

ЗАСТОСУВАННЯ GARCH-МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ПФТС-ІНДЕКСУ

Наведено огляд основних методів GARCH-моделювання і здійснено аналіз можливості використання цієї методики для прогнозування українського фондового ринку на базі ПФТС-індексу. Також проведено тестування наявності на ринку асиметричного ефекту та існування зв'язку між сподіваною дохідністю індексу і його прогнозованою ризикованістю. Результатом дослідження є вибір найбільш адекватної моделі для прогнозування ПФТС-індексу та його волатильності.

This article is devoted to the basic methods of the GARCH-modelling and possibilities for Ukrainian stock market forecasting are analysed (on basis of PFTS-index). Also attention is given to the testing of dissymmetric effect existing and reality of relation between expected return and desired variance (riskiness). The result of research is the choice of the best model for return and volatility of PFTS-index forecasting.

Основна складність при аналізі та прогнозуванні цін фінансових активів пов'язана з оцінкою ризику. Використання волатильності, що характеризує розмір коливань ціни чи дохідності, для оцінки ризику відкриття позицій – популярна ідея серед учасників фінансових ринків. Чимало концепцій спираються на параметр ступеня мінливості ринку. Наприклад, моделі ціноутворення встановлюють співвідношення між курсами цінних паперів і волатильністю: сподівана дохідність акцій залежить від коваріації між дохідностями акції і ринкового портфеля (відповідно до моделі CAPM, розробленій Шарпом [1]), ціни опціону залежать від дисперсії дохідності базового активу (відповідно до формули Блека–Шоулза [2]) тощо. На жаль, у літературі рідко розглядається питання про те, яким чином вимірити цю волатильність. У цій роботі проаналізовано різні підходи до оцінки дисперсії чи стандартного відхилення, що звичайно використовуються як міра ризику. Особлива увага надана GARCH-методам, за розробку яких Роберт Інгл в 2003 р. розділив Нобелівську премію з ще одним дослідником, що займається аналізом часових рядів в економіці – Клайвом Грейнджером. Для прикладу практичного застосування розглянутих концепцій використовуються значення індексу українського фондового ринку – ПФТС-індексу – в період з 12 січня 1998 р. по 18 вересня 2003 р.

Давно помічено, що великі зміни на фінансових ринках мають тенденцію викликати ще більші зміни в будь-якому напрямі, тобто можна прогнозувати великі значення волатильності після великих змін. Ці спостереження на фінансових даних також називають кластеризацією волатильності.

Розглянемо стандартний підхід в оцінці волатильності.

Позначимо через S_t значення ринкової змінної наприкінці дня t . Тоді логарифмічна дохідність цієї змінної за день t становитиме

$$u_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right).$$

Позначимо через σ_t^2 волатильність (стандартне квадратичне відхилення) за день між днем $(t-1)$ і днем t , і оцінювану наприкінці дня $t-1$. Тоді за стандартного підходу незміщена оцінка рівня дисперсії за день (σ_t^2) , використовуючи останні m спостережень змінної u_t :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (u_{t-i} - \bar{u})^2, \text{ де } \bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{t-i}.$$

При цьому часто використовуються різні спрощення:

➤ замість логарифмічної дохідності використовують

$$\text{капіталізована } u_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}};$$

➤ припускається, що середнє значення u_t дорівнює $\bar{u} = 0$ (сподівана зміна за день є незначною порівняно зі стандартним відхиленням);

➤ заміна $m-1$ на m дозволяє перейти від незміщеної оцінки дисперсії до оцінки методом максимальної правдоподібності (ММП), що є стандартним оцінним методом у моделях волатильності.

Врахування цих властивостей дає

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{t-i}^2.$$

За стандартного підходу волатильність вважається незмінною, але як неважко переконатися на історичних даних, це досить хибне припущення для фінансових ринків. Для цього розглянемо значення функції автокореляції дохідності і квадрата дохідності ПФТС-індексу (рис. 1), які переконливо свідчать про непостійність волатильності.

