

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 Прикладна математика
на тему:

**ЗАСТОСУВАННЯ ДВОРОКОВОГО СИМЕТРИЗОВНОГО АЛГОРИТМУ
ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ У
ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ**

Виконав студент 4-го курсу:

Сєдов Вадим Іванович _____

Науковий керівник:

кандидат фізико-математичних наук

Оноцький В'ячеслав Валерійович _____

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з
праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

Роботу розглянуто й допущено до захисту на
засіданні кафедри обчислювальної математики

«_____» _____ 2021 р.,

протокол № _____

Завідувач кафедри

проф. Ляшко С.І. _____

РЕФЕРАТ

Сторінок - 30, ілюстрацій - 2, таблиць - 1, використаних джерел – 10

Ключові слова: ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ, ДВОКРОКОВО-СИМЕТРИЗОВНИЙ АЛГОРИТМ, РІВНЯННЯ РІЧАРДСА-КЛЮТА.

Мета роботи – розглянути геологічний апарат вологоперенесення, застосувати двокроково-симетризовний алгоритм до диференціальних рівнянь, що описують алгоритм пошуку точкових джерел;

Взаємозв'язок з іншими роботами – робота була написана на основі результатів докторської дисертації Тимошенко А.А. «Оптимальне точкове керування переносом маси у пористих середовищах»;

Пропозиції щодо розвитку об'єкта дослідження (розроблення) й доцільності продовження досліджень або розробок: для повного закриття теми пропонується реалізувати ДС-алгоритм за допомогою однієї з мов програмування і дослідити швидкодію пошуку результатів.

ЗМІСТ

РЕФЕРАТ	2
ЗМІСТ.....	3
ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1 ТЕОРІЯ ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ	6
1.1 Процес вологоперенесення	6
1.2 Вивчення взаємозв'язку між характеристиками пористості тіла та їх водопроникністю	6
1.3 Гідростатика капілярів	11
1.4 Закон руху вологи	12
1.5 Виділення інших критеріїв для гідродинамічної типізації	12
РОЗДІЛ 2 ЗАСТОСУВАННЯ ДС-АЛГОРИТМУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ РІЧАРДСА-КЛЮТА	14
2.1 Загальна схема побудови двокроково симетризованих алгоритмів	14
2.2 Постановка задачі	15
2.3 Розв'язок задачі	17
ВИСНОВКИ	29
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ	30

ВСТУП

У багатьох практичних задачах великий інтерес викликають проблеми, зв'язані з рухом рідин різного складу, з оцінками зміни якості або температури підземних вод у просторі або часі. Існує багато проблем, що пов'язані з пошуком та дослідженням руху рідин:

- 1) Охорона підземних вод від забруднення
- 2) Підземне закопування промислових відходів
- 3) Пошук джерел підземних вод
- 4) Дослідження напрямку руху рідини в неоднорідному середовищі

Розв'язок цих та інших проблем базуються на теорії переносу речовини підземними водами, або теорії міграції підземних вод. Основними процесами, що обумовлюють перенесення маси у ґрунті є дифузія, конвекція. На ці процеси також накладаються процеси фізичної і хімічної взаємодії рідини з гірськими породами – сорбція, йонний обмін, тощо.

Рівняння Річардса-Клюта досі є не повністю дослідженим. З теоретичної точки зору, рівняння Річардса-Клюта не має алгоритму розв'язання що буде працювати для будь-яких початкових і крайових умов, а також коефіцієнту вологопереносу, отже вимагає різностороннього дослідження.

Мета роботи – розглянути і проаналізувати геологічний апарат вологоперенесення, застосувати двокроково-симетризовний алгоритм до диференційних рівнянь, що описують алгоритм пошуку точкових джерел.

Проблема фільтрації займатиме у цій роботі основний фокус. Будуть розглядатися як фізичні властивості рідини та пористого середовища, по якому протікатиме вода, так і практичний алгоритм пошуку точкових джерел.

В роботі буде показано розробку різницевого схем для алгоритму знаходження точкових джерел. Для цього використовуватиметься двокроково-симетризовний метод, ідея якого описана у розділі 2.

Застосування методу може бути корисним при пошуку підземних вод, або аналізі розповсюдження води у пористому середовищі.

РОЗДІЛ 1 ТЕОРІЯ ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ

1.1 ПРОЦЕС ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ

Процес вологоперенесення – це процес руху рідини у певному середовищі. Зазвичай розглядають цей процес в шарах ґрунту близьких до поверхні. Різні види ґрунту мають різні властивості. Серед цих властивостей: вологоємність, водопідймальна здатність і водопроникність. Вологоємність — це здатність ґрунту вбирати і утримувати певну кількість води. Величина вологоємності кожного ґрунту залежить насамперед від механічного і структурного складу ґрунту та вмісту в ньому органічної речовини. Вміст гумусу і глинистих частинок підвищує вологоємність ґрунту.

Здатність ґрунту пропускати атмосферні води в глибші горизонти називають водопроникністю. Процес проникнення води в ґрунт зумовлюється спочатку вбиранням її ґрунтом, а потім переміщенням вглиб під дією сил тяжіння. Водопідймальна здатність ґрунту – це властивість ґрунту забезпечувати тяжіння, а також забезпечувати (спричиняти) підняття вологи по капілярних порах. [5]

1.2 Вивчення взаємозв'язку між характеристиками пористості тіла та їх водопроникністю

Пористі матеріали дуже різноманітні за своїми морфологічними ознаками. Для характеристики їх не за якісними ознаками, а за кількісними, що зможуть стати відправною точкою для вивчення природи формування пористого середовища, потрібен поверхневий огляд геометрії пористого тіла. Геометрична модель пористого тіла є необхідною для передбачення процесів, що відбуваються в пористих тілах та слугує фундаментом для побудови

майбутніх фізико-хімічних моделей. При цьому розглядається як саме пористе середовище, так і каркас, який утворює його.

Для характеристики пористих середовищ використовують різні класифікації, але занадто сильно занурюватися у них нема сенсу, бо дрібні деталі побудови не впливають на загальний опис переміщення рідини. Тому при описі геометричної моделі оперують усередненими показниками. Найбільш використовуваним з них є загальна пористість, що надає характеристику простору у загальному об'ємі гірської породи.

Характерними показниками загальної пористості для піску є 35-50 відсотків, глини – 40-60 відсотків, для пісковиків та осадових гірських порід – 5-20 відсотків, для гранітів, гнейсів та кварцитів – менше 1 відсотку. Аналогом пористості для пористих тіл є тріщинуватість поверхонь, що є відносним об'ємом тріщин до об'єму усього тіла.

За здатність пропускати та віддавати воду відповідає такий показник, як абсолютний розмір пор. Для піску цей показник складає 0,1-1 мм, а в глинах – 0,1 – 1 мкм. При цьому пори можуть мати різний розмір, та рух рідини відбувається між порами, що наділені достатнім абсолютним розміром. Цей простір з достатньо великих пор називають ефективним пористим простором.

Цей термін найбільше використовується у нафтовому виробництві. У деяких пісковиків ефективний простір у кілька разів менше загального.

Коефіцієнтом пористості ε є відношення об'єму пор до об'єму твердої фази:

$$\varepsilon = \frac{n}{1 - n}$$

Отже, навіть якщо загальна поверхня пор дуже велика, якщо вони мають малий розмір, то рідина буде вимушена тратити більше енергії на переміщення та на тертя о стінки пор.

Чим глибше знаходяться тіла, тим більше вони залежать від навантаження іншими тілами в ґрунті. Тому, якщо не використовуються

цементні з'єднання, у глибині ґрунту загальна пористість зазвичай менше, ніж на поверхні.

Опрацювання геометричних детермінованих показників є дуже відносним, тому не можна робити акцент на цій складовій. Можна спробувати представити пористе середовище як суцільний однорідний простір з рівномірно розподіленими по об'єму характеристиками. Відповідно, об'єм, що повинен бути задіяний у дослідженнях, матиме, як мінімум, достатньо елементарних компонентів даної гірської породи. «Достатньо» – це число близько декількох десятків, або ж відокремлений малий об'єм повинен мати діаметр, що в 7-10 разів більший за діаметр складових середовища. Мінімальний об'єм, що буде задовольняти цю умову, буде мати назву мінімальний репрезентативний об'єм.

Отже, є можливість замінити реальну дискретну середу умовною суцільною середою, що, звісно, різко спрощує подальші розрахунки. Зробити це можна при використанні апарата механіки суцільної середи у статистичних системах. А так як структури змінюються від точки до точки у залежності від великої кількості випадкових факторів, то усілякі якісні характеристики гірської породи можуть лише сумарно відобразити дію цих факторів як деякі усереднені по об'єму показники. Таке усереднення може мати місце лише при великих об'ємах. Отже, не можна сказати, що рівень досліджень у гідрогеології досяг рівня, щоб приймати якісні данні для реалізації даного підходу усереднення.

