

УДК 553.982

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.10>

Лубков М. В. д.ф.-м.н., с.н.с

M. V. Lubkov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

Застосування скінчено-елементно- різницевого методу для моделювання анізотропних фільтраційних процесів

Application of the finite element-differences method for modeling of anisotropic filtration processes

Полтавська гравіметрична обсерваторія
НАНУ, 36014, м. Полтава, вул. Мясоєдова
27/29,
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Poltava Gravimetric Observatory of NASU, 36014,
Poltava, Myasoedova st., 27/29,
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Розглянуто моделювання і геофізичну інтерпретацію у практиці нафто-газовидобування у анізотропних пластах. Для вирішення цих прикладних проблем застосовано комбінований скінчено-елементно-різницевий метод розв'язання анізотропної задачі п'єзопровідності з урахуванням неоднорідного розподілу фільтраційних параметрів нафто-газоносних пластів та умов інфільтрації нафти і газу на границях досліджуваної області.

Ключові слова: анізотропна задача п'єзопровідності, нафто-газовидобування, комбінований скінчено-елементно-різницевий метод.

We consider modeling and geophysical interpretation of the obtained results in the oil and gas production problems in anisotropic reservoirs. For solving these practical problems, we use combined finite element-differences method of resolving anisotropic piezoconductivity problem with calculation of heterogeneous filtration parameters distribution of oil and gas productive reservoirs and oil-gas penetration conditions in the borders of investigating areas. We have defined that the anisotropy of oil and gas permeability in the far zone of the well has a greater effect on the filtration processes around the well and, accordingly, on the producing of the raw materials than the anisotropy of permeability in the near zone of the well. We have shown that the intensity of filtration processes in anisotropic reservoirs near the acting well depends significantly on the shear permeability and to a lesser extent on the axial permeability of the corresponding phase. Therefore, for the effective using of anisotropic reservoirs, it is necessary to place production wells in local areas with relatively low anisotropy of permeability of the reservoir, especially to avoid places with shear anisotropy.

Key Words: anisotropic piezoconductivity problem, oil and gas producing, combined finite element-differences method.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

На сучасному етапі у зв'язку з потужним розвитком обчислювальних методів механіки і математики, а також завдяки досягнутому прогресу в розумінні основних законів фільтрації у пористих анізотропних нафто-газоносних пластах, виникають системні можливості дослідження раніше недоступних фільтраційних процесів. Це перш за все стосується процесів, які протікають у специфічних неоднорідних анізотропних пластах нафтоносних і газоконденсатних родовищ. Недосяжність для прямих геологічних і фізичних вимірювань за

межами свердловин, роблять математичне моделювання одним із основних інструментів дослідження таких об'єктів.

Цю статтю присвячено моделюванню і практичному застосуванню результатів у нафто- і газовидобуванні. Для вирішення цих важливих проблем застосовано комбінований скінчено-елементно-різницевий метод розв'язання нестационарної анізотропної задачі п'єзопровідності для нафтової фази та задачі п'єзопровідності (Лейбензона) для газової фази з урахуванням інфільтрації відповідної фази на межах розглянутої області [1, 2, 3]. У випадку

нафтоносного деформованого пласта, враховуючи, що його товщина значно менше горизонтальних розмірів, достатньо скористатись двовимірною постановкою анізотропної задачі п'єзопровідності у декартовій системі координат:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \frac{1}{c_n} (k_{xx}^n \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + k_{yy}^n \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} + 2k_{xy}^n \frac{\partial P_n}{\partial x} \frac{\partial P_n}{\partial y}) + \gamma_n; \quad (1)$$

$$P_n(t=0) = P_n^0; \quad (2)$$

$$k_n^m \text{grad} P_n = \alpha_n (P_n - P_n^m). \quad (3)$$

Тут (1) – рівняння п'єзопровідності; (2) – початкова умова; (3) – умова інфільтрації нафти на межах розглянутого пласта; $P_n(x, y, t)$ – тиск пласта, як функція координат і часу; $c_n = \eta_n (m_n \beta_1^n + \beta_2^n)$ – коефіцієнт п'єзоопору нафти; η_n – коефіцієнт в'язкості нафти; m_n – коефіцієнт пористості пласта; β_1^n – стискання нафти; β_2^n – стискання скелету порід пласта; γ_n – параметр витоку нафти в пласті; P_n^0 – початковий тиск нафти у пласті; $k_{xx}^n, k_{yy}^n, k_{xy}^n$ – анізотропні коефіцієнти проникності нафтової фази; k_n^m – коефіцієнт проникності нафтової фази на межі області; α_n – коефіцієнт інфільтрації нафтової фази на границях розглянутої області; P_n^m – тиск на межах розглянутої області. Відповідно у випадку газоносного пласта двовимірна анізотропна задача п'єзопровідності Лейбензона набуває вигляду:

$$\frac{\partial P_g^2}{\partial t} = \frac{1}{c_g} (k_{xx}^g \frac{\partial^2 P_g^2}{\partial x^2} + k_{yy}^g \frac{\partial^2 P_g^2}{\partial y^2} + 2k_{xy}^g \frac{\partial P_g^2}{\partial x} \frac{\partial P_g^2}{\partial y}) + \gamma_g; \quad (4)$$

$$P_g(t=0) = P_g^0; \quad (5)$$

$$k_g \text{grad} P_g^2 = \alpha_g (P_g^2 - P_g^{m2}). \quad (6)$$

Тут (4) – рівняння п'єзопровідності газової фази (Лейбензона); (5) – початкова умова; (6) – умова інфільтрації газової фази на межах розглянутої області; $c_g = \eta_g m_g / P_0^g$ – коефіцієнт п'єзоопору газової фази (Лейбензона). Представлені тут параметри газоносного пласта відповідають аналогічним за індексними позначеннями параметрам нафтоносного пласта.

2. Метод розв'язання задач

У подальшому для спрощення запису математичних виразів індекси, що означають належність до нафтової або газової фази, будемо опускати. Для розв'язання нестационарної задачі п'єзопровідності (1–3) застосовується варіаційний скінчено-елементний метод, що приводить до розв'язання варіаційного рівняння п'єзопровідності [3]:

$$\delta I(P) = 0. \quad (7)$$

Тут $I(P)$ – функціонал анізотропної задачі п'єзопровідності (1) – (3), який представляється у вигляді [3]:

$$I(P) = \frac{1}{2} \iint_S \{k_{xx} (\frac{\partial P}{\partial x})^2 + k_{yy} (\frac{\partial P}{\partial y})^2 + 2k_{xy} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + 2k_{xy} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + 2 \int_{P_0}^P c \frac{\partial P}{\partial t} dP - 2\gamma P\} dx dy - \frac{1}{2} \int_L \alpha (P - 2P_b) P dl; \quad (8)$$

S – площа перерізу області, яка досліджується, L – контур, що охоплює площу S , dl – елемент контуру. При розв'язанні варіаційного рівняння (7) застосовується восьмивузловий ізопараметричний чотирикутний скінчений елемент [3]. Як глобальна система координат, де відбувається об'єднання всіх скінчених елементів, на які розбито площу S , використовується декартова система (x, y) . В якості локальної системи координат, де в межах скінченого елемента визначаються функції апроксимації φ_i на основі квадратичних поліномів і проводиться чисельне інтегрування, використовується нормалізована система координат (ξ, η) [3]. В цій системі координати, тиск, початковий тиск пласта, тиск на границях області, коефіцієнт інфільтрації нафти на межах області, а також похідні від тиску по координатам апроксимуються наступним чином:

$$x = \sum_{i=1}^8 x_i \varphi_i; y = \sum_{i=1}^8 y_i \varphi_i; P = \sum_{i=1}^8 P_i \varphi_i;$$

$$P_0 = \sum_{i=1}^8 P_{0i} \varphi_i; P_{zp} = \sum_{i=1}^8 P_{zp}^i \varphi_i; \alpha = \sum_{i=1}^8 \alpha_i \varphi_i;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{i=1}^8 P_i \Psi_i; \frac{\partial P}{\partial y} = \sum_{i=1}^8 P_i \Phi_i;$$

$$\Psi_i = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right);$$

$$\Phi_i = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right);$$

$$J = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \text{ — якобіан переходу між}$$

системами координат (x, y) і (ξ, η) .

