язок u_0, тобто в такій формі замінено A на $\bar{A}$.

Алгоритм 1.

Крок 1. Маємо відомий вектор $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m})^T$, пряму базисну матрицю A_b та обернену базисну матрицю A_b^{-1} (3).

Крок 2. Проведемо процедуру заміщення довільного k-го стовпця матриці обмежень A_k стовпцем $\overline{A_k}$. Знаходимо вектор

$$\overline{L_k} = (L_{k1}, L'_{k2}, \dots, L_{km}) = A_b^{-1} \times \overline{A_k}.$$

Крок 3. Сформуємо новий розв'язок у вигляді

$$\overline{u_{0k}} = \frac{u_{0k}}{1 + (A_b^{-1})_k \times A'_k} = \frac{u_{0k}}{\overline{\overline{L_{kk}}}}, \quad i = k\ ,$$

$$\overline{u_{0\iota}} = u_{0i} - \frac{u_{0k}}{1 + (A_b^{-1})_k \times A'_k} \times [(A_b^{-1})_i \times A'_k] = u_{0i} - \frac{u_{0k}}{\overline{\overline{L_{kk}}}} \times \overline{L_{k\iota}}, \quad i \neq k.$$

Проілюструємо наведений алгоритм визначення об'ємів валового галузевого випуску у випадку технологічних міжгалузевих змін на умовних даних. Вдосконалити та автоматизувати розв’язання допоможе програмний продукт, створений мовою програмування Python в середовищі JetBrains PyCharm. Повний код програми викладений у додатку А.

Для початку введемо коефіцієнти технологічних матриць еколого-економічної моделі, що формують блочну матрицю A (3).

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Так як дані можуть змінюватись, в програмі надається можливість користувачеві самому вводити значення за допомогою інтерфейсу (рис. 3).

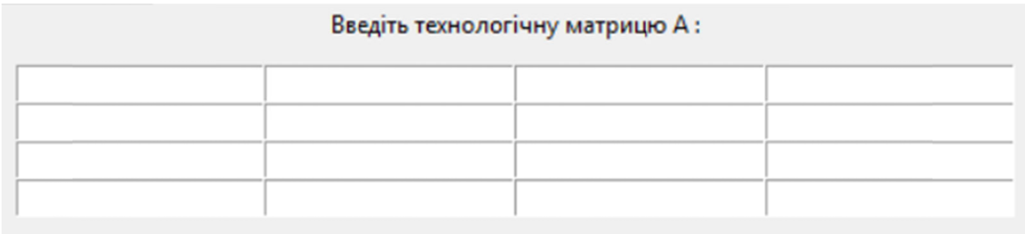

Рисунок 3 – Введення даних у матрицю A

Далі вводимо матрицю витрат D на обслуговування забруднювачів, у нашому випадку емісій парникових газів, а також вектор y_1 кінцевого випуску і вектор y_2 обмеження за викидами парникових газів:

$$D = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ці дані ми також можемо ввести самостійно з клавіатури (рис. 4).

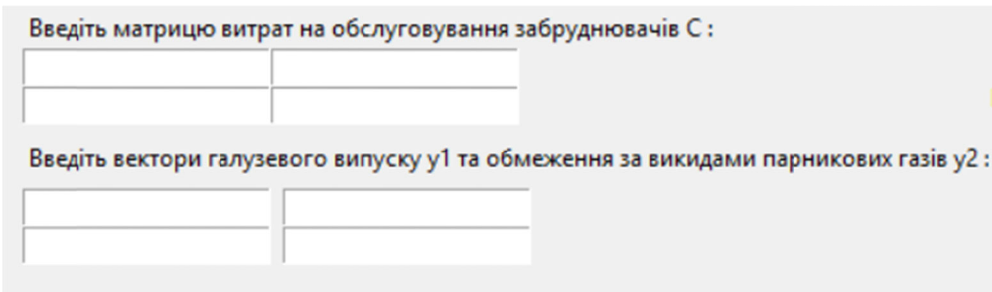

Рисунок 4 – Введення даних у матрицю D та вектори y_1 та y_2

Перевіримо продуктивність моделі та виконання умови невід'ємності (4). Це можна зробити, натиснувши на кнопку «Знайти розв'язок», що знаходиться в самому низу інтерфейсу, після того як всі дані були введені. Після цього на екрані з'явиться результат перевірки умови та виконання алгоритму в цілому. Якщо модель продуктивна, то на екрані буде виведено наступне (рис. 5):

```
Перевірка виконання умови на продуктивність моделі
[[ True]
 [ True]]
```

Рисунок 5 – Результат перевірки продуктивності

При виконанні умови продуктивності можемо переходити до розв'язання задачі.

