Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2022, № 2 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.5

MSC 65C60

THE NECESSARY CONDITION FOR COINCIDENCE OF LS AND AITKEN ESTIMATIONS OF THE HIGHER COEFFICIENT OF THE LINEAR REGRESSION MODEL IN THE CASE OF CORRELATED DEVIATIONS

Marta Savkina

Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine, E-mail: marta@imath.kiev.ua

НЕОБХІДНА УМОВА ЗБІГУ ОЦІНОК МНК ТА ЕЙТКЕНА СТАРШОГО КОЕФІЦІЄНТУ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ У ВИПАДКУ КОРЕЛЬОВАНИХ ВІДХИЛЕНЬ

М. Ю. Савкіна

Інститут математики НАНУ, Київ, Україна, E-mail: marta@imath.kiev.ua

Abstract. At the paper a linear regression model whose function has the form $f(x) = ax + b$, a and b — unknown parameters, is studied. Approximate values (observations) of functions $f(x)$ are registered at equidistant points $x_0, x_1, ..., x_n$ of a line segment. It is also assumed that the covariance matrix of deviations is the symmetric Toeplitz matrix. Among all Toeplitz matrices, a family of matrices is selected for which all diagonals parallel to the main, starting from the $(k+1)$th, are zero, $k = n/2$, n — even. Elements of the main diagonal are denoted by λ, elements of the kth diagonal are denoted by c, elements of the jth diagonal are denoted by c_{k-j}, $j = 1, 2, ..., k-1$. The theorem proved in the article states that the following condition on the elements of such covariance matrix $c_j = \big(k/(k+1)\big)^j c$, $j = 1, 2, ..., k-1$, is necessary for the coincidence of the LS and Aitken's estimations of the parameter a of this model. Values λ and c are any that ensure the positive definiteness of such matrix.

Keywords: least square method, regression model, Aitken estimation.

Анотація. В роботі вивчається регресійна модель, функція якої має вигляд $f(x) = ax + b$, де a та b — невідомі параметри. Наближені значення (спостереження) функції $f(x)$ реєструються у рівновіддалених точках відрізку $[0, 1]$. Крім того припускається, що коваріаційна матриця відхилень є симетричною матрицею Тепліца, певна кількість побічних діагоналей якої - нульові. В теоремі, яку доведено в роботі, у випадку непарної кількості точок спостереження знайдено необхідну умову на елементи коваріаційної матриці такого вигляду для рівності оцінки МНК та оцінки

Ейткена параметра a даної моделі. При такому вигляді коваріаційної матриці відхилень оцінки Ейткена та МНК параметра b не будуть збігатися.
Ключові слова: метод найменших квадратів, регресійна модель, оцінка Ейткена.

Вступ

В класичній регресії передбачається, що коваріаційна матриця відхилень в моделі лінійної регресії має вигляд

$$\sigma^2 I,$$

де σ^2 — дисперсія відхилень, I — одинична матриця. Узагальненням цього припущення є коваріаційна матриця вигляду $\sigma^2\Omega$, де Ω — додатно визначена матриця. Така матриця відповідає випадку, коли відхилення корелюють одне з іншим та мають різну дисперсію. В такому загальному випадку ефективною оцінкою невідомих параметрів моделі є оцінка Ейткена [1], яка в своїй формулі використовує матрицю Ω.

Якщо $\Omega = I$, то оцінка Ейткена буде збігатися з оцінкою метода найменших квадратів (МНК); якщо $\Omega \neq I$, то оцінка Ейткена буде збігатися з оцінкою МНК у виняткових випадках. Дослідження таких випадків є одним з напрямків регресійного аналізу.

В [2] у випадку моделі, лінійної по параметрам, доведено теорему, яка стверджує, що для збігу оцінки МНК та оцінки Ейткена необхідно і достатньо, щоб існували лінійні комбінації незалежних змінних, які будуть власними векторами коваріаційної матриці відхилень, причому їх кількість дорівнює кількості незалежних змінних моделі.

