

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИСИПАТИВНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОВОРА З НЕЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЗМІННИХ ВИРОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з коефіцієнтами, що не залежать від змінних виродження і є необмеженими за просторовою змінною, побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші. Зростання коефіцієнтів рівняння залежить від зростаючої функції, яку називаємо характеристикою дисипації. Коефіцієнти рівняння задовольняють спеціальну умову Гельдера, що містить характеристику дисипації. Диференційовність коефіцієнтів не вимагається, тому на характеристику накладено додаткову умову. Ультрапараболічні рівняння Колмогорова зі зростаючими коефіцієнтами виникають у задачах теорії випадкових процесів, у статистичній радіотехніці.

Фундаментальний розв'язок задачі Коші побудовано методом Леві. За параметрикс узято фундаментальний розв'язок задачі Коші розглядуваного рівняння з коефіцієнтами, залежними від часової та параметричної просторової змінної. Це ускладнює дослідження, оскільки у випадку обмежених коефіцієнтів за параметрикс береться фундаментальний розв'язок задачі Коші рівняння із замороженими коефіцієнтами тільки групи старших похідних.

Отримані оцінки похідних фундаментального розв'язку задачі Коші можуть бути використані під час вивчення питань розв'язності задачі Коші й інтегрального зображення розв'язків у спеціальних вагових просторах, а також для побудови класичного фундаментального розв'язку задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова зі зростаючими за $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, що залежать і від змінних виродження, і систем таких рівнянь.

Ключові слова: ультрапараболічне рівняння Колмогорова, зростаючі коефіцієнти, фундаментальний розв'язок задачі Коші, метод Леві.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 35K70, 35A08.

Вступ

Поняття фундаментального розв'язку задачі Коші є основним у дослідженні розв'язності задачі Коші. Найповніші результати про фундаментальний розв'язок задачі Коші одержано для параболічних за І. Петровським та за С. Ейдельманом рівнянь і систем рівнянь з обмеженими і зростаючими за $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами. Вони викладені в монографії (Eidelman, Ivasyshen, & Kochubei, 2004) та цитованих у ній публікаціях. Побудові і дослідженню фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь присвячені праці С. Ейдельмана, Г. Малицької, Л. Тичинської, С. Івасишена, Л. Андросової, В. Дроня. Переважно ці результати проаналізовані та викладені у згаданій монографії, де побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від змінної t . У працях італійських математиків вивчаються L -розв'язки задачі Коші ультрапараболічних рівнянь із блочною структурою (Di Francesco, & Pascucci, 2005). Зважаючи на різноманітні застосування, дослідження ультрапараболічних рівнянь здійснюється також іншими методами без побудови фундаментального розв'язку задачі Коші (Процах, & Пташник, 2017).

Результати про фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами досить точні, однак такими вони не є у випадку зростаючих коефіцієнтів. Побудові фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння типу Колмогорова з обмеженими коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, присвячено ряд праць С. Івасишена та І. Медінського. У статті (Ivasyshen, & Medyn's'ky, 2018) реалізовується поетапне застосування методу Леві, причому коефіцієнти рівняння задовольняють спеціальну умову Гельдера. Для виродженого параболічного рівняння другого порядку зі сталими у групі старших і зростаючими у групі молодших похідних із двома групами змінних виродження в праці (Івасишен, & Пасічник, 2014) одержано в явному вигляді формулу фундаментального розв'язку задачі Коші.

У пропонованій статті розглянуто ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова із двома групами змінних і коефіцієнтами, що не залежать від змінних виродження, а їхнє зростання обумовлене деякою зростаючою функцією. Як і у випадку невироджених рівнянь, для коефіцієнтів розглядуваного рівняння вводиться дві серії умов. Тут розглянуто випадок геллерових коефіцієнтів із додатковою умовою на функцію, від якої залежить ріст коефіцієнтів. Для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші використано метод Леві. З огляду на це значна увага приділена вивченню властивостей головного члена формули фундаментального розв'язку задачі Коші.

1. Основні означення та результати

У шарі $P_{(0,T]} := (0, T] \times R^n$ скінченної товщини $T > 0$ розглядаємо рівняння

$$Lu(t, x_1, \partial_t, \partial_x) := \left(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} - a_0(t, x_1) \right) u(t, x) = 0. \quad (1)$$

Тут n_1, n_2 – задані натуральні числа, причому $n_2 \leq n_1$, $n = n_1 + n_2$, змінна $x = (x_1, x_2) \in R^n$ складається із двох груп, де $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n_1}) \in R^{n_1}$, $l \in \{1, 2\}$, $S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}}$. Рівняння (1) є виродженим рівнянням типу Колмогорова другого порядку (ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова), його коефіцієнти $a_{js}, \{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, $a_j, j \in \{1, \dots, n_1\}$ і a_0 не залежать від змінних виродження $x_{2j}, j \in \{1, \dots, n_2\}$.

Означення. Рівняння (1) називатимемо дисипативним ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова в $\Pi_{(0,T]}$, якщо існує неперервна функція $D: R^{n_1} \rightarrow [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:

- 1) $D(x_1) \rightarrow \infty$ при $|x_1| \rightarrow \infty$;
- 2) функції $b_{js}(t, x_1) = a_{js}(t, x_1)$, $b_j(t, x_1) = a_j(t, x_1)D(x_1)^{-1}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, $b_0(t, x_1) = a_0(t, x_1)D(x_1)^{-2}$, $x_1 \in R^{n_1}$, $0 \leq t \leq T$, обмежені;
- 3) для рівняння

$$\left(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} (-i \partial_{x_{n+1}}) - b_0(t, x_1) (-i \partial_{x_{n+1}})^2 \right) v(t, x) = 0$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} виконується умова параболічності

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 \in R^{n_1} \quad \forall \mu \in R: \operatorname{Re} \left(- \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, x_1) \sigma_{x_{1j}} \sigma_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, x_1) \sigma_{x_{1j}} \mu - b_0(t, x_1) \mu^2 \right) \geq \delta (|\sigma_1|^2 + \mu^2).$$

Функція D за такої умови називається характеристикою дисипації рівняння (1).

Припустимо, що виконуються такі умови на коефіцієнти рівняння (1).

B_1 . Рівняння (1) є дисипативним ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова в $\Pi_{(0,T]}$, із характеристикою дисипації D .

B_2 . $\exists C > 0 \quad \exists \lambda \in (0,1] \quad \forall \{x_1, y_1\} \subset R^{n_1} \quad \forall t \in [0, T]: |\Delta_{x_1}^{y_1} a_{js}(t, x_1)| \leq C |x_1 - y_1|^\lambda$,

$$|\Delta_{x_1}^{y_1} a_j(t, x_1)| \leq C |x_1 - y_1|^\lambda (D(x_1) + D(y_1)), \quad |\Delta_{x_1}^{y_1} a_j(t, x_1)| \leq C |x_1 - y_1|^\lambda \left((D(x_1)) + (D(y_1))^2 \right);$$

функції b_{js} , b_j , $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, b_0 , як функції t , є неперервними рівномірно щодо $x_1 \in R^{n_1}$.