Виходячи з варіаційного рівняння (7) і вважаючи, що вузлові значення від похідних тиску за часом $\frac{dP_i}{dt}$ є відомими величинами і не варіюються, складемо систему диференціальних рівнянь для n -го вузла p -го скінченного елемента у вигляді:

$$H_{ij}^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 c^p \varphi_i \varphi_j |J| d\xi d\eta;$$

$$\frac{\partial I_p}{\partial P_n} = \sum_{i=1}^8 \{ H_{ni}^p \frac{dP_i}{dt} + (A_{ni}^p + Q_{ni}^p) P_i -$$

$$- Q_{ni}^p P_0^i \} - \gamma_n^p = 0;$$

$$H_{ij}^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 c^p \varphi_i \varphi_j |J| d\xi d\eta;$$

$$A_{ij}^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (k_{xx}^p \Psi_i \Psi_j + k_{yy}^p \Phi_i \Phi_j + k_{xy}^p \Psi_i \Phi_j) |J| d\xi d\eta;$$

$$Q_{ij}^p = \int_L \alpha \varphi_i \varphi_j dl; \gamma_i^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma^p \varphi_i |J| d\xi d\eta.$$

Для розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (10) при початкових умовах з (9) використовується метод скінчених різниць, в якому апроксимація похідної за часом здійснюється на основі неявної різницевої схеми [1, 5]:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}. \quad (11)$$

Підставляючи вираз (11) в систему (10), отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^8 \left\{ \left(\frac{1}{\Delta t} H_{ni}^p + A_{ni}^p + Q_{ni}^p \right) P_i(t + \Delta t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta t} H_{ni}^p P_i(t) - Q_{ni}^p P_0^i \right\} - \gamma_n^p = 0 \quad (n=1-8). \quad (12)$$

Роблячи додавання рівнянь (12) по всім скінченим елементам, отримуємо глобальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що дозволяє визначати невідомі значення тиску в момент часу $t + \Delta t$ через їх значення в попередній момент часу t . Розв'язання глобальної системи рівнянь здійснюється на основі чисельного методу Гауса без вибору головного елемента [3]. В результаті розв'язання, тиск визначається в усіх вузлових точках скінчено-елементної сітки. По знайденим вузловим значенням тиск визначається у довільній точці нафтоносного пласта досліджуваної області будь-який момент часу.

При розгляді задачі п'єзопровідності для газової фази (Лейбензона) (4-6), після заміни $\tilde{P} = P^2$ хід розв'язання задачі подібний.

3. Моделювання процесів фільтрації у анізотропних нафто-газоносних пластах

Розглянемо анізотропну нафтоносну пластову ділянку в околиці діючої нафтовидобувної свердловини розміром 90×90 м² (рис. 1, 2). Оберемо деякі характерні середні параметри нафтоносного пласта [1, 2]: $m = 0,2$; $\eta = 10^{-3}$ Па·с; $\beta_1 = 10^{-9}$ Па⁻¹; $\beta_2 = 10^{-9}$ Па⁻¹. В цьому випадку коефіцієнт п'єзоопору $c = 0,3 \cdot 10^{-12}$ с. При моделюванні розподілу тисків у розглянутій пластовій ділянці припустимо, що початковий тиск у пласті дорівнює 200 атм, середня потужність видобувної свердловини складає 100 м³ нафти на добу. Для мінімізації крайових ефектів при моделюванні, на межах розглянутої ділянки виберемо коефіцієнти інфільтрації нафтової фази рівними 0.001 м.

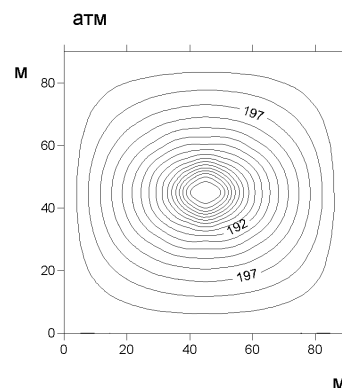


Рис. 1 Розподіл встановленого тиску в анізотропному пласті навколо нафтовидобувної свердловини при заданих параметрах проникності: $k_{xx} = 2D$, $k_{yy} = 1D$, $k_{xy} = 0$ ($1 \text{ Дарси} = 10^{-12} \text{ м}^2$).

