

УДК 512.53+512.64

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.12>

В. М. Бондаренко¹, д.ф.-м.н., проф.
О. В. Зубарук², к. ф.-м. н.

**Про матричні зображення наднапівгруп
напівгрупи, породженої взаємно
анульовними 2-потентним і
2-нільпотентним елементами**

¹ Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3,
e-mail: vitalij.bond@gmail.com

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Воло-
димирська, 64/13,
e-mail: Sambrinka@ukr.net

V. M. Bondarenko¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.)
O. V. Zubaruk², Ph.D.

**On matrix representations of
oversemigroups of semigroups generated
by mutually annihilating 2-potent and
2-nilpotent elements**

¹Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
01024, Kyiv, Tereshchenkivska str., 3,
e-mail: vitalij.bond@gmail.com

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska str.,
e-mail: Sambrinka@ukr.net

Серед старих результатів є лише окремі результати про зображувальний тип напівгруп, а саме для скінченної цілком простої напівгрупи (І. С. Понізовський) та деяких напівгруп всіх перетворень скінченної множини (І. С. Понізовський, К. Рінгель); в цих роботах розглядався скінченний зображувальний тип. Якщо ж говорити про нові результати, та ще й для класів напівгруп, то варто відзначити роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (В. М. Бондаренко, О. М. Тертична), напівгруп, породжених потентними елементами (В. М. Бондаренко, О. В. Зубарук) і зображення прямих добутків симетричної напівгрупи другого степеня (В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин). Такі напівгрупи можуть мати як скінченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень.

В. М. Бондаренко і Я. В. Заціха описали зображувальні типи напівгруп третього порядку над полем і вказали канонічну форму матричних зображень для довільної напівгрупи скінченного зображувального типу. Ця стаття присвячена дослідженню аналогічних задач для наднапівгруп комутативних напівгруп.

Ключові слова: поле, наднапівгрупа, визначальні співвідношення, матричні зображення, ручна і дика напівгрупа, напівгрупа скінченного і нескінченного типів, канонічна форма.

Among the old results, there are only some results on the representation type of semigroups, namely, for a finite quite simple semigroup (I. S. Ponizovsky) and some semigroups of all transformations of a finite set (I. S. Ponizovsky, C. Ringel); these papers were discussed on finite representation type. If we talk about new results, and even for semigroup classes, then it should be noted works on representations of the semigroups generated by idempotents with partial zero multiplication (V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna), semigroups generated by the potential elements (V. M. Bondarenko, O. V. Zubaruk) and representations of direct products of the symmetric second-order semigroup (V. M. Bondarenko, E. M. Kostyshyn). Such semigroups can have both a finite and infinite representation type.

V. M. Bondarenko and Ja. V. Zatsikha described representation types of the third-order semigroups over a field, and indicate the canonical form of the matrix representations for any semigroup of finite representation type. This article is devoted to the study of similar problems for oversemigroups of commutative semigroups.

Key Words: field, oversemigroup, defining relations, matrix representations, tame and wild semigroup, semigroup of finite and infinite types, canonical form.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Петравчук А.П.

1. Вступ. Ця стаття присвячена матричним зображенням наднапівгруп спеціального вигляду, які зіставляються заданій напівгрупі

третього порядку.

Напівгрупи третього порядку вперше описав Т. Тамура в 1953 р. [1]. Г. Е. Форсайт в

1955 р. [2] отримав аналогічний результат за допомогою комп'ютерної програми. В обох статтях опис отримано з точністю до ізоморфізму та дуальності в термінах таблиць Келі. Напівгрупи третього порядку вивчалися пізніше в [3]–[6]. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп вказані в [6].

Згідно з результатами роботи [6] комутативні напівгрупи третього порядку, що не є ні циклічними, ні циклічними з приєднаним одиничним чи нульовим елементом (а вони не є цікавими), вичерпуються такими напівгрупами:

$$a) (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = 0, bc = cb = 0;$$

$$b) (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$$

$$c) (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$$

$$d) (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, c^3 = c, b^2 = c^2, bc = c, cb = c.$$

Всі виписані системи твірних є мінімальними. В круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках вказано мінімальну систему твірних. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних (якщо вони є) не виписуються.