В [2] також розглянуто випадок, коли кількість таких лінійних комбінацій менше кількості незалежних змінних. Доведено, що в цьому випадку оцінка МНК та оцінка Ейткена деяких невідомих параметрів моделі будуть збігатися. Кількість таких невідомих параметрів дорівнює кількості власних векторів, які є лінійними комбінаціями незалежних змінних.

В статтях [5] та [6] вивчається лінійна регресійна модель, функція якої має вигляд

$$f(x) = ax + b.$$

В статті [5] вона вивчається у випадку гетероскедастичних незалежних відхилень. Знайдено умови на дисперсії відхилень, при яких оцінка Ейткена збігається з оцінкою МНК окремо для кожного невідомого параметру моделі. При цих умовах оцінки Ейткена та МНК параметра іншого параметру не будуть збігатися.

В статті [6] така модель вивчається, коли коваріаційна матриця відхилень є симетричною матрицею Тепліца, певна кількість побічних діагоналей якої — нульові. В роботі у випадку непарної кількості точок спостереження знайдено достатню умову на елементи коваріаційної матриці, яка забезпечує рівність оцінки МНК та оцінки Ейткена параметра a даної моделі.

1. Оцінка МНК та оцінка Ейткена лінійної регресійної моделі у випадку корельованих відхилень

Розглянемо модель регресії

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i, \qquad i = 0, 1, ..., n, \tag{1}$$

де $\epsilon_0, \epsilon_1, ..., \epsilon_n$ — випадкові величини з $E\epsilon_i = 0$ та коваріаційною матрицею $\sigma^2\Omega_c$, n — парне, а Ω_c — додатно визначена матриця, що має вигляд

$$\Omega_c = \begin{pmatrix} \lambda & c_{k-1} & \dots & c_2 & c_1 & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{k-1} & \lambda & \dots & c_3 & c_2 & c_1 & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & \lambda & c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \dots & c & 0 \\ c & c_1 & \dots & c_{k-2} & c_{k-1} & \lambda & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 & c \\ 0 & c & \dots & c_{k-3} & c_{k-2} & c_{k-1} & \lambda & c_{k-1} & \dots & c_2 & c_1 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & \lambda & c_{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & \lambda \end{pmatrix},$$

$\lambda > 0, \quad k = \frac{n}{2}.$

Лема 1. *Для будь-яких $c, c_1, ..., c_{k-1}$ існує $\bar{\lambda} > 0$, яке залежить від $c, c_1, ..., c_{k-1}$, таке, що для будь-якого $\lambda > \bar{\lambda}$ матриця Ω_c буде додатноозначеною.*

Доведення. Розглянемо алгебраїчне рівняння $||\Omega_c(\mu)|| = 0$ відносно змінної μ, де $||\Omega_c(\mu)||$ – визначник матриці $\Omega_c(\mu)$, яка утворена з матриці Ω_c заміною елемента головної діагоналі λ на змінну μ. Це рівняння має степінь $2k+1$; оскільки матриця Ω_c симетрична, воно має $2k+1$ дійсних коренів $\mu_0,\ \mu_1, ..., \mu_{2k}$.

Далі, позначимо через $\Lambda_0, \Lambda_1, ..., \Lambda_{2k}$ власні числа матриці Ω_c. Очевидно,

$$\Lambda_i = \lambda - \mu_i,\ i = 0, 1, ..., 2k.$$

З цього випливає, що якщо

$$\lambda > \bar{\lambda} = max\{\mu_0,\ \mu_1, ..., \mu_{2k}\},$$

то

$$\Lambda_i > 0,\ i = 0, 1, ..., 2k.$$

А це означає [3], що якщо $\lambda > \bar{\lambda}$, то матриця Ω_c додатноозначена.

