

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
на тему:

«Зображення деформованих комутаційних співвідношень»

за спеціальністю 113 Прикладна математика

студента 4-го курсу
Круглені Олександра Сергійовича

Науковий керівник:
професор, доктор фізико-математичних наук
Проскурін Д.П.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № від 2021 р.

Завідувач кафедри ДО

проф. Іксанов О.М.

Київ - 2021

Зміст

Перелік умовних позначень, символів, одиниць, скорочень і термінів	2
Вступ	3
1 Необхідні відомості з лінійної алгебри	5
1.1 Скінченновимірні гільбертові(унітарні) простори	5
1.2 Ортогональні системи векторів. Базиси	6
1.3 Лінійні оператори в H	6
1.4 Ортопроектори	8
1.5 Унітарні оператори та ізометрія	9
1.6 Тензорний добуток	9
1.7 Елементи теорії зображень	10
1.8 C^* - алгебра	13
1.9 Однобічний зсув та розклад Вольда	14
2 Часткова ізометрія та її властивості	15
3 Незвідні набори комутуючих центрованих часткових ізометрій	19
Висновки	26
Література	27

Перелік умовних позначень, символів, одиниць, скорочень і термінів

\mathbb{C} – множина, або адитивна група, або поле комплексних чисел;

\mathbb{R} – множина (або адитивна група, або поле) дійсних чисел;

\mathbb{N} – множина (або адитивна напівгрупа) натуральних чисел;

$\mathbf{1}$ – одиничний оператор;

$\|a\|$ - норма оператора;

T - оператор однобічного зсуву;

$P(H)$ - множина всіх ортопроекторів гільбертового простору H ;

$U(H)$ - множина всіх унітарних операторів U в $B(H)$;

$A \in B$ - множина A належить множині B ;

A^{-1} – обернена до A матриц;

A^* – спряжений оператор;

$\text{Ker } \varphi$ – ядро гомоморфізму φ ;

$G \simeq H$ - G ізоморфне до H ;

$A \oplus B$ - пряма сума A та B ;

$A \otimes B$ - тензорний добуток A на B ;

$J_k(0)$ – жорданова клітка з нулем по діагоналі;

$t(\mu)$ - матриця вигляду
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

$T_k(\mu)$ - матриця вигляду
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Вступ

Теорія зображень є дуже важливим на сьогоднішній день предметом, який досліджує абстрактні алгебраїчні структури шляхом зображень їх елементів як лінійні перетворення векторних просторів. По суті, зображення робить абстрактний алгебраїчний об'єкт більш конкретним, описуючи його елементи матрицями та їх алгебраїчні операції. Це є корисним методом, оскільки теорія зображень зводить проблеми в абстрактній алгебрі до задач в лінійній алгебрі - предметі, який добре розуміється.

Теорія зображень має багато застосувань, починаючи від теорії чисел і комбінаторики до геометрії, теорії ймовірностей, квантової механіки та квантової теорії полів. Теорія зображень також важлива у математичній фізиці, оскільки, наприклад, вона описує як група симетрії фізичної системи впливає на розв'язок рівнянь, що описують цю систему.

Зокрема, дуже важливим питанням є теорія $*$ -зображень скінченнопороджених алгебр. Зображення таких алгебр використовуються для вивчення конфігурацій підпросторів простору Гільберта, якщо задано кути між підпросторами. Вони також корисні при вивченні ортоскалярних зображень графів та частково впорядкованих множини, сімейства операторів, задовольняють лінійним співвідношенням і т. д. Серед застосувань теорії $*$ -зображень варто згадати :

- а) побудова та вивчення моделей квантової фізики;
- б) доведення структурних теорем для алгебраїчно визначених класів операторів на гільбертовому просторі;
- в) побудову некомутативних ймовірнісних просторів та некомутативних аналогів класичних випадкових процесів.

Починаючи з 70-х років 20го століття дуже активно почалося вивчення C^* - алгебри, породженої ізометріями та частковими ізометріями. Такі C^* - алгебри мають тісний зв'язок з алгебрами породженими деформаціями канонічних комутативних та антикомутативних співвідношень квантової механіки. Також ці алгебри важливою складовою некомутативної геометрії та операторної K -теорії.

Мета роботи: Отримати структурні теореми для пари сильно комутуючих та деформовано сильно комутуючих часткових ізометрій та отримати повну класифікацію таких пар в незвідному випадку.

Робота складається з 3 розділів. В першому розділі зосереджені теореми та визначення відомостей з лінійної алгебри та теорії гільбертових просторів для подальшої роботи необхідних для розуміння основних розділів. Також тут викладено елементи теорії зображень та теорії C^* -алгебр, визначається поняття ізометричного оператора, наводиться теорема про розклад Вольда.

В другому розділі наводяться означення та основні структурні результати

щодо часткових ізометрій.

Основні результати зосереджені в розділі №3, а саме доведено теорему №3.2 та №3.3, де отримано опис незвідних зображень пар центрованих часткових ізометрій, що задовольняють умовам сильної комутації та деформовано сильної комутації з точністю до унітарних еквівалентностей.

1 Необхідні відомості з лінійної алгебри

1.1 Скінченновимірні гільбертові(унітарні) простори

Нехай V - скінченновимірний векторний простір над полем \mathbb{C} комплексних чисел.

Визначення 1.1.1. Числова функція

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

називається скалярним добутком в V , якщо воно задовольняє наступним аксіомам:

- 1) $(x, x) \geq 0$ для будь-якого $x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $x, y \in V$;
- 3) $(\alpha x + \beta, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$, $x, y, z \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Визначення 1.1.2. Скінченновимірний векторний простір V зі скалярним добутком (\cdot, \cdot) називається унітарним простором або скінченновимірним гільбертовим простором.

Надалі скінченновимірні гільбертові(унітарні) простори будемо позначати через H .

Визначення 1.1.3. Число

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

називається нормою вектора $x \in H$.

Зауваження. Функція $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ задовольняє аксіомам норми, а саме :

- 1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3) $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$.

Визначення 1.1.4. Вектори $x, y \in H$ називаються ортогональними (позначається $x \perp y$), якщо:

$$(x, y) = 0.$$

Визначення 1.1.5. Нехай $x, y \in H$. Число

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

називається відстанню між векторами x і y .