1. За допомогою введеної блочної матриці A знаходимо обернену до неї матрицю A^{-1} (рис. 6):

```
Обернена до блочної матриці А
 [[  1.25    3.125  -3.125   0.625]
 [-11.25    6.875   3.125  -0.625]
 [  8.75   -8.125  -1.875   4.375]
 [  5.     -2.5     2.5    -2.5  ]]
```

Рисунок 6 – Виведення програми результату обертання матриці

2. Для вихідної системи (6) знайдемо розв'язок, заданий вектором u, методом Жордано-Гауса. Даний крок буде виведений на екрані інтерфейсу (рис. 7):

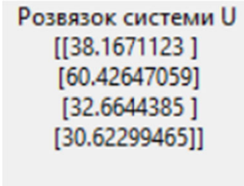

Рисунок 7 – Розв’язок системи u алгебраїчним методом

3. Припустимо, що збурення матриці A зазнає третій стовпець. Прикладний зміст зміни еколого-економічних показників такий: зазнають збільшення коефіцієнт витрат 1-ї галузі на знищення 1-го виду забруднення, збільшення коефіцієнт витрат 2-ї галузі на знищення 1-го виду забруднень; зазнають зменшення коефіцієнт випуску забруднювачів 1-ї галузі на знищення цих самих забруднювачів, зменшення коефіцієнти випуску забруднювачів 2-ї галузі на знищення цих самих забруднювачів. Тоді проводимо заміщення 3-го стовпця матриці обмежень A_3 стовпцем $\overline{A_3}$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Програма дає можливість самому вибрати, який стовпчик матриці A буде зазнавати збурення, його номер також вводиться з клавіатури (рис. 8).

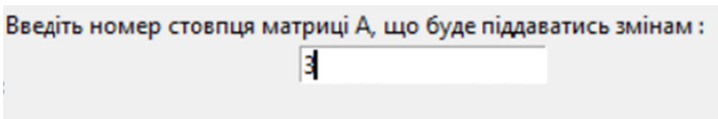

Рисунок 8 – Введення номера збуреного стовпчика

Після цього, знаходимо вектор $\overline{L_3} = A^{-1} \times \overline{A_3}$:

$$\overline{L_3} = \begin{pmatrix} 1.25 & 3.125 & -3.125 & 0.625 \\ -1.125 & 6.875 & 3.125 & -0.625 \\ 8.75 & -8.125 & -1.875 & 4.375 \\ 5.0 & -2.5 & 2.5 & -2.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Результатом цього множення є вектор, що виводиться в нас на екрані (рис. 9).


Вектор L3 - вектор змін
[[0.625]
[-0.625]
[0.375]
[0.5]]

Рисунок 9 – Вектор змін $\overline{L_3}$

4. Знаходимо розв'язки нашої моделі, згідно з алгоритмом. Вони з'являться на екрані інтерфейсу і матимуть наступний вигляд (рис. 10):

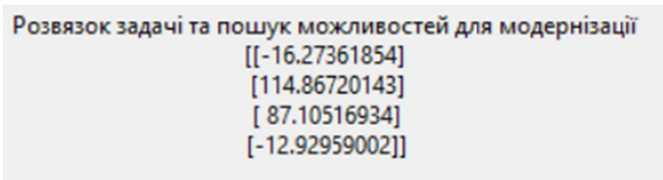
Розвязок задачі та пошук можливостей для модернізації
[[-16.27361854]
[114.86720143]
[87.10516934]
[-12.92959002]]

Рисунок 10 – Кінцеве рішення задачі

Даний розв'язок дає нам можливість проінспектувати підприємство, та зрозуміти, що першу галузь виробництва (перший рядок) потрібно суттєво вдосконалювати, як і допоміжна галузь, що знищує забруднювачі (четвертий рядок). На це вказують від'ємні показники відповідного вектора.