Лему доведено. □

В [1] знайдено формули для оцінки МНК та оцінки Ейткена невідомих параметрів моделі лінійної регресії загального вигляду. З цих формул у випадку моделі (1) та $x_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, ..., n$, маємо такі оцінки МНК та Ейткена параметрів a та b:

$$\hat{a}_{MNK} = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}^{(i)}_{MNK} y_i,$$

де

$$\hat{a}^{(i)}_{MNK} = \frac{12n}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2}\right), \tag{2}$$

та

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{AIT} \\ \hat{b}_{AIT} \end{pmatrix} = (X'\Omega_c^{-1}X)^{-1}X'\Omega_c^{-1}\vec{y},$$

де

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}\,' = (y_0, y_1, ..., y_n).$$

2. Необхідна умова на матрицю Ω_c для збігу оцінок МНК та Ейткена параметра a моделі (1)

Теорема 1. *Якщо в моделі (1)*

$$\hat{a}_{MNK} = \hat{a}_{AIT}, \tag{3}$$

то

$$c_j = \left(\frac{k}{k+1}\right)^j c,\ j = 1, 2, ..., k-1; \quad c\ \text{ – будь-яке.} \tag{4}$$

Доведення. Враховуючи (2) отримуємо

$$\frac{\hat{a}^{(i)}_{MNK}}{\hat{a}^{(k-1)}_{MNK}} = k - i,\ i = 0, 1, ..., k-2. \tag{5}$$

З умови (3) та рівності (5) випливає, що має бути

$$\frac{\hat{a}^{(i)}_{AIT}}{\hat{a}^{(k-1)}_{AIT}} = k - i,\ i = 0, 1, ..., k-2. \tag{6}$$

Матриця $X'\Omega_c^{-1}$ має розмір $2 \times (n+1)$; позначимо $i-$й елемент першого та другого рядка через a_i та b_i, $i = 0, 1, ..., n$, відповідно. Помітимо, що $b_i = b_{n-i}$, $i = 0, 1, ..., k-1$.

Далі, позначимо через $\hat{a}^{(j)}_{AIT}$, $j = 0, 1, ..., n$, $j-$й елемент першого рядка матриці $(X'\Omega_c^{-1}X)^{-1}X'\Omega_c^{-1}$. Маємо [6]

$$\hat{a}^{(j)}_{AIT} = \frac{Z_j}{Z},\ j = 0, 1, ..., 2k, \tag{7}$$

де

$$Z_j = 2a_j - b_j, \qquad Z = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{2k}(i-k)a_i.$$

Зауважимо, що

$$Z_j = \frac{||\Omega^{(0)}_{c,j}||}{||\Omega_c||}, \tag{8}$$

де $||\Omega_c||$ – визначник матриці Ω_c, $||\Omega^{(0)}_{c,j}||$, $j = 0, 1, ..., n$ — визначники матриць, які утворені з матриці Ω_c заміною $j-$го стовпця на стовпець

$$\vec{x}_0\,' = \left(-1, -\frac{k-1}{k}, \dots, -\frac{1}{k}, 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\right).$$

Розглянемо таку множину систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Omega_{c,j}^{(0)}\vec{\alpha}_g^{(j)} = \vec{\gamma}_j,\ j = 0, 1, ..., k-1, \tag{9}$$

де $\vec{\alpha}_g^{(j)}$ — вектор невідомих, утворений з вектора

$$\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_{2k})$$

заміною невідомої α_j на невідому g_j,

$\vec{\gamma}_j$ — $j-$й стовпець матриці Ω_c.

Зауважимо, що $g_j = Z_j^{-1}$; враховуючи (7), маємо таке співвідношення

$$\frac{\hat{a}_{AIT}^{(j)}}{\hat{a}_{AIT}^{(k-1)}} = \frac{Z_j}{Z_{k-1}} = \frac{g_{k-1}}{g_j},\ j = 0, 1, ..., k-2. \tag{10}$$

Доведемо, що

$$g_j = -\frac{1}{\alpha_{2k-j}^{(0)}}\left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i\alpha_{k+i}^{(0)} + \lambda\right),\ j = 0, 1, ..., k-1. \tag{11}$$

Для цього знайдемо розв'язок всіх систем ($j = 0, 1, ..., k-1$) множини (9).

Спочатку доведемо, що

$$\alpha_k = \alpha_k^{(j)} = 0, \tag{12}$$

для будь-якого $j = 0, 1, ..., k-1$.