B_3 . Характеристика дисипації D задовольняє такі умови:

- 1) $\exists C > 0 \quad \forall \{x_1, y_1\} \subset R^{n_1}, |x_1 - y_1| \leq 1: D(x_1) \leq CD(y_1)$;
- 2) $\exists C > 0 \quad \forall \{x_1, y_1\} \subset R^{n_1}, |x_1 - y_1| > 1: D(x_1) \leq C \exp \{ \varepsilon |x_1 - y_1| D(y_1) \}$,

де ε – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації будемо оперувати.

Нехай $g: R^{n_1} \rightarrow [1, \infty)$ – функція, що пов'язана із характеристикою дисипації D умовою

B_4 . $g(x_1) \rightarrow \infty$ за $|x_1| \rightarrow \infty$, існують похідні $\partial_{x_1}^{k_1} g$, $0 < |k_1| \leq 2$, для яких справджуються нерівності

$$|\partial_{x_1}^{k_1} g(x_1)| \leq C \eta (D(x_1))^{|k_1|}, \quad |\Delta_{x_1}^{y_1} \partial_{x_1}^{k_1} g(x_1)| \leq C \eta |x_1 - y_1|^\lambda \left((D(x_1))^{|k_1|} + (D(y_1))^{|k_1|} \right), \quad \{x_1, y_1\} \subset R^{n_1}, \quad 0 < |k_1| \leq 2,$$

де $C > 0$, $\lambda \in (0,1]$ з умови B_2 , η – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації будемо розпоряджатись.

Наведемо основний результат про фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1).

Використовуватимемо ще такі позначення: $M := n_1 m_1 + n_2 m_2$, де $m_1 := 1/2$, $m_2 := 3/2$; $x_1 := (x'_1, x''_1)$, де $x'_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_2})$, $x''_1 := (x_{1(n_2+1)}, \dots, x_{1n_1})$; $X_1(t) = x_1$, $X_2(t) = x_2 + tx'_1$;

$$E_c(t, x, \xi) := \exp \{ -c(|X_1(t) - \xi_1|^2 t^{-1} + |X_2(t) - \xi_2|^2 t^{-3}) \} = E_c^1(t, x_1, \xi_1) E_c^2(t, X_2(t), \xi_2);$$

$M_k := |k_1| m_1 + |k_2| m_2$, де мультиіндекс $k = (k_1, k_2) \in Z_+^n$, а якщо $k_2 = 0$, то $M_{k_1} := |k_1| m_1$.

Теорема. Нехай для рівняння (1) виконуються умови $B_1 - B_3$. Тоді для нього існує фундаментальний розв'язок задачі Коші $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset R^n$, для якого справджуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi)| \leq C C_l \left((t - \tau)^{-M - M_{k_1}} \exp \{ -c(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \} + (D(\xi_1))^{-l} \right) E_c(t - \tau, x, \xi), \quad |k_1| < 2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} |\partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi)| &\leq C_l \left((t - \tau)^{-M - M_{k_1}} \exp \{ -c(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \} + (D(\xi_1))^{-l} \right) E_c(t - \tau, x, \xi) \times \\ &\times \left(1 + (D(x_1))^2 + \exp \{ \varepsilon (t - \tau)(D(x_1))^2 \} \right), \quad |k_1| = 2, \end{aligned} \quad (3)$$

де l – довільно фіксоване додатне число $C_l > 0$, $c > 0$.

Крім того, правильними є оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi)| \leq C \sum_{j=0}^{|k_1|} (t - \tau)^{-M - M_{k_1} + j m_1} (D(x_1))^j E_c(t - \tau, x, \xi) \exp \{ g(x_1) - g(\xi_1) \}, \quad |k_1| < 2,$$

$$|\partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi)| \leq C_l \sum_{j=0}^{|k_1|} (t - \tau)^{-M - M_{k_1} + j m_1} (D(x_1))^j \left(1 + (D(x_1))^2 + \exp \{ \varepsilon (t - \tau)(D(x_1))^2 \} \right), \quad |k_1| = 2,$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad (4)$$

де $C > 0$, $c > 0$, g – будь-яка функція, яка задовольняє умову B_4 .

Фундаментальний розв'язок задачі Коші шукаємо методом Леві, тому опишемо спочатку головний член формули для фундаментального розв'язку задачі Коші.

2. Головний член формули для фундаментального розв'язку задачі Коші

Розглянемо допоміжне рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, y_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, y_1) \partial_{x_{1j}} (-i \partial_{x_{n+1}}) - b_0(t, y_1) (-i \partial_{x_{n+1}})^2 \right) v(t, x, x_{n+1}) = 0,$$

$$(t, x, x_{n+1}) \in \Pi_{(0,T]} := (0, T] \times R,$$

де y_1 – фіксована точка простору R^{n_1} . Шукаючи розв'язок задачі Коші для цього рівняння у вигляді

$$v(t, x, x_{n+1}) = F_{\sigma \rightarrow x, \eta \rightarrow x_{n+1}}^{-1} [\tilde{v}(t, \sigma, \eta)], \quad t > 0, \quad (x, x_{n+1}) \in R^{n+1},$$

і, використавши властивості оберненого перетворення Фур'є, одержимо для невідомої функції $\tilde{v}$ задачу Коші для лінійного неоднорідного рівняння із частинними похідними першого порядку, яку розв'язуємо методом характеристик. У підсумку приходимо до формули

$$v(t, x, x_{n+1}) = \int_{R^{n+1}} G_0(t, x, \tau, \xi, x_{n+1} - \xi_{n+1}, y_1) \varphi(\xi) d\xi d\xi_{n+1}, \quad t > 0, \quad (x, x_{n+1}) \in R^{n+1},$$

у якій

$$G_0(t, x, \tau, \xi, x_{n+1} - \xi_{n+1}, y_1) = F_{\mu \rightarrow x(t-\tau)-\xi}^{-1} v \rightarrow x_{n+1}-\xi_{n+1} [V(t, \tau, \mu, v, y_1)](t, \tau, x, \xi, x_{n+1} - \xi_{n+1}, y_1), \quad (5)$$

а функція $V(t, \tau, \mu, v, y_1)$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} & (\partial_t - \sum_{j,s=1}^{n_1} b_{js}(t, y_1) ([\mu_{1j} + (\theta - \tau)\mu_{2j}] \zeta'_j + \mu_{1j} \zeta''_j) ([\mu_{1s} + (\theta - \tau)\mu_{2s}] \zeta'_s + \mu_{1s} \zeta''_s) - \\ & - i \sum_{j=1}^{n_1} b_j(t, y_1) ([\mu_{1j} + (\theta - \tau)\mu_{2j}] \zeta'_j + \mu_{1j} \zeta''_j) v - b_0(t, y_1) v^2) V(t, \tau, \mu, v, y_1) = 0, \quad V|_{t=\tau} = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\zeta'_j := \{1, j \in \{1, \dots, n_2\}, 0, j \in \{n_2 + 1, \dots, n_1\}, \zeta''_j := \{0, j \in \{1, \dots, n_2\}, 1, j \in \{n_2 + 1, \dots, n_1\}\}$.