Щоб показати деякі основні відмінності між властивостями ґрунтів можна звернутися до наступної таблиці:

Таблиця 1.2.1 Основні відмінності між властивостями ґрунтів

Отже, в залежності від складу (а також температури і тиску), різні ґрунти мають різні водні властивості, такі як водопроникність. [6]

Перед тим як перейти до безпосереднього вивчення рівняння руху вологи, нагадаємо основні властивості води з яких воно випливає.

Можна чітко виділити два основних стани, в яких вода знаходиться у ґрунті: зв'язаний та вільний.

Вода у зв'язаному стані (зв'язана вода) – характеризується аномально високими в'язкістю та густиною, а сили гравітації та гідростатичного тиску практично не впливають на характер її руху. Такі властивості зумовлені міцним зв'язком молекул рідини із мінеральним скелетом середовища, що характерно для води у глинистих породах. Вважається, що в таких системах вільні катіони і дипольно орієнтовані молекули води групуються навколо негативно заряджених глинистих часточок і, таким чином, утворюють адсорбційний шар, що утримує воду. Навколо цього шару можна виділити ще один, з менш міцно зв'язаних катіонів, який називають дифузним шаром. Частинки води в дифузному шарі здатні вільно переміщатися від однієї частинки ґрунту до іншої, в той час, як частинки рідини, що знаходяться в адсорбційному шарі, міцно прив'язані до відповідних частинок ґрунту. Через ці властивості, зв'язану

Пісок (розмір частинок 0,05-2 мм)	Глина (розмір частинок <0,002 мм)	Мул (розмір частинок 0,002 – 0,05 мм)
Швидко сохне	Сохне повільно, при висиханні тріскається	Сохне не надто швидко, при висиханні тріскається і потребує пашні для кращої циркуляції повітря
Швидкість всмоктування води (0,6 дюйма / годину)	Швидкість всмоктування води (0,1 дюйма / годину)	Швидкість всмоктування води (0,3 дюйма / годину)

воду можна при розрахунках умовно відносити до мінерального скелету без значної втрати точності.

Властивість глинистих порід утримувати воду у зв'язаному стані робить ці породи найбільш молекулярно вологоємними. Молекулярну вологоємність прийнято позначати W_M і вона визначається як відносна кількість зв'язаної води в одиниці об'єму породи. Для глинистих порід ця величина майже дорівнює повній вологоємності породи, в той час, як для чистих пісків це значення по величині не перевищує кількох відсотків від об'єму утримуваної вологи. Молекулярна вологоємність в значній мірі залежить від хімічного складу води, що знаходиться в ґрунті. Важливими характеристиками рідини в цьому контексті також будуть її температура та зовнішній тиск.

Саме під дією зовнішнього тиску частина води, що знаходиться у дифузному шарі, може бути видалена, а частина міцно зв'язаної води у адсорбційному шарі – переміщатися в межах гідратних оболонок. Хоча ці феномени варті задки, але вони не мають стосунку до даної роботи, оскільки тиск, необхідний для їхнього прояву дуже високий і в природі трапляється лише в глибоких шарах земної кори.

Як легко можна припустити з назви, вільна вода (вода у вільному стані) – це така вода, що слабо пов'язана із мінеральним скелетом ґрунту, в якому знаходиться. Виділяють три підвиди води у вільному стані, залежно від зовнішніх сил, які чинять найбільший вплив на її переміщення у ґрунті.

Гравітаційна вода – найбільший вплив на рух якої чинять гравітаційні сили. Породи, в яких цей вид вільної води зустрічається, називають водоносними. Вона заповнює простір пор і тріщин цих порід і володіє всіма основними властивостями крапельно-рідинної води. Важливою характеристикою, яку слід згадати в даному контексті буде її здатність неперервно передавати гідростатичний тиск і здійснювати рух під впливом гідростатичних сил.

Ще один підвид вільної води – капілярна вода. Найчастіше зустрічається на ділянках над рівнем вільної поверхні підземних вод у водонасичених гірських породах. Такий тип рідини характеризується рівнем гідростатичного

тиску, що вищий, ніж атмосферний. Ця рідина знаходиться в зоні дії капілярних сил, що виникають при контакті двох фаз всередині ґрунтових пор – води і повітря. Властивості капілярної води залежать від степені водонасичення, саме це значення визначає положення капілярної кайми. При зростанні водонасичення далі, ніж значення верхньої межі капілярної кайми, в породі з'являється повітря як самостійна неперервна фаза, що, відповідно, значно змінює властивості води у породі.

Третій підвид води у вільному стані – так звана іммобілізована вода. Це та частина вільної води, для переміщення якої необхідний значний перепад тисків. За властивостями близька до дифузного шару у зв'язаній воді, власне, між ними складно виділити чіткий перехід. Варто зазначити, що, на відміну від зв'язаної, цей вид вільної води частково видаляється з ґрунту під впливом додаткового тиску, порядку 1 атмосфери, що характерний для верхньої частини земної кори.

1.3 ГІДРОСТАТИКА КАПІЛЯРІВ

Рух рідини у ґрунті насамперед визначається капілярними, гравітаційними силами, отже необхідно пам'ятати деякі властивості води пов'язані з цим рухом.

У відкритій капілярній трубці (тобто дуже тонкій), що опущена одним кінцем нижче рівня води, гідростатичний тиск нижче ніж атмосферний. Висота підйому води визначається рівнянням:

$$h_k = \frac{2\sigma_k}{\rho g r_k}$$

σ_k - сила поверхневого натягу, що рівна 8 Па для води;

r_k - радіус капіляра.

Тиск рідини у трубці визначається рівнянням (на висоті вище рівня води):

$$p = \rho g z, \quad z \leq h_k$$

1.4 ЗАКОН РУХУ ВОЛОГИ

Експериментальним шляхом було встановлено, що рух рідини в ґрунті, пори якого не заповнені водою повністю, описується наступним законом:

$$v = k(W) \frac{\partial H}{\partial l}$$

Де v – швидкість рідини у напрямку l ,

H – це функція напору,

W – вологість середовища,

k – коефіцієнт вологоперенесення, який можна визначити задаючи різні значення витрат води через колону ґрунту і досягаючи стаціонарного режиму вологоперенесення в ній.

Експериментальні дані показують, що залежність коефіцієнту вологоперенесення від вологи визначається як:

$$k = k_0 \bar{W}^n, \bar{W} = \frac{W - W_0}{W_n - W_0}$$

Де k_0 – коефіцієнт переносу води при повному насиченні водою

($W = W_n \Rightarrow k = k_0$)

\bar{W} – відносна вологість, W_0 – вологість при якій рух води при даних температурі і тиску відсутній, тобто така, що $k = 0$, W_n – повна вологоємність ґрунту. Показник n при відносній вологості описує властивості ґрунту.

Для однорідних ґрунтів $n = 3 \sim 4$. Однак для неоднорідних фільтруючих середовищ це значення може значно перевищувати ці цифри. [7]

1.5 Виділення інших критеріїв для гідродинамічної типізації

Крім вищезгаданої водопроникності, для типізації умов руху підземних вод важливими поняттями, які потрібно чітко визначити для подальшого використання, є поняття водоносного горизонту, зони насичення та зони

аерації. Для них можна виділити конкретні гідродинамічні критерії, і, з допомогою цих та інших введених нами понять, можна ввести чітку гідродинамічну типізацію описуваних процесів.

Водоносний горизонт – це водопроникний шар гірської породи, що містить вільну (гравітаційну) воду і має однакову пористість і величину водопроникності. Залягає між водонепроникними товщами. Сукупність водоносних горизонтів називають водоносним комплексом.

Зона насичення – це зона, в межах якої рідина в порах ґрунту утворює неперервну фазу. Це дозволяє говорити про неперервну передачу гідростатичного тиску у всі точки даної зони, при чому, це не означає, що повітря у цій зоні відсутнє. На відміну від зони аерації, тут повітря в рідині знаходиться у розчиненому, защемленому або іншому виді, який, однак, не передбачає утворення повітрям окремої фази.

Зона аерації характеризується тим, що повітря, зв'язане з атмосферою, власне, утворює окрему фазу. Це означає, що характер передачі гідростатичного тиску в цій зоні визначатиметься водонасиченням гірської породи, яку розглядаємо.

Крім цих двох зон виділяють зону на межі між ними – так звану капілярну кайму. Їй властива наявність окремої неперервної фази, утвореної водою, з гідростатичним тиском меншим, ніж атмосферний. В межах даної зони, порівняно з потужністю водоносного горизонту нижчих зон, латеральний потік дуже малий і, для прикладних розрахунків ним можна знехтувати без помітної втрати точності. Більше того, капілярна кайма при спостереженні за допомогою стандартних вимірювальних пристроїв зазвичай не фіксується.

