Математичний гурток

УДК 510:512.622.86(091) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.7**

Віктор РОМАНЕНКО, Д-р. фіз.-мат. наук, Пров. наук. співроб.
ORCID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Інститут фізики НАН України, Київ, Україна

Олександр РОМАНЕНКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0009-0000-1860-496X
e-mail: oleksandr.romanenko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЛЕБЕДЄВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

РОЗКЛАДАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ У СТЕПЕНЕВІ РЯДИ МЕТОДАМИ АЛГЕБРИ

Анотація. *Як відомо, методи на основі степеневих рядів – один із стовпів математичного аналізу. Для аналітичних функцій степеневі ряди можуть бути легко отримані з теореми Тейлора у вигляді рядів Маклорена обчислюванням похідних цих функцій при $x = 0$. У той же час було б корисно вміти розкладати функції в ряд, не користуючись поняттям похідної. Зокрема, такі розклади стали б в пригоді при обчисленні границь – основи математичного аналізу. У роботі Л. П. Мироненка і О. А Рубцової (2013) висунута ідея, що для розкладу в ряд елементарних функцій можна використати властивості цих функцій та отримано перші члени їхнього розкладу в степеневий ряд. У роботі В. І. Романенка та О. В. Романенка (2024) узагальнення цього підходу дозволило отримати члени ряду для синуса, косинуса і експоненти у загальному вигляді. У пропонованій читачу статті у спрощеному вигляді подаються основні результати цитованих статей, доповнені виведенням формули для розкладання тангенса у степеневий ряд. Виклад побудовано так, щоб суть ідеї і математичні викладки були зрозумілі читачу зі знанням шкільної програми. Можливість алгебраїчного підходу до розкладання функцій в ряди може бути поясненням того, як саме індійському математику Мадхаві (XIV–XV століття) вдалося отримати перші кілька членів розкладу в ряд для синуса, косинуса і арктангенса задовго до появи методів аналізу функцій у сучасному вигляді.*

Ключові слова: *степеневий ряд; метод невизначених коефіцієнтів; елементарні функції; історія математики.*

1. Вступ

Розкладання функцій в степеневі ряди – один з найпоширеніших методів розв’язання математичних, фізичних та технічних задач. У більшості випадків це робиться за допомогою теореми Тейлора шляхом обчислення похідних від функцій при певному значенні аргументу, наприклад, при $x = 0$, де x – аргумент функції (див., наприклад, Давидов, 1990). У той же час розклади в ряди для тригонометричних функцій були вже відомі задовго до появи математичного аналізу (Plofker K., 2009).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Швидше за все, індійський вчений Мадхава їх отримав, користуючись алгебраїчними методами. Як проілюстровано у (Мироненко & Рубцова, 2013), розкладання функцій у степеневий ряд могло би бути корисним під час вивчення теорії границь, яка є основою для введення поняття похідної. Іншою сферою застосування, навіть у середній школі, могло б бути пояснення учням того, як можна наближено обчислити тригонометричні функції довільного аргументу. У своєму дослідженні Л. П. Мироненко і О. А. Рубцова показали як степеневі ряди для елементарних функцій можна отримати, виходячи з властивостей цих функцій, і отримали для них кілька членів ряду. В роботі В. І. Романенка та О. В. Романенка (Romanenko & Romanenko, 2024) отримано загальні вирази для членів ряду. Крім того, автори використали дещо інший набір базових властивостей функцій, зокрема знайшли степеневий ряд для $\ln(1+x)$, користуючись, на відміну від праці Л. П. Мироненко і О. А. Рубцової, властивостями логарифма. Ми даємо спрощений виклад основних результатів цитованих робіт на рівні, зрозумілому для учня школи, який цікавиться математикою, а також отримуємо розклад тангенса в степеневий ряд, виходячи з властивостей тангенса, на відміну від роботи В. І. Романенка та О. В. Романенка (Romanenko & Romanenko, 2024), де цей розклад було знайдено як відношення степеневих рядів для синуса і косинуса.

Об’єктом дослідження є елементарні функції.

Мета та завдання дослідження – елементарний виклад отримання степеневих рядів елементарних функцій без застосування методів математичного аналізу.

Методи – використовується метод невизначених коефіцієнтів.

Для спрощення викладу обмежимося тут першими чотирма членами розкладання елементарних функцій в степеневий ряд.

2. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо рівняння

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots. \tag{1}$$

Це рівняння буде справедливим за будь-яких x, якщо $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ і так далі. Переконаємося у цьому. Спершу покладемо $x = 0$, побачимо, що $a_0 = b_0$, віднімемо цю рівність від наведеного вище рівняння (1) і розділимо обидві частини на x. Знову покладемо $x = 0$, побачимо, що $a_1 = b_1$ і так далі. Отже, якщо ми маємо рівняння вигляду (1), яке справедливе за будь-якого x в області його визначення, ми можемо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x. Цей метод, що є варіантом методу невизначених коефіцієнтів, далі використаємо для обчислення коефіцієнтів розкладу елементарних функцій в степеневі ряди.