Як для залежних від t в (Eidelman, Ivasyshen, & Kochubei, 2004) коефіцієнтів, одержуємо оцінку

$$|V(t, \tau, \sigma + i\gamma, \eta, y_1)| \leq C \exp\{(-\delta_1 |\sigma_1|^2 + c_1 |\gamma_1|^2)(t - \tau) + (-\delta_1 |\sigma_2|^2 + c_1 |\gamma_2|^2)(t - \tau)^3 - \delta |\eta|^2(t - \tau)\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{\sigma, \gamma\} \subset R^n, \quad \eta \in R, \quad y_1 \in R^{n_1},$$

у якій $C > 0$, $\delta_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\delta > 0$, а на підставі цієї оцінки, (5) й умови B_1 одержуємо

$$\begin{aligned} & |\partial_x^k \partial_{x_{n+1}}^{k_{n+1}} G_0(t, x, \tau, \xi, x_{n+1} - \xi_{n+1}, y_1)| \leq C_{kk_{n+1}} (t - \tau)^{-M-M_k-k_{n+1}/2} E_c(t - \tau, x, \xi) \times \\ & \times \{-c|x_{n+1} - \xi_{n+1}|^2(t - \tau)^{-1}\}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad \{x_{n+1}, \xi_{n+1}\} \subset R, \quad y_1 \in R^{n_1}, \end{aligned}$$

де $k \in Z_+^n$, $k_{n+1} \in Z_+$, $C_{kk_{n+1}} > 0$, $c > 0$ – деякі сталі. Нехай $\hat{G}_0(t, x; \tau, \xi; v; y_1) = F_{z \rightarrow v}[G_0(t, x; \tau, \xi; z; y_1)]$ і

$\hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) = \hat{G}_0(t, x; \tau, \xi; D(y_1); y_1)$. Використовуючи властивості перетворення Фур'є, одержуємо

$$\begin{aligned} & |\partial_x^k \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1)| \leq C_k (t - \tau)^{-M-M_k} E_c(t - \tau, x, \xi) \exp\{-c(t - \tau)(D(y_1))^2\}, \\ & 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad y_1 \in R^{n_1}, \end{aligned} \quad (7)$$

причому $\hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) = F_{\sigma \rightarrow x(t-\tau)-\xi}^{-1} [V_0(t, \tau, \sigma, y_1)](t, \tau, x, \xi, y_1)$ є фундаментальним розв'язком задачі Коші рівняння

$$L(t, y_1, \partial_t, \partial_x) v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (8)$$

а $V_0(t, \tau, \sigma, y_1) = V(t, \tau, \sigma, D(y_1), y_1)$ згідно з (6) є розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} & (\partial_t - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, y_1) ([\sigma_{1j} + (t - \tau)\sigma_{2j}] \zeta'_j + \sigma_{1j} \zeta''_j) ([\sigma_{1s} + (t - \tau)\sigma_{2s}] \zeta'_s + \sigma_{1s} \zeta''_s) - \\ & - i \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y_1) ([\sigma_{1j} + (t - \tau)\sigma_{2j}] \zeta'_j + \sigma_{1j} \zeta''_j) - a_0(t, y_1)) V_0(t, \tau, \sigma, y_1) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де $\zeta'_j := \begin{cases} 1, j \in \{1, \dots, n_2\}, \\ 0, j \in \{n_2 + 1, \dots, n_1\}; \end{cases}$ $\zeta''_j := \begin{cases} 0, j \in \{1, \dots, n_2\}, \\ 1, j \in \{n_2 + 1, \dots, n_1\}. \end{cases}$ При цьому

$$|V_0(t, \tau, \sigma + i\gamma, y_1)| \leq C \exp\{(-\delta_1 |\sigma_1|^2 + c_1 |\gamma_1|^2)(t - \tau) + (-\delta_1 |\sigma_2|^2 + c_1 |\gamma_2|^2)(t - \tau)^3 - \delta (D(y_1))^2(t - \tau)\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{\sigma, \gamma\} \subset R^n, \quad \eta \in R, \quad y_1 \in R^{n_1}, \quad (10)$$

де $C > 0$, $\delta_1 > 0$, $c_1 > 0$, $\delta > 0$.

Оцінка (10) лежить в основі отримання повного аналітичного опису $\hat{G}$. Наведемо деякі властивості фундаментального розв'язку рівняння (8).

Твердження 1. Нехай коефіцієнти рівняння (8) задовольняють умови B_1, B_2 . Тоді справджуються оцінки

$$\begin{aligned} & \Delta_{y_1}^{z_1} \partial_x^k \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) \leq C |y_1 - z_1|^\lambda (t - \tau)^{-M-M_k} (\exp\{-c(t - \tau)(D(y_1))^2\} + \exp\{-c(t - \tau)(D(z_1))^2\}) \times \\ & \times ((D(y_1))^2 + (D(z_1))^2) E_c(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad \{y_1, z_1\} \subset R^{n_1}, \quad k \in Z_+^n. \end{aligned} \quad (11)$$

Доведення твердження 1. На підставі зазначеного, для рівняння для отримання оцінки (11) досить одержати оцінку різниці $\Delta_{y_1}^{z_1} V_0(t, \tau, \varrho, y_1)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{y_1, z_1\} \subset R^{n_1}$, $\varrho \in C^n$. На підставі (9) запишемо

$$\begin{aligned} & \Delta_{y_1}^{z_1} V_0(t, \tau, \varrho, y_1) = \int_\tau^t V_0(t, \theta, \varrho, y_1) \left(\sum_{j,s=1}^{n_1} \Delta_{y_1}^{z_1} a_{js}(\theta, y_1) ([\sigma_{1j} + (\theta - \tau)\sigma_{2j}] \zeta'_j + \sigma_{1j} \zeta''_j) ([\sigma_{1s} + (\theta - \tau)\sigma_{2s}] \zeta'_s + \right. \\ & \left. + \sigma_{1s} \zeta''_s) - i \sum_{j=1}^{n_1} a_j(\theta, y_1) ([\sigma_{1j} + (\theta - \tau)\sigma_{2j}] \zeta'_j + \sigma_{1j} \zeta''_j) - a_0(t, y_1) \right) V_0(t, \tau, \sigma, y_1) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Скориставшись умовою B_2 й оцінкою (10), матимемо