Твердження 1.1. Функція $d : H \times H \rightarrow [0, +\infty)$ задовольняє наступним умовам:

- 1) $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad x, y \in H;$
- 2) $d(x, y) = d(y, x), \quad x, y \in H;$
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(x, z), \quad x, y, z \in H.$

1.2 Ортогональні системи векторів. Базиси

Визначення 1.2.1. Система ненульових векторів $G \subset H$ називається ортогональною, якщо $(x, y) = 0$ для будь-яких $x, y \in G, x \neq y$.

Визначення 1.2.2. Система векторів $G \subset H$ називається ортонормованою, якщо для будь-яких $x, y \in G$

$$(x, y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & , \text{якщо } x = y, \\ 0 & , \text{якщо } x \neq y. \end{cases}$$

Визначення 1.2.3. Ортогональна система векторів $G \subset H$ називається повною, якщо вона не міститься в жодній іншій ортогональній системі.

Визначення 1.2.4. Система векторів $G = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ являється ортонормованим базисом скінченновимірному гільбертовому простору H , якщо

- 1) Система являється повною : $\mathbb{C}\langle G \rangle = H;$
- 2) Система являється ортонормованою:

$$(e_i, e_j) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & , \text{якщо } i = j, \\ 0 & , \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Теорема 1.1. В кожному скінченновимірному гільбертовому просторі H існує ортонормований базис.

1.3 Лінійні оператори в H

Нехай H - гільбертів простір.

Визначення 1.3.1. Відображення $A : H \rightarrow H$ називається лінійним оператором, якщо

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

для будь-яких $x, y \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Позначимо через $B(H)$ множину всіх лінійних операторів в гільбертовому просторі H . А в $B(H)$ визначені наступні алгебраїчні операції:

$$\begin{aligned}(A+B)x &= Ax + Bx, \quad A, B \in B(H), x \in H; \\ (\lambda A)x &= \lambda Ax, \quad A \in B(H), \lambda \in \mathbb{C}, x \in H; \\ (AB)x &= A(Bx), \quad A, B \in B(H), x \in H.\end{aligned}$$

Відносно введених операцій $B(H)$ являється алгеброю з одиницею. Роль одиниці в $B(H)$ грає тотожний оператор I :

$$Ix = x, \quad x \in H,$$

а роль нуля - нульовий оператор:

$$0x = 0, \quad x \in H.$$

Оператори A та B з $B(H)$ називаються комутуючими, якщо $AB = BA$. A оператор

$$[A, B] = AB - BA$$

називається комутатором операторів A та B .

Нехай H - n -мірний гільбертів простір і оператор $A \in B(H)$. Тоді для будь-якого $y \in H$ функція

$$x \rightarrow (Ax, y)$$

визначає лінійний функціонал $f_y \in H$ такий, що

$$f_y(x) = (Ax, y) = (x, y_1).$$

Визначимо оператор $H \ni y \rightarrow y_1 \in H$, який позначимо через

$$A^* y = y_1.$$

Твердження 1.2. A^* - лінійний оператор.

Визначення 1.3.2. Лінійний оператор A^* , що визначається рівністю

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad x, y \in H$$

називається спряженим до оператора A .

Визначення 1.3.3. Відображення

$$B(H) \ni A \rightarrow A^* \in B(H)$$

називається інволюцією в $B(H)$.

Твердження 1.3. Інволюція в $B(H)$ має такі властивості:

- 1) $(AB)^* = B^*A^*$;
- 2) $(A^*)^* = A$;
- 3) $(A + B)^* = A^* + B^*$;
- 4) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$;
- 5) $I^* = I$;
- 6) Якщо $A \neq B$, то $A^* \neq B^*$.

Твердження 1.4. Для будь-якого $A \in B(H)$ має місце рівність:
 $\|A^*\| = \|A\|$.

Визначення 1.3.4. Лінійний оператор $A \in B(H)$ називається самоспряженим (або ермітовим), якщо $A = A^*$, тобто якщо для будь-яких $x, y \in H$ має місце рівність:

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Позначимо через $B_h(H)$ множину всіх самоспряжених операторів з $B(H)$.

Твердження 1.5. Нехай $A \in B(H)$. Оператор $A \in B_h(H)$ тоді і лише тоді, коли $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ для будь-якого $x \in H$.

Твердження 1.6. Кожний лінійний оператор $A \in B(H)$ однозначно представляється у вигляді

$$A = A_1 + iA_2,$$

де $A_1, A_2 \in B(H)$.

1.4 Ортопроектори

Визначення 1.4.1. Нехай H - гільбертів простір, M - лінійний підпростір в H , де $H = M \oplus M^\perp$. Тоді будь-який вектор $x \in H$ однозначно представлений у вигляді

$$x = y + z,$$

де $y \in M, z \in M^\perp$.

Визначення 1.4.2. Лінійний оператор $P_M \in B(H)$ такий, що

$$P_M x = y,$$

називається ортопроектором на підпростір M .

Позначимо множину всіх ортопроекторів гільбертового простору H через $P(H)$.

Твердження 1.7. Якщо $P \in P(H)$, то для будь-якого $x \in H$ має місце нерівність:

$$\|Px\| \leq \|x\|.$$

1.5 Унітарні оператори та ізометрія

Визначення 1.5.1. Оператор $U \in B(H)$ називається унітарним, якщо

$$UU^* = U^*U = I,$$

тобто, якщо $U^* = U^{-1}$.

Визначення 1.5.2. Оператор $U \in B(H)$ називається ізометричним або ізометрією, якщо

$$U^*U = I.$$

Визначення 1.5.3. Оператор $U \in B(H)$ називається коізометричним або коізометрією, якщо

$$UU^* = I.$$

Твердження 1.8. Наступні властивості оператора $U \in B(H)$ еквівалентні:

- 1) Оператор U ізометричний;
- 2) $(Ux, Uy) = (x, y)$ для будь-яких $x, y \in H$;
- 3) $\|Ux\| = \|x\|$ для будь-яких $x \in H$.

Твердження 1.9. Для того щоб оператор $U \in B(H)$ був унітарним, необхідно і достатньо, щоб він був ізометричним.

Позначимо через $U(H)$ множину всіх унітарних операторів U в $B(H)$. Очевидно, що тотожний оператор $I \in B(H)$.