Згідно з [6, Теорема 1] напівгрупи $b) - d)$ є напівгрупами скінченного зображувального типу над довільним полем K (тобто мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень), а напівгрупа $a)$ — ручною напівгрупою нескінченного зображувального типу (відносно означення ручних та диких матричних задач див. роботу Ю. А. Дрозда [7]).

У статті [8] авторами розглядалася напівгрупа $c)$, породжена двома взаємно анульовними ідемпотентами. Був визначений зображувальний тип для наднапівгруп такої напівгрупи, які будуються природним чином по визначальним співвідношенням. У цій статті аналогічний результат отримано для напівгрупи $b)$, породженої взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами, яку позначаємо через S .

Позначимо визначальні співвідношення $b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0, cb = 0$ відповідно через $(b), (c), (bc), (cb)$ і введемо наступні напівгрупи:

$$S^{(b)} := S \setminus (b) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$$

$$S^{(c)} := S \setminus (c) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, bc = 0, cb = 0;$$

$$S^{(bc)} := S \setminus (bc) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, cb = 0;$$

$$S^{(cb)} := S \setminus (cb) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0.$$

Покладемо

$$S^{(x,y)} := S \setminus \{(x), (y)\} \text{ для } x, y \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}, x \neq y;$$

$$S^{(x,y,z)} := S \setminus \{(x), (y), (z)\} \text{ для } x, y, z \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}, x \neq y, x \neq z, y \neq z.$$

Очевидно, що при перестановці x, y, z напівгрупи $S^{(x,y)}$ і $S^{(x,y,z)}$ не змінюються. Введені таким чином напівгрупи для напівгрупи S мають фактор-напівгрупу, ізоморфну S , тобто є наднапівгрупами напівгрупи S .

Сформулюємо основний результат цієї статті.

Всі матричні зображення розглядаються над довільним фіксованим полем K .

Теорема 1. Для довільного поля K мають місце наступні твердження.

1) $S^{(x)}$ — напівгрупа скінченного зображувального типу для $x \in \{(bc), (cb)\}$;

2) $S^{(x)}$ — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для $x \in \{(b), (c)\}$;

3) $S^{(x,y)}$ — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для $x, y \in \{(b), (c)\}$ або $x, y \in \{(bc), (cb)\}$;

4) $S^{(x,y)}$ — дика напівгрупа для $x \in \{(b), (c)\}, y \in \{(bc), (cb)\}$ або $x \in \{(bc), (cb)\}, y \in \{(b), (c)\}$;

5) $S^{(x,y,z)}$ — дика напівгрупа для довільних $x, y, z \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$.

2. Доведення твердження 1) теореми 1. Матриця зображення, що відповідає твірному елементу b, c позначається відповідно через B, C . E позначає одиничну матрицю будь-якого розміру $n \times n$ ($n \geq 0$).

Твердження 1) теореми 1 випливає із наступної теореми.

Теорема 2. Канонічна форма для матричних зображень напівгрупи $N := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0$

така:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, $S^{(cb)} = N$, а $S^{(bc)} = N^{op}$, де N^{op} — дуальна до N напівгрупа (з операцією множення $x \circ y = yx$), матричні зображення якої отримуються із матричних зображень N транспонуванням всіх матриць.

Доведення теореми 2. З матрицями B, C можна робити одночасні перетворення подібності і лише їх (бо саме такі перетворення відповідають переходу до еквівалентних зображень). За допомогою таких перетворень приведемо матрицю C до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Щоб не нагромаджувати індекси, приведену матрицю C , а також матрицю B , яка при цьому якось змінилася, будемо позначати тими ж самими буквами (і цим принципом будемо користуватися і надалі). Тоді, після розбиття матриці B на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці C) і використання рівності $BC = 0$ (яка відповідає визначальному співвідношенню

$bc = 0$), вона має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

де B_1, B_2 — деякі матриці. Рівність $B^2 = 0$ еквівалентна рівностям $B_1B_2 = 0$ і $B_2^2 = 0$. Перетвореннями подібності приведемо матрицю B_2 до нормальної форми Жордана у вигляді

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(яка переставно подібна прямій сумі відповідних клітин Жордана).

Розіб'ємо матрицю B на нові блоки:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Співвідношення $B^2 = 0$ еквівалентне співвідношенню $B_{12} = 0$.