$$\begin{aligned} & \Delta_{y_1}^{z_1} V_0(t, \tau, \varrho, y_1) \leq C |y_1 - z_1|^\lambda \exp\{(-\delta_1 |\sigma_1|^2 + c_1 |\gamma_1|^2)(t - \tau) + (-\delta_2 |\sigma_2|^2 + c_1 |\gamma_2|^2)(t - \tau)^3\} \times \\ & \times ((D(y_1))^2 + (D(z_1))^2) \int_\tau^t \{-\delta (D(y_1))^2(t - \theta) - \delta (D(z_1))^2(\theta - \tau)\} d\theta, \\ & 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{y_1, z_1\} \subset R^{n_1}, \quad \varrho = \sigma + i\gamma \in C^n, \quad c_1 > 0, \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 = \delta_1/4. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_\tau^t \{-\delta (D(y_1))^2(t - \theta) - \delta (D(z_1))^2(\theta - \tau)\} d\theta \leq \frac{t-\tau}{2} \left(\exp\left\{-\frac{\delta}{2}(t - \tau)(D(y_1))^2\right\} + \exp\left\{-\frac{\delta}{2}(t - \tau)(D(z_1))^2\right\} \right),$$

то

$$\Delta_{y_1}^{z_1} V_0(t, \tau, \varrho, y_1) \leq C |y_1 - z_1|^\lambda \exp\{(-\delta_1 |\sigma_1|^2 + c_1 |\gamma_1|^2)(t - \tau) + (-\delta_2 |\sigma_2|^2 + c_1 |\gamma_2|^2)(t - \tau)^3\} \times$$

$$\times \left(\exp \left\{ -\frac{\delta}{2} (t - \tau) (D(y_1))^2 \right\} + \exp \left\{ -\frac{\delta}{2} (t - \tau) (D(z_1))^2 \right\} \right) \left((D(y_1))^2 + (D(z_1))^2 \right).$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{y_1, z_1\} \subset R^{n_1}, \quad q = \sigma + i\gamma \in C^n$$

Твердження 2. Правильна рівність

$$\int_{R^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = \left\{ \int_{\tau}^t a_0(\theta, y_1) d\theta \right\}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in R^n, \quad y_1 \in R^{n_1}.$$

Доведення твердження 2. Потрібну формулу отримуємо з

$$\int_{R^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = \int_{R^n} F_{\sigma \rightarrow X(t-\tau)-\xi}^{-1} [V_0(t, \tau, \sigma, y_1)](t, \tau, x, \xi, y_1) d\xi$$

після заміни змінних інтегрування ξ за формулою $X(t - \tau) - \xi = \eta$.

З твердження 2 випливає, що для довільних $k \in Z_+^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $x \in R^n$ і $y_1 \in R^{n_1}$ правильна рівність

$$\partial_x^k \int_{R^n} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; y_1) d\xi = 0, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in R^n, \quad y_1 \in R^{n_1}. \quad (12)$$

Поряд із функцією E_c використовуватимемо ще оцінну функцію

$$F_c(t, x, \xi) := \exp \left\{ -c \left(|x_1 - \xi_1|^2 (4t)^{-1} + 3|x_2 + (2^{-1}t(x'_1 + \xi'_1) - \xi_2)|^2 t^{-3} \right) \right\}, \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset R^n,$$

де $c > 0$, яка з точністю до сталого множника визначає фундаментальний розв'язок задачі Коші для модельного рівняння (1) зі сталими коефіцієнтами. Оцінні функції E_c та F_c згідно з (Івасишен, & Мединський, 2014) мають такі властивості :

$$E_c(t, x, \xi) \leq F_{c_1}(t, x, \xi) \leq E_{c_2}(t, x, \xi), \quad t > 0, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad 0 < c_2 < c_1 < c, \quad (13)$$

$$\int_{R^n} E_c(t, x, \xi) t^{-M} d\xi = C, \quad (14)$$

$$\forall \delta \in (0, 1) \exists C_\delta > 0 \quad \forall \{t, \theta, \tau\} \subset R, 0 \leq \tau < \theta < t \leq T \quad \forall \{x, \xi\} \subset R^n:$$

$$\int_{R^n} E_c(t - \theta, x, y) E_c(\theta - \tau, y, \xi) ((t - \theta)(\theta - \tau))^{-M} dy \leq C_\delta (t - \tau)^{-M} E_{c(1-\delta)/4}(t - \tau, x, \xi), \quad (15)$$

$$\int_{R^n} F_c(t - \theta, x, y) F_c(\theta - \tau, y, \xi) ((t - \theta)(\theta - \tau))^{-M} dy = C (t - \tau)^{-M} E_c(t - \tau, x, \xi), \quad c > 0. \quad (16)$$

Зазначимо, що

$$E_c(t - \tau, X(t - \theta), \xi) \leq E_c(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \leq \tau < \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad (17)$$

$$E_c(\theta - \tau, (y_1, X_2(t - \theta)), \xi) \leq E_{c/2}(t - \tau, x, \xi) E_{-2c}(\theta - \tau, y_1 - x_1), \quad 0 \leq \tau < \theta < t, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad (18)$$

а за $\theta \in [(t + \tau)/2, t]$ одержуємо

$$E_c(\theta - \tau, (y_1, X_2(t - \theta)), \xi) \leq E_{c/2}(t - \tau, x, \xi) E_{-2c}(t - \theta, y_1 - x_1). \quad (19)$$

Далі вистовуватимемо прирости $\Delta_{x_p}^{z_p} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(p)}} f(\cdot, x, \cdot)$, $p \in \{1, 2\}$, де $z^{(1)} := (z_1, x_2)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2)$.

Твердження 3. Нехай коефіцієнти рівняння (8) задовольняють умови $B_1 - B_3$, а неперервна функція $\varphi(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset R^n$ задовольняє умови

$$|\varphi(t, x; \tau, \xi)| \leq C_l \left((t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} \exp \left\{ -c(t - \tau) (D(\xi_1))^2 \right\} + (t - \tau)^{\lambda/2} (D(\xi_1))^{-l} \right) E_c(t - \tau, x, \xi), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} |\Delta_{x_p}^{z_p} \varphi(t, x; \tau, \xi)| &\leq C_l |x_p - z_p|^{\lambda_1^p} \left((t - \tau)^{-M-1+\lambda_1^p m_p} \exp \left\{ -c(t - \tau) (D(\xi_1))^2 \right\} + (t - \tau)^{\lambda_2^p m_p} (D(\xi_1))^{-l} \right) \times \\ &\times (F_c(t - \tau, x, \xi) + F_c(t - \tau, z^{(p)}, \xi)), \quad 0 < \lambda_1^1 < \lambda, \quad \lambda_2^1 \equiv \lambda - \lambda_1^1, \quad 0 < \lambda_1^2 < \frac{\lambda}{3}, \quad \lambda_2^2 \equiv \frac{\lambda}{3} - \lambda_1^2, \quad p \in \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (21)$$