Справді,

$$\alpha_k^{(j)} = \frac{||\Omega_{c,j}^{(0,k)}||}{||\Omega_{c,j}^{(0)}||}, \tag{13}$$

де $||\Omega_{c,j}^{(0,k)}||$, $j = 0, 1, ..., n$ — визначники матриць, які утворені з матриці $\Omega_{c,j}^{(0)}$ заміною $k-$го стовпця на $j-$й стовпець матриці Ω_c. Далі в матриці $\Omega_{c,j}^{(0,k)}$ переставимо місцями $j-$й та $k-$й стовпці. Отримаємо матрицю $\Omega_{c,k}^{(0)}$; враховуючи властивості визначників [3] маємо

$$||\Omega_{c,j}^{(0,k)}|| = -||\Omega_{c,k}^{(0)}|| = \sum_{i=0}^{2k} \frac{k-i}{k} A_{i,k}, \tag{14}$$

де $A_{i,k}$ — алгебраїчні доповнення до елемента $\omega_{i,k}$ матриці Ω_c.

В [6] доведено, що $A_{i,k} = A_{n-i,k}$ для матриці Ω_c, тому з (14) випливає, що

$$||\Omega_{c,j}^{(0,k)}|| = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k-i}{k}\big(A_{i,k} - A_{n-i,k}\big) = 0,\ j = 0, 1, ..., k-1. \tag{15}$$

Підставимо (15) в (13), отримуємо (12).

Далі доведемо, що

$$\alpha_{n-j}^{(j)} = 1, \tag{16}$$

для будь-якого $j = 0, 1, ..., k-1$.

Справді,

$$\alpha_{n-j}^{(j)} = \frac{||\Omega_{c,j}^{(0,n-j)}||}{||\Omega_{c,j}^{(0)}||}, \tag{17}$$

де $||\Omega_{c,j}^{(0,n-j)}||$, $j = 0, 1, ..., n$ — визначники матриць, які утворені з матриці $\Omega_{c,j}^{(0)}$ заміною $(n-j)-$го стовпця на $j-$й стовпець матриці Ω_c. Далі, в матриці $\Omega_{c,j}^{(0,n-j)}$ переставимо місцями $j-$й та $(n-j)-$й стовпці. Отримуємо матрицю $\Omega_{c,n-j}^{(0)}$. Враховуючи (17) маємо

$$\alpha_{n-j}^{(j)} = -\frac{||\Omega_{c,n-j}^{(0)}||}{||\Omega_{c,j}^{(0)}||} = \frac{||\bar{\Omega}_{c,n-j}^{(0)}||}{||\Omega_{c,j}^{(0)}||}, \tag{18}$$

де $||\bar{\Omega}_{c,n-j}^{(0)}||$, $j = 0, 1, ..., n$ — визначники матриць, які утворені з $\Omega_{c,n-j}^{(0)}$ множенням елементів $(n-j)-$го стовпця на (-1).

Помітимо, що

$$||\bar{\Omega}_{c,n-j}^{(0)}|| = ||\Omega_{c,j}^{(0)}||; \tag{19}$$

підставимо (19) в (18), отримуємо (16).

Далі доведемо, що для будь-якого $j = 0, 1, ..., k-1$

$$\alpha_i^{(j)} = -\alpha_{n-i}^{(j)}, \tag{20}$$

коли $i = 0, 1, ..., j-1, j+1, ..., k-1$.

Справді, маємо для будь-яких $i, j = 0, 1, ..., k-1,\ i \neq j$,

$$\alpha_i^{(j)} = \frac{||\Omega_{c,j}^{(0,i)}||}{||\Omega_{c,j}^{(0)}||}, \tag{21}$$

$$\alpha_{n-i}^{(j)} = \frac{||\Omega_{c,j}^{(0,n-i)}||}{||\Omega_{c,j}^{(0)}||}, \tag{22}$$

де $||\Omega_{c,j}^{(0,i)}||$ та $||\Omega_{c,j}^{(0,n-i)}||$ — визначники матриць, які утворені з матриці $\Omega_{c,j}^{(0)}$ заміною $i-$го та $(n-i)-$го стовпця відповідно на $j-$й стовпець матриці Ω_c.