3. Представлення експоненціальної функції у вигляді степеневого ряду

Для показникової функції a^x з основою $a > 0$ запис у вигляді степеневого ряду має вигляд:

$$a^x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots . \quad (2)$$

Оскільки $a^0 = 1$, то $b_0 = 1$. Значення коефіцієнта b_1 залежить від основи показникової функції. Оберемо основу так, щоб $b_1 = 1$ і позначимо її e. Підставимо рівняння (2) для $a = e$ у рівняння

$$e^{2x} = e^x e^x, \quad (3)$$

яке виражає властивість показникової функції (для $a = e$ цю функцію називають *експоненціальною* або *експонентою*). У результаті з точністю до четвертого порядку за x маємо рівняння

$$\begin{aligned} &1 + 2x + 4\,b_2 x^2 + 8\,b_3 x^3 + 16\,b_4 x^4 + \ldots = \\ &= 1 + 2x + (1 + 2\,b_2)x^2 + 2(b_2 + b_3)x^3 + (b_2^2 + 2b_3 + 2b_4)x^4 + \cdots . \end{aligned} \quad (4)$$

Прирівняємо коефіцієнти при x з однаковими степенями у лівій та правій частинах рівняння (4). Отримаємо систему рівнянь для b_2, b_3, b_4:

$$4b_2 = 1 + 2b_2, \quad (5)$$

$$8b_3 = 2(b_2 + b_3), \quad (6)$$

$$16b_4 = b_2^2 + 2b_3 + 2b_4. \quad (7)$$

Ці рівняння послідовно легко розв'язуються. З рівняння (5) знаходимо b_2, підставляємо в рівняння (6) і знаходимо з нього b_3. Потім знайдені значення b_2 і b_3 підставляємо в рівняння (7) і знаходимо з нього b_4. Маємо

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{6}, b_4 = \frac{1}{24}.$$

Тоді e^x можна записати у вигляді степеневого ряду

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots . \quad (8)$$

Тут позначено $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots (n-1) \times n$ для цілого n. Доведення того, що $b_n = \frac{1}{n!}$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ наведено в (Romanenko & Romanenko, 2024). Користуючись тотожністю $a^x = e^{x \ln a}$, можна знайти і степеневий ряд для показникової функції з довільною додатною основою. Обчислюємо значення (8) при $x = 1$, знаходимо наближене значення $e \approx 2{,}7$ з точністю до двох значущих цифр. Цей же вираз,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

записаний з точністю до членів четвертого порядку за x, можна використати і для обчислення e з більшою точністю, наприклад, скориставшись тотожністю $e = \left[e^{\frac{1}{n}}\right]^n$. При $n = 12$ знаходимо наближене значення $e \approx 2{,}71828$.

4. Натуральний логарифм

Розклад в степеневий ряд $\ln(1+x)$ для малих x шукаємо у вигляді

$$\ln(1+x) = l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + l_4 x^4 + \cdots. \tag{9}$$

Розклад ми почали з лінійного члена, враховуючи, що $\ln 1 = 0$. Щоб знайти коефіцієнти l_1, l_2, l_3, l_4, скористаємося відомою властивістю логарифма $\ln(a^2) = 2\ln a$, яка у нашому випадку записується так:

$$\ln[(1+x)^2] = 2\ln(1+x), \tag{10}$$

а з урахуванням (9) з точністю до x^4 рівність (10) набуває вигляду:

$$\begin{gathered} l_1(2x + x^2) + l_2(2x + x^2)^2 + l_3(2x + x^2)^3 + l_4(2x + x^2)^4 = \\ = 2(l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + l_4 x^4). \end{gathered} \tag{11}$$

Прирівняємо коефіцієнти при x з однаковими степенями. Отримаємо систему рівнянь

$$2l_1 = 2l_1, \tag{12}$$

$$4l_2 + l_1 = 2l_2, \tag{13}$$

$$8l_3 + 4l_2 = 2l_3, \tag{14}$$

$$16l_4 + 12l_3 + l_2 = 2l_4. \tag{15}$$

Як бачимо, рівняння (12) задовольняється при будь-якому значенні l_1. Це зумовлено тим, що властивість логарифма, яку ми використовували, справедлива для будь-якої його основи. Оскільки нас цікавить основа e, звернемося до розкладу (8) з точністю до лінійного за x члена: $e^x \approx 1 + x$, який справедливий з тим вищою точністю, чим менше x. Обчисливши логарифм від обох частин рівності, бачимо, що розклад $\ln(1+x)$ в степеневий ряд починається з лінійного члена з коефіцієнтом 1, тобто $l_1 = 1$. Звичайно, ці міркування мають характер оцінки і не є строгим математичним доведенням, яке можна знайти в роботі (Romanenko & Romanenko, 2024). Далі рівняння (13)–(15) розв'язуються легко, і ми отримуємо представлення у вигляді степеневого ряду:

$$\ln(1+x) \ = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots. \tag{16}$$

Ряд (16) збігається (маються на увазі і не вказані тут доданки) при $|x| < 1$.