де l – довільно фіксоване додатне число. Тоді функція

$$w(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\theta \int_{R^n} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n,$$

має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} w$, $|k_1| \leq 2$, і Sw , для яких правильні формули

$$\partial_{x_{1j}} w(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\theta \int_{R^n} \partial_{x_{1j}} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy,$$

$$\partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} w(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{R^n} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy +$$

$$+ \int_{t_1}^t d\theta \int_{R^n} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) +$$

$$+ \int_{t_1}^t \left(\int_{R^n} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) dy \right) \varphi(\theta, X(t - \theta); \tau, \xi) d\theta,$$

$$Sw(t, x; \tau, \xi) = \varphi(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{R^n} S\hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy +$$

$$+ \int_{t_1}^t d\theta \int_{R^n} S\hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \int_{t_1}^t \left(\int_{R^n} S\hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) dy \right) \varphi(\theta, X(t - \theta); \tau, \xi) d\theta,$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n, \quad t_1 := (t + \tau)/2.$$

Доведення твердження 3. Для $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset R^n$ та $|k_1| \leq 2$ запишемо

$$\partial_{x_1}^{k_1} \int_{R^n} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy = \int_{R^n} \partial_{x_1}^{k_1} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy \equiv J^{(k_1)}.$$

Інтеграл $J^{(k_1)}$ збігається рівномірно щодо $x_1 \in R^n$ за фіксованих t, τ, θ і ξ . За $|k_1| < 2$ це випливає з оцінок (7), (20) та збіжності інтегралів $\int_{\tau}^t (t - \theta)^{-|k_1|m_1} (\theta - \tau)^{-1+\lambda/2} d\theta$ і $\int_{\tau}^t (t - \theta)^{-|k_1|m_1} (\theta - \tau)^{M+\lambda/2} d\theta$.

Для похідних другого порядку за x_1 і $\theta \in [t_1, t]$ така оцінка не придатна. Її можна поліпшити для $x_1 \in B(0, R/2)$, де R – будь-яке фіксоване додатне число, а $B(y_1, R) := \{x_1 \in R^{n_1}, |x_1 - y_1| \leq R\}$. Запишемо

$$J^{(k_1)} = \int_{R^n} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1j}} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \left(\int_{R^n} \Delta_{\zeta=y_1}^{\zeta=x_1} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1j}} \hat{G}(t, x; \theta, y; \zeta) dy \right) \varphi(\theta, X(t-\theta); \tau, \xi) \equiv \\ \equiv I_1 + I_2 \varphi(\theta, X(t-\theta); \tau, \xi).$$

Використовуючи $|\Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi)| \leq |\Delta_y^{(y_1, X_2(t-\theta))} \varphi(\theta, y; \tau, \xi)| + |\Delta_{(y_1, X_2(t-\theta))}^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi)|$, (7), (14), (15), (18), (19) із $c = c_0/3$, (21) і те, що $D \geq 1$, одержуємо

$$|I_1| \leq C(t - \tau)^{-M} E_{c_2}(t - \tau, x, \xi) ((\theta - \tau)^{-1+\lambda_1^2 m_1} + (\theta - \tau)^{-1+\lambda_2^2 m_2}),$$

де $C_1 > C$, $0 < c_1 < c_0 < c$, $c_2 = \min\{c_1, c_0/6\}$. За допомогою (11), (14), (15) матимемо

$$|I_2| \leq C(t - \theta)^{\lambda m_1 - 1} ((D(x_1))^2 + \int_{R^{n_2}} dy_2 \int_{B(x_1, 1)} (t - \theta)^{-M} E_{c_0}(t - \theta, x, y) (D(y_1))^2 dy_1 + \\ + \int_{R^{n_2}} dy_2 \int_{R^{n_1} \setminus B(x_1, 1)} (t - \theta)^{-M} E_{c_0}(t - \theta, x, y) (D(y_1))^2 dy_1).$$

Згідно з умовою B_3 $D(y_1) \leq C D(x_1)$ для $y_1 \in B(x_1, 1)$, а для $y_1 \in R^{n_1} \setminus B(x_1, 1)$ за допомогою нерівності Юнга $(D(y_1))^2 \leq C E_{-\varepsilon}^1(t - \theta, x_1 - y_1) \exp\{\varepsilon(t - \theta)(D(x_1))^2\}$, то, обравши ε , щоб $c_1 \equiv c_0 - \varepsilon > 0$, та використавши (14), одержимо

$$|I_2| \leq C(t - \theta)^{-1+\lambda/2} ((D(x_1))^2 + \exp\{\varepsilon(t - \theta)(D(x_1))^2\}).$$

Отже, враховуючи ще (17), за $|k_1| = 2$

$$|J^{(k_1)}| \leq C(t - \tau)^{-M} E_{c_2}(t - \tau, x, \xi) ((t - \tau)^{-1+\lambda_1^2 m_1} + (t - \tau)^{-1+\lambda_2^2 m_2}) + \\ + C C_1(t - \theta)^{-1+\lambda/2} ((D(x_1))^2 + \exp\{\varepsilon(t - \tau)(D(x_1))^2\}) ((t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} + (t - \tau)^{\lambda/2}) E_c(t - \tau, x, \xi), \\ 0 \leq \tau < t_1 < \theta < t \leq T, \{x, \xi\} \subset R^n.$$

Для доведення правильності формул для S_w оцінимо інтеграл $I^0 \equiv \int_{R^n} S \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) dy$. Щоб оцінити I^0 , скористаємося рівністю

$$S \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) = \left(\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, y_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y_1) \partial_{x_{1j}} + a_0(t, x_1) \right) \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1),$$

$$0 \leq \theta < t \leq T, \{x, \xi\} \subset R^n, y_1 \in R^{n_1},$$

рівностями (12), оцінками (11) і (19) й умовами на коефіцієнтами рівняння. Маємо

$$|I^0| \leq \left| \int_{R^n} \left(\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t, y_1) \Delta_{z_1=y_1}^{z_1=x_1} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y_1) \Delta_{z_1=y_1}^{z_1=x_1} \partial_{x_{1j}} \right) \hat{G}(t, x; \theta, y; z_1) dy \right| + \\ + \left| \int_{R^n} \left(\sum_{j,s=1}^{n_1} \Delta_{y_1}^{x_1} a_{js}(t, y_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{y_1}^{x_1} a_j(t, y_1) \partial_{x_{1j}} \right) \hat{G}(t, x; \theta, y; z_1)|_{z_1=y_1} dy \right| + \\ + \left| \int_{R^n} a_0(t, y_1) \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) dy \right| \leq \\ \leq C(t - \theta)^{-1+\lambda/2} \int_{R^n} (t - \theta)^{-M} E_{c_1}(t - \theta, x, y) ((D(y_1))^3 + D(y_1)(D(x_1))^2) dy.$$