В основі другого алгоритму лежить ідея заміщення не одного стовпчика чи рядка, як в першому алгоритмі, а лише одного елемента. Дані заміщення мають реальний економічний зміст, що показано в рішеннях реальних задач.

Алгоритм 2.

Крок 1. Знаходимо обернену матрицю A^{-1} та розв'язок вихідної системи (6) – вектор u_0.

Крок 2. Збурюємо матрицю A в елементі a_{kj}, так щоб $\overline{a_{kj}} = a_{kj} + a'_{kj}$.

Крок 3. Визначимо коефіцієнт відповідних змін $\overline{a_{kk}} = 1 + a'_{kj} \cdot e_{jk} \neq 0$, де e_{kj} – відповідний елемент матриці A^{-1}.

Крок 4. Для матриці, яка обернена до $\bar{A}$, знаходимо вектор-стовпець $\overline{e_k} = \frac{e_k}{\alpha_{kk}}$.

Крок 5. Визначимо нев'язку збуреного рядка в елементі a'_{kj}:

$\Delta_l = \overline{\Delta_k} = a'_{kj} \cdot u_{0j}$, де u_{0j} – j-та компонента u_0.

Крок 6. Шукаємо новий розв'язок за допомогою співвідношення [8]

$$\overline{u_0} = u_0 - \overline{e_k} \cdot \Delta_l.$$

Вхідні дані залишаються незмінними, тобто маємо блочну технологічну матрицю A та матрицю витрат на обслуговування забруднювачів D, а також вектор кінцевого випуску y_1 і вектор обмежень викидів забруднювачів y_2. Це означає, що умова продуктивності виконується, але для коректності роботи алгоритмів, перевірку потрібно робити при будь-якій зміні даних. Спосіб введення даних збережений в такому ж вигляді, як на Рисунку 3 та Рисунку 4, і виконується за допомогою клавіатури. Переходимо до розв'язання задачі:

1. Для вихідної системи, через однакові дані, розв'язок u залишається таким же, як і на Рисунку 7. Знайдемо обернену матрицю до матриці A, що описана в рівнянні (6) (рис. 11):

```
[1.79144385 0.73529412 0.60160428 0.76203209]
[1.07843137 2.00980392 0.73529412 0.93137255]
[1.04278075 1.32352941 1.99197861 1.18983957]
[1.10516934 1.2745098  1.04278075 1.98752228]
```

Рисунок 11 – Матриця A^{-1}

2. В другому алгоритмі збурення зазнає лише один елемент, який вибирає користувач. Тому це було реалізовано наступним чином (рис. 12):

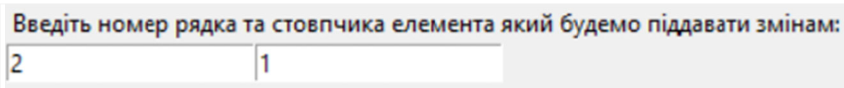

Рисунок 12 – Вибір користувачем елемента збурення

Тобто, користувач вибирає елемент блочної матриці A, що буде відповідати за технологічні зміни на підприємстві. Для даного прикладу було обрано збурення елементу $a_{21} = 0.3$, а саме збільшити його на 0.1. Економічний зміст пояснюється збільшенням витрат продукції 2-ї галузі на одиницю випуску 1-ї продукції.