Твердження 1.10. Для унітарних операторів справедливі наступні твердження:

- 1) Якщо $U, V \in U(H)$, то $UV \in U(H)$;
- 2) Якщо $U \in U(H)$, то $U^{-1} \in U(H)$.

Твердження 11 показує, що множина всіх унітарних операторів $U(H)$ утворює групу, яка називається унітарною групою або групою унітарних операторів.

Твердження 1.11. Нехай $U \in U(H)$. Тоді

- 1) $\|U\| = 1$;
- 2) $\|A\| = \|UA\| = \|AU\|$ для будь-якого оператора $A \in B(H)$.

1.6 Тензорний добуток

Визначення 1.6.1. Нехай S і T - векторні простори над полем \mathbb{C} . Розглянемо пари векторів (x, y) при $x \in S, y \in T$ та їх суми

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \dots + (x_k, y_k).$$

Введемо наступні еквівалентності:

- 1) $(\alpha x, y) \sim (x, \alpha y)$, для $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 2) $(x_1, y) + (x_2, y) \sim (x_1 + x_2, y)$;
- 3) $(x, y_1) + (x, y_2) \sim (x, y_1 + y_2)$.

Клас еквівалентності, що містить суму пар

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \dots + (x_k, y_k)$$

будемо позначати

$$x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \dots + x_k \otimes y_k.$$

Нехай дано два простори V та W , на кожному з них заданий лінійний оператор $A \in \text{End}(V)$ та $B \in \text{End}(W)$, де End - гомоморфізм. Визначимо тоді лінійний оператор $A \otimes B$ на просторі $V \otimes W$ за правилом

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw.$$

Нехай оператор A в базисі e_1, \dots, e_m записується матрицею $A = (a_{ij})$, а оператор B в базисі f_1, f_2, \dots, f_n записується матрицею B . Тоді легко побачити, що матриця операторів $A \otimes B$ в базисі

$$e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_n, e_2 \otimes f_1, \dots, e_m \otimes f_n$$

записується у вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

З цього запису слідує те, що $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}A * \text{tr}B$.

1.7 Елементи теорії зображень

Для будь-якого векторного простору V над полем комплексних чисел \mathbb{C} ми будемо позначати $\text{Lin}(V)$ як алгебру (асоціативну) всіх лінійних операторів на V . Якщо простір V скінченновимірний, то лінійні оператори можна задавати матрицями в будь-якому базисі і таким чином встановлюється ізоморфізм алгебри $\text{Lin}(V)$ та алгебри матриць $M_n(\mathbb{C})$ (де $n = \dim V$).

Наведемо основні означення та конструкції теорії зображень.

Визначення 1.7.1. Лінійним зображенням множини X в векторному просторі V називається будь-яке відображення

$$\pi : X \rightarrow \text{Lin}(V)$$

Простір V називається простором зображення, а його розмірність - розмірністю зображення. Оператори $\pi(x)$, $x \in X$ називаються операторами зображення.

Лінійне зображення групи визначається умовами

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \pi(e) = \varepsilon$$

а лінійне зображення асоціативної алгебри - умовами

$$\begin{aligned} \pi(x+y) &= \pi(x) + \pi(y), \pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \\ \pi(\lambda x) &= \lambda\pi(x), \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Визначення 1.7.2. Нехай $\pi : X \rightarrow \text{Lin}(V)$ і $S : X \rightarrow \text{Lin}(U)$ - два лінійних зображення множини X над одним і там самим полем. Морфізмом зображення R в зображення S називається будь-яке відображення $\varphi : V \rightarrow U$ з наступною властивістю: для будь-якого $x \in X$ діаграма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{R(x)} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ U & \xrightarrow{S(x)} & U \end{array}$$

комутативна.

Обернений морфізм називається *ізоморфізмом* зображень. Лінійні зображення R та S називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм зображення R в зображення S . Позначається $R \simeq S$.

Приклад 1.1. Лінійне зображення одноелементної множини - це просто один лінійний оператор в деякому просторі. Два лінійних зображення одноелементної множини над алгебраїчно замкнутим полем ізоморфні тоді і лише тоді, коли матриці відповідних лінійних операторів зводяться до однієї і тієї ж самої жорданової форми. Таким чином в такому випадку класи ізоморфних зображень параметризуються жордановими матрицями.

Кожне лінійне зображення $\pi : X \rightarrow \text{Lin}(V)$ можна розглядати як лінійне зображення над будь-яким розширенням L , продовживши оператори зображення до лінійних операторів в просторі $V(L)$. В базисі простору $V(L)$, складеному з векторів простору V , продовжене таким чином зображення буде задаватися такими ж матрицями, як і вихідне зображення.

Для розуміння структури лінійних зображень важливу роль грають інваріантні підпростори. Нехай задано зображення $\pi : X \rightarrow \text{Lin}(V)$, підпростір $U \subset V$ називається інваріантним відносно зображення π , якщо воно інваріантно відносно всіх операторів цього зображення. Очевидно, що сума і перетин інваріантних підпросторів є інваріантними підпросторами.

З кожним інваріантним підпростором $U \subset V$ зв'язані два нових зображення множини X : підзображення $\pi_U : X \rightarrow \text{Lin}(U)$, $\pi_U(x) = \pi(x)|_U$, та факторзображення $\pi_{V/U} : X \rightarrow \text{Lin}(V/U)$, $\pi_{V/U}(x)(V+U) = \pi(x)V + U$

Зображення π_U (відповідно $\pi_{V/U}$) однозначно визначається тією ж властивістю, що і тотожне вкладення $U \rightarrow V$ (відповідно канонічне відображення $V \rightarrow V/U$) являється морфізмом зображень.

В матричній формі це виглядає наступним чином: якщо базис простору V обран так, що деяке число перших базисних векторів утворює базис інваріантного простору U , то

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} \pi_U(x) & * \\ 0 & \pi_{V/U}(x) \end{pmatrix}$$

Визначення 1.7.3. Лінійне зображення $\pi : X \rightarrow \text{Lin}(V)$ називається незвідним, якщо $V \neq 0$ та не існує нетривіальних підпросторів $U \subset V$, інваріантних відносно π .

Теорема 1.2. Кожний морфізм незвідних зображень є або ізоморфізм, або відображення.

Надалі без спеціальних обумовлень будемо припускати, що всі розглянуті лінійні зображення - скінченновимірні.