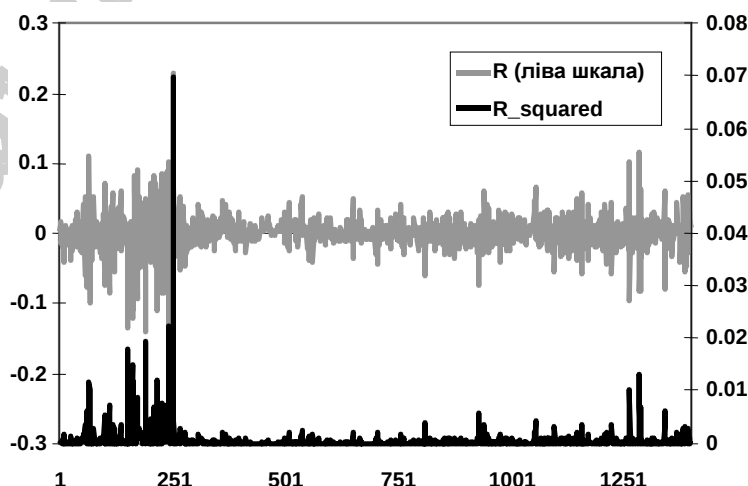


Рис. 1. Щоденні дані дохідності і квадрата дохідності ПФТС-індексу

Ринку властива невизначеність, вивчення якої набуло систематичного характеру лише з появою моделей авторегресії з гетероскедастичністю (AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic, ARCH). Головна відмінність ARCH моделей від стандартних підходів полягає в тому, що прогнозована волатильність (дисперсія) не є константою, а залежить від минулих станів процесу і розвивається в часі.

Ця модель була розроблена у спрощеній формі Інґлом [3] і пізніше узагальнена Боллерслевом [4]. Ці моделі знайшли успішне застосування в моделюванні змін дисперсії (волатильності) змінних часових рядів, особливо у сфері фінансових інвестицій.

Основна ідея цих методів полягає в тому, що, прогнозуючи поточний рівень волатильності, природно надавати більш сильну вагу останнім значенням, тому замість задання рівних важелів спостереженням можна встановити:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_{t-i}^2,$$

де $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ і $\lambda_i < \lambda_j$ для $i > j$.

Тоді ARCH(m) визначається при довготерміновому рівні дисперсії V таким чином:

$$\sigma_t^2 = \gamma V + \sum_{i=1}^m a_i u_{t-i}^2,$$

де $\gamma + \sum_{i=1}^m a_i = 1$, або $\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^m a_i u_{t-i}^2$.

Узагальнюючи, в GARCH(1,1)-моделі (Generalized AutoRegressive Conditionally Heteroskedasticity) також встановлюється визначена вага для довготермінового середнього рівня дисперсії:

$$\sigma_t^2 = \gamma V + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta u_{t-1}^2,$$

причому $\gamma + \alpha + \beta = 1$.

Замінюючи $w = \gamma V$, визначаємо GARCH(1,1)-модель як:

$$\sigma_t^2 = w + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta u_{t-1}^2 \text{ і } V = \frac{w}{1 - \alpha - \beta}.$$

Оскільки рівняння виражає залежність дисперсії дохідності в теперішній момент часу від значень попередніх періодів (u_{t-1}^2 і σ_{t-1}^2), така дисперсія називається умовною.

Представлене рівняння умовної дисперсії є функцією від трьох факторів:

- середнього w ;
- новин про волатильність попереднього періоду, що визначаються як лаг квадрата залишків з рівняння середнього, тобто непрогнозована зміна рівня дохідності: u_{t-1}^2 (ARCH-фактор);
- прогнозованого значення умовної дисперсії попереднього періоду: σ_{t-1}^2 (GARCH-фактор).

Оскільки дисперсія має бути додатною, очікується, що коефіцієнти регресії w , α і β – завжди додатні, а коефіцієнти α і β менше 1.

Сума коефіцієнтів регресії ($\alpha + \beta$) виражає вплив дисперсії змінних попередніх періодів на поточне значення дисперсії. Це значення, як правило, близьке до 1, що є ознакою зростаючої інертності ефекту шоків на дисперсію дохідності фінансових активів, тобто волатильність майже не змінюється, залишаючись на постійному рівні.