В матриці $\Omega_{c,j}^{(0,n-i)}$ переставимо стовпці наступним чином: $j-$й стовпець $(\vec{x}_0)$ робимо $(n-j)-$м, той, що був $(n-j)-$м, робимо $(n-i)-$м, той, що був $(n-i)-$м, робимо $j-$м. Далі, елементи $(n-j)-$го стовпця $(\vec{x}_0)$ множимо на (-1); утворену таким чином матрицю позначимо через $\bar{\Omega}_{c,j}^{(0,n-i)}$. Згідно з властивостями визначників [3] маємо

$$||\Omega_{c,j}^{(0,n-i)}|| = -||\bar{\Omega}_{c,j}^{(0,n-i)}||. \tag{23}$$

З іншого боку, матриця $\bar{\Omega}_{c,j}^{(0,n-i)}$ при розвороті на 180 градусів співпаде з матрицею $\Omega_{c,j}^{(0,i)}$, тобто згідно з [4]

$$||\bar{\Omega}_{c,j}^{(0,n-i)}|| = ||\Omega_{c,j}^{(0,i)}||. \tag{24}$$

З (21), (22), (23) та (24) отримуємо (20).

Далі доведемо, що для будь-якого $j = 1, 2, ..., k-1$

$$\alpha_{k+i}^{(j)} = \frac{\alpha_{k+i}^{(0)}}{\alpha_{2k-j}^{(0)}}, \ i = 1, 2, ..., k, \tag{25}$$

тобто розв'язок будь-якої системи ($j = 1, 2, ..., k-1$) можна виразити через розв'язок системи при $j = 0$. Маємо

$$\alpha_{k+i}^{(j)} = \frac{||\Omega_{c,j}^{(0,k+i)}||}{||\Omega_{c,j}^{(0)}||}, \tag{26}$$

$$\frac{\alpha_{k+i}^{(0)}}{\alpha_{2k-j}^{(0)}} = \frac{||\Omega_{c,0}^{(0,k+i)}||}{||\Omega_{c,0}^{(0,2k-j)}||}. \tag{27}$$

В матриці $\Omega_{c,j}^{(0,k+i)}$ переставимо місцями $j-$й та $(k+i)-$й стовпці, отримаємо матрицю $\Omega_{c,k+i}^{(0)}$; в матриці $\Omega_{c,0}^{(0,k+i)}$ переставимо місцями нульовий та $(k+i)-$й стовпці, отримаємо також матрицю $\Omega_{c,k+i}^{(0)}$. Зауважимо, що $||\Omega_{c,j}^{(0,k+i)}|| = -||\Omega_{c,k+i}^{(0)}||$, $||\Omega_{c,0}^{(0,k+i)}|| = -||\Omega_{c,k+i}^{(0)}||$, тобто

$$||\Omega_{c,j}^{(0,k+i)}|| = ||\Omega_{c,0}^{(0,k+i)}||. \tag{28}$$

Далі, в матриці $\Omega_{c,0}^{(0,2k-j)}$ переставимо місцями нульовий ($\vec{x}_0$) та $(2k-j)-$й стовпці, отримуємо матрицю $\Omega_{c,2k-j}^{(0)}$; елементи $(2k-j)-$го стовпця ($\vec{x}_0$) цієї матриці множимо на (-1); утворену таким чином матрицю позначимо через $\bar{\Omega}_{c,2k-j}^{(0)}$. Зауважимо, що

$$||\Omega_{c,0}^{(0,2k-j)}|| = ||\bar{\Omega}_{c,2k-j}^{(0)}||. \tag{29}$$

Матриця $\bar{\Omega}_{c,j}^{(0,n-i)}$ при розвороті на 180 градусів співпаде з матрицею $\Omega_{c,j}^{(0)}$, тобто згідно з [4]

$$||\bar{\Omega}_{c,j}^{(0,n-i)}|| = ||\Omega_{c,j}^{(0)}||. \tag{30}$$

З (29) та (30) отримуємо

$$||\Omega_{c,0}^{(0,2k-j)}|| = ||\Omega_{c,j}^{(0)}||. \tag{31}$$

З (26), (27), (28) та (31) отримуємо (25).