Визначення 1.7.4. Лінійне зображення $\pi : X \rightarrow \text{Lin}(V)$ називається цілком звідним, якщо для будь-якого інваріантного підпростору $U \subset V$ є інваріантний додатковий підпростір W .

Зауважимо, що будь-яке незвідне зображення є цілком звідним.

Приклад 1.2. Формула

$$\pi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad (t \in \mathbb{R})$$

задає двухвимірне дійсне лінійне зображення адитивної групи \mathbb{R} . Нетривіальні інваріантні підпростори - це тільки одновимірні підпростори, натянуті на базисні вектори. Оскільки ці підпростори є додатковими один до одного, то зображення π є цілком звідним.

Нехай A - асоціативна алгебра. Тоді формула

$$\pi(a)x = ax \quad (a, x \in A)$$

визначає лінійне зображення π алгебри A в своєму власному просторі, що називається її *регулярним (лівим) зображенням*.

Підкреслемо, що саме це є зображенням алгебри, тобто

$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b), \quad \pi(ab) = \pi(a)\pi(b), \quad \pi(\lambda a) = \lambda\pi(a)$$

Теорема 1.3. 1) Якщо зображення $\pi : X \rightarrow \text{Lin}(V)$ є цілком звідним, то простір V може бути розкладений в пряму суму мінімальних інваріантних підпросторів. (Мінімальним інваріантним підпростором будемо називати підпростір, що є мінімальним серед ненульових інваріантних підпросторів.)

2) Навпаки, якщо простір V може бути розкладений в суму (не обов'язково пряму) мінімальних інваріантних підпросторів V_1, \dots, V_m , то підпростір π є цілком звідним для будь-якого інваріантного підпростору $U \subset V$, в якості інваріантного додаткового підпростору може бути сума деяких з V_i .

Визначення 1.7.5. Сумою лінійних зображень $\pi_i : X \rightarrow \text{Lin}_i(V)$, $i=1, \dots, m$ називається лінійне зображення

$$\pi = \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_m : X \rightarrow \text{Lin}(V_1 \oplus \dots \oplus V_m),$$

що визначається за формулою

$$\pi(x)(v_1, \dots, v_m) = (\pi_1(x)v_1, \dots, \pi_m(x)v_m).$$

В матричному записі сума виглядає так

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} \pi_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pi_m(x) \end{pmatrix}.$$

1.8 C* - алгебра

Почнемо з визначення деяких понять, які мають сенс для будь-якої алгебри з інволюцією.

Інволюція алгебри A - це лінійно спряжене відображення $a \rightarrow a^*$, таке що $a^{**} = a$ та $(ab)^* = b^*a^*$ для будь-яких елементів $a, b \in A$. Пара $(A, *)$ називається інволютивною алгеброю або $*$ -алгеброю.

Банаховою $*$ -алгеброю називається $*$ -алгебра A , в якій норма та операція множення зв'язані наступним чином:

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

Визначення 1.8.1. C^* -алгеброю називається банахова алгебра A , в якій визначена інволюція $a \rightarrow a^*$, що задовольняє умові: $(ab)^* = b^*a^*$ для будь-яких $a, b \in A$ та для всіх $a \in A$ виконується рівність

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

Визначення 1.8.2. Нехай B - банахова алгебра з одиницею 1 (тобто вона містить елемент 1 , такий що $1^*x = x^*1 = x \ \forall x \in B$). Спектром елемента $x \in B$ називається множина тих комплексних чисел λ , для яких елемент $x - \lambda 1$ незвідний:

$$sp\ x = \{ \lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda 1 \text{ незвідний} \}$$

Визначення 1.8.3. Спектральним радіусом $r(x)$ елемента $x \in B$ називається максимум модуля елементів $sp\ x$ (або теж саме, що і радіус найменшого замкненого круга в \mathbb{C} з центром в нулі, що містить $sp\ x$)

1.9 Однобічний зсув та розклад Вольда

Визначення 1.9.1. Для $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ однобічний зсув це такий оператор $S : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ визначений таким чином

$$Sx = S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

та в термінах стандартного базису в $\ell^2(\mathbb{N})$ такий що $S e_n = e_{n+1}$.

Теорема 1.4. 1) Однобічний зсув - це ізометрія (тобто $\|Sx\| = \|x\| - x \in \ell^2$).

2) В спряженому операторі S^* однобічного зсуву наступна форма:

$$S^*(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$$

для всіх $(a_0, a_1, a_2, \dots) \in \ell^2$.

Доведення. Щоб довести 1) треба показати, що $\|(a_0, a_1, a_2, \dots)\| = \|(0, a_0, a_1, a_2, \dots)\|$. Але це тривіально оскільки

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = |0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k-1}|^2.$$

Щоб довести 2), нехай A - це оператор визначений таким чином: $A(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$. Нехай $x = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ та $y = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ будь-які два вектори. Відзначимо те, що

$$(Sx, y) = ((0, a_0, a_1, a_2, \dots), (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \overline{b_k}$$

та

$$(x, Ay) = ((0, a_0, a_1, a_2, \dots), (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_{k+1}}$$

Оскільки ці суми еквівалентні, то з цього слідує, що $A = S^*$. \square

Теорема 1.5. (Розклад Вольда) Нехай $S : H \rightarrow H$ - це ізометрія гільбертового простору H . Тоді має місце розклад простору H в пряму суму двох взаємно ортогональних підпросторів

$$H = H_1 \oplus H_2,$$

таке що

- 1) H_1 та H_2 є звуженням до S ;
- 2) Звуження S на H_2 є унітарним оператором;
- 3) Звуження S на H_1 унітарно еквівалентне однобічному зсуву.

2 Часткова ізометрія та її властивості

Нехай H - гільбертів простір та $B(H)$ - простір всіх обмежених лінійних операторів H . Оператор $P \in B(H)$ будемо називати оператором ортогонального проектування, якщо $P^2 = P = P^*$.

Часткові ізометрії утворюють привабливий і важливий клас операторів. Визначення просте: часткова ізометрія є оператором обмеження якого до ортогонального доповнення його нульового простору є ізометрія. Часткові ізометрії відіграють важливу роль в теорії операторів, вони наприклад, входять в теорію полярного розкладання довільних операторів, і вони становлять наріжний камінь теорії розмірностей алгебр фон Неймана. Є багато звичних прикладів часткової ізометрії: кожна ізометрія - одна, кожен унітарний оператор - лише один, і кожна проєкція одна.