Позначання (1,1) в GARCH(1,1)-моделі показує, що σ_t^2 визначається на основі останнього значення u_{t-1}^2 і останньої оцінки рівня дисперсії σ_{t-1}^2 . Для загальної GARCH(p,q)-моделі кількість періодів p і q ідентифікується завдяки аналізу автокореляційної і часткової автокореляційної функцій квадратів залишків.

Принциповий недолік GARCH-моделі – неможливість її використання для моделювання доволі поширеного асиметричного ефекту, коли дисперсія систематично змінюється не однаковою мірою, залежно від гарних чи поганих новин на ринку. У випадку моделей випадкового блукання непрогнозовані падіння і злети дохідності можуть інтерпретуватися як гарні чи погані новини. Якщо падіння дохідності супроводжується зростанням волатильності більшим, ніж при зростанні дохідності, можна говорити про "ефект леввереджа". Ця ідея проілюстрована на рис. 2.

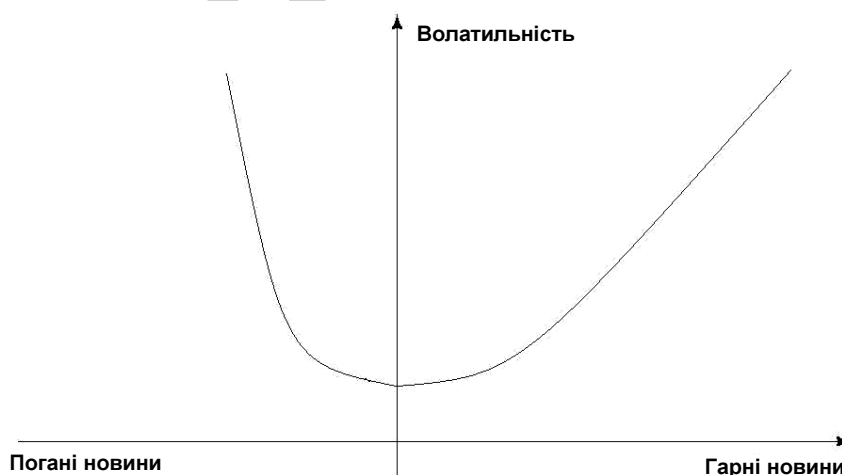


Рис. 2. Леввередж ефект – реакція волатильності на гарні і погані новини

Після винайдення асиметричного зв'язку між умовною волатильністю й умовним середнім значенням економетристи сфокусували свою увагу на розробці методів для моделювання цього феномена.

Нельсон [5] запропонував експоненціальну GARCH модель (EGARCH), що базується на логарифмічному вираженні умовної дисперсії досліджуваної змінної:

$$\ln \sigma_t^2 = w + \alpha \left| \frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \beta \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma \frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$$

з асиметричним впливом, якщо $\gamma < 0$.

Пізніше, величезна кількість модифікацій була заснована на цій моделі. Одна з них – TARARCH-метод (Threshold ARCH), запропонований Закояном [6]. Прак-

тичні дослідження в цій області більш детально були описані Боллерслом, Чоу і Кронером [7]. Приймаючи до уваги в них знак u_t , ми оцінюємо TARЧ-модель:

$$\sigma_t^2 = w + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma d_{t-1} u_{t-1}^2,$$

де а) $d_{t-1} = 1$, якщо $u_{t-1} < 0$, б) $d_{t-1} = 0$, якщо $u_{t-1} > 0$.

Модель основана на припущенні, що неочікувані зміни мають різні ефекти на умовну дисперсію. Непередбачене зростання являє собою гарні новини ($u_{t-1} > 0$) і впливає на дисперсію моделі через мультиплікатор α . Непередбачене падіння є продуктом поганих новин ($u_{t-1} < 0$) і генерує зростання волатильності через мультиплікатор $\alpha + \gamma$.

