Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки 2021, 4 *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.6

УДК 539.376

Кобзар Ю.М., к.ф.-м.н., с.н.с.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУЙНУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ СТЕРЖНІВ ЗА УМОВ БАГАТО ЦИКЛОВОГО СИМЕТРИЧНОГО КРУЧЕННЯ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, Київ, вул. П.Нестерова, 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Kobzar Yu.M., Ph.D. (Phys.-Math.)

SIMULATION OF CYLINDRICAL ROD DESTRUCTION PROCESS UNDER MULTI-CYCLIC SYMMETRIC TORSION

Institute of Mechanics. SP Tymoshenko NAS of Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterova str., 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Запропоновано модель втоми стрижня, в основу якої покладено зменшення несучої маси речовини в першій чверті циклу та збільшення її щільності в другій чверті циклу кручення стрижня проти годинникової стрілки, а також зменшення несучої маси речовини в третій чверті циклу та збільшення її щільності в четвертій чверті циклу кручення за годинниковою стрілкою. Дотичне напруження та кут зсуву зв'язані лінійною залежністю Гука. В залежності від початкових фізико-механічних властивостей стрижня, контролюються його структурні зміни, які кількісно відображають зміни маси, щільності, напружень, модуля зсуву, обчислення яких відбувається на кожному циклі. Прийнято, що крихке руйнування стрижня відбувається в циклі, в якому не виконується нерівність початкової енергії руйнування та потенційної пружної енергії, запомпованої на цьому циклі. Критерієм досягнення межі втоми є невиконання нерівності за межею прийнятої бази випробувань. Алгоритм моделі реалізовується в програмному середовищі комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: симетричне кручення, модель втоми, межа втоми, енергетичний критерій руйнування при втомі.

A fatigue model based on a decrease in the carrier mass of a substance in the first quarter of a cycle. Also a fatigue model based on an increase in its density in the second quarter of a counterclockwise rotation cycle. As well as this model based a decrease in a carrier mass in a third quarter cycle and an increase in its density in a fourth quarter of a clockwise rotation cycle. The tangential stress and shear angle are related by the Hooke linear relationship. Depending on the initial physical and mechanical properties of the rod, its structural changes are controlled, which quantitatively reflect the changes in mass, density, stresses, shear modulus, which are calculated on each cycle. It is accepted that the brittle fracture of the rod occurs in a cycle in which the inequality of the initial fracture energies and the potential elastic energy pumped on this cycle is not fulfilled. The criterion for achieving the limit of fatigue is not to fulfill the inequality outside the accepted test base. The model algorithm is implemented in the software environment of computer algebra.

Key Words: symmetrical torsion, fatigue model, fatigue limit, energy criterion of destruction at fatigue.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Прогнози руйнування в умовах багато циклової втоми у випадку симетричного навантаження невідомі. В даній роботі запропонована модель втоми стрижня під дією симетричного кручення. У рамках моделі досліджується руйнування матеріалів, коли змінюється несучий об'єм зразка і не враховуються малі зміни форми. Визначаються на кожному циклі структурні зміни, які спричиняють зміни маси, щільності, напруження, модуля зсуву. Прийнято, що втомне руйнування стрижня відбувається на тому циклі, на якому не виконується нерівність, яка характеризує процес. Ця нерівність отримана з балансу енергій – зовнішньої, викликаної циклічним моментом, та пружної енергії стрижня, що з'явилась в ньому внаслідок прикладання моменту. Цей підхід є розвитком моделі руйнування при багато цикловому симетричному розтязі - стискові [1,2].

Нехай на ізотропний стержень з коефіцієнтом Пуассона μ, межею міцності $\sigma_в$ і початковими – модулем зсуву G_1, масою m_1, щільністю ρ_1, довжиною L, площею перерізу F_1, діє симетричний періодичний обертальний момент M_i з амплітудним значенням $M_a = const$. Початкове дотичне напруження $\tau_0 = \dfrac{\text{M}_a}{\pi R_0^3}$ менше межі пропорційності $\sigma_{пц}$. Циклічні дотичні напруження

$$\tau(i) = \tau_a(i) sin\Omega t, \qquad (1)$$

де $\tau_a(i) = M_a / W_p(i)$; $W_p(i)$ – амплітудні значення полярного моменту опору поперечного перерізу стрижня, що виникають в стрижні з початковим об'ємом $V_1 = m_1/\rho_1$, викликають на кожному i-тому циклі стиск у першій $j=1$, третій $j=3$ та розтяг в другій $j=2$ і 4 чвертях.