3. Знайдемо $\overline{a_{kk}} = 1 + 0.1 \cdot a_{12}^{-1} = 1 + 0.1 \cdot 0.74 = 1.074.$

4. Визначимо вектор-стовпчик

$$\overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0.73 \\ 2.0 \\ 1.32 \\ 1.27 \end{pmatrix} \Big/ 1.074 = \begin{pmatrix} 0.68 \\ 1.86 \\ 1.23 \\ 1.18 \end{pmatrix}.$$

5. Розрахуємо нев’язку збуреного рядка

$$\Delta_1 = \overline{\Delta_2} = 0.1 \cdot 38.17 = 3.817.$$

6. Знайдемо новий розв’язок у вигляді вектора $\overline{u_0}$ (рис. 13):

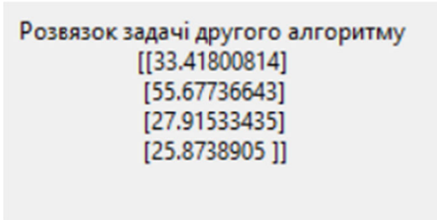

Рисунок 13 – Розв’язок другого алгоритму еколого-економічної моделі

Аналізуючи отриманий розв’язок, можемо зробити наступні висновки. Збільшення витрат продукції 2-ї галузі на одиницю випуску 1-ї продукції в рамках балансової еколого-економічної моделі має вплив на зменшення обсягів валового випуску 1-ї та 2-ї продукції галузевого виробництва на 4.7 та 4.8 одиниць, а також обсягів утилізації забруднень 1-го та 2-го видів на 4.7 та 4.0 одиниць відповідно.

Наявність реалізації двох алгоритмів ставить перед підприємствами вибір: інвестувати кошти в модернізацію виробництва, наприклад, встановивши нові очисні споруди, або сплатити екологічний податок на рахунок державного бюджету. Величину доцільного екологічного податку будемо розраховувати також на основі міжгалузевої моделі Леонтьєва-Форда.

2.3 Визначення величини екологічного податку

Кожного року Державна служба статистики України публікує журнал «Національні рахунки», в якому наведено головні статистичні дані з економіки, демографії, соціології тощо. На основі даних міжгалузевого балансу та таблиці «витрати-випуск» за 2020 рік, проведемо обрахунки величини екологічного податку, що могла отримати Україна на основі моделі

Леонтьєва-Форда. Сформуємо відповідну матрицю повних витрат, в якій виділено 8 галузей, а саме:

1. сільське, рибне та лісове господарство;
2. добування кам'яного та бурого вугілля;
3. добування сирої нафти та природного газу;
4. добування металевих руд, розроблення кар'єрів;
5. виробництво харчових продуктів, напоїв;
6. текстильне виробництво, одягу, шкіри;
7. виробництво деревини, паперу, поліграфічна діяльність
8. виробництво коксу та коксопродуктів.

Зведемо модель Леонтьєва-Форда до вигляду, коли враховується поява нової галузі – знищення парникових газів. Тоді матриця прямих витрат A набуде приросту ΔA, відповідно матриця повних витрат $B = (E - A)^{-1}$ набуде приросту $\Delta B = ((E - \Delta A \cdot B)^{-1} - E)B$.

Проведемо відповідні розрахунки за даними міжгалузевого балансу України за 2020 рік. Для цього сформуємо матрицю повних витрат (матриця B) у табл.1 [6].

Таблиця 1

Коефіцієнти матриці повних витрат

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.2865	0.0167	0.0083	0.0103	0.2499	0.0223	0.1605	0.0193
2	0.0200	1.0653	0.0150	0.0544	0.0218	0.0175	0.0399	0.6228
3	0.0365	0.0410	1.0430	0.0571	0.0291	0.0265	0.0536	0.0397
4	0.0142	0.0413	0.0162	1.0806	0.0171	0.0126	0.0203	0.0322
5	0.0027	0.0010	0.0006	0.0008	1.0341	0.0015	0.0014	0.0013
6	0.0019	0.0028	0.0015	0.0025	0.0024	1.0818	0.0043	0.0038
7	0.0151	0.0203	0.0090	0.0144	0.0498	0.0176	1.0378	0.0193
8	0.0070	0.00191	0.0054	0.0130	0.0067	0.0052	0.0130	1.0417

Коефіцієнти витрат кожного з 8 видів продукції, що потрібні для утилізації парникових газів у еквіваленті CO_2 мають такі значення:

$$u = (0; 0.00431; 0.08965; 0.03672; 0.00025; 0; 0)^T.$$

Коефіцієнти об'єму викидів парникових газів на одиницю виготовленої продукції кожної з 8 галузей становлять:

$v = (0.0017; 0.0176; 0.02993; 0.44729; 0.01074; 0.00059; 0.01894; 0.00296).$

Коефіцієнт об'єму виникнення забруднювачів (CO_2) на одиницю їх утилізації становить $w = 0.06982$. В результаті обрахунків була отримана матриця прямих витрат A (табл. 2).