При дослідженні GARCH(1,1)-моделі необхідно оцінювати два окремих рівняння, одне – для умовного середнього й інше – для умовної дисперсії:

$$y_t = \gamma X_t + u_t,$$

$$\sigma_t^2 = w + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta u_{t-1}^2,$$

де X являє собою сукупність екзогенних змінних, які пояснюють тимчасову мінливість умовного сподіваного середнього. Уведення умовної дисперсії в рівняння середнього приводить до M-GARCH-моделі:

$$y_t = \gamma X_t + \delta \sigma_t^2 + u_t.$$

Економічна інтуїція підказує, що зростання умовного середнього (дохідності) може бути пов'язане зі зростанням умовної дисперсії (ризиком). M-GARCH є основою для тестування умовної CAPM-моделі.

Дослідимо використання перелічених вище методів для значень ПФТС-індексу в період з 12 січня 1998 р. по 18 вересня 2003 р. (1407 спостережень). Перші 1300 значень використаємо для оцінки і статистичної перевірки моделей, а останні 107 – для демонстрації результатів прогнозування "ex post".

Спробуємо змоделювати поведінку дохідності ПФТС-індексу за допомогою GARCH(1,1)-процесу (оцінку моделі будемо робити в пакеті EViews):

Таблиця 1. Результати оцінки в EViews

1299 спостережень

Конвергенція досягається після 24 ітерацій

	Коефіцієнт	Станд. похибка	z-статистика	Імов.
C	0.000902	0.000427	2.111442	0.0347
Оцінка дисперсії				
C	6.72E-06	1.12E-06	5.992050	0.0000
ARCH(1)	0.144152	0.010645	13.54165	0.0000
GARCH(1)	0.860574	0.006388	134.7158	0.0000
R-квадрат	-0.002271	Стандартне відхилення залежної змінної		0.025631
Скоригований R-квадрат	-0.004593	Критерій Акайке		-5.082423
Сума квадратів похибок	0.854666	Критерій Шварца		-5.066505
Функція правдоподібності	3305.034	Статистика Дурбіна-Ватсона		2.402161

Виділено значимі ARCH і GARCH ефекти.

Кластеризація волатильності відноситься до автокореляції рядів u_t^2 . Для адекватної GARCH(1,1)-моделі автокореляція в u_t^2 зникає. Ми можемо протестувати це, розглядаючи структуру автокореляції для u_t^2/σ_t^2 . У нашому прикладі GARCH(1,1)-модель працює дуже добре, залишкова автокореляція – мала порівняно з авто-

кореляцією в u_t^2 (табл. 2). Для більшості застосувань GARCH(1,1)-модель виглядає достатньою для поглинання кластеризації волатильності.

Результати оцінки і статистичної перевірки GARCH(1,1), TGARCH(1,1) і EGARCH(1,1) моделей показані в табл. 3.

Таблиця 2. Результати оцінки в EViews

Лаг	Автокореляція для u_t^2	Автокореляція для u_t^2/σ_t^2
1	0.468	0.051
2	0.111	0.013
3	0.081	0.018
4	0.093	0.014
5	0.081	0.029
6	0.047	0.034
7	0.077	0.006
8	0.123	0.021
9	0.225	0.014
10	0.22	0.023

Таблиця 3. Оцінка і статистична перевірка GARCH, TGARCH і EGARCH моделей

Статистики	GARCH(1,1)	TGARCH(1,1)	EGARCH(1,1)
μ	0.000902 (2.111442)	0.000455 (1.878743)	0.00091 (2.200351)
w	0.00000672 (5.992050)	0.00000689 (5.980818)	-0.368685 (-13.78207)
α	0.134152 (13.54165)	0.138741 (9.123049)	0.2847 (18.30138)
β	0.860574 (134.7158)	0.014229 (0.669329)	-0.006911 (-0.621499)
γ		0.858562 (132.0545)	0.978393 (310.5523)
Логарифм функції правдоподібності	3305.034	3305.161	3301.136
Інформаційний критерій Акайке	-5.082423	-5.081079	-5.074882
Критерій Шварца	-5.066505	-5.061181	-5.054984

Результати показують, що GARCH-компоненти дисперсії є статистично значимими в усіх трьох моделях.