Визначення 2.0.1. Оператор S називається частковою ізометрією, якщо $S : H \rightarrow H$, де $H = \text{Ker}S \oplus (\text{Ker}S)^\perp$ та $\forall x, y \in (\text{Ker}S)^\perp$ виконується $(Sx, Sy) = (x, y)$.

Твердження 2.1. Якщо $S \in B(H)$, де S - часткова ізометрія, то

S^*S - ортогональний преєктор $\Leftrightarrow SS^*$ - ортогональний преєктор.

Доведення. 1) Доведемо спочатку $(S^*S)^2 = S^*S \Rightarrow SS^* = (SS^*)^2$.

$$(SS^*)^3 = SS^*SS^*SS^* = S(S^*S)^2S^* = SS^*SS^* = (SS^*)^2.$$

Позначимо $SS^* = Q$. Так як $(SS^*)^* = (S^*)^*S^* = SS^*$, то і Q - самоспряжений оператор $Q^* = Q$, тоді і $Q^3 = Q^2$.

$$\begin{aligned} Q^3 - Q^2 &= 0 \\ Q^2(Q - 1) &= 0 \end{aligned}$$

За теоремою про розщеплення $H = \text{Ker}Q^2 \oplus \text{Ker}(Q-1)$. Покажемо, що якщо $Q = Q^*$ $\Rightarrow \text{Ker}Q^2 = \text{Ker}Q$. $\text{Ker}Q \subset \text{Ker}Q^2$, бо $Qx = \bar{0} \Rightarrow Q^2x = \bar{0}$. Далі покажемо, що $\text{Ker}Q \supset \text{Ker}Q^2$. Нехай $x \in \text{Ker}Q^2$, $Q^2x = \bar{0}$, тоді скалярний добуток

$$(Q^2x, x) = 0 \Rightarrow (QQx, x) = 0 \Rightarrow (Qx, Qx) = 0 \Rightarrow Qx = \bar{0}.$$

Отже, ми показали що $x \in \text{Ker}Q$, а оскільки $x \in \text{Ker}Q^2$, то $\text{Ker}Q = \text{Ker}Q^2$. Звідси $H = \text{Ker}Q \oplus \text{Ker}(Q-1)$.

$$\begin{aligned} \text{Ker}Q &= \{v | Qv = \bar{0}\}, \\ \text{Ker}(Q-1) &= \{v | (Q-1)v = \bar{0}\} = \{v | Qv = v\}, \end{aligned}$$

тоді остаточно $\text{Ker}Q$ дорівнює власному підпростору, що відповідає числу 0, а $\text{Ker}(Q-1)$ дорівнює власному підпростору, що відповідає числу 1, тобто $H = H_0 \oplus H_1$.

Отже, якщо візьмемо базис H , що складається з ортонормованого базиса H_0 та ортонормованого базиса H_1 , то оператор Q буде

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

, або $Q = 0$, або $Q = 1$, але незалежно від результату $Q^2 = Q$. Тобто, ми довели, що якщо Q - самоспряжений ($Q^* = Q$), $Q^3 = Q^2 \Rightarrow Q^2 = Q$.

2) Доведемо, що $(S^*S)^2 = S^*S \Leftarrow SS^* = (SS^*)^2$.

$$(S^*S)^3 = S^*SS^*SS^*S = S(SS^*)^2S = S^*SS^*S = (S^*S)^2.$$

Позначимо $S^*S = Q$. Так як $(S^*S)^* = S^*(S^*)^* = S^*S$, то і Q - самоспряжений оператор $Q^* = Q$, тоді і $Q^3 = Q^2$. Аналогічним чином до попереднього доведення якщо Q - самоспряжений ($Q^* = Q$), $Q^3 = Q^2 \Rightarrow Q^2 = Q$. \square

Теорема 2.1. *Нехай $S : H \rightarrow H$, S - часткова ізометрія, тоді і лише тоді коли виконуються еквівалентні умови:*

- 1) $S^*S = P_1$, $SS^* = P_2$ - оператори ортогонального проектування.
- 2) Або S^*S , або SS^* є оператором ортогонального проектування.
- 3) $S^*SS^* = S^* \Leftrightarrow SS^*S = S$.

Доведення. 2) Доведемо, що S є частковою ізометрією $\Rightarrow S^*S$ - оператор ортогонального проектування. S^*S - ортогональне проектування на K^\perp , тобто якщо $x = y + z$, де $y \in K$, $z \in K^\perp$, то $S^*Sx = z$. Нехай $y \in K$, тоді

$$S^*Sy = S^*(\bar{0}) = \bar{0}.$$

Нехай $z \in K^\perp$, покажемо що $S^*Sz = z$. Для довільного вектора $u \in H$

$$(u, S^*Sz) = (u, z)$$

виконується тоді і лише тоді, коли $S^*Sz = z$. Запишемо $u = u_1 + u_2$, де $u_1 \in K$, $u_2 \in K^\perp$, тоді

$$(u_1 + u_2, S^*Sz) = (S(u_1 + u_2), Sz) = (Su_1 + Su_2, Sz) \stackrel{Su_1=0}{=} (Su_2, Sz) = (u_2, z),$$

бо S - часткова ізометрія і за означенням $u_2, z \in (Ker S)^\perp$.

Тобто,

$$\begin{aligned} (u, S^*Sz) &= (u_2, z) \\ (u, z) &= (u_1 + u_2, z) = (u_1, z) + (u_2, z) = (u_2, z), \end{aligned}$$

бо $u_1 \in K$, $z \in K^\perp$, звідси їх скалярний добуток рівний $(u_1, z) = 0$. Отже, $\forall u \in H$

$$(u, S^*Sz) = (u_2, z) = (u, z) \Rightarrow S^*Sz = z.$$

Оскільки $\forall z \in K^\perp$ та $\forall y \in K$, $S^*Sz = z$ та $S^*Sy = \bar{0}$, то можемо стверджувати, що S^*S - ортогональний проектор на K^\perp .

Доведемо тепер, що якщо S^*S - ортогональний проектор $\Rightarrow S$ - часткова ізометрія.