Таблиця 2

Коефіцієнти матриці прямих витрат

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.4291	0.1514	0.4800	0.2117	0.3532	0.0205	0.0214	0.0416
2	0.5807	0.5182	0.0616	0.0202	0.0890	0.0181	0.0104	0.2446
3	0.0302	0.0382	0.0208	0.0452	0.2010	0.0336	0.0264	0.0174
4	0.2942	0.8523	0.0145	0.0502	0.0147	0.0723	0.0440	0.2654
5	0.1429	0.5944	0.1117	0.0309	0.4700	0.4823	0.0176	0.0059
6	0.0398	0.1984	0.0555	0.0102	0.0125	0.1148	0.1882	0.9167
7	0.03045	0.0955	0.0393	0.0427	0.0522	0.3665	0.4289	0.0391
8	0.0141	0.2347	0.0122	0.2338	0.0745	0.0213	0.4965	0.3026

Матриця приростів прямих витрат при введені нової галузі ΔA (табл. 3).

Таблиця 3

Коефіцієнти матриці $A + \Delta A$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.4305	0.1519	0.4816	0.2124	0.3543	0.0205	0.0214	0.0417
2	0.5826	0.5199	0.0618	0.0202	0.0892	0.0181	0.0105	0.2454
3	0.0303	0.0383	0.0208	0.0435	0.2016	0.0337	0.0264	0.0175
4	0.2951	0.8551	0.0145	0.0503	0.1475	0.0725	0.0441	0.2663
5	0.1433	0.5963	0.1120	0.0310	0.4715	0.4893	0.0176	0.0059
6	0.0399	0.1990	0.0556	0.0102	0.0126	0.1151	0.1889	0.9197
7	0.0305	0.0958	0.0394	0.0428	0.0523	0.3677	0.4303	0.0392
8	0.0417	0.2354	0.0124	0.2345	0.0747	0.0214	0.4981	0.3036

Важливо вказати, що дані таблиці виражені в індексах цін на основну продукцію, а не в грошових одиницях. Також вважаємо, що знищення забруднювачів відбувається у нерозривному процесі «випуск продукції + знищення забруднювачів». У цьому випадку на баланс продукції основного виробництва виноситься оплата праці, встановлення засобів допоміжного виробництва (очищувачів), та додатковий продукт цього виробництва, через це вартість знищення забруднювачів повністю підпорядковується матеріальним витратам.

Для моделі (1), зокрема, для відповідної її модифікації, існує відповідна двоїста модель міжгалузевої залежності цін (ціноутворення), яка має вигляд:

$$p = pA + p_{m+1}v + r,$$

$$p_{m+1} = pu + p_{m+1}w.$$

Тут $p = (p_1, \dots, p_n)$ – вектор-рядок цін галузевої продукції виробництва, p_{m+1} – ціна знищення одиниці забруднювачів, $r = (r_1, \dots, r_n)$ – вектор-рядок коефіцієнтів умовно-чистої продукції основного виробництва. В даній моделі коефіцієнт умовно-чистої продукції допоміжного виробництва дорівнює нулеві, що дає можливість обрахувати вартість знищення забруднювачів:

$$p_{m+1} = r(A + \Delta A)\frac{u}{1 - w} \approx 0.22974.$$

Екологічний податок може бути поданий як плата за «технологічні викиди при виробництві». При цьому виникає можливість враховувати показник k – показник забрудненості технологій, і величина екологічного податку обчислюється за формулою:

$$e = kr(B + \Delta B)\frac{uv}{(1-w)(1+k-w)} \cdot x\,. \qquad (8)$$

Нижня межа екологічного податку допоможе владі встановити розмір самих виплат та показник забрудненості технологій, який допустимий для виробництв окремих галузей [3]:

$$e > kr\frac{uv}{1+k-w}y.$$

Використовуючи формулу (8), знаходимо величину екологічного податку для наступних показників забруднення технологій:

$$k = \{0.1; 0.2; 0.5; 1\},$$

і отримуємо результати. За даними 2020 року:

при $k = 1$ сума бюджетних надходжень склала б 4 млрд. 671 млн. 577 тис. 489 грн;

при $k = 0.5$ – 2 млрд. 780 млн. 13 тис. 560 грн;

при $k = 0.2$ - 1 млрд. 403 млн. 322 тис. грн;

при $k = 0.1$ – 915 млн. 39 тис. грн.

Варто зауважити, що в порівнянні з 2016 роком, коли ставка податку на викиди CO_2 складала 0,41 грн за тонну, зараз вона складає 10 грн за тонну. Тому при викидах в обсязі 707337 тонн, що випливає з оприлюднених Державною службою статистики даних за 2020 році, знаходимо, що податкові надходження склали 1 млрд. 158 млн. грн.

Задля аналізу отриманих результатів порівняємо результати 2016, 2019 та 2020 року (рис. 14).

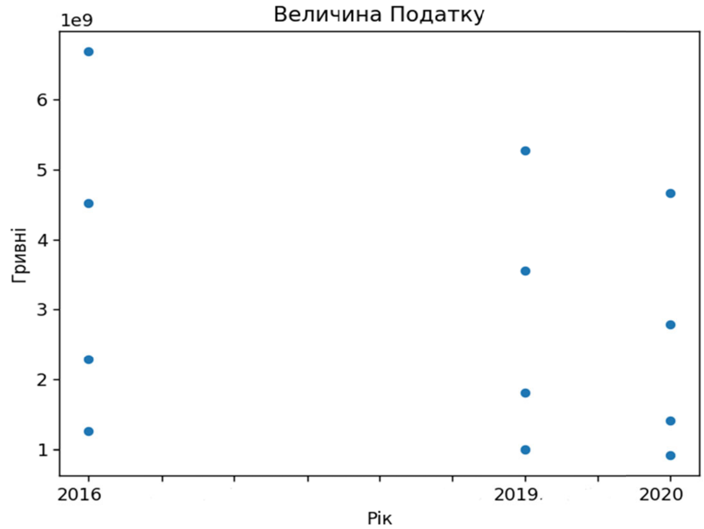

Рисунок 14 – Порівняльна статистика екологічного податку

Аналізуючи графік, приходимо до висновку, що величина екологічного податку прямо залежить від зовнішніх чинників, таких як пандемія COVID-19 та інших, внаслідок чого скорочуються викиди в атмосферу через суттєві обмеження людської діяльності. Також на цю величину можуть впливати розвиток зеленої енергетики, модернізація виробництв, розробка планів щодо обмеження викидів та усунення їх впливу, а також їх реалізація.

ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи було виконано наступні завдання:

- Проведено теоретичне дослідження еколого-економічної моделі Леонтьєва-Форда та її модифікацій. Показано, що ця балансова модель є універсальним інструментом для розв'язування різнопланових еколого-економічних задач.
- Розглянуто та проаналізовано два алгоритми пошуку оптимальних рішень для модернізації виробництва в контексті актуалізації екологічних вимог, а також проведено реалізацію цих алгоритмів у вигляді застосунку.
- Наведено процедуру визначення обсягу екологічного податку, що дасть змогу державі переінвестувати кошти в захист довкілля та його відновлення. Показано, що податок може змінюватись в залежності від того, як будуть змінюватись дані міжгалузевого економічного балансу, а також відповідних тарифних нормативів.

Для розв'язування поставлених завдань було створено програмний продукт мовою програмування Python, що може бути використаний як для реалізації відповідних задач на виробництвах різних галузей, так і для прийняття відповідних рішень на рівні державного управління.