У випадку регресійного коефіцієнта w для EGARCH-моделі, цей коефіцієнт має від'ємне значення, що може бути причиною від'ємної умовної дисперсії конкретних значень змінних у моделі.

У випадку GARCH-моделі сума коефіцієнтів $(\alpha + \beta)$ і для TAR-моделі сума коефіцієнтів $(\alpha + \gamma)$ близькі до 1, що є наслідком інертності розвитку умовної дисперсії, тобто прогнозоване значення дисперсії майже не змінюється.

Існування "ефекту левеверджа" не підтверджується для обох асиметричних моделей. Це, а також порівняння значень функції максимальної правдоподібності, критеріїв Акайке і Шварца говорить про те, що найбільш адекватно зміни ПФТС-індексу описує GARCH(1,1)-модель.

Знайдемо довготерміновий рівень дисперсії

$$V = \frac{w}{1 - \alpha - \beta} = 0.00192 \text{ (рис. 3)}$$

Це припускає довготермінову волатильність 4,37 % за день, 9,8 % за тиждень (5 торгових днів у тижні), 70,6 % за рік (52 тижня в році).

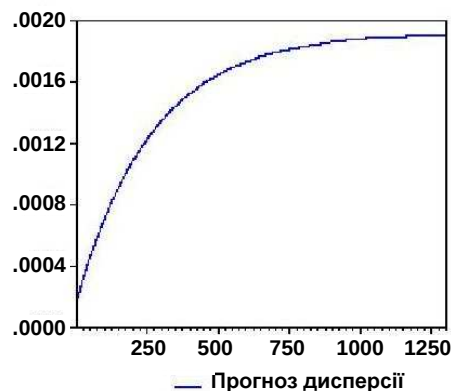


Рис. 3. Довготерміновий рівень дисперсії

Тепер спробуємо оцінити вплив волатильності на дохідність ПФТС-індексу за допомогою M-GARCH(1,1)-моделі:

Таблиця 4. Результати оцінки M-GARCH(1,1)-моделі в EViews

1299 спостережень

Конвергенція досягається після 30 ітерацій

	Коефіцієнт	Станд. похибка	Z-статистика	Імов.
SQR(GARCH)	-0.159101	0.067388	-2.360972	0.0182
C	0.003422	0.001090	3.138351	0.0017
Оцінка дисперсії				
C	7.12E-06	1.09E-06	5.540533	0.0000
ARCH(1)	0.135144	0.010252	13.23694	0.0000
GARCH(1)	0.861144	0.006257	138.7400	0.0000
R-квадрат	0.007308	Середнє значення залежної змінної		-0.000319
Скоригований R-квадрат	0.004239	Стандартне відхилення залежної змінної		0.025631
Стандартна похибка регресії	0.025577	Критерій Акайке		-5.083163
Сума квадратів залишків	0.846498	Критерій Шварца		-5.063266
Функція правдоподібності	3306.515	F-статистика		2.381569
Статистика Дурбіна-Ватсона	2.420335	Імов. (F-статистика)		0.049774

Сподівана дохідність акцій залежить від сподіваного ризику, причому ARCH-in-the-mean ефект (вплив ARCH-компоненти на дохідність) є значимим, що свідчить про зворотний зв'язок між дохідністю і волатильністю (ризиком).

Останні 173 спостереження часового ряду були використані для "ex post" прогнозування, при цьому найбільша увага була приділена прогнозу волатильності.

Графіки прогнозованого періоду показують, що інтервальна оцінка дохідності на рівні 90 % не є постійною у випадку всіх трьох моделей і бере до уваги зміну дисперсії змінної (рис. 4, 5 і 6). Це означає, що на відміну від класичних підходів, що базуються на припущенні постійної дисперсії випадкової компоненти, GARCH, TGARCH і EGARCH моделі реагують на реальні зміни у волатильності дохідностей.