РОЗДІЛ 2 ЗАСТОСУВАННЯ ДС-АЛГОРИТМУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ РІЧАРДСА-КЛЮТА

2.1 ЗАГАЛЬНА СХЕМА ПОБУДОВИ ДВОКРОКОВО СИМЕТРИЗОВНИХ АЛГОРИТМІВ

Нехай маємо рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \text{ на } \Omega \in R^p, \quad t > t_0 \in R^+ \#(1)$$

де L - диференціальний оператор за просторовими змінними 1-го або 2-го порядку без мішаних похідних, $u: R^n \rightarrow R$. Тут Ω - p -вимірний паралелепіпед.

Позначимо $Q = \Omega \times \{t \in R \mid t > t_0 \in R^+\}$. Область Q покриваємо сіткою

$\Omega_{\square\tau} = \{x_{i_s}, t_n \mid x_{i_s} = i_s \square_s, i_s = \overline{1, M_s}; \square_s = 1/M_s; s = \overline{1, p}; t_n = n\tau, \tau > 0, n = 0, 1, 2, \dots\}$, яку розбиваємо на дві півобласті (див. рис.1 для $\Omega \in R^2$):

$$\Omega_{\square\tau}^{(1)} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}; t_n) \mid i_1 + \dots + i_p + n - \text{парне}\}$$
 та

$$\Omega_{\square\tau}^{(2)} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}; t_n) \mid i_1 + \dots + i_p + n - \text{непарне}\},$$

тобто, до $\Omega_{\square\tau}^{(1)}$ відносимо точки, для яких сума

індексів - парне число, а до $\Omega_{\square\tau}^{(2)}$ - точки, для яких сума індексів - непарне число.

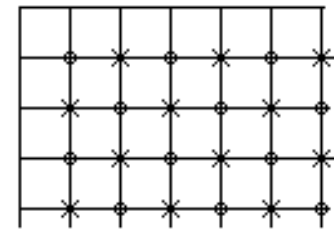


Рис.2.1.1 $\Omega_{ht}^{(1)}$ та $\Omega_{ht}^{(2)}$ для $\Omega \in R^2$.

R^2).

Алгоритм полягає в наступному.

Для знаходження значень на непарному $(2m + 1)$ -му часовому кроці спочатку обчислюємо значення розв'язку у всіх вузлах множини $\Omega_{\square\tau}^{(1)}$ за явною схемою:

$$u_{ij}^{2m+1} = u_{ij}^{2m} + \tau L_{\square} u_{ij}^{2m} \# \quad (2)$$

Далі, використовуючи отримані значення, знаходимо явно значення розв'язку у вузлах множини $\Omega_{\square\tau}^{(2)}$ за формально неявною схемою:

$$u_{ij}^{2m+1} = u_{ij}^{2m} + \tau(-\sigma L_{\square} u_{ij}^{2m} + (1 + \sigma)L_{\square}^* u_{ij}^{2m+1}) \# \quad (3)$$

На $(2m + 2)$ -му кроці спочатку знаходимо значення u в вузлах $\Omega_{\square\tau}^{(2)}$ за явною схемою (2), а потім – значення в вузлах $\Omega_{\square\tau}^{(1)}$ за неявною схемою (3).

Тут \square – крок просторової сітки, τ – часовий крок,

L_{\square} та L_{\square}^* – різницеві аналоги оператора L , можливі варіанти яких представлені нижче; $\sigma \geq 0$ – ваговий параметр алгоритму.

Отже, у випадку, коли оператор L – лінійний, при застосуванні неявних схем не виникає проблеми розв'язання систем різницевих рівнянь. [Оноцький В.В. Математична модель плосько-вертикального профільного вологоперенесення за краплинного зрошення в умовах неповного насичення]

2.2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Запишемо рівняння Річардса-Клюта для двовимірної прямокутної області з нульовими граничними умовами, нульовою початковою вологістю та відомою досяжною цільовою функцією розподілу вологи, що будується як розв'язок даного рівняння при фіксованій потужності [1-3]. Вважаємо рідину нестискуваною, процес ізотермічним, опади та всмоктування рослинами вважаємо несуттєво малими. Тоді рівняння, що описує процес має вигляд [4]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_x(\omega) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y(\omega) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \sum_{j=1}^N Q_j(t) \delta(x - x_j) \times \delta(y - y_j),$$

$$(x, y, t) \in \Omega_0 \times (0, T], \quad (1)$$

$$\omega|_{x=0} = 0; \quad \omega|_{x=L_1} = 0;$$

$$\omega|_{y=0} = 0; \quad \omega|_{y=L_2} = \omega_0 = 0; \quad (2)$$

$$\omega(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \overline{\Omega_0}.$$

У системі (1) - (2) $H = \psi(\omega) - y$ позначає напір, $D_y(\omega) = K_y(\omega) \frac{d\psi}{dy}$ — коефіцієнт дифузійності вздовж осі Oy , прямокутна досліджувана область

позначена $\Omega_0 = [(x, y): 0 < x < L_1, 0 < y < L_2]$, в якій $y = y_0$ рівень поверхні ґрунту (вісь Oy направлена знизу вгору, зазвичай покладемо $y_0 = 0$). [Тимошенко А. А. - Оптимальне точкове керування переносом маси у пористих середовищах]

Надалі вважатимемо, що дифузійність можна представити як $K_x(\omega) = k_1 k(\omega), K_y(\omega) = k_2 k(\omega)$, де k_1, k_2 — коефіцієнти водопроникності вздовж осей Ox, Oy , а $k(\omega)$ — проводимість вологи ґрунтом. Щоб зменшити громіздкість подальших формул, покладемо $k_1 = k_2, L_1 = L_2 = 1$.

Робимо наступні заміни:

$$\beta_2 = 0,5\ell, \beta_1 = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \beta_2, \alpha = \frac{\langle D_y \rangle \beta_2^2}{T},$$

$$\xi = \frac{\beta_1}{L_1} x, \zeta = \frac{\beta_2}{L_2} y, \tau = \alpha t.$$

Де $\langle D_y \rangle$ — середнє значення D_y .

Застосуємо перетворення Кірхгофа [16] модифіковане для двовимірної задачі:

$$\Theta = \frac{4\pi k_1}{Q^* k_2 \beta_2} \int_{\omega_0}^{\omega} D_y(\omega) d\omega$$

де введено масштабний множник Q^* для обезрозмірення потужності джерела. Припустимо аналогічно [16], що:

- $\Theta(\omega)$ та $K_y(\omega)$ є лінійно залежними, тобто $D_y^{-1}(\omega) \frac{dK_y(\omega)}{d\omega} = \ell = const$;
- $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{Q^* k_2 \beta_2}{4\pi k_1} \frac{1}{D_y(\omega)} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \cong \frac{k_2 \beta_2^3 Q^*}{4\pi k_1} \frac{\partial \Theta}{\partial t}$

Для безрозмірної потужності введемо позначення: $q_j = \frac{Q_j}{Q^*}$, Ω, Γ — безрозмірні аналоги областей Ω_0, Γ_0 , де Γ_0 — границя області Ω_0 .

Твердження. У такому випадку початково-крайова задача (1), (2) зводиться до вигляду [110]:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} +$$

$$+4\pi \sum_{j=1}^N q_j(\tau) \delta(\xi - \xi_j) \times \delta(\zeta - \zeta_j), (\xi, \zeta, \tau) \in \Omega \times (0,1], \quad (3)$$

$$\Theta|_{\xi=0} = 0; \Theta|_{\xi=1} = 0;$$

$$\Theta|_{\zeta=0} = 0; \Theta|_{\zeta=1} = 0;$$

$$(\xi, \zeta, \tau) \in \Gamma \times [0,1], \quad (4)$$

$$\Theta(\xi, \zeta, 0) = 0, (\xi, \zeta) \in \Omega.$$

Твердження доведено у [Тимошенко А. А. - Оптимальне точкове керування переносом маси у пористих середовищах].

2.3 Розв'язок задачі

Ітераційний алгоритм [8], [3], [9] складається з трьох етапів:

1) Розв'язок прямої задачі:

$$\frac{\partial \Theta^n}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta^n}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Theta^n}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial \Theta^n}{\partial \zeta} = 4\pi \sum_{j=1}^N q_j(\tau) \delta(\xi - \xi_j) \delta(\zeta - \zeta_j),$$

$$0 < \tau \leq 1, \Theta^n(\xi, \zeta, 0) = 0; \quad (14)$$

2) Розв'язок спряженої задачі:

$$-\frac{\partial \Psi^n}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Psi^n}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Psi^n}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Psi^n}{\partial \zeta} = 2(\Theta^n - \varphi(\tau)),$$

$$0 \leq \tau < 1, \Psi^n(\xi, \zeta, 1) = 0; \quad (15)$$

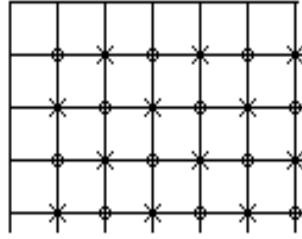
3) Обчислення нового наближеного значення інтенсивності джерел:

$$\frac{Q^{k+1} - Q^k}{\tilde{\tau}_{k+1}} + \Psi^n + \alpha Q^k = 0, k = 0, 1, \dots$$

В розв'язку будемо використовувати ДС-алгоритм.