Початкова пружна енергія, що накопичується в стрижні з амплітудою в одиниці об'єму при крученні буде

$$U = W_1 V_1 = \frac{\tau_к{}^2}{4G_2(0)}\frac{m}{\rho}. \qquad (2)$$

Найбільша потенційна енергія U, що прикладена ззовні при циклічному крученні стрижня, дорівнює половині добутку коефіцієнту жорсткості $k = m\omega_0{}^2$ гармонічного моменту з частотою Ω на квадрат найбільшого кута закручування $\varphi = -\dfrac{M_a L}{m\omega_0{}^2}$, де ω – початкова власна частота стрижня при співвідношенні $\Omega << \omega$ між частотами, і рівна

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_a{}^2 L^2}{m\omega_0{}^2}. \qquad (3)$$

Ці енергії (2), (3), при найбільших кутах закручування, рівні між собою

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_a{}^2 L^2}{m\omega_0{}^2} = \frac{\tau_к{}^2}{4G_2(0)}\frac{m}{\rho}. \qquad (4)$$

З балансу енергій (4), знаходимо початкову власну частоту $\omega_0 = \dfrac{M_a L}{m\tau_к}\sqrt{2G_2(0)\rho}$ стрижня.

Прийнято, що зовнішнє амплітудне значення руйнуючого моменту є $M_в = \dfrac{m\tau_в\omega_0}{L\sqrt{2G_2(0)\rho}}$, а енергія руйнування $U_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{M_в{}^2 L^2}{m\omega_0{}^2}$. Критерієм крихкого руйнування є виконання нерівності

$$\frac{M_в{}^2 L^2}{m_1\omega_0{}^2} - \frac{\tau_{aj}(i)^2}{2G_j(i)}\frac{m_j(i)}{\rho_j(i)} < 0, \qquad (5)$$

на j-ій чверті i-го циклу і цей цикл $i = N_a < N_0$ є межею циклічної довговічності при початковому дотичному напруженні τ_1, викликаного циклічним симетричним моментом M_a. Критерієм досягнення межі втоми є невиконання нерівності (5) для $i \geq N_0$ за межею прийнятої бази випробувань N_0.

Розглянемо рекурентний процес накопичення втоми на довільному i-му циклі. В першій чверті $j=1$ циклу при стискові проти годинникової стрілки прийнято, що довжина L та щільність $\rho_4(i-1) = \rho_1(i)$ не змінюються. Стан стрижня в цій чверті циклу i та четвертій чверті попереднього циклу $i-1$ зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_4(i-1)\pi(R_4(i-1))^2 L}{m_4(i-1)} = \frac{\rho_1(i)\pi(R_1(i))^2 L}{m_1(i)}, \quad (6)$$

де $m_1(i)$ - несуча маса стрижня; $R_1(i)$ - його радіус.

За допомогою рівнянь (6) залежність між масами та радіусами буде

$$\frac{m_1(i)}{m_4(i-1)} = \frac{(R_1(i))^2}{(R_4(i-1))^2}, \qquad (7)$$

де $m_1(i)$ - невідома маса. Баланс енергій цієї чверті циклу $j=1$ даного i-го циклу має вигляд

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_a{}^2 L^2}{m_1(i)\omega_0{}^2} = \frac{(\tau_{a1}(i))^2}{4G_1(i)}\frac{m_1(i)}{\rho_1(i)}. \qquad (8)$$

Максимальне амплітудне напруження є

$$\tau_{a1}(i) = G_1(i)\gamma_1(i). \qquad (9)$$

Відношення радіусів через напруження та кут зсуву попереднього циклу представляється як

$$\left(\frac{R_1(i)}{R_4(i-1)}\right)^4=\frac{\tau_{a4}(i-1)}{G_1(i)\gamma_4(i-1)}. \qquad (10)$$

Тоді, відношення початкового радіусу до попереднього, враховуючи (7), (9), (10) з балансу енергій (8), буде

$$\left(\frac{R_1(i)}{R_4(i-1)}\right)^2=\frac{2\rho_4(i-1)M_a{}^2L^2}{\omega_0{}^2 m_4(i-1)^2\gamma_4(i-1)\tau_4(i-1)}. \quad (11)$$

Знаючи відношення радіусів (11), визначаємо новий модуль зсуву з (10), який дорівнює

$$G_1(i)=\frac{\tau_4(i-1)}{\gamma_4(i-1)}\left(\frac{R_4(i-1)}{R_1(i)}\right)^4 \qquad (12)$$

та кут зсуву

$$\gamma_1(i)=\gamma_4(i-1)\frac{R_1(i)}{R_4(i-1)}. \qquad (13)$$

Маса (7), напруження (9) та модуль зсуву (12), знайдені в цій чверті циклу, стають початковими даними для наступної чверті цього циклу.