Тепер з'ясуємо, коли матричне зображення $R = \{B, C\}$ еквівалентне матричному зображенню $\bar{R} = \{\bar{B}, \bar{C}\}$ такого ж вигляду, а саме

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{B}_{13} & \bar{B}_{14} \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{C} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай X — оборотна матриця, така що $\bar{B} = XB X^{-1}$, $\bar{C} = XC X^{-1}$, що еквівалентно $\bar{B}X = XB$, $\bar{C}X = XC$. Матрицю X вважаємо розбитою на блоки таким чином, щоб вказані множення матриць здійснювалися поблоково.

З рівності $\bar{C}X = XC$ випливає, що

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ 0 & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ 0 & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо рівність $\bar{B}X = XB$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{B}_{13} & \bar{B}_{14} \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ 0 & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ 0 & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ 0 & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ 0 & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемноживши матриці, маємо рівність

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{B_{13}}X_{32} + \overline{B_{14}}X_{42} & \overline{B_{13}}X_{33} + \overline{B_{14}}X_{43} & \overline{B_{13}}X_{34} + \overline{B_{14}}X_{44} \\ 0 & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_{11}B_{13} & X_{11}B_{14} \\ 0 & 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{32} & 0 \\ 0 & 0 & X_{42} & 0 \end{pmatrix}.$$

З цієї рівності одержуємо, що

$$X_{22} = X_{33}, X_{32} = 0, X_{34} = 0, X_{42} = 0,$$

$$\overline{B_{13}}X_{33} + \overline{B_{14}}X_{43} = X_{11}B_{13}, \overline{B_{14}}X_{44} = X_{11}B_{14},$$

тобто зображення $R = \{B, C\}$ і $\overline{R} = \{\overline{B}, \overline{C}\}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли еквівалентні пари матриць (B_{13}, B_{14}) і $(\overline{B}_{13}, \overline{B}_{14})$ як зображення частково впорядкованої множини із двох порівняльних елементів (якщо вважати, що індексу 14 відповідає мінімальний елемент).

Взявши канонічну форму матриць B_{13} і B_{14} , а саме

$$B_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{14} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(див. [9]), і розбивши додатково матриці B і C на нові блоки, відповідно до розбиття матриць B_{13} і B_{14} , отримуємо зображення, вказане в умові теореми.

Список використаних джерел

1. Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 / T. Tamura // J. Gakugei Tokushima Univ. — 1953. — **3**, — P. 1-11.
2. Forsythe G.E. SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 / G.E. Forsythe // Proc. Amer. Math. Soc. — 1955. — **6**. — P. 443-447.
3. Бондаренко В.М. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку / В.М. Бондаренко, Я.В. Заціха // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). — 2013. — №14. — С. 62-67.
4. Chotchaisthit S. Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 / S. Chotchaisthit // Appl. Math. Sci. (Ruse). — 2014. — **8**. — P. 1261-1269.

Теорема доведена.

3. Доведення тверджень 2) і 3) теореми 1. Напівгрупа $S^{((b),(c))}$ ручна нескінченного зображувального типу згідно §6 [10] і §5 [11], а напівгрупа $S^{((bc),(cb))}$ — згідно теорем 1, 2 [12].

Ручні напівгрупи $S^{(b)}$ і $S^{(c)}$ (як факторнапівгрупи ручної напівгрупи $S^{((b),(c))}$) мають нескінченний зображувальний тип, бо зображення $R = \{B, 0\}$ і $\overline{R} = \{\overline{B}, 0\}$ напівгрупи $S^{(b)}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли подібні матриці B і \overline{B} , а зображення $R = \{0, C\}$ і $\overline{R} = \{0, \overline{C}\}$ напівгрупи $S^{(c)}$ — тоді і лише тоді, коли подібні матриці C і \overline{C} .

4. Доведення тверджень 4) і 5) теореми 1. В силу дуальності напівгруп $S^{(bc,y)}$ і $S^{(cb,y)}$ при $y \in \{(b), (c)\}$, для доведення твердження 4) достатньо розглянути напівгрупи $S^{(cb,b)}$ і $S^{(cb,c)}$. Дикість першої з них доведена в [8], а дикість другої випливає з дикості локальної алгебри з твірними x, y і співвідношеннями $x^2 = 0, y^3 = 0, xy = 0, y^2x = 0$ [13].