Нехай $P = S^*S$, покажемо, що $(Sx, Sy) = (x, y), \forall x, y \in (KerS)^\perp$. Як відомо, $KerS = KerS^*S$ або $(KerS)^\perp = Ker(S^*S)^\perp = KerP^\perp = L$, бо $H = L \oplus L^\perp$ і тому L - підпростір на який проектує ортогональний проектор P . Оскільки P - це проектор на L , то

$$Py = y, \forall y \in L = KerP^\perp = KerS^\perp.$$

Так як $P = S^*S$, то і

$$S^*Sy = y, \forall y \in KerS^\perp.$$

Отже, маємо $\forall x, y \in KerS^\perp$

$$(Sx, Sy) = (x, S^*Sy) = (x, y).$$

Остаточно, S - часткова ізометрія $\Leftrightarrow S^*S$ або SS^* - ортогональні проектори, оскільки S^*S - ортогональний проектор $\Leftrightarrow SS^*$ - ортогональний проектор. //

3) Якщо $x \in RanS$, $x = Sy$, то

$$S^*SS^*x = S^*SS^*Sy = S^*Sy = S^*x.$$

Те саме можемо довести для $x \in \overline{RanS}$, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} Sy_n$.

$$S^*SS^*x = \lim_{n \rightarrow \infty} S^*SS^*Sy_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S^*Sy_n = S^*x.$$

$H = RanS \oplus KerS^*$. Для $x \in RanS$ ми вже довели, що $S^*SS^*x = S^*x$. Нехай $y \in KerS^*$, тоді

$$S^*SS^*y = S^*y = \bar{0}$$

Тепер для $\forall z \in H$, $z = x + y$, де $x \in RanS$, а $y \in KerS^*$

$$S^*SS^*z = S^*SS^*x + S^*SS^*y = S^*x + S^*y = S^*(x + y) = S^*z.$$

Отже, ми довели, що $(S^*S)^2 = S^*S \Rightarrow S^*SS^* = S^*$.

Доведемо тепер, що $(SS^*)^2 = SS^* \Rightarrow SS^*S = S$. Для $x \in RanS$, де $x = S^*y$

$$SS^*Sx = SS^*S^*y = SS^*y = Sx.$$

Нехай $y \in KerS^*$, тоді

$$SS^*Sy = Sy = \bar{0}.$$

Тоді для $\forall z \in H = RanS \oplus KerS^*$

$$SS^*Sz = SS^*Sx + SS^*Sy = Sx + \bar{0} = S(x + y) = Sz.$$

Остаточно, ми показали, що $(SS^*)^2 = SS^* \Rightarrow SS^*S = S$. Отже, оскільки за попереднім твердженням

$$(S^*S)^2 = S^*S \Leftrightarrow (SS^*)^2 = SS^*,$$

Та відомо, що

$$(S^*S)^2 = S^* \Rightarrow S^*SS^* = S^* \text{ та } (SS^*)^2 = SS^* \Rightarrow SS^*S = S$$

То

$$S^*SS^* = S^* \Leftrightarrow SS^*S = S.$$

□

Визначення 2.0.2. *Оператор S в просторі H називається центрованою частковою ізометрією, якщо S^k також є центрованою частковою ізометрією для $k = 1, 2, 3, \dots$*

3 Незвідні набори комутуючих центрованих часткових ізометрій

Теорема Вольда – фон Неймана говорить, що кожна ізометрія в гільбертовому просторі є прямою сумою унітарного оператора та односторонніх зсувів. Халмош і Уолен довели подібний результат для центрованих часткових ізометрій. Їх теорема говорить, що кожна центрована часткова ізометрія є прямою сумою унітарного оператора, деяких односторонніх (прямих) зсувів, деяких зсувів назад і деяких усічених зсувів на скінченновимірних просторах.

Ми будемо використовувати основні властивості часткових ізометрій. Наприклад, дуже допоможе та властивість, що якщо V і W часткові ізометрії, то VW є частковою ізометрією тоді і лише коли проектор V^*V комутує з проектором WW^* . Оператор S є центрованою частковою ізометрією, якщо S^n є частковою ізометрією для всіх $n \geq 0$ і тоді $\{S^n S^{*n}\} \cup \{S^{*n} S^n\}$ - комутуюча сім'я проекторів.

Приклади центрованих часткових ізометрій включають унітарні оператори, односторонні зсуви S на ℓ^2 , зсуви назад S^* та усічені зсуви J_p що визначаються в термінах звичайного базису як $J_p e_n = e_{n+1}$ для $n < p$ та $J_p e_p = 0$. Теорема Халмоша – Уолена говорить, що з цих прикладів можна побудувати кожен центровану часткову ізометрію.

Теорема 3.1. (Халмоша-Уолена)

Нехай T - це центрована часткова ізометрія на гільбертовому просторі H та нехай P та Q - це ортогональні проектори на $\bigcap_{n=1}^{\infty} S^n H$ та $\bigcap_{n=1}^{\infty} S^{*n} H$ відповідно. Тоді $PQ = QP$ та підпростори

$$\begin{aligned} H_u &:= PQH, \\ H_s &:= (1 - P)QH, \\ H_b &:= (1 - Q)PH \\ H_p &:= \sum_{n=1}^p (S^{n-1} S^{*n-1} - S^n S^{*n})(S^{*p-n} S^{p-n} - S^{*p-n+1} S^{p-n+1})H \end{aligned}$$

задовольняють

$$H = H_u \oplus H_s \oplus H_b \oplus \left(\bigoplus_{p=1}^{\infty} H_p \right).$$

Також маємо такі гільбертові простори M_s , M_b та $\{M_p : p \geq 1\}$ такі що:

- 1) $S|_{H_u}$ є унітарним;
- 2) $S|_{H_s}$ унітарно еквівалентно $S \otimes 1$ на $\ell^2(\mathbb{N}) \otimes M_s$;
- 3) $S|_{H_b}$ унітарно еквівалентно $S^* \otimes 1$ на $\ell^2(\mathbb{N}) \otimes M_b$;
- 4) Для $p \geq 1$, $S|_{H_p}$ унітарно еквівалентно $J_p \otimes 1$ на $(\mathbb{C}^p) \otimes M_p$.