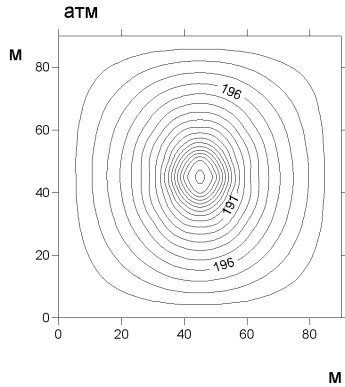


Рис. 2 Розподіл встановленого тиску в анізотропному пласті навколо нафтовидобувної свердловини: $k_{xx} = 1Д$, $k_{yy} = 2Д$, $k_{xy} = 0$.

Далі розглянемо процеси фільтрації анізотропного газоносного пласта ($9 \times 9 \text{ км}^2$) в околиці видобувної свердловини потужністю 24840 м^3 на добу при пластовому тиску 10 МПа (рис. 3). Виберемо деякі характерні середні параметри газоносного пласта [1, 2]: $m = 0,15$; $\eta = 0,18 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $P_0 = 100 \text{ атм}$. При цьому коефіцієнт п'єзоопору Лейбензона $c = 0,27 \cdot 10^{-12} \text{ с}$.

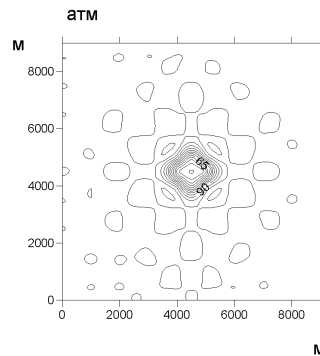
Висновки

Встановлено, що анізотропія нафтогазової проникності в дальній зоні дії свердловини більше впливає на процеси фільтрації навколо свердловини і відповідно на видобуток сировини, ніж наявність анізотропії проникності в ближній зоні дії свердловини. Показано, що інтенсивність процесів фільтрації у анізотропних пластах поблизу діючої свердловини, суттєво залежить від зсувної проникності і в меншій мірі від осьової проникності відповідної фази. Отже, для ефективного використання анізотропних пластів необхідно розміщувати видобувні свердловини в

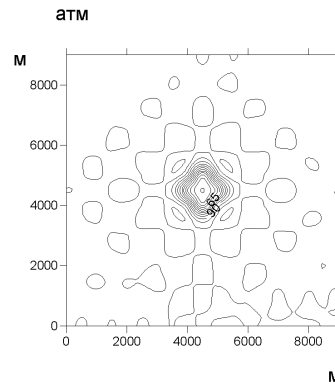
Список використаних джерел

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – М.: Ин-т комп'ют. исслед., 2004. – 416 с.
2. Басниев К. С. Нефтегазовая гидромеханика: учебное пособие для вузов / К.С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. – М.: Ин-т комп'ют. исслед., 2003. – 479 с.
3. Лубков М. В. Моделивання процесів фільтрації у неоднорідних анізотропних газоносних пластах / М.В. Лубков, О.О. Захарчук // Геоінформатика. – 2020. –1(73). – С. 56 – 63.

локальних областях з відносно низькою анізотропією проникності пласта, особливо уникати місць із наявністю зсувної анізотропії.



а)



б)

Рис. 3 Розподіл встановленого тиску в анізотропному пласті навколо газодобувної свердловини: а) $k_{xx} = 0,0012Д$, $k_{yy} = 0,012Д$, $k_{xy} = 0,0012Д$; б) $k_{xx} = 0,0012Д$, $k_{yy} = 0,012Д$, $k_{xy} = 0,0012Д$.

References

1. AZIZ, H. (2004) *Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem*. Moskwa: In-t komp'jut. issled.
2. BASNIEV, K., DMITRIEV, N., ROZENBERG, G. (2003) *Neftegazovaja gidromekhanika: uchebnoe posobie dlja vuzov*. Moskwa: In-t komp'jut. issled.
3. LUBKOV, M., ZAHARCHUK, O. (2020) *Modeliuvannia protsesiv filtratsii u neodnorodnykh anizotropnykh hazonosnykh plastakh Geoinformatics*. 1(73). p. 56 – 63.

Надійшла до редколегії 01.07.21