Останній інтеграл оцінюється так, як відповідний інтеграл з I_2 . У підсумку одержуємо таку оцінку:

$$|I^0| \leq C(t - \theta)^{-1+\lambda/2} ((D(x_1))^3 + \exp\{3\varepsilon/2(t - \theta)(D(x_1))^2\}).$$

□

3. Доведення основної теореми

Згідно з методом Леві фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$G(t, x; \tau, \xi) = \hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{R^n} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset R^n, \quad (22)$$

де $\varphi(\cdot, \cdot; \tau, \xi): \Pi_{[0, T]} \rightarrow C$ – невідома функція, яку підберемо так, щоб функція $G(\cdot, \cdot; \tau, \xi): \Pi_{[0, T]} \rightarrow C$ була розв'язком рівняння (1) для будь-якої фіксованої точки $(\tau, \xi) \in \Pi_{[0, T]}$.

Нехай шукана функція φ є неперервною і для неї справджуються оцінки (20) і (21). Застосувавши диференціальний вираз L з (1) до функції (22) та використавши припущення щодо φ , на підставі твердження 3 одержимо для φ інтегральне рівняння

$$\varphi(t, x; \tau, \xi) = K(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{R^n} K(t, x; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset R^n, \quad (23)$$

де

$$K(t, x; \tau, \xi) = \left(\sum_{j,s=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t, x_1) \right) \hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1).$$

Оцінимо ядро K . За допомогою оцінки (7), умови B_2 маємо

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-M+\lambda/2} E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \left\{ -c(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\} \times \\ \times \left((n_1)^2 (t - \tau)^{-1} + n_1(D(x_1) + D(\xi_1))(t - \tau)^{-1/2} + ((D(x_1))^2 + (D(\xi_1))^2) \right), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset R^n,$$

де $C > 0$, $0 < c_0 < c$. Якщо $|x_1 - \xi_1| \leq 1$, то з цієї нерівності на підставі умови B_3 одержуємо

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \leq C_0(t - \tau)^{-M+\lambda/2-1} E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c_0(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}.$$

Якщо $|x_1 - \xi_1| > 1$, то за допомогою умови B_3 , вибравши в ній ε так, щоб $c_1 \equiv c_0 - \varepsilon > 0$, одержимо

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \leq C'_0(t - \tau)^{-M+\lambda/2-1} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}.$$

Отже,

$$|K(t, x; \tau, \xi)| \leq C'_0(t - \tau)^{-M+\lambda/2-1} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}. \quad (24)$$

На підставі оцінки (24) рівняння (23) згідно з результатами з роботи (Пасічник, 2024) розв'язується методом послідовних наближень і правильна оцінка (20).

Доведемо правильність оцінки (21). При $|x_1 - z_1|^{1/m_1} > (t - \tau)/2$ та $|x_2 - z_2|^{1/m_2} > (t - \tau)/2$ відповідно оцінки (21) випливають з (20). Тому досить розглянути випадок, коли $|x_p - z_p|^{1/m_p} \leq (t - \tau)/2$, $p \in \{1, 2\}$.

Скориставшись (7) та нерівністю $E_c(t - \tau, \chi^{(p)}, \xi) \leq C_1 E_{c_0}(t - \tau, x, \xi)$, $0 < c_0 < c$, де $\chi^{(p)}$ – точка, яка належить відріzkу, що сполучає точки x і $z^{(p)}$, $p \in \{1, 2\}$, з (Івасишен, & Мединський, 2014), одержуємо

$$\left| \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1) \right| \leq \sum_{l=1}^{n_1} |x_{1l} - z_{1l}| \left| \partial_{x_{1l}} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1) \right| \leq C \sum_{l=1}^{n_1} |x_{1l} - z_{1l}| (t - \tau)^{-M-3/2} \times \\ \times \exp \left\{ -c(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\} \leq C |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (t - \tau)^{-M-1-\alpha_1^0 m_1} E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}, \\ \left| \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1) \right| \leq C |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (t - \tau)^{-M-1/2-\alpha_1^0 m_1} E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}, \\ \left| \Delta_{x_1}^{z_1} \hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1) \right| \leq C |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (t - \tau)^{-M-\alpha_1^0 m_1} E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\},$$

де $\alpha_1^0 \in (0, 1)$, $0 < c_0 < c$. Використовуючи ці оцінки з $\alpha_1^0 = \lambda$ та оцінки (7), припущення щодо коефіцієнтів рівняння (1), нерівність $|z_1 - \xi_1|^\lambda \leq |x_1 - z_1|^\lambda + |x_1 - \xi_1|^\lambda$, прийдемо до

$$\left| \Delta_{x_1}^{z_1} K(t, x; \tau, \xi) \right| = \left| \left(\sum_{j,s=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_{js}(t, x_1) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_j(t, x_1) \partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{z_1} a_0(t, x_1) \right) \hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1) \right| \leq \\ + \sum_{j=1}^{n_1} \left| \Delta_{x_1}^{z_1} a_j(t, x_1) \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{z_1} a_0(t, x_1) + \Delta_{x_1}^{z_1} a_0(t, x_1) \Delta_{x_1}^{z_1} \right| \hat{G}(t, x; \tau, \xi; \xi_1) \leq \\ \leq C |x_1 - z_1|^\lambda (t - \tau)^{-M-1} R(t, \tau, x, z^{(1)}, \xi),$$

де

$$R(t, \tau, x, z^{(1)}, \xi) = \left(2 + (D(x_1) + 2D(z_1) + D(\xi_1))(t - \tau)^{\frac{1}{2}} + ((D(x_1))^2 + 2(D(z_1))^2 + (D(\xi_1))^2)(t - \tau) \right) \times \\ \times E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\},$$

$C > 0$, $0 < c_0 < c$. Якщо $|x_1 - \xi_1| \leq 1$, $|z_1 - \xi_1| \leq 1$, то на підставі умови B_3 маємо

$$R(t, \tau, x, z^{(1)}, \xi) \leq C \left(1 + D(\xi_1)(t - \tau)^{1/2} + (D(\xi_1))^2(t - \tau) \right) E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\} \leq \\ \leq E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c_0(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}, \quad 0 < c_0 < c.$$

Якщо $|x_1 - \xi_1| > 1$, $|z_1 - \xi_1| > 1$, то за допомогою оцінок степенів $D(x_1)$ і $D(z_1)$, як в оцінці $|I_2|$, одержуємо

$$R(t, \tau, x, z^{(1)}, \xi) \leq E_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\} (E_{-\varepsilon}^1(t - \tau, x_1 - \xi_1) + E_{-\varepsilon}^1(t - \tau, z_1 - x_1) E_{-\varepsilon}^1(t - \tau, x_1 - \xi_1) + 1),$$

де $c > 0$ таке, як і в оцінці K . Оскільки $|x_1 - z_1|^{1/m_1} \leq (t - \tau)/2$, то $E_{-\varepsilon}^1(t - \tau, z_1 - x_1) \leq C$. Тоді, вибравши ε , можливо, меншим, ніж у (24), і змінивши число c_1 , одержимо $R(t, \tau, x, z^{(1)}, \xi) \leq C E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}$. Аналогічно розглядаємо випадки, коли $|x_1 - \xi_1| \leq 1$, $|z_1 - \xi_1| > 1$ та $|x_1 - \xi_1| > 1$, $|z_1 - \xi_1| \leq 1$.