Зауважимо, що в (25) при $i = k:\quad \alpha_{2k}^{(j)} = \frac{1}{\alpha_{2k-j}^{(0)}}$, тому що $\alpha_{2k}^{(0)} = 1$.

Далі, візьмемо з кожної системи множини (9) останнє рівняння. З урахуванням (12),(16) та (20) маємо таку систему співвідношень

$$\begin{cases} g_0 + \sum_{i=1}^{k-1} c_i \alpha_{k+i}^{(0)} + \lambda = 0, \\ g_1 + \sum_{i=1}^{k-2} c_i \alpha_{k+i}^{(1)} + c_{k-1} + \lambda \alpha_{2k}^{(1)} = 0, \\ g_j + \sum_{i=1}^{k-j-1} c_i \alpha_{k+i}^{(j)} + c_{k-j} + \sum_{i=k-j+1}^{k-1} c_i \alpha_{k+i}^{(j)} + \lambda \alpha_{2k}^{(j)} = 0, \\ \qquad j = 1, 2, ..., k-2, \\ g_{k-1} + c_1 + \sum_{i=2}^{k-1} c_i \alpha_{k+i}^{(k-1)} + \lambda \alpha_{2k}^{(k-1)} = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Враховуючи (25), з співвідношень (32) отримуємо (11).

З рівності (10) з урахуванням (6) маємо

$$g_{k-1} = (k-j) g_j, \ j = 0, 1, ..., k-2. \tag{33}$$

Підставимо в (33) $j = 0$; отримуємо

$$g_{k-1} = k g_0, \tag{34}$$

враховуючи (11), (33) та (34) отримуємо

$$\alpha_{2k-j}^{(0)} = \frac{k-j}{k}, \ j = 1, 2, ..., k-1. \tag{35}$$

Тепер підставимо (35) в останні k рівнянь системи (9), яка відповідає $j = 0$; отримуємо такі рівняння

$$-g_0 = \lambda \cdot 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} c_j; \tag{36}$$

$$-\frac{k-i}{k} g_0 = \sum_{j=1}^{k-i-1} \frac{j-i}{k} c_j + \frac{2(k-i)}{k} \sum_{j=k-i}^{k-1} c_j + \lambda \frac{k-i}{k} - c\frac{i}{k}, \tag{37}$$

$$i = 1, 2, ..., k-2;$$

$$-\frac{1}{k} g_0 = \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} c_j + \frac{\lambda}{k} - c\frac{k-1}{k}. \tag{38}$$

Помножимо рівняння (37) на $\frac{k}{k-i}$, $i = 1, 2, ..., k-2$; рівняння (38) на k; прирівняємо праві частини отриманих рівнянь до правої частини рівняння (36). Маємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно c_1, c_2,..., c_{k-1};

$$\sum_{j=1}^{k-i-1} \frac{i(k-j)}{k-i} c_j + \sum_{j=k-i}^{k-1} (j-2k) c_j = -c\frac{ik}{k-i}, \ i = 1, 2, ..., k-1. \tag{39}$$