Теорема 3.2. (Про незвідні зображення пари сильно комутуючих часткових ізометрій)

Нехай S_1, S_2 - центровані часткові ізометрії та

$$\begin{aligned} S_1^* S_2 &= S_2 S_1^* \\ S_1 S_2 &= S_2 S_1. \end{aligned}$$

В незвідному зображенні можливі такі варіанти:

- 1) $S_1 = S \otimes \mathbf{1}$,
 $S_2 = \mathbf{1} \otimes S$ та $H = l_2 \otimes H_1$;
- 2) $S_1 = S^* \otimes \mathbf{1}$,
 $S_2 = \mathbf{1} \otimes S$ та $H = l_2 \otimes H_1$;
- 3) $S_1 = e^{i\phi} * \mathbf{1}$,
 $S_2 = S$ та $H = H_1$;
- 4) $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}$,
 $S_2 = \mathbf{1} \otimes S$ та $H = \mathbb{C}^n \otimes H_1$.

де S_1 - деяка скінченна жорданова клітка з нулем на діагоналі.

В цих випадках S - незвідна центрована часткова ізометрія на просторі H_1 , а S - однобічний зсув. В свою чергу, S належить до такої множини операторів $S \in \{S, S^*, e^{i\phi_2}, J_k(0)\}$, де $J_k(0)$ - жорданова клітка з нулем на діагоналі.

Тепер розглянемо випадок деформованих комутаційних співвідношень між центрованими частковими ізометріями.

Теорема 3.3. Нехай S_1, S_2 - центровані часткові ізометрії та

$$\begin{aligned} S_1^* S_2 &= \mu S_2 S_1^* \\ S_2 S_1 &= \mu S_1 S_2. \end{aligned}$$

$$\text{Позначимо } t(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, T_k(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{k-1} \end{pmatrix}, |\mu| = 1.$$

Тоді маємо такі незвідні набори:

- 1) $S_1 = U_1$,
 $S_2 = U_2$, де $\{U_1, U_2\}$ - незвідний набір унітарних операторів таких що:

$$U_2 U_1 = \mu U_1 U_2;$$

- 2) $S_1 = T \otimes \mathbf{1}$,
 $S_2 = t(\mu) \otimes S$;
- 3) $S_1 = T^* \otimes \mathbf{1}$,

$$\begin{aligned}
& S_2 = t(\bar{\mu}) \otimes S; \\
4) \quad & S_1 = t(\bar{\mu}) * e^{i\phi_1}, \\
& S_2 = T; \\
5) \quad & S_1 = t(\mu) * e^{i\phi_1}, \\
& S_2 = T^*, \\
6) \quad & S_1 = T_k(\bar{\mu}) * e^{i\phi_1}, \\
& S_2 = J_k(0).
\end{aligned}$$

Доведення. Розкладемо весь простір H в пряму суму підпросторів, де кожен з них інваріантний відносно S_1, S_1^* :

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4,$$

та на котрих, наприклад для першого випадку, $S_1 = U$ на H_1 ; $S_1 = T \otimes \mathbf{1}$ на H_2 ; $S_1 = T^* \otimes \mathbf{1}$ на H_3 та в свою чергу

$$H_4 = H_4^{(1)} \oplus H_4^{(2)} \oplus \dots$$

де S_1 обмежене на $H_4^{(j)}$.

Розглянемо такі проектори P_1, P_2, P_3, P_4 на H_1, H_2, H_3, H_4 . Аналогічно до теореми про комутуючих можемо показати, що S_2 комутує з усіма цими проекторами

$$\begin{aligned}
S_2 P_j &= P_j S_2, \\
S_2^* P_j &= P_j S_2^*.
\end{aligned}$$

Зокрема, це означає, що S_2, S_2^* залишають всі підпростори H_1, H_2, H_3, H_4 інваріантними. Напри

Отже, маючи тепер що

$$S_2, S_2^* : H_4 \rightarrow H_4$$

та оскільки H_4 розкладений як $H_4 = H_4^{(1)} \oplus H_4^{(2)} \oplus \dots$, то так само як і в комутативному випадку нехай $P_4^{(j)}$ - проектор на $H_4^{(j)}$ в просторі H_4 та він комутує з операторами S_2 та S_2^* :

$$\begin{aligned}
S_2^* P_4^{(j)} &= P_4^{(j)} S_2^* \\
S_2 P_4^{(j)} &= P_4^{(j)} S_2
\end{aligned}$$

Звідси, випливає, що ці підпростори $H_4^{(j)}$ теж інваріантні:

$$S_2, S_2^* : H_4^{(j)} \rightarrow H_4^{(j)}$$

Як висновок, якщо набір $\{S_1, S_1^*, S_2, S_2^*\}$ - незвідний, то весь простір

$$H = \begin{cases} H_1, \text{ або} \\ H_2, \text{ або} \\ H_3, \text{ або} \\ H_4^{(j)} \text{ для деякого } j. \end{cases}$$

Тепер почнемо перебирати можливі варіанти:

а) Якщо $H = H_1$, тоді $S_1 = U$ - унітарний оператор, при цьому

$$\begin{aligned} S_2 U &= \mu U S_2 \\ U^* S_2 &= \mu S_2 U^* \end{aligned}$$

Тут тепер відносно S_2 розкладаємо H :

$$H = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4,$$

а це означає, що U залишає всі підпростори F_i інваріантними:

$$\begin{aligned} U: F_1 &\rightarrow F_1 \\ U: F_2 &\rightarrow F_2 \\ U: F_3 &\rightarrow F_3 \\ U: F_4 &\rightarrow F_4 \end{aligned}$$

В даному випадку робимо висновок, що U - унітарний, а простір

$$H = \begin{cases} F_1, \text{ де } S_2 = v - \text{унітарний оператор} \\ F_2, \text{ де } S_2 = T \otimes \mathbf{1} \\ F_3, \text{ де } S_2 = T^* \otimes \mathbf{1} \\ F_4^{(j)}, \text{ де } S_2 = J_k(0) \otimes \mathbf{1}. \end{cases}$$

В свою чергу, звідси маємо такі випадки:

а1) $S_1 = U$, $S_2 = V$, де U та V - унітарні оператори, для яких має місце така рівність

$$VU = \mu UV.$$

$$\text{а2) } S_1 = U, S_2 = T \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ та маємо співвідношення}$$

$$\begin{aligned} S_2 U &= \mu U S_2, \\ U^* S_2 &= \mu S_2 U^*. \end{aligned}$$

$$\text{Можна побачити, що } U = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu * \mathbf{1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^n * \mathbf{1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = e^{i\phi} t(\mu) \otimes \mathbf{1}.$$