Варто розуміти, що маючи справу з статистичними даними, завжди є ризик у відсутності саме тих даних, які необхідні для обчислення. Це, у першу чергу, стосується «екологічних» параметрів та характеристик. Деякі з них потрібно розраховувати на основі наявних чисел, що може привести до певних похибок в результаті обчислень (що, власне, і мало місце в даній роботі).

Дане дослідження повинно сприяти більш ефективному природокористуванню, та, відповідно, зменшенню викидів парникових газів в еквіваленті CO_2. Адже для зменшення екологічного податку підприємство буде зацікавлене в модернізації виробництва та покращенні знищувачів забруднення. На основі наведених досліджень, а також завдяки програмній реалізації, власне, створено можливість порівняти витрати на «екологізацію» виробничих технологій з витратами, пов’язаними з «екологічним» оподаткуванням.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Air Pollution and the Economic Structure: Empirical Results of Input-Output Computations", with Daniel Ford (co-author). In Input-Output Techniques: Papers Presented at the Fifth International Conference on Input-Output Techniques, Geneva, January, 1971. Edited by A. Brody and A. P. Carter: North-Holland Publishing Company, 1972.
2. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Гориціна І.А., Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. Київ: Київський університет 2012 рік.
3. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку – Київ: Вища школа, 1999.
4. The World Only [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://theworldonly.org/co2-concentration-last-week/
5. United Nations Climate Change [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://unfccc.int/process-and-meetings/the-paris-agreement/the-paris-agreement
6. Державна служба статистики України Д. Національні рахунки України 2020//Статистичний збірник .– К. – 2021. – С. 164-165.
7. Довідник по Python [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://www.python.org/
8. Кудін В.І., Онищенко А.М. Стратегічний аналіз трансформаційних змін міжгалузевої взаємодії в умовах виконання обмежень зі скорочення емісій парникових газів //International Journal of Innovative Technologies in Economy. – 2018. – №. 2 (14). – С. 3-10.

Додаток А

```
import tkinter as tk
import numpy as np
from scipy import linalg

class SimpleTableInput(tk.Frame):
    def __init__(self, parent, rows, columns):
        tk.Frame.__init__(self, parent)

        self._entry = {}
        self.rows = rows
        self.columns = columns

        # register a command to use for validation
        vcmd = (self.register(self._validate), "%P")

        # create the table of widgets
        for row in range(self.rows):
            for column in range(self.columns):
                index = (row, column)
                e = tk.Entry(self, validate="key", validatecommand=vcmd)
                e.grid(row=row, column=column, stick="nsew")
                self._entry[index] = e
        # adjust column weights so they all expand equally
        for column in range(self.columns):
            self.grid_columnconfigure(column, weight=1)
        # designate a final, empty row to fill up any extra space
        self.grid_rowconfigure(rows, weight=1)
```

```
def solve(self):
    '''Return a list of lists, containing the data in the table'''
    result = []
    for row in range(self.rows):
        current_row = []
        for column in range(self.columns):
            index = (row, column)
            if row == column:
                current_row.append(1 - float(self._entry[index].get()))
            else:
                current_row.append(0 - float(self._entry[index].get()))
        result.append(current_row)
    matrix_A = np.array(result)
    return matrix_A

def get(self):
    '''Return a list of lists, containing the data in the table'''
    result = []
    for row in range(self.rows):
        current_row = []
        for column in range(self.columns):
            index = (row, column)
            current_row.append(float(self._entry[index].get()))
        result.append(current_row)
    matrix = np.array(result)
    return matrix

def obernena(self):
    '''Return a list of lists, containing the data in the table'''
    result = []
```

```
        for row in range(self.rows):
            current_row = []
            for column in range(self.columns):
                index = (row, column)
                if row == column:
                    current_row.append(1 - float(self._entry[index].get()))
                else:
                    current_row.append(0 - float(self._entry[index].get()))
            result.append(current_row)
        matrix_A = np.array(result)
        matrix_A_ob = linalg.inv(matrix_A)
        return matrix_A_ob

    def _validate(self, P):
        if P.strip() == "":
            return True


        try:
            f = float(P)
        except ValueError:
            self.bell()
            return False
        return True

class Example(tk.Frame):
    def __init__(self, parent):
        tk.Frame.__init__(self, parent)
        self.label = tk.Label(text = 'Введіть технологічну матрицю А :')
        self.A = SimpleTableInput(self, 4, 4)
```