У другій $j=2$ чверті циклу при крученні проти годинникової стрілки прийнято, що стрижень розтягується, а його маса, довжина та модуль зсуву не змінюються, але змінюються щільність та об'єм.

У другій чверті циклу стан стержня зв'язаний з його станом в попередній чверті цього циклу рівняннями

$$1=\frac{\rho_1(i)\pi(R_1(i))^2L}{m_1(i)}=\frac{\rho_2(i)\pi(R_2(i))^2L}{m_2(i)}, \quad (14)$$

де $\rho_2(i)$ – істинна щільність і $R_2(i)$ – радіус стрижня в кінці циклу. Залежність між істинною щільністю цієї чверті циклу $\rho_2(i)$ і радіусом стержня $R_2(i)$ виходячи з рівності (14) буде

$$\frac{\rho_2(i)}{\rho_1(i)}=\frac{(R_1(i))^2}{(R_2(i))^2}. \qquad (15)$$

Максимальне напруження в кінці попередньої чверті циклу досягається біля поверхні стержня радіус якої $R_1(i)$ та має вигляд

$$\tau_1(i)=\frac{\mathrm{M}_a}{\pi R_1^3(i)}, \qquad (16)$$

і є початковим для даного циклу.

Максимальне напруження в цій чверті циклу досягається в точках перетину біля поверхні стержня радіус якої $R_2(i)$

$$\tau_2(i)=\frac{\mathrm{M}_a}{\pi(R_2(i))^3}. \qquad (17)$$

З іншого боку максимальне напруження представляється, як

$$\tau_2(i)=G_1(i)\gamma_2(i). \qquad (18)$$

Виходячи з рівнянь (16), (17), (18) має місце залежність

$$\frac{(R_1(i))^3}{(R_2(i))^3}\tau_1(i)=G_1(i)\gamma_2(i). \qquad (19)$$

Кути зсуву сусідніх чвертей $j=1$, $j=2$ циклу i зв'язані рівнянням

$$\gamma_2(i)=\gamma_1(i)\frac{R_2(i)}{R_1(i)}, \qquad (20)$$

і беручи до уваги (20), напруження (18) буде

$$\tau_{a2}(i)=G_1(i)\gamma_1(i)\frac{R_2(i)}{R_1(i)}. \qquad (21)$$

З виразів (19) та (20) отримуємо

$$\frac{R_1(i)^3}{(R_2(i))^3}\tau_1(i)=G_1(i)\gamma_1(i)\frac{R_2(i)}{R_1(i)}, \qquad (22)$$

звідки $$R_2(i)=\left(\frac{\tau_1(i)}{G_1(i)\gamma_1(i)}\right)^{\frac{1}{4}}R_1(i). \qquad (23)$$

Залежність (23) визначає радіус та дозволяє знайти кут зсуву (20), напруження (21), щільність (15) через значення попередньої чверті циклу, які є початкові для наступної чверті циклу. В цій чверті $j=2$ при розтязі, згідно припущення, маса не змінювалась $m_1(i)=m_2(i)$ і модуль зсуву не перераховувався. Далі перевіряється нерівність (5): якщо вона виконується, руйнування відбулося, розрахунки припиняються, в протилежному випадку обчислення продовжуються. У процесі кручення стрижня за годинниковою стрілкою в третій чверті $j=3$ циклу він стискається, змінюються його загальна несуча маса, об'єм, але зберігаються його довжина L та щільність $\rho_2(i)=\rho_3(i)$. Стан стрижня в попередній та даній, третій $j=3$, чвертях зв'язують рівності

$$1=\frac{\rho_2(i)\pi(R_2(i))^2L}{m_2(i)}=\frac{\rho_3(i)\pi(R_3(i))^2L}{m_3(i)}, \quad (24)$$