На області G вводиться рівномірна сітка

$\Omega_{\square\tau} = \{(\xi_i, \zeta_j, \tau_k) | \xi_i = i \square_x, \zeta_j = -j \square_z, \tau_k = n\tau, i = \overline{0, M_1}, j = \overline{0, M_2}, n = \overline{0, N}\}$, яку розбиваємо на дві підмножини (рис. 2.3.1).

Рисунок 2.3.1– Сітка $\Omega_{\square\tau}$

$$\Omega_{\square\tau}^{(1)} = \{(\xi_i, \zeta_j, \tau_k) | i + j + k - \text{парне}\} (\times)$$

$$\text{та } \Omega_{\square\tau}^{(2)} = \{(\xi_i, \zeta_j, \tau_k) | i + j + k - \text{непарне}\} (\circ).$$

Задамо на сітці початкові:

$$\theta(\xi, \zeta, 0) = 0;$$

та граничні умови:

$$\theta(\xi, 0, \tau) = 0; \theta(0, \zeta, \tau) = 0;$$

$$\theta(\xi, 1, \tau) = 0; \theta(1, \zeta, \tau) = 0;$$

Для знаходження розв'язку θ_{ij}^{n+1} на кожному наступному $(2m + 1)$ часовому кроці у внутрішніх вузлах використовуємо схеми з центральними різницями: спочатку знаходимо розв'язки θ_{ij}^{n+1} у вузлах $(\xi_i, \zeta_j, \tau_k) \in \Omega_{\square\tau}^{(1)}$ за явною різницевою схемою, далі у вузлах $(\xi_i, \zeta_j, \tau_k) \in \Omega_{\square\tau}^{(2)}$ за неявною:

Для знаходження розв'язку θ_{ij}^{n+1} на кожному наступному $(2m + 2)$ часовому спочатку знаходимо розв'язки θ_{ij}^{n+1} у вузлах $(\xi_i, \zeta_j, \tau_k) \in \Omega_{\square\tau}^{(2)}$ за явною різницевою схемою, далі у вузлах $(\xi_i, \zeta_j, \tau_k) \in \Omega_{\square\tau}^{(1)}$ за неявною:

1) Центральна частина

Постановка для центру області

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 4\pi q.$$

Для тих вузлів, для яких буде застосовуватися явний метод, різницевий аналог подано у вигляді

$$\frac{\Theta_{ij}^{n+1} - \Theta_{ij}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Theta_{i+1j}^n - 2\Theta_{ij}^n + \Theta_{i-1j}^n}{h^2} + \frac{\Theta_{ij+1}^n - 2\Theta_{ij}^n + \Theta_{ij-1}^n}{h^2} - 2 \frac{\Theta_{ij+1}^n - \Theta_{ij-1}^n}{2h} + 4\pi\tilde{q}.$$

У результаті отримано співвідношення

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}^{n+1} = \Theta_{ij}^n + \frac{\tilde{\tau}}{h^2} (\Theta_{i+1j}^n + \Theta_{i-1j}^n + \Theta_{ij+1}^n + \Theta_{ij-1}^n - 4\Theta_{ij}^n) - \\ - \frac{\tilde{\tau}}{h} (\Theta_{ij+1}^n - \Theta_{ij-1}^n) + 4\pi\tilde{\tau}\tilde{q}. \end{aligned}$$

Далі у вузлах (ξ_i, ζ_j, τ_k) , для яких буде застосовуватися неявний метод, різницева схема наступна:

$$\frac{\Theta_{ij}^{n+1} - \Theta_{ij}^n}{\tilde{\tau}} = L(\Theta_{ij}^{n+1})$$

$$\frac{\Theta_{ij}^{n+1} - \Theta_{ij}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Theta_{i+1j}^{n+1} - 2\Theta_{ij}^{n+1} + \Theta_{i-1j}^{n+1}}{h^2} + \frac{\Theta_{ij+1}^{n+1} - 2\Theta_{ij}^{n+1} + \Theta_{ij-1}^{n+1}}{h^2} - 2 \frac{\Theta_{ij+1}^{n+1} - \Theta_{ij-1}^{n+1}}{2h} + 4\pi\tilde{q}.$$

Згрупуємо:

$$\Theta_{ij}^{n+1} * \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{1}{h^2} (\Theta_{i+1j}^{n+1} + \Theta_{i-1j}^{n+1} + \Theta_{ij+1}^{n+1} + \Theta_{ij-1}^{n+1}) - 2 \frac{\Theta_{ij+1}^{n+1} - \Theta_{ij-1}^{n+1}}{2h} + 4\pi\tilde{q}.$$

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{i+1j}^{n+1} + \Theta_{i-1j}^{n+1} + \Theta_{ij+1}^{n+1} + \Theta_{ij-1}^{n+1}) - \left(\frac{\tilde{\tau}h}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \right) (\Theta_{ij+1}^{n+1} - \Theta_{ij-1}^{n+1}) \\ + \frac{4\pi\tilde{q}\tilde{\tau}h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \end{aligned}$$

Оскільки вузол Θ_{ij}^{n+1} з множини $\Omega_{h\tau}^{(2)}$ (на непарному часовому кроці, наприклад), то вузли $\Theta_{i+1j}^{n+1}, \Theta_{i-1j}^{n+1}, \Theta_{ij+1}^{n+1}, \Theta_{ij-1}^{n+1}$ належать множині $\Omega_{h\tau}^{(1)}$, отже їх значення відомі. Аналогічно будуть відомими вузли і на парному часовому кроці, які будуть знаходитися за явною схемою.

Далі запишемо різницеві схеми згідно комбінаціям центрального рівняння та граничних умов для інших випадків.

2) Верхня границя $\zeta = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}.$$

Як і раніше, спочатку знаходимо розв'язки θ_{i0}^{n+1} у вузлах $(\xi_i, \zeta_j, \tau_k) \in \Omega_{\square\tau}^{(1)}$ за явною різницевою схемою (на непарному часовому кроці), далі у вузлах $(\xi_i, \zeta_j, \tau_k) \in \Omega_{\square\tau}^{(2)}$ за неявною:

$$\frac{\Theta_{i0}^{n+1} - \Theta_{i0}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Theta_{i+10}^n - 2\Theta_{i0}^n + \Theta_{i-10}^n}{h^2} + \frac{2}{h} \frac{\Theta_{i1}^n - \Theta_{i0}^n}{h}$$

$\Theta_{i0}^{n+1} = \Theta_{i0}^n + \frac{\tilde{\tau}}{h^2} (\Theta_{i+10}^n + \Theta_{i-10}^n - 4\Theta_{i0}^n + 2\Theta_{i1}^n)$ – явні коефіцієнти, які знаходяться у першу чергу і:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{i0}^{n+1} - \Theta_{i0}^n}{\tilde{\tau}} &= \frac{\Theta_{i+10}^{n+1} - 2\Theta_{i0}^{n+1} + \Theta_{i-10}^{n+1}}{h^2} + \frac{2}{h} \frac{\Theta_{i1}^{n+1} - \Theta_{i0}^{n+1}}{h} \\ \Theta_{i0}^{n+1} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) &= \frac{\Theta_{i+10}^{n+1} + \Theta_{i-10}^{n+1} + 2\Theta_{i1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\Theta_{i0}^n}{\tilde{\tau}} \\ \Theta_{i0}^{n+1} &= \tilde{\tau} \frac{(h^2 + 4\tilde{\tau})\Theta_{i+10}^{n+1} + \Theta_{i-10}^{n+1} + 2\Theta_{i1}^{n+1}}{(h^2 + 4\tilde{\tau})} + \frac{h^2\Theta_{i0}^n}{(h^2 + 4\tilde{\tau})} \end{aligned}$$

Коефіцієнти з $\Omega_{\square\tau}^{(2)}$ які знаходяться при підстановці знайдених значень з $\Omega_{\square\tau}^{(1)}$

Продовжимо побудову аналогічно для інших граничних випадків, але вже без коментарів.