Твердження 5) випливає із твердження 4).

5. Bondarenko V.M. On characteristic properties of semigroups / V.M. Bondarenko, Ya.V. Zaciha // Algebra Discrete Math. — 2015 — **20**, no. 1. — P. 32-39.
6. Бондаренко В.М. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку / В.М. Бондаренко, Я.В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). — 2018. — **32**, № 1. — С. 36-49.
7. Дрозд Ю.А. О ручных и диких матричных задачах / Ю.А. Дрозд // Матричные задачи. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1977. — С. 104-114.
8. Бондаренко В.М. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентами / В.М. Бондаренко, О.В. Зубарук // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика

- і інформатика). — 2020. — **36**, № 1. — С. 7-15.
9. Клейнер М. М. О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа / М. М. Клейнер // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1972. — **28**. — С. 42–59.
10. Гельфанд И.М. Неразложимые представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, В.А. Пономарев // УМН.— 1968. — **40**, № 2. — С. 3–60.
11. Назарова Л.А. Применение модулей над диадой для классификации конечных p -групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p , и пар взаимно аннулирующих операторов / Л.А. Назарова, А.В. Ройтер, В.В. Сергейчук, В.М. Бондаренко // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1972. — **28**. — С. 69-92.
12. Bondarenko V.M. Linear operators on S -graded vector spaces / V.M. Bondarenko // Linear algebra Appl. — 2003. — **365**. — P. 45-90.
13. Ringel C.M. The representation type of local algebras / C.M. Ringel // Lecture Notes in Mathematics. — 1975. — **488**. — P. 282–305.

References

1. TAMURA, T. (1953). *Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3*. J. Gakugei Tokushima Univ. 3, p. 1–11.
2. FORSYTHE, G. (1955). *SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4*. Proc. Amer. Math. Soc., 6, p. 443–447.
3. BONDARENKO, V., ZACIHA, Ja. (2013). *Pro vyznachalni spivvidnoshennya dlya minimalnykh system tvirnykh napivhrup tretoho porjadku*. Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics, 14, p. 62–67.
4. CHOTCHAISTHIT, S. (2014). *Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3*. Appl. Math. Sci. (Ruse), 8, p. 1261–1269.
5. BONDARENKO, V., ZACIHA, Ya. (2015). *On characteristic properties of semigroups*. Algebra Discrete Math., 20, 1, p. 32–39.
6. BONDARENKO, V., ZACIHA, Ja. (2018). *Kanonichni formy matrychnykh zobrazhen napivhrup maloho porjadku*. Scientific Bulletin of Uzhhorod University, Series of Mathematics and Informatics, 32, 1, p. 36–49.
7. DROZD, Yu. (1977). *Pro ruchni ta dyki matrychni problemy*. Matrix problems – Institute of Math. of AN of Ukrain.SSR, p. 104–114.
8. BONDARENKO, V., ZUBARUK, O. (2020). *Pro matrychni zobrazhennya nadnapivhrup napivhrupy, porodzenoyi dvoma vzayemno anul'ovnyimi idempotentamy*. Scientific Bulletin of Uzhhorod University, Series of Mathematics and Informatics, 36, 1. p. 7-15.
9. KLEINER, M. (1972). *O tochnykh predstavleniyakh chastichno uporyadochenykh mnozhestv konechnogo tipa*. Zap. Nauch. Semin. LOMI, **28**, p. 42–59.
10. GELFAND, I., PONOMAREV, V. (1968). *Nerozkladni zobrazhennya hrupy Lorentsa*. Advances in Math. Sciences, 23, 2, p. 3–60.
11. NAZAROVA, L., ROITER, A., SERGEI-CHUK, V., BONDARENKO, V. (1972). *Primeneniye moduley nad diadoy dlya klassifikatsii konechnykh p-grupp, obladajuschih abelevoj podgruppoj indeksa p, i par vzaimno annullirujuschih operatorov*. Zap. nauch. seminarov LOMI., 28, p. 69-92.
12. BONDARENKO, V. (2003). *Linear operators on S-graded vector spaces*. Linear algebra Appl., 365, p. 45-90.
13. RINGEL, C. (1975). *The representation type of local algebras*. Lecture Notes in Mathematics, 488, p. 282–305.

Надійшла до редколегії 30.10.2020