У підсумку, за $|x_1 - z_1|^{1/m_1} \leq (t - \tau)/2$ одержуємо

$$\left| \Delta_{x_1}^{z_1} K(t, x; \tau, \xi) \right| \leq C |x_1 - z_1|^\lambda (t - \tau)^{-M-1} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi, z^{(1)}\} \subset R^n,$$

звідки, зокрема, за $|x_1 - z_1|^{1/m_1} \leq (t - \tau)/2$ випливає оцінка

$$\left| \Delta_{x_1}^{z_1} K(t, x; \tau, \xi) \right| \leq C |x_1 - z_1|^{\lambda_1^1} (t - \tau)^{-M-1+\lambda_2^1 m_1} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}, \quad \lambda_2^1 = \lambda - \lambda_1^1, \quad \lambda_1^1 \in (0, \lambda).$$

Аналогічно за $|x_2 - z_2|^{1/m_2} \leq (t - \tau)/2$ одержуємо

$$\left| \Delta_{x_2}^{z_2} K(t, x; \tau, \xi) \right| \leq C |x_2 - z_2|^{\lambda_2^2} (t - \tau)^{-M-1+\lambda_2^2 m_2} E_{c_1}(t - \tau, x, \xi) \exp \left\{ -c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2 \right\}, \quad \lambda_2^2 = \lambda/3 - \lambda_1^2, \quad \lambda_1^2 \in (0, \lambda/3).$$

Для отримання оцінки (21) за $|x_p - z_p|^{1/m_p} \leq (t - \tau)/2$ згідно із (23) запишемо

$$\Delta_{x_p}^{z_p} \varphi(t, x; \tau, \xi) = \Delta_{x_p}^{z_p} K(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^v d\theta \int_{R^n} \Delta_{x_p}^{z_p} K(t, x; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \\ + \int_v^t d\theta \int_{R^n} K(t, x; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy - \int_v^t d\theta \int_{R^n} K(t, z^{(p)}; \theta, y) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy, \quad p \in \{1, 2\},$$

де $v = t - |x_p - z_p|^{1/m_p}$, і використовуємо (14), (15), нерівності

$$E_c(t - \theta, x, y) E_c(\theta - \tau, y, \xi) \leq E_{c/4}(t - \tau, x, \xi), \quad 0 \leq \tau < \theta < t \leq T, \quad \{x, \xi, y\} \subset R^n,$$

і

$$\int_v^t (t - \theta)^{-1+\lambda/2} (\theta - \tau)^{-1+\lambda/2} d\theta \leq \frac{2}{\lambda} \left(\frac{t - \tau}{2} \right)^{1+\lambda/2} (|x_p - z_p|^{1/m_p})^{\lambda/2}, \quad |x_p - z_p|^{1/m_p} \leq (t - \tau)/2, \quad p \in \{1, 2\}.$$

Доведемо тепер правильність для G оцінок (2) і (3). Для похідних від першого доданка із (22) справджуються оцінки (7). Тому оцінимо похідні від другого доданка. Розглянемо випадок $|k_1| = 2$. На підставі твердження 3 та (12) запишемо

$$\partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} w(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{R^n} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \int_{t_1}^t d\theta \int_{R^n} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) \times \\ \times \Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy + \int_{t_1}^t \left(\int_{R^n} \Delta_{z_1=y_1}^{z_1=x_1} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \hat{G}(t, x; \theta, y; z_1) dy \right) \varphi(\theta, X(t - \theta); \tau, \xi) d\theta = \\ = J_1 + J_2 + J_3. \quad (25)$$

За допомогою (7), (14), (15), (20) та $E_c(t - \theta, x, y) E_c(\theta - \tau, y, \xi) \leq E_{c/4}(t - \tau, x, \xi)$, $\tau < \theta < t$, $\{x, \xi, y\} \subset R^n$, маємо

$$|J_1| \leq C(t - \tau)^{-M} E_{c(1-\delta)}(t - \tau, x, \xi) \exp \{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} (t - t_1)^{-1} \int_{\tau}^{t_1} (\theta - \tau)^{-1+\lambda/2} d\theta + \\ + C(D(\xi_1))^{-l} E_{c(1-\delta)/4}(t - \tau, x, \xi) (t - t_1)^{-1} \left(\int_{\tau}^{t_1} d\theta + \int_{\tau}^{t_1} (\theta - \tau)^{\lambda/2} d\theta \right) \leq \\ \leq C \left((t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} \exp \{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} + (D(\xi_1))^{-l} \right) E_{c_1}(t - \tau, x, \xi).$$

При оцінюванні доданка J_2 використовуємо (7), оцінки приростів $\Delta_y^{X(t-\theta)} \varphi$, потім (17) та (18) з $c = c_0/3$, а далі (14), (15) та умовою B_3 на характеристики дисипації. У підсумку отримуємо оцінку

$$|J_2| \leq C \int_{t_1}^t d\theta \int_{R^n} \left((\theta - \tau)^{-M-1+\lambda_1^2 m_1} \exp \{-c(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} + (\theta - \tau)^{\lambda_1^2 m_1} (D(\xi_1))^{-l} \right) \times \\ \times (E_c(t - \tau, x, \xi) + E_{c_0/6}(t - \tau, x, \xi) E_{-2c_0/3}^1(t - \theta, y_1 - x_1)) (t - \theta)^{-M-1+\lambda_1^2 m_1} E_{c_0}(t - \theta, x, y) \exp \{-c(t - \theta)(D(y_1))^2\} dy + \\ + C \int_{t_1}^t d\theta \int_{R^n} (t - \theta)^{-M-1+\lambda_1^2 m_2} \left((\theta - \tau)^{-M-1+\lambda_2^2 m_2} \exp \{-c(\theta - \tau)(D(\xi_1))^2\} + (\theta - \tau)^{\lambda_2^2 m_2} (D(\xi_1))^{-l} \right) \times \\ \times (F_c(\theta - \tau, x, \xi) + E_{c_0/6}(t - \tau, x, \xi) E_{-2c_0/3}^1(t - \theta, y_1 - x_1)) E_{c_0}(t - \theta, x, y) \exp \{-c(t - \theta)(D(y_1))^2\} dy \leq \\ \leq C_1 \left((t - \tau)^{-M-1+\lambda/2} \exp \{-c_1(t - \tau)(D(\xi_1))^2\} + (D(\xi_1))^{-l} \right) E_{c_2}(t - \tau, x, \xi),$$

у якій $C_1 > C$, $0 < c_1 < c_0 < c$, $c_2 = \min \{c_1, c_0/6\}$. Аналогічно оцінюємо J_3 . Із (25) й оцінок $J_1 - J_3$ випливає (3).