3) Нижня границя $\zeta = 1$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\Theta_{iM_2}^{n+1} - \Theta_{iM_2}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Theta_{i+1M_2}^n - 2\Theta_{iM_2}^n + \Theta_{i-1M_2}^n}{h^2} - \frac{2}{h} \frac{\Theta_{iM_2}^n - \Theta_{iM_2-1}^n}{h}$$

$\Theta_{iM_2}^{n+1} = \Theta_{iM_2}^n + \frac{\tilde{\tau}}{h^2} (\Theta_{i+1M_2}^n + \Theta_{i-1M_2}^n - 4\Theta_{iM_2}^n + 2\Theta_{iM_2-1}^n)$ – явні значення

$$\frac{\Theta_{iM_2}^{n+1} - \Theta_{iM_2}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Theta_{i+1M_2}^{n+1} - 2\Theta_{iM_2}^{n+1} + \Theta_{i-1M_2}^{n+1}}{h^2} - \frac{2}{h} \frac{\Theta_{iM_2}^{n+1} - \Theta_{iM_2-1}^{n+1}}{h}$$

$$\Theta_{iM_2}^{n+1} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Theta_{i+1M_2}^{n+1} + \Theta_{i-1M_2}^{n+1} + 2\Theta_{iM_2-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\Theta_{iM_2}^n}{\tilde{\tau}}$$

$$\Theta_{iM_2}^{n+1} = \tilde{\tau} \frac{\Theta_{i+1M_2}^{n+1} + \Theta_{i-1M_2}^{n+1} + 2\Theta_{iM_2-1}^{n+1}}{(h^2 + 4\tilde{\tau})} + \frac{h^2 \Theta_{iM_2}^n}{(h^2 + 4\tilde{\tau})} - \text{неявні значення}$$

4) Ліва границя $\xi = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}.$$

$$\frac{\Theta_{0j}^{n+1} - \Theta_{0j}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Theta_{1j}^n - \Theta_{0j}^n}{h} + \frac{\Theta_{0j+1}^n - 2\Theta_{0j}^n + \Theta_{0j-1}^n}{h^2} - 2 \frac{\Theta_{0j+1}^n - \Theta_{0j-1}^n}{2h}$$

$$\Theta_{0j}^{n+1} = \Theta_{0j}^n + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Theta_{1j}^n - \Theta_{0j}^n) + \frac{\tilde{\tau}}{h^2} (\Theta_{0j+1}^n + \Theta_{0j-1}^n - 2\Theta_{0j}^n) - \frac{\tilde{\tau}}{h} (\Theta_{0j+1}^n - \Theta_{0j-1}^n) -$$

явні значення

$$\frac{\Theta_{0j}^{n+1} - \Theta_{0j}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Theta_{1j}^{n+1} - \Theta_{0j}^{n+1}}{h} + \frac{\Theta_{0j+1}^{n+1} - 2\Theta_{0j}^{n+1} + \Theta_{0j-1}^{n+1}}{h^2} - 2 \frac{\Theta_{0j+1}^{n+1} - \Theta_{0j-1}^{n+1}}{2h}$$

$$\Theta_{0j}^{n+1} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Theta_{0j}^n}{\tilde{\tau}} + \frac{1}{h^2} (2\Theta_{1j}^{n+1} + 2\Theta_{0j-1}^{n+1})$$

$$\Theta_{0j}^{n+1} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{h^2 \Theta_{0j}^n}{(h^2 + 4\tilde{\tau})} + \frac{\tilde{\tau}}{(h^2 + 4\tilde{\tau})} (2\Theta_{1j}^{n+1} + 2\Theta_{0j-1}^{n+1}) - \text{неявні значення}$$

5) Права границя $\xi = 1$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}.$$

$$\frac{\Theta_{M_1j}^{n+1} - \Theta_{M_1j}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1j}^n - \Theta_{M_1-1j}^n}{h} + \frac{\Theta_{M_1j+1}^n - 2\Theta_{M_1j}^n + \Theta_{M_1j-1}^n}{h^2} - 2 \frac{\Theta_{M_1j+1}^n - \Theta_{M_1j-1}^n}{2h}$$

$$\Theta_{M_1j}^{n+1} = \Theta_{M_1j}^n + \tilde{\tau} \frac{(2\Theta_{M_1-1j}^n - 4\Theta_{M_1j}^n + \Theta_{M_1j+1}^n + \Theta_{M_1j-1}^n)}{h^2} - \tilde{\tau} \frac{\Theta_{M_1j+1}^n - \Theta_{M_1j-1}^n}{h} - \text{явні}$$

значення

$$\frac{\Theta_{M_1j}^{n+1} - \Theta_{M_1j}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1j}^{n+1} - \Theta_{M_1-1j}^{n+1}}{h} + \frac{\Theta_{M_1j+1}^{n+1} - 2\Theta_{M_1j}^{n+1} + \Theta_{M_1j-1}^{n+1}}{h^2} - 2 \frac{\Theta_{M_1j+1}^{n+1} - \Theta_{M_1j-1}^{n+1}}{2h}$$

$$\Theta_{M_1j}^{n+1} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Theta_{M_1j}^n}{\tilde{\tau}} + \frac{1}{h^2} (2\Theta_{M_1-1j}^{n+1} + \Theta_{M_1j+1}^{n+1} + \Theta_{M_1j-1}^{n+1}) + \frac{\Theta_{M_1j+1}^{n+1} - \Theta_{M_1j-1}^{n+1}}{h}$$

$$\Theta_{M_1j}^{n+1} = \frac{h^2 \Theta_{M_1j}^n}{(h^2 + 4\tilde{\tau})} + \frac{\tilde{\tau}}{(h^2 + 4\tilde{\tau})} (2\Theta_{M_1-1j}^{n+1} + \Theta_{M_1j+1}^{n+1} + \Theta_{M_1j-1}^{n+1}) + \tilde{\tau} h \frac{\Theta_{M_1j+1}^{n+1} - \Theta_{M_1j-1}^{n+1}}{(h^2 + 4\tilde{\tau})} -$$

неявні значення

6) Кут $\xi = 0, \zeta = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}.$$

$$\frac{\Theta_{00}^{n+1} - \Theta_{00}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Theta_{10}^n - \Theta_{00}^n}{h} + \frac{2}{h} \frac{\Theta_{01}^n - \Theta_{00}^n}{h}$$

$$\Theta_{00}^{n+1} = \Theta_{00}^n + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Theta_{01}^n + \Theta_{10}^n - 2\Theta_{00}^n) - \text{явні значення}$$

$$\frac{\Theta_{00}^{n+1} - \Theta_{00}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Theta_{10}^{n+1} - \Theta_{00}^{n+1}}{h} + \frac{2}{h} \frac{\Theta_{01}^{n+1} - \Theta_{00}^{n+1}}{h}$$

$$\Theta_{00}^{n+1} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Theta_{00}^n}{\tilde{\tau}} + \frac{2}{h^2} (\Theta_{10}^{n+1} + \Theta_{01}^{n+1})$$

$$\Theta_{00}^{n+1} = \frac{h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \Theta_{00}^n + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{10}^{n+1} + \Theta_{01}^{n+1}) - \text{неявні значення}$$

7) Кут $\xi = 1, \zeta = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}.$$

$$\frac{\Theta_{M_1 0}^{n+1} - \Theta_{M_1 0}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1 0}^n - \Theta_{M_1 -10}^n}{h} + \frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1 1}^n - \Theta_{M_1 0}^n}{h}$$

$$\Theta_{M_1 0}^{n+1} = \Theta_{M_1 0}^n + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Theta_{M_1 -10}^n + \Theta_{M_1 1}^n - 2\Theta_{M_1 0}^n) - \text{явні значення}$$

$$\frac{\Theta_{M_1 0}^{n+1} - \Theta_{M_1 0}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1 0}^{n+1} - \Theta_{M_1 -10}^{n+1}}{h} + \frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1 1}^{n+1} - \Theta_{M_1 0}^{n+1}}{h}$$

$$\Theta_{M_1 0}^{n+1} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Theta_{M_1 0}^n}{\tilde{\tau}} + \frac{2}{h^2} (\Theta_{M_1 1}^{n+1} + \Theta_{M_1 -10}^{n+1})$$

$$\Theta_{M_1 0}^{n+1} = \frac{h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \Theta_{M_1 0}^n + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{M_1 1}^{n+1} + \Theta_{M_1 -10}^{n+1}) - \text{неявні значення}$$

8) Кут $\xi = 0, \zeta = 1$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}.$$

$$\frac{\Theta_{0M_2}^{n+1} - \Theta_{0M_2}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Theta_{1M_2}^n - \Theta_{0M_2}^n}{h} - \frac{2}{h} \frac{\Theta_{0M_2}^n - \Theta_{0M_2-1}^n}{h}$$

$\Theta_{0M_2}^{n+1} = \Theta_{0M_2}^n + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Theta_{0M_2-1}^n + \Theta_{1M_2}^n - 2\Theta_{0M_2}^n)$ - явні значення

$$\frac{\Theta_{0M_2}^{n+1} - \Theta_{0M_2}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Theta_{1M_2}^{n+1} - \Theta_{0M_2}^{n+1}}{h} - \frac{2}{h} \frac{\Theta_{0M_2}^{n+1} - \Theta_{0M_2-1}^{n+1}}{h}$$

$$\Theta_{0M_2}^{n+1} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Theta_{0M_2}^n}{\tilde{\tau}} + \frac{2}{h^2} (\Theta_{1M_2}^{n+1} + \Theta_{0M_2-1}^{n+1})$$