Позначимо через A матрицю системи (39), через $||A||$ — її визначник. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} \frac{k-1}{k-1} & \frac{k-2}{k-1} & \frac{k-3}{k-1} & \dots & \frac{4}{k-1} & \frac{3}{k-1} & \frac{2}{k-1} & -\frac{k+1}{1} \\ \frac{2(k-1)}{k-2} & \frac{2(k-2)}{k-2} & \frac{2(k-3)}{k-2} & \dots & \frac{2\cdot 4}{k-2} & \frac{2\cdot 3}{k-2} & -\frac{k+2}{1} & -\frac{k+1}{1} \\ \frac{3(k-1)}{k-3} & \frac{3(k-2)}{k-3} & \frac{2(k-3)}{k-3} & \dots & \frac{3\cdot 4}{k-3} & -\frac{k+3}{1} & -\frac{k+2}{1} & -\frac{k+1}{1} \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ \frac{(k-2)(k-1)}{2} & -\frac{2k-2}{1} & -\frac{2k-3}{1} & \dots & -\frac{k+4}{1} & -\frac{k+3}{1} & -\frac{k+2}{1} & -\frac{k+1}{1} \\ -\frac{2k-1}{1} & -\frac{2k-2}{1} & -\frac{2k-3}{1} & \dots & -\frac{k+4}{1} & -\frac{k+3}{1} & -\frac{k+2}{1} & -\frac{k+1}{1} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що $||A|| \neq 0$. Для цього останній рядок визначника віднімемо від усіх попередніх, а потім перетворений визначник розкладемо за теоремою Лапласа по останньому рядку. Отримуємо

$$||A|| = -(k+1)A_{k-1,k-1}, \tag{40}$$

де $A_{k-1,k-1}$ — алгебраїчне доповнення перетвореного визначника до елемента, який стоїть в останньому рядку останнього стовпця. Помітимо, що визначник трикутний, тобто значення цього визначника дорівнює добутку всіх його діагональних елементів. Враховуючи (40), маємо

$$||A|| = -(k+1)\prod_{i=1}^{k-1}\Big(\frac{i(i+1)}{k-i} + (k+i+1)\Big) = -(k+1)\prod_{i=1}^{k-1}\frac{k(k+1)}{k-i} \neq 0.$$

Таким чином отримуємо, що система (39) має єдиний розв'язок.

Доведемо, що (4) буде єдиним розв'язком системи (39).

Підставимо (4) в ліву частину i−го рівняння ($i = 1, 2, ..., k-1$) системи (39):

$$\sum_{j=1}^{k-i-1}\frac{i(k-j)}{k-i}\Big(\frac{k}{k+1}\Big)^j c + \sum_{j=k-i}^{k-1}(j-2k)\Big(\frac{k}{k+1}\Big)^j c = c\Big(\frac{i}{k-i}S_1(i) + S_2(i)\Big), \tag{41}$$

де

$$S_1(i) = \sum_{j=1}^{k-i-1}(k-j)\Big(\frac{k}{k+1}\Big)^j, \quad S_2(i) = \sum_{j=k-i}^{k-1}(j-2k)\Big(\frac{k}{k+1}\Big)^j.$$

Після низки перетворень маємо

$$S_1(i) = k\bigg(-1 + \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^{k-i-1}(k-i)\bigg), \tag{42}$$

$$S_2(i) = -ik\Big(\frac{k}{k+1}\Big)^{k-i-1}. \tag{43}$$

Підставимо (42),(43) в (41). Отримуємо

$$c\left(\frac{i}{k-i}S_1(i)+S_1(i)\right)=$$

$$=c\left(\left(\frac{ik}{k-i}+ik\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k-i-1}\right)-ik\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k-i-1}\right)=-c\frac{ik}{k-i},$$

тобто (4) — розв'язок $i-$го рівняння ($i=1,2,...,k-1$) системи (39).

Таким чином, бачимо, що з умови (3) випливає умова (4) для матриці Ω_c моделі (1).

Теорему доведено.

$\square$

Література

1. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии. Москва: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. Москва: Мир, 1976. 756 с.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва: Наука, 1965. 431 с.
4. Проскуряков Е. З. Сборник задач по линейной алгебре. Москва: Наука, 1970. 384 с.
5. Савкіна М. Ю. Умови збігу оцінок МНК та Ейткена параметрів моделі лінійної регресії. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2018. № 3 (129). С. 36–44.
6. Савкіна М. Ю. Рівність оцінок МНК та Ейткена старшого коефіцієнту лінійної моделі регресії у випадку корельованих відхилень. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2021. № 2 (136). С. 64–72.

Надійшла: 15.09.2022 / Прийнята: 29.09.2022