де $m_3(i)$- несуча маса стрижня; $R_3(i)$- його радіус. Залежність між істинною масою цієї чверті циклу $m_3(i)$ і радіусом стрижня $R_3(i)$, виходячи з рівності (24), буде

$$\frac{m_3(i)}{m_2(i)} = \frac{(R_3(i))^2}{(R_2(i))^2}. \qquad (25)$$

Максимальне початкове напруження цієї чверті циклу буде (17). Максимальне напруження в кінці чверті буде

$$\tau_{a3}(i) = \frac{\mathrm{M}_a}{\pi(R_3(i))^3}, \qquad (26)$$

З іншої сторони його можна представити як

$$\tau_{a3}(i) = G_3(i)\gamma_3(i). \qquad (27)$$

З рівнянь (17), (26), (27) випливає залежність

$$\frac{R_2(i)^3}{(R_3(i))^3}\tau_2(i) = G_3(i)\gamma_3(i). \qquad (28)$$

Кути зсуву сусідніх чвертей $j=2$, $j=3$ для циклу i зв'язані рівнянням

$$\gamma_3(i) = \gamma_2(i)\frac{R_3(i)}{R_2(i)}, \qquad (29)$$

і тоді (27), врахувавши (29), буде

$$\tau_{a3}(i) = G_3(i)\gamma_2(i)\frac{R_3(i)}{R_2(i)}. \qquad (30)$$

З (28) і (29) отримуємо

$$\frac{R_2(i)^3}{(R_3(i))^3}\tau_2(i) = G_3(i)\gamma_2(i)\frac{R_3(i)}{R_2(i)}, \qquad (31)$$

звідки залежність між радіусами буде

$$R_3(i) = \left(\frac{\tau_2(i)}{G_3(i)\gamma_2(i)}\right)^{\frac{1}{4}} R_2(i). \qquad (32)$$

Баланс енергій цієї чверті $j=3$ цього циклу i має вигляд

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_a{}^2L^2}{m_3(i)\omega_0{}^2} = \frac{(\tau_{a3}(i))^2}{4G_3(i)}\frac{m_3(i)}{\rho_3(i)}. \qquad (33)$$

Скориставшись значеннями $\tau_{a3}(i)$ з (30), $m_3(i)/m_3(i)$ з (25) в балансі енергій (33) та виразом (32) для $(R_3(i)/R_2(i))^4$, отримаємо відношення невідомого та початкового радіусів

$$\left(\frac{R_3(i)}{R_2(i)}\right)^2 = \frac{2\rho_2(i)M_a{}^2L^2}{\omega_0{}^2m_2(i)^2\gamma_2(i)\tau_2(i)}. \qquad (34)$$

Через відомі відношення радіусів (34) визначаються модуль зсуву з (32), який буде

$$G_3(i) = \frac{\tau_2(i)}{\gamma_2(i)}\left(\frac{R_2(i)}{R_3(i)}\right)^4, \qquad (35)$$

кут зсуву (29), напруження (30), маса (25), радіус (34), які є початковими даними для останньої чверті даного циклу. Такі ж рекурентні обчислення проводяться для кожної чверті наступних циклів. Апробація моделі знаходиться в стадії розробки і реалізується в доступній системі комп'ютерної алгебри. Запропонована модель вперше прогнозує руйнування від втоми при симетричному циклічному крученні стрижня, не використовуючи при цьому результатів лабораторних випробувань на втому.

Список використаних джерел

1. *Кобзарь Ю.М.* К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении сжатии / Ю.М Кобзарь // Авиационно-космическая техника и технология. Харьков: «ХАИ». – 2015. – №9 (126). – С. 6–14.
2. *Кобзар Ю.М.* Модель структурних змін та руйнування гладких циліндричних стрижнів при одновісному симетричному розтязі-стиску / Ю.М. Кобзар // Матеріали XX МНТК „Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта". – Київ: ММІ НТУУ «КПІ» ім. І. Сікорського, 10–13 вересня 2019 року. –С. 46–49.

References

1. KOBZAR, Yu. (2015) K otsenke ustalostnoi dolhovechnosti hladkykh Tsilindricheskikh sterzhnei pri odnoosnom simmetrichnom rastiazhenii szhatii. *In Aviation and Space Engineering and Technology*. 2015. Kharkiv: "KhAI" named after N. Zhukovsky. №9 (126). pp. 6-14.
2. KOBZAR, Yu. (2019) Model strukturnykh zmin ta ruinuvannya hladkykh tsylindrychnykh stryzhniv pry odnovisnomu sumetrychnomu roztiazistyscku. *Materials of XX ISTC "Progressive Engineering, Technology and Engineering Education"*. September 10-13, 2019. Kyiv: MMI NTUU "KPI" them. I. Sikorsky. pp. 46-49.

Надійшла до редколегії 29.08.21