$\Theta_{0M_2}^{n+1} = \frac{h^2}{h^2+4\tilde{\tau}} \Theta_{0M_2}^n + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2+4\tilde{\tau}} (\Theta_{1M_2}^{n+1} + \Theta_{0M_2-1}^{n+1})$ - неявні значення

9) Кут $\xi = 1, \zeta = 1$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \frac{2}{h} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}.$$

$$\frac{\Theta_{M_1M_2}^{n+1} - \Theta_{M_1M_2}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1M_2}^n - \Theta_{M_1-1M_2}^n}{h} - \frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1M_2}^n - \Theta_{M_1M_2-1}^n}{h}$$

$\Theta_{M_1M_2}^{n+1} = \Theta_{M_1M_2}^n + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Theta_{M_1M_2-1}^n + \Theta_{M_1-1M_2}^n - 2\Theta_{M_1M_2}^n)$ - явні значення

$$\frac{\Theta_{M_1M_2}^{n+1} - \Theta_{M_1M_2}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1M_2}^{n+1} - \Theta_{M_1-1M_2}^{n+1}}{h} - \frac{2}{h} \frac{\Theta_{M_1M_2}^{n+1} - \Theta_{M_1M_2-1}^{n+1}}{h}$$

$$\Theta_{M_1M_2}^{n+1} \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Theta_{M_1M_2}^n}{\tilde{\tau}} + \frac{2}{h^2} (\Theta_{M_1-1M_2}^{n+1} + \Theta_{M_1M_2-1}^{n+1})$$

$\Theta_{M_1M_2}^{n+1} = \frac{h^2}{h^2+4\tilde{\tau}} \Theta_{M_1M_2}^n + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2+4\tilde{\tau}} (\Theta_{M_1-1M_2}^{n+1} + \Theta_{M_1M_2-1}^{n+1})$ - неявні значення

Спряжена система рівнянь будується у зворотній бік з умови рівності нулю на останньому часовому кроці.

1) Центральна частина

Постановка для центру області

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + 2(\Theta - \tilde{\varphi}(\xi, \zeta, \tau)).$$

Різницевий аналог має вигляд

$$-\frac{\Psi_{ij}^{n+1} - \Psi_{ij}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Psi_{i+1j}^{n+1} - 2\Psi_{ij}^{n+1} + \Psi_{i-1j}^{n+1}}{h^2} + \frac{\Psi_{ij+1}^{n+1} - 2\Psi_{ij}^{n+1} + \Psi_{ij-1}^{n+1}}{h^2} + 2 \frac{\Psi_{ij+1}^{n+1} - \Psi_{ij-1}^{n+1}}{2h} + 2(\Theta_{ij} - \tilde{\varphi}_{ij}(\tau)).$$

У результаті отримано співвідношення

$$\Psi_{ij}^n = \Psi_{ij}^{n+1} + \frac{\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{i+1j}^{n+1} + \Psi_{i-1j}^{n+1} + \Psi_{ij+1}^{n+1} + \Psi_{ij-1}^{n+1} - 4\Psi_{ij}^{n+1}) -$$

$-\frac{\tilde{\tau}}{h}(\Psi_{ij+1}^{n+1} - \Psi_{ij-1}^{n+1}) + 2\tau(\Theta_{ij} - \tilde{\varphi}_{ij}(\tau))$ - таким чином обраховуємо вузли з множини $\Omega_{\square\tau}^{(1)}$ на непарному часовому кроці

Тепер побудуємо неявну схему.

Далі запишемо різницеві схеми згідно комбінаціям центрального рівняння та граничних умов для інших випадків.

$$-\frac{\Psi_{ij}^{n+1} - \Psi_{ij}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Psi_{i+1j}^n - 2\Psi_{ij}^n + \Psi_{i-1j}^n}{h^2} + \frac{\Psi_{ij+1}^n - 2\Psi_{ij}^n + \Psi_{ij-1}^n}{h^2} + 2\frac{\Psi_{ij+1}^n - \Psi_{ij-1}^n}{2h} + 2(\Theta_{ij} - \varphi_{ij}\tau).$$

$$\Psi_{ij}^n \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Psi_{ij}^{n+1}}{\tilde{\tau}} + \frac{1}{h^2} (\Psi_{i+1j}^n + \Psi_{i-1j}^n + \Psi_{ij+1}^n + \Psi_{ij-1}^n) + \frac{\Psi_{ij+1}^n - \Psi_{ij-1}^n}{h} + 2(\Theta_{ij} - \tilde{\varphi}_{ij}(\tau))$$

$$\Psi_{ij}^n = \frac{h^2 \Psi_{ij}^{n+1}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} + \frac{\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Psi_{i+1j}^n + \Psi_{i-1j}^n + \Psi_{ij+1}^n + \Psi_{ij-1}^n) + \frac{\tilde{\tau}h}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Psi_{ij+1}^n - \Psi_{ij-1}^n) + 2\frac{\tilde{\tau}h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{ij} - \tilde{\varphi}_{ij}(\tau))$$

-формула обрахунку вузлів з множини $\Omega_{\square\tau}^{(2)}$ (на непарному часовому кроці). На парному знаходимо навпаки - явною схемою для $\Omega_{\square\tau}^{(2)}$, неявною - для $\Omega_{\square\tau}^{(1)}$

2) Верхня границя $\zeta = 0$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + 2(\Theta - \tilde{\varphi}(\xi, \eta, \zeta, \tau)).$$

$$-\frac{\Psi_{i0}^{n+1} - \Psi_{i0}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Psi_{i+10}^{n+1} - 2\Psi_{i0}^{n+1} + \Psi_{i-10}^{n+1}}{h^2} + \frac{2}{h} \frac{\Psi_{i1}^{n+1} - \Psi_{i0}^{n+1}}{h} + 2(\Theta_{i0} - \tilde{\varphi}_{i0}(\tau)).$$

$$\Psi_{i0}^n = \Psi_{i0}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{i1}^{n+1} - \Psi_{i0}^{n+1}) + \frac{\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{i+10}^{n+1} + \Psi_{i-10}^{n+1} - 2\Psi_{i0}^{n+1}) + 2\tau(\Theta_{i0} - \tilde{\varphi}_{i0}(\tau))$$

- явні значення

$$-\frac{\Psi_{i0}^{n+1} - \Psi_{i0}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Psi_{i+10}^n - 2\Psi_{i0}^n + \Psi_{i-10}^n}{h^2} + \frac{2}{h} \frac{\Psi_{i1}^n - \Psi_{i0}^n}{h} + 2(\Theta_{i0} - \tilde{\varphi}_{i0}(\tau)).$$

$$\Psi_{i0}^n \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{1}{h^2} (\Psi_{i+10}^n + \Psi_{i-10}^n + 2\Psi_{i1}^n) + 2(\Theta_{i0} - \tilde{\varphi}_{i0}(\tau))$$

$$\Psi_{i0}^n = \frac{\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Psi_{i+10}^n + \Psi_{i-10}^n + 2\Psi_{i1}^n) + 2\frac{\tilde{\tau}h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{i0} - \tilde{\varphi}_{i0}(\tau))$$

-неявні значення

3) Нижня границя $\zeta = 1$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + 2(\Theta - \tilde{\varphi}(\xi, \zeta, \tau)).$$

$$-\frac{\Psi_{iM_2}^{n+1} - \Psi_{iM_2}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Psi_{i+1M_2}^{n+1} - 2\Psi_{iM_2}^{n+1} + \Psi_{i-1M_2}^{n+1}}{h^2} - \frac{2}{h} \frac{\Psi_{iM_2}^{n+1} - \Psi_{iM_2-1}^{n+1}}{h} + 2(\Theta_{iM_2} - \tilde{\varphi}_{iM_2}(\tau))$$

$$\Psi_{iM_2}^{n+1} = \Psi_{iM_2}^n - \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{iM_2}^{n+1} - \Psi_{iM_2-1}^{n+1}) + \frac{\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{i+1M_2}^{n+1} + \Psi_{i-1M_2}^{n+1} - 2\Psi_{iM_2}^{n+1}) + 2\tau (\Theta_{iM_2} - \tilde{\varphi}_{iM_2}(\tau)) - \text{явні значення}$$

$$-\frac{\Psi_{iM_2}^{n+1} - \Psi_{iM_2}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{\Psi_{i+1M_2}^n - 2\Psi_{iM_2}^n + \Psi_{i-1M_2}^n}{h^2} - \frac{2}{h} \frac{\Psi_{iM_2}^n - \Psi_{iM_2-1}^n}{h} + 2(\Theta_{iM_2} - \tilde{\varphi}_{iM_2}(\tau))$$

$$\Psi_{iM_2}^n \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Psi_{iM_2}^{n+1}}{\tilde{\tau}} + \frac{1}{h^2} (\Psi_{i+1M_2}^n + \Psi_{i-1M_2}^n + 2\Psi_{iM_2-1}^n) + 2(\Theta_{iM_2} - \tilde{\varphi}_{iM_2}(\tau))$$

$$\Psi_{iM_2}^n = \frac{h^2 \Psi_{iM_2}^{n+1}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} + \frac{\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Psi_{i+1M_2}^n + \Psi_{i-1M_2}^n + 2\Psi_{iM_2-1}^n) + 2 \frac{\tilde{\tau} h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{iM_2} - \varphi_{iM_2} \tau) - \text{неявні значення}$$