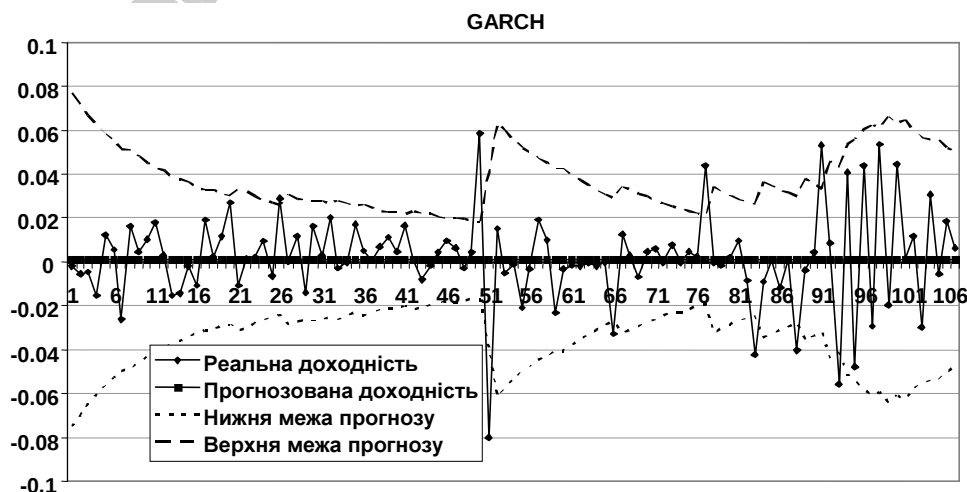


Рис. 4. "Ex post" прогноз волатильності ПФТС-індексу за моделлю GARCH(1,1)

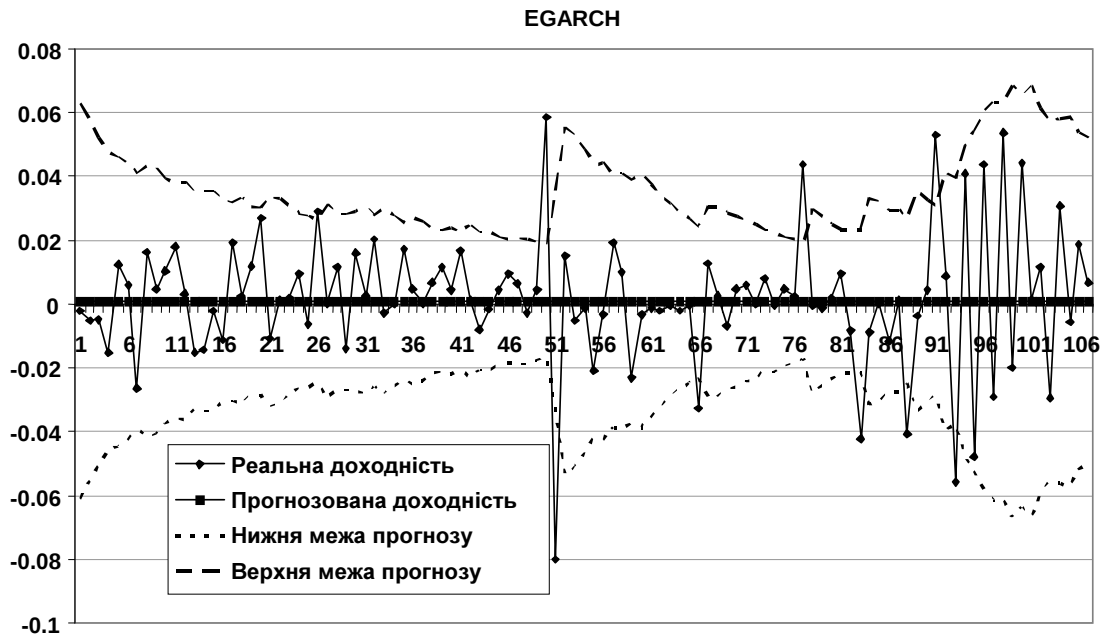


Рис. 5. "Ex post" прогноз волатильності ПФТС-індексу за моделлю EGARCH(1,1)