З незвідності випливає, що оператор $\mathbf{1}$ є просто одиничкою на одновимірному просторі, тому остаточно маємо

$$\begin{aligned} S_2 &= T, \\ U &= e^{i\phi} t(\mu). \end{aligned}$$

а3) $S_1 = U$, $S_2 = T^* \otimes \mathbf{1}$. Аналогічно до попереднього прикладу в цьому випадку буде впливати, що

$$U = (t(\bar{\mu}) \otimes \mathbf{1})e^{i\phi}$$

Та також з незвідності буде впливати, що оператор $\mathbf{1} = 1$ на одновимірному просторі. Тому, остаточно, маємо

$$\begin{aligned} S_2 &= T^*, \\ U &= e^{i\phi} * t(\bar{\mu}). \end{aligned}$$

а4) $S_2 = J_k(0) \otimes \mathbf{1}$. Як і в попередніх прикладах буде впливати, що

$$U = e^{i\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{k-1} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}$$

де оператор $\mathbf{1}$ аналогічно з незвідності стає звичайною одиницею. Тому остаточно маємо

$$\begin{aligned} S_1 = U &= e^{i\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{k-1} \end{pmatrix} \\ S_2 &= J_k(0). \end{aligned}$$

б) Розглядаємо випадок коли $H = H_2$, тоді $S_1 = T \otimes \mathbf{1}$. Користуючись тим, що

$$\begin{aligned} S_1^* S_2 &= \mu S_2 S_1^* \\ S_2 S_1 &= \mu S_1 S_2. \end{aligned}$$

маємо що

$$S_2 = \begin{pmatrix} \tilde{S}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu \tilde{S}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^n \tilde{S}_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = t(\mu) \otimes \tilde{S}_2,$$

де \tilde{S}_2 - це незвідна центрована часткова ізометрія. Тоді,

$$\tilde{S}_2 = \begin{cases} e^{i\phi_2}, \text{ або} \\ T, \text{ або} \\ T^*, \text{ або} \\ J_m(0). \end{cases}$$

Отже, будемо мати такі випадки:

- $S_1 = T$, $S_2 = e^{i\phi_2} t(\mu)$, де $\mathbf{1} = 1$.

- $S_1 = T \otimes \mathbf{1}, \quad S_2 = t(\mu) \otimes T.$
- $S_1 = T \otimes \mathbf{1}, \quad S_2 = t(\mu) \otimes T^*.$
- $S_1 = T \otimes \mathbf{1}, \quad S_2 = t(\mu) \otimes J_m(0).$

с) $H = H_3$, а S_1 має такий вигляд:

$$S_1 = T^* \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

З того що,

$$\begin{aligned} S_1^* S_2 &= \mu S_2 S_1^* \\ S_2 S_1 &= \mu S_1 S_2 \end{aligned}$$

випливає, що

$$S_2 = \begin{pmatrix} \tilde{S}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu \tilde{S}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^n \tilde{S}_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = t(\bar{\mu}) \otimes \tilde{S}_2,$$

де \tilde{S}_2 - незвідна центрована часткова ізометрія. Це означає, що \tilde{S}_2 належить множині

$$\tilde{S}_2 \in \{e^{i\phi_2}, T, T^*, J_m(0)\}.$$

d) Тепер $H = H_4^{(j)}$, а S_1 має такий вигляд:

$$S_1 = J_n(0) \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогічно до попередніх випадків зі співвідношення

$$\begin{aligned} S_1^* S_2 &= \mu S_2 S_1^* \\ S_2 S_1 &= \mu S_1 S_2 \end{aligned}$$

випливає, що

$$S_2 = \begin{pmatrix} \tilde{S}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu\tilde{S}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{k-1}\tilde{S}_2 \end{pmatrix} = D_n(\mu) \otimes \tilde{S}_2,$$

\tilde{S}_2 - це незвідна центрована часткова ізометрія, тому

$$\tilde{S}_2 \in \{e^{i\phi_2}, T, T^*, J_m(0)\}.$$

□

Отже, підсумовуючи, для пари центрованих часткових ізометрій, які задовольняють деформованим комутаційним співвідношенням

$$\begin{aligned} S_1^* S_2 &= \mu S_2 S_1^* \\ S_2 S_1 &= \mu S_1 S_2, \end{aligned}$$

ми надали повний опис незвідних зображень з точністю до унітарної еквівалентності.

Висновки

В кваліфікаційній роботі вивчаються незвідні пари центрованих часткових ізометрій, що задовольняють умовам сильної комутації та деформовано сильної комутації.

Основними результатами є теореми № 3.2 та № 3.3, в яких отримано повну класифікацію таких пар, з точністю до унітарної еквівалентності.

Література

- [1] Винберг Э.Б., Курс алгебры:учеб. пособие /Э.Б. Винберг - М.: Изд-во "Факториал Пресс 2001. - 544 с.
- [2] Авдеева Т.В, Прикладна алгебра. Алгебраїчні структури. Морфізми. Основи теорії зображень груп: навч. посібник/ Т.В. Авдеева, В.М. Горбачук.- К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 56 с. – Бібліогр.: с. 56. –100 пр.
- [3] Z. Burdak. On decomposition of pairs of commuting isometries. Ann. Polon. Math., 84 (2004), pp. 121-135.
- [4] P.R. Halmos, L.J. Wallen. Powers of partial isometries. Indiana Univ. Math. J., 19 (1970), pp. 657-663.
- [5] Муратов М.А., Островский В.Л., Самойленко Ю.С., Конечномерный линейный Анализ. Линейные операторы в конечномерных гильбертовых(унитарных) пространствах (H): учеб. пособие / М.А. Муратов, В.Л. Островский, Ю.С. Самойленко - Киев: Центр учебной литературы, 2012. - 174 с.
- [6] G. J. Murphy, C^* -Algebras and Operator Theory, Academic Press, Inc., New York, 1990, pp. 35-76, 140-172.
- [7] Z. Burdak, On a decomposition for pairs of commuting contractions Studia Math., 181 (2007), pp. 33-45
- [8] K.R. DAVIDSON, C^* -algebras by example, Fields Institute Monographs, 6, American Mathematical Society, 1996.