4) Ліва границя $\xi = 0$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + 2(\Theta - \tilde{\varphi}(\xi, \eta, \zeta, \tau)).$$

$$-\frac{\Psi_{0j}^{n+1} - \Psi_{0j}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Psi_{1j}^{n+1} - \Psi_{0j}^{n+1}}{h} + \frac{\Psi_{0j+1}^{n+1} - 2\Psi_{0j}^{n+1} + \Psi_{0j-1}^{n+1}}{h^2} + 2 \frac{\Psi_{0j+1}^{n+1} - \Psi_{0j-1}^{n+1}}{2h} + 2(\Theta_{0j} - \varphi_{0j} \tau)$$

$$\Psi_{0j}^n = \Psi_{0j}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{1j}^{n+1} - \Psi_{0j}^{n+1}) + \frac{\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{0j+1}^{n+1} + \Psi_{0j-1}^{n+1} - 2\Psi_{0j}^{n+1}) + \frac{\tilde{\tau}}{h} (\Psi_{0j+1}^{n+1} - \Psi_{0j-1}^{n+1}) + 2\tau (\Theta_{0j} - \tilde{\varphi}_{0j}(\tau)) - \text{явні значення}$$

$$-\frac{\Psi_{0j}^{n+1} - \Psi_{0j}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Psi_{1j}^n - \Psi_{0j}^n}{h} + \frac{\Psi_{0j+1}^n - 2\Psi_{0j}^n + \Psi_{0j-1}^n}{h^2} + 2 \frac{\Psi_{0j+1}^n - \Psi_{0j-1}^n}{2h} + 2(\Theta_{0j} - \tilde{\varphi}_{0j}(\tau))$$

$$\Psi_{0j}^n \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{1}{h^2} (2\Psi_{1j}^n + \Psi_{0j+1}^n + \Psi_{0j-1}^n) + \frac{\Psi_{0j+1}^n - \Psi_{0j-1}^n}{h} + 2(\Theta_{0j} - \tilde{\varphi}_{0j}(\tau))$$

$$\Psi_{0j}^n =$$

$$\frac{\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (2\Psi_{1j}^n + \Psi_{0j+1}^n + \Psi_{0j-1}^n) + \frac{\tilde{\tau} h}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Psi_{0j+1}^n - \Psi_{0j-1}^n) + 2 \frac{\tilde{\tau} h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{0j} - \varphi_{0j} \tau) - \text{неявні значення}$$

5) Права границя $\xi = 1$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} &= -\frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + 2(\Theta - \tilde{\varphi}(\xi, \zeta, \tau)) \\
-\frac{\Psi_{M_1 j}^{n+1} - \Psi_{M_1 j}^n}{\tilde{\tau}} &= -\frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 j}^{n+1} - \Psi_{M_1-1 j}^{n+1}}{h} + \frac{\Psi_{M_1 j+1}^{n+1} - 2\Psi_{M_1 j}^{n+1} + \Psi_{M_1 j-1}^{n+1}}{h^2} + 2 \frac{\Psi_{M_1 j+1}^{n+1} - \Psi_{M_1 j-1}^{n+1}}{2h} + \\
&+ 2(\Theta_{M_1 j} - \tilde{\varphi}_{M_1 j}(\tau)). \\
\Psi_{M_1 j}^n &= \Psi_{M_1 j}^{n+1} - \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{M_1 j}^{n+1} - \Psi_{M_1-1 j}^{n+1}) + \frac{\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{M_1 j+1}^{n+1} + \Psi_{M_1 j-1}^{n+1} - 2\Psi_{M_1 j}^{n+1}) + \\
&+ \frac{\tilde{\tau}}{h} (\Psi_{M_1 j+1}^{n+1} - \Psi_{M_1 j-1}^{n+1}) + 2\tau (\Theta_{M_1 j} - \tilde{\varphi}_{M_1 j}(\tau)). \text{ - явні значення} \\
-\frac{\Psi_{M_1 j}^{n+1} - \Psi_{M_1 j}^n}{\tilde{\tau}} &= -\frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 j}^n - \Psi_{M_1-1 j}^n}{h} + \frac{\Psi_{M_1 j+1}^n - 2\Psi_{M_1 j}^n + \Psi_{M_1 j-1}^n}{h^2} + 2 \frac{\Psi_{M_1 j+1}^n - \Psi_{M_1 j-1}^n}{2h} + \\
&+ 2(\Theta_{M_1 j} - \tilde{\varphi}_{M_1 j}(\tau)). \\
\Psi_{M_1 j}^n \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) &= \frac{\Psi_{M_1 j}^{n+1}}{\tilde{\tau}} + \frac{1}{h^2} (2\Psi_{M_1-1 j}^n + \Psi_{M_1 j+1}^n + \Psi_{M_1 j-1}^n) + \frac{\Psi_{M_1 j+1}^n - \Psi_{M_1 j-1}^n}{h} + \\
&2(\Theta_{M_1 j} - \tilde{\varphi}_{M_1 j}(\tau)) \\
\Psi_{M_1 j}^n &= \frac{h^2 \Psi_{M_1 j}^{n+1}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} + \frac{\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (2\Psi_{M_1-1 j}^n + \Psi_{M_1 j+1}^n + \Psi_{M_1 j-1}^n) + \frac{\tilde{\tau} h}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Psi_{M_1 j+1}^n - \\
&\Psi_{M_1 j-1}^n) + 2 \frac{\tilde{\tau} h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{M_1 j} - \tilde{\varphi}_{M_1 j}(\tau)) \text{ - неявна схема}
\end{aligned}$$

6) Кут $\xi = 0, \zeta = 0$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} &= \frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + 2(\Theta - \tilde{\varphi}(\xi, \zeta, \tau)). \\
-\frac{\Psi_{00}^{n+1} - \Psi_{00}^n}{\tilde{\tau}} &= \frac{2}{h} \frac{\Psi_{10}^{n+1} - \Psi_{00}^{n+1}}{h} + \frac{2}{h} \frac{\Psi_{01}^{n+1} - \Psi_{00}^{n+1}}{h} + 2(\Theta_{00} - \tilde{\varphi}_{00}(\tau)). \\
\Psi_{00}^n &= \Psi_{00}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{01}^{n+1} + \Psi_{10}^{n+1} - 2\Psi_{00}^{n+1}) + 2\tau (\Theta_{00} - \tilde{\varphi}_{00}(\tau)) \text{ - явна схема} \\
-\frac{\Psi_{00}^{n+1} - \Psi_{00}^n}{\tilde{\tau}} &= \frac{2}{h} \frac{\Psi_{10}^n - \Psi_{00}^n}{h} + \frac{2}{h} \frac{\Psi_{01}^n - \Psi_{00}^n}{h} + 2(\Theta_{00} - \tilde{\varphi}_{00}(\tau)) \\
\Psi_{00}^n \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) &= \frac{\Psi_{00}^{n+1}}{\tilde{\tau}} + \frac{2}{h^2} (\Psi_{10}^n + \Psi_{01}^n) + 2(\Theta_{00} - \tilde{\varphi}_{00}(\tau)) \\
\Psi_{00}^n &= \frac{h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \Psi_{00}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Psi_{10}^n + \Psi_{01}^n) + \frac{2\tilde{\tau} h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{00} - \tilde{\varphi}_{00}(\tau)) \text{ - неявна схема}
\end{aligned}$$

7) Кут $\xi = 1, \zeta = 0$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + 2(\Theta - \tilde{\varphi}(\xi, \eta, \zeta, \tau)).$$

$$-\frac{\Psi_{M_1 0}^{n+1} - \Psi_{M_1 0}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 0}^{n+1} - \Psi_{M_1 -1 0}^{n+1}}{h} + \frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 1}^{n+1} - \Psi_{M_1 0}^{n+1}}{h} + 2(\Theta_{M_1 0} - \tilde{\varphi}_{M_1 0}(\tau)).$$

$$\Psi_{M_1 0}^n = \Psi_{M_1 0}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{M_1 1}^{n+1} + \Psi_{M_1 -1 0}^{n+1} - 2\Psi_{M_1 0}^{n+1}) + 2\tau (\Theta_{M_1 0} - \tilde{\varphi}_{M_1 0}(\tau)). \quad - \text{ явна}$$