self.label1 = tk.Label(text='Введіть матрицю витрат на обслуговування забруднювачів C :')

self.C = SimpleTableInput(self, 2, 2)

self.label2 = tk.Label(text = 'Введіть вектори галузевого випуску y1 та обмеження за викидами парникових газів y2 :')

self.y1 = SimpleTableInput(self, 2, 1)

self.y2 = SimpleTableInput(self, 2, 1)

self.label3 = tk.Label(text='Введіть номер стовпця матриці A, що буде піддаватись змінам :')

self.column = SimpleTableInput(self, 1, 1)

self.submit = tk.Button(self, text="Знайти розв'язок", command=self.on_submit)

self.label.pack(side = 'top')

self.A.pack(padx = 10, pady = 10, fill="both")

self.C.place(x = 20, y = 115)

self.label1.place(x = 20, y = 115)

self.label2.place(x = 20, y = 180)

self.y1.place(x = 20, y = 185)

self.y2.place(x = 150, y = 185)

self.column.place(x = 650, y = 150)

self.label3.place(x = 500, y = 150)

self.submit.pack(side="bottom")

self.Label = tk.Label(text = '')

self.Label.place(x = 25, y = 300)

self.Label1 = tk.Label(text='')

self.Label1.place(x=400, y=300)

self.Label2 = tk.Label(text='')

self.Label2.place(x=625, y=300)

self.Label3 = tk.Label(text='')

self.Label3.place(x=250, y=500)

```
    def on_submit(self):
        number_of_column = self.column.get()
        col = int(number_of_column.item((0, 0)) - 1)
        umova = self.A.get()[2:,0:2].dot(self.y1.get() + self.C.get().dot(self.y2.get()))
>= self.y2.get()
        C_mod = np.array([[1, 0, self.C.get()[0,0], self.C.get()[0,1]],
                          [0, 1, self.C.get()[1,0], self.C.get()[1,1]],
                          [0, 0, -1, 0],
                          [0, 0, 0, -1]])
        y_mod = np.array([[self.y1.get()[0, 0]],
                          [self.y1.get()[1, 0]],
                          [self.y2.get()[0, 0]],
                          [self.y2.get()[1, 0]]])
        A_obernena = linalg.inv(self.A.get())
        zburenui = np.array([[self.A.get()[0, col]*2],
                          [self.A.get()[1, col]*2],
                          [self.A.get()[2, col]*0.5],
                          [self.A.get()[3, col]/3]])
        U = linalg.solve(self.A.solve(), C_mod.dot(y_mod))
        vector_L3 = A_obernena.dot(zburenui)
        solution = np.array([U[0, :] - (U[col, :] / vector_L3[col, :]) * vector_L3[0, :],
                             U[1, :] - (U[col, :] / vector_L3[col, :]) * vector_L3[1, :],
                             U[col, :] / vector_L3[col, :],
                             U[3, :] - (U[col, :] / vector_L3[col, :]) * vector_L3[3, :]])
        print('Обернена до блочної матриці A\n',
              A_obernena)
        print('Новий вигляд збуреного стовпчика\n', zburenui)
        print('Вектор L3\n', vector_L3)
```

```
print('Визначимо розвязки задачі та знайдемо шлях модернізації\n', solution)
self.Label['text'] = 'Перевірка виконання умови на продуктивність моделі\n' + np.array2string(umova)
self.Label1['text'] = 'Розвязок системи U\n' + np.array2string(U)
self.Label2['text'] = 'Вектор L3 - вектор змін\n' + np.array2string(vector_L3)
self.Label3['text'] = 'Розвязок задачі та пошук можливостей для модернізації\n' + np.array2string(solution)


root = tk.Tk()
root.title("Модернізація виробництва підприємства")
root.geometry('900x700')
Example(root).pack(side="top", fill="both", expand=True)
root.mainloop()
```