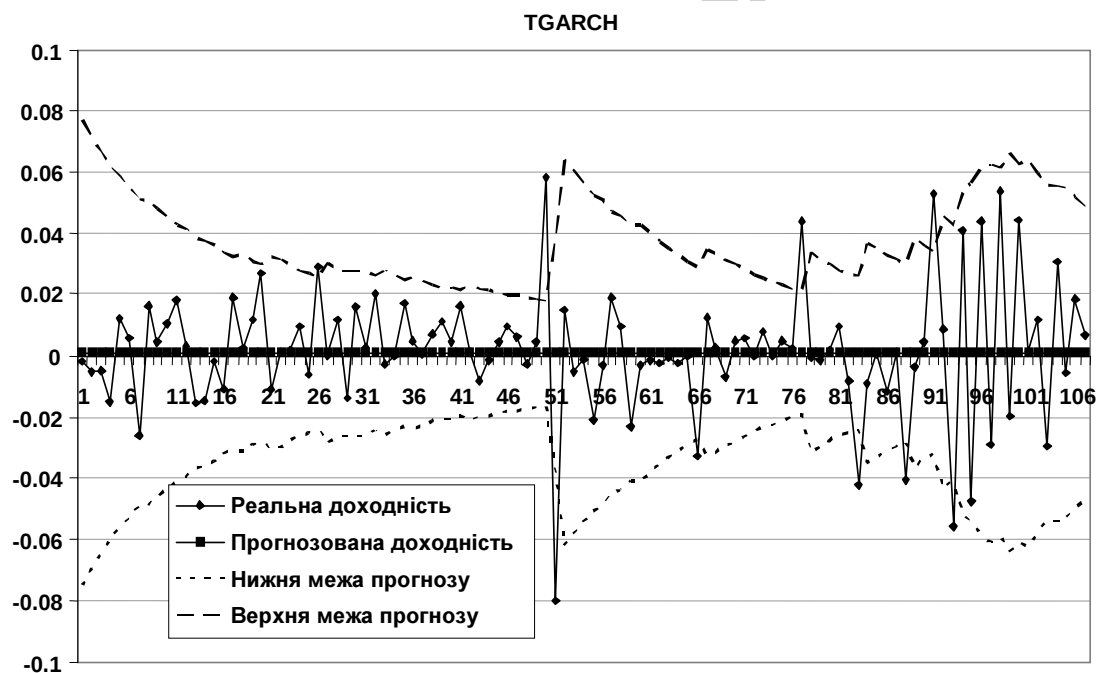


Рис. 6. "Ex post" прогноз волатильності ПФТС-індексу за моделлю GARCH(1,1)

Висновки. Стандартні методи оцінки волатильності припускають її постійний рівень, а ARCH-методи дозволяють моделювати мінливість дисперсії випадкової величини, що робить їх більш придатними для прогнозування волатильності. Мінливість умовної дисперсії ПФТС-індексу може бути змодельована засобами GARCH, TGARCH і EGARCH моделей. Найкращі результати були отримані при використанні GARCH(1,1)-моделі. У розглянутому періоді існування асиметричного ефекту (який може бути пов'язаний з "ефектом леве-реджа") не було підтверджено. За допомогою M-GARCH-моделі було виявлено зворотний зв'язок між доходністю індексу і його волатильністю. У майбутньому ці результати можуть бути розширені включенням інших варіантів GARCH-моделей, а запропонована мето-

дика може бути також використана для оцінки цін та волатильності інших фінансових активів.

1. Sharp W. Capital asset price; A theory of market equilibrium under conditions of risk // Journal of Finance. – 1964. – № 9. – P. 42–442.
2. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – № 81. – P. 637–659.
3. Engle Robert F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with the Estimates of the Variance of U.K. Inflation // Econometrica. – 1982. – № 50. – P. 987–1008.
4. Bollerslev Tim Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // Journal of Econometrics. – 1986. – № 31. – P. 307–327.
5. Nelson Daniel B. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach // Econometrica. – 1991. – № 59. – P. 347–370.
6. Zakoian, J. M. Threshold Heteroskedastic Models // Journal of Economic Dynamics and Control. – 1994. – № 18. – P. 931–955.
7. Bollerslev Tim, Ray Y. Chou and Kenneth F. Kroner ARCH modelling in finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence // Journal of Econometrics. – 1992. – № 52. – P. 5–59.

Надійшла до редколегії 11.10.04