схема

$$-\frac{\Psi_{M_1 0}^{n+1} - \Psi_{M_1 0}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 0}^n - \Psi_{M_1 -1 0}^n}{h} + \frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 1}^n - \Psi_{M_1 0}^n}{h} + 2(\Theta_{M_1 0} - \tilde{\varphi}_{M_1 0}(\tau))$$

$$\Psi_{M_1 0}^n \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Psi_{M_1 0}^{n+1}}{\tilde{\tau}} + \frac{2}{h^2} (\Psi_{M_1 -1 0}^n + \Psi_{M_1 1}^n) + 2(\Theta_{M_1 0} - \tilde{\varphi}_{M_1 0}(\tau))$$

$$\Psi_{M_1 0}^n = \frac{h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \Psi_{M_1 0}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Psi_{M_1 -1 0}^n + \Psi_{M_1 1}^n) + \frac{2\tilde{\tau}h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{M_1 0} - \tilde{\varphi}_{M_1 0}(\tau)) \quad -$$

неявна схема

8) Кут $\xi = 0, \zeta = 1$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + 2(\Theta - \tilde{\varphi}(\xi, \zeta, \tau)).$$

$$-\frac{\Psi_{0M_2}^{n+1} - \Psi_{0M_2}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Psi_{1M_2}^{n+1} - \Psi_{0M_2}^{n+1}}{h} - \frac{2}{h} \frac{\Psi_{0M_2}^{n+1} - \Psi_{0M_2 -1}^{n+1}}{h} + 2(\Theta_{0M_2} - \tilde{\varphi}_{0M_2}(\tau)).$$

$$\Psi_{0M_2}^n = \Psi_{0M_2}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} (\Psi_{0M_2 -1}^{n+1} + \Psi_{1M_2}^{n+1} - 2\Psi_{0M_2}^{n+1}) + 2\tau (\Theta_{0M_2} - \tilde{\varphi}_{0M_2}(\tau)). \quad - \text{ явна}$$

схема

$$-\frac{\Psi_{0M_2}^{n+1} - \Psi_{0M_2}^n}{\tilde{\tau}} = \frac{2}{h} \frac{\Psi_{1M_2}^n - \Psi_{0M_2}^n}{h} - \frac{2}{h} \frac{\Psi_{0M_2}^n - \Psi_{0M_2 -1}^n}{h} + 2(\Theta_{0M_2} - \tilde{\varphi}_{0M_2}(\tau)).$$

$$\Psi_{0M_2}^n \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Psi_{0M_2}^{n+1}}{\tilde{\tau}} + \frac{2}{h^2} (\Psi_{1M_2}^n + \Psi_{0M_2 -1}^n) + 2(\Theta_{0M_2} - \tilde{\varphi}_{0M_2}(\tau))$$

$$\Psi_{0M_2}^n = \frac{h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \Psi_{0M_2}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Psi_{1M_2}^n + \Psi_{0M_2 -1}^n) + \frac{2\tilde{\tau}h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} (\Theta_{0M_2} - \tilde{\varphi}_{0M_2}(\tau)) \quad -$$

неявна схема

9) Кут $\xi = 1, \zeta = 1$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{2}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + 2(\Theta - \tilde{\varphi}(\xi, \zeta, \tau)).$$

$$-\frac{\Psi_{M_1 M_2}^{n+1} - \Psi_{M_1 M_2}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 M_2}^{n+1} - \Psi_{M_1 - 1 M_2}^{n+1}}{h} - \frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 M_2}^{n+1} - \Psi_{M_1 M_2 - 1}^{n+1}}{h} + 2 \left(\Theta_{M_1 M_2} - \right. \\ \left. \varphi M_1 M_2 \tau \right)$$

$$\Psi_{M_1 M_2}^n = \Psi_{M_1 M_2}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2} \left(\Psi_{M_1 M_2 - 1}^{n+1} + \Psi_{M_1 - 1 M_2}^{n+1} - 2\Psi_{M_1 M_2}^{n+1} \right) + 2\tau \left(\Theta_{M_1 M_2} - \right. \\ \left. \varphi M_1 M_2 \tau \right) - \text{явна схема}$$

$$-\frac{\Psi_{M_1 M_2}^{n+1} - \Psi_{M_1 M_2}^n}{\tilde{\tau}} = -\frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 M_2}^n - \Psi_{M_1 - 1 M_2}^n}{h} - \frac{2}{h} \frac{\Psi_{M_1 M_2}^n - \Psi_{M_1 M_2 - 1}^n}{h} + 2 \left(\Theta_{M_1 M_2} - \right. \\ \left. \varphi M_1 M_2 \tau \right)$$

$$\Psi_{M_1 M_2}^n \left(\frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{4}{h^2} \right) = \frac{\Psi_{0 M_2}^{n+1}}{\tilde{\tau}} + \frac{2}{h^2} \left(\Psi_{M_1 - 1 M_2}^n + \Psi_{M_1 M_2 - 1}^n \right) + 2 \left(\Theta_{M_1 M_2} - \tilde{\varphi}_{M_1 M_2}(\tau) \right)$$

$$\Psi_{M_1 M_2}^n = \frac{h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \Psi_{0 M_2}^{n+1} + \frac{2\tilde{\tau}}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \left(\Psi_{M_1 - 1 M_2}^n + \Psi_{M_1 M_2 - 1}^n \right) + \frac{2\tilde{\tau}h^2}{h^2 + 4\tilde{\tau}} \left(\Theta_{M_1 M_2} - \right. \\ \left. \varphi M_1 M_2 \tau \right) - \text{неявна схема}$$

ВИСНОВКИ

Основними чинниками які впливають на водопроникність ґрунту є температура, тиск, кількість пор, а також механічний склад речовини через яку проходить рідина.

В роботі розглянуто також теоретичну частину вологопереносу: як залежить водопроникність від механічного складу ґрунту, від чого залежить вологість у певних ділянках ґрунту, як класифікують воду у ґрунтах, які фізичні властивості приводять до рівняння Річардса-Клюта.

Пористі матеріали будуть пропускати рідину з різною інтенсивністю через такі відмінності як розмір частинок матеріалу, механічний склад, абсолютний розмір пор, а також такі умови, як температура і тиск.

Рідина у ґрунтах підрозділяється на два стани: вільну і зв'язану. Зв'язана вода характеризується аномально високими в'язкістю та густиною і не пересувається при слабкій зміні умов середовища. На відміну від неї, вільна вода слабо пов'язана із мінеральним скелетом ґрунту, в якому знаходиться. Виділяють три види вільної води – гравітаційна, капілярна та іммібілізована вода.

Також, при написанні було застосовано двокроково-симетризований алгоритм для розв'язання двовимірного випадку алгоритму пошуку точкових джерел у пористому середовищі. Для цього було написано різницеві схеми, які після розв'язання за даними граничними та початковими умовами, дадуть відповідь, як знайти наближення положення точкових джерел у просторі.

Для подальшого розвитку теми можна дослідити швидкість збіжності алгоритму знаходження точкових джерел з застосуванням ДС-алгоритму, реалізувати алгоритм на ЕВМ та подивитися на практичні дані. Також можна порівняти швидкодію і ефективність алгоритму описаного в цій роботі з алгоритмом описаним в роботі Тимошенко А.А. «Оптимальне точкове керування переносом маси у пористих середовищах».

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ

1. Ляшко, С.І., Ключин, Д.А., Тимошенко, А.А. Оптимальне керування інтенсивністю занурених точкових джерел води у ненасиченому пористому середовищі. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* 2019. 12:13-18. С. 13–18. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.12.013>.
2. Ляшко С.И., Ключин Д.А., Тимошенко А.А., Ляшко Н.И., Бондар Е.С. Оптимальное управление интенсивностью точечных источников воды в ненасыщенной пористой среде. *Проблемы управления и информатики.* 2019. № 4. с. 26–35.
3. Тимошенко А.А. Оптимальне керування двовимірним рівнянням Річардса-Клюта. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2019. № 2 (131). С. 39–48.
4. Наукова електронна бібліотека періодичних видань НАН України. Оптимальне керування інтенсивністю занурених точкових джерел води у ненасиченому пористому середовищі [Електронний ресурс]. Режим доступу до ресурсу: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/162683>
5. Шкварук М.М., Делеменчук М.І. Грунтознавство. – К.: Вища школа, 1976. – 320 с.
6. <https://eos.com/ru/blog/typy-i-vidy-pochv/> Типы Почв И Их Влияние На Урожайность Полей
7. Мироненко В. А. Динамика подземных вод – Издательство МГГУ – 520 с.
8. Nikolaevskaya, E.A., Khimich, A.N., Chistyakova, T.V. Solution of linear algebraic equations by gauss method. *Studies in Computational Intelligence.* 2012. Vol. 399. P. 31–44.

9. Наукова електронна бібліотека періодичних видань НАН України.

Оптимальне керування інтенсивністю занурених точкових джерел води у ненасиченому пористому середовищі [Електронний ресурс]. Режим доступу до ресурсу: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/162683>.