Для одержання (4) вводимо нову функцію v за допомогою формули $u(t, x) = e^{g(x_1)} v(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{(0,T)}$, де функція g задовольняє умову B_4 . Водночас для v одержуємо рівняння, яке за досить малого η задовольняє умови $B_1 - B_3$. Тому для нього існує фундаментальний розв'язок задачі Коші $G_1(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset R^n$, для якого справджуються оцінки (2) і (3). Фундаментальні розв'язки задачі Коші G і G_1 зв'язані між собою рівністю

$$G(t, x; \tau, \xi) = \exp \{g(x_1) - g(\xi_1)\} G_1(t, x; \tau, \xi),$$

з якої безпосереднім диференціюванням і використанням оцінок (2) і (3) й умови B_4 одержуємо оцінки (4). □

Дискусія і висновки

Для похідних другого порядку оцінка (2) за такою методикою не отримується, оскільки оцінка інтеграла $\int_{R^n} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} \hat{G}(t, x; \theta, y; y_1) dy$ має інтегровну особливість за $t = \theta$.

Функція φ із (23) така, що існують похідні $\partial_{x_{2j}} w$ функції w із твердження 3 й існують відповідно похідні $\partial_{x_{2j}} G$ за змінною виродження рівняння. Доведення цього громіздке і здійснюється за методикою отримання відповідних оцінок за змінною x_1 з використанням властивостей оцінних функцій E_c .

Отримані результати можуть бути використані для дослідження розв'язності й інтегрального зображення розв'язків задачі Коші у спеціальних вагових просторах та при дослідженні фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння типу Колмогорова з коефіцієнтами, залежними і від змінних виродження, і систем таких рівнянь.

Джерела фінансування. Це дослідження не отримало жодного гранту від фінансової установи в державному, комерційному або некомерційному секторах.

Список використаних джерел

Івасишен, С. Д., & Мединський, І. П. (2014). Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження. *Буковинський математичний журнал*, 2(2–3), 94–106.

- Івасишен, С. Д., & Пасічник, Г. С. (2014). Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболического рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів. *Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: збірник праць Інституту математики НАН України*, 11(2), 126–153.
- Пасічник, Г. С. (2024). Розв'язки деяких класів інтегральних рівнянь другого роду. *Буковинський математичний журнал*, 12(1), 84–93. <https://doi.org/10.31861/bmj2024.01.08>
- Процах, Н. П., & Пташник Б. Й. (2017). *Нелінійні ультрапараболическі рівняння та варіаційні нерівності*. Наукова думка.
- Eidelman, S. D., Ivasyshen, S. D., & Kochubei, A. N. (2004). *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*. Birkhäuser. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9>
- Di Francesco, M., & Pascucci, A. (2005). On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type. *Applied Mathematics Research eXpress*, 3, 77–116. <https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77>
- Ivasyshen, S. D., & Medyn's'kyi, I. P. (2018). On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables. *Journal of Mathematical Sciences*, 231(4), 507–526. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3830-0>

References

- Eidelman, S. D., Ivasyshen, S. D., & Kochubei, A. N. (2004). *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*. Birkhäuser. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9>
- Di Francesco, M., & Pascucci, A. (2005). On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type. *Applied Mathematics Research eXpress*, 3, 77–116. <https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77>
- Ivasyshen, S. D., & Medyn's'kyi, I. P. (2014). The classical fundamental solution of a degenerate Kolmogorov equation with coefficients independent on variables of degeneration. *Bukovinian Mathematical Journal*, 2(2–3), 94–106 [in Ukrainian].
- Ivasyshen, S. D., & Medyn's'kyi, I. P. (2018). On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables. *Journal of Mathematical Sciences*, 231(4), 507–526. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3830-0>
- Ivasyshen, S. D., & Pasichnyk, H. S. (2014). Fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic equation with growing lowest coefficients. *Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 11(2), 126–153 [in Ukrainian].
- Pasichnyk, H. S. (2024). Solutions of some integral equations of the second kind. *Bukovinian Mathematical Journal*, 12(1), 84–93 [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.31861/bmj2024.01.08>
- Protsach, N. P., & Ptashnyk, B. Yo. (2017). *Nonlinear ultraparabolic equations and variational inequalities*. Naukova dumka [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу / Received: 07.03.25

Прорецензовано / Revised: 07.08.25

Схвалено до друку / Accepted: 10.10.25

Halyna PASICHNYK, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0000-0002-1759-5042

e-mail: h.pasichnyk@chnu.edu.ua

Yufiy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE DISSIPATIVE ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV EQUATION WITH COEFFICIENTS INDEPENDENT ON VARIABLE DEGENERATION

For the ultraparabolic Kolmogorov equation with coefficients that do not depend on the degeneracy variables and are unbounded in the spatial variable, a fundamental solution of the Cauchy problem is constructed. The growth of the coefficients of the equation depends on an increasing function, which is called the characteristic of dissipation. The coefficients of the equation satisfy the special Hölder condition, which contains the characteristic of dissipation. Differentiability of the coefficients is not required; therefore, an additional condition is imposed on the characteristic of dissipation. Ultraparabolic Kolmogorov equations with increasing coefficients arise in problems of the theory of random processes, statistical radio engineering.

The fundamental solution of the Cauchy problem is constructed by the Levy method. In this case, the parametrics are taken as the fundamental solution of the Cauchy problem of the equation under consideration with coefficients depending on the time and parametric spatial variables. This complicates the study, since in the case of bounded coefficients, the parametrics are taken as the fundamental solution of the Cauchy problem of the equation with frozen coefficients only of the group of higher derivatives.

The obtained estimates of the derivatives of the fundamental solution of the Cauchy problem can be used in studying the issues of solvability of the Cauchy problem and the integral representation of solutions in special weight spaces, as well as for constructing a classical fundamental solution of the Cauchy problem for a degenerate equation of the Kolmogorov type with coefficients increasing as $|x| \rightarrow \infty$, which also depend on the degeneracy variables, and systems of such equations.

Key words: ultraparabolic Kolmogorov equation, increasing coefficients, fundamental solution to the Cauchy problem, the Levy method.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The author declares no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.