5. Представлення синуса і косинуса у вигляді степеневого ряду

У цьому випадку обчислюємо одночасно степеневі ряди для обох функцій, оскільки рівняння, що відображають властивості однієї з них, включають іншу:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{17}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x. \tag{18}$$

Щоб спростити обчислення, врахуємо, що $\sin x$ – непарна функція x, а $\cos x$ – парна функція x. Крім того, врахуємо, що $\cos 0 = 1$. Шукаємо ці функції у вигляді розкладу в степеневий ряд за x:

$$\sin x = \ s_1 x + s_3 x^3 + \cdots, \tag{19}$$

$$\cos x = \ 1 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots. \tag{20}$$

Підстановка виразів (19), (20) в рівняння (17), (18) та перенесення всіх виразів в ліву частину рівності дає:

$$x^2(2c_2 + s_1^2) + x^4(2c_4 + c_2^2 + 2s_1 s_3) + \cdots = 0, \tag{21}$$

$$2x^3(3\, s_3 - s_1 c_2) + \cdots = 0. \tag{22}$$

Згідно з методом невизначених коефіцієнтів ці рівняння справедливі, якщо коефіцієнти при кожному степені x дорівнюють нулю. З (21), (22) маємо рівняння:

$$2c_2 + s_1 = 0, \tag{23}$$

$$3s_3 - s_1 c_2 = 0, \tag{24}$$

$$2c_4 + c_2^2 + 2s_1 s_3 = 0. \tag{25}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

З рівнянь (23) - (25) можна виразити c_2, s_3, c_4 через s_1. Значення s_1 залишається довільним. Його вибір визначає одиницю виміру кута. При виборі $s_1 = 1$ кут вимірюється в радіанах. Щоб отримати $\sin x$ і $\cos x$ для кута в градусах, треба обрати $s_1 = \frac{\pi}{180}$. Надалі ми оберемо $s_1 = 1$. Тоді $c_2 = -\frac{1}{2}, s_3 = -\frac{1}{6}, c_4 = \frac{1}{24}$ і розклад $\sin x$ і $\cos x$ в степеневий ряд з точністю до членів четвертого порядку за x має вигляд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots, \tag{26}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots. \tag{27}$$

Неважко здогадатися, що коефіцієнти s_{2n+1}, c_{2n} у випадку довільного цілого n дорівнюють $s_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $c_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$. У роботі (Romanenko & Romanenko, 2024) наведено доведення цього твердження.

6. Представлення тангенса у вигляді степеневого ряду

У роботі (Romanenko & Romanenko, 2024) вираз для тангенса у вигляді степеневого ряду наведено як відношення рядів для синуса і косинуса. Тут ми застосуємо простіший метод, виходячи з властивостей тангенса, а саме з виразу для тангенса подвійного кута, записаного у вигляді:

$$\mathrm{tg}\, 2x\, (1 - \mathrm{tg}^2 x) = 2\, \mathrm{tg}\, x. \tag{28}$$

Підставивши вираз для тангенса з урахуванням його непарності у вигляді степеневого ряду

$$\mathrm{tg}\, x = t_1 x + t_3 x^3 + \cdots \tag{29}$$

в (28), отримуємо рівняння

$$2x^3(3t_3 - t_1^3) + \cdots = 0. \tag{30}$$

Звідси випливає, що $t_3 = \frac{t_1^3}{3}$. Якщо треба визначити коефіцієнти розкладу (29) більш високого порядку, в (30) буде сума доданків з різними степенями x. Прирівняємо кожен з них до нуля, матимемо систему рівнянь, з якої отримаємо коефіцієнти розкладу як функції t_1. Як при обчисленні синуса і косинуса, вибір коефіцієнта при лінійному члені визначає, в яких одиницях підставляється в тригонометричну функцію її аргумент. Для того, щоб він був в радіанах, обираємо $t_1 = 1$. Тоді

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots. \tag{31}$$

Ряд (31) збігається при $|x| < \pi/2$.

7. Представлення арктангенса у вигляді степеневого ряду

Отримаємо розклад оберненої тригонометричної функції в ряд на прикладі арктангенса. Беручи до уваги, що арктангенс – непарна функція, записуємо його представлення у вигляді степеневого ряду як

$$\operatorname{arctg} x = r_1 x + r_3 x^3 + \cdots. \tag{32}$$

Обчислюємо тангенс обох частин (32) з точністю до четвертого порядку за x, використовуючи вираз (31) для тангенса у вигляді степеневого ряду:

$$x = r_1 x + x^3 \left(r_3 + \frac{r_1^3}{3} \right) + \cdots. \tag{33}$$

Формально процедуру отримання рівняння (33) можна описати так. Тангенс лівої частини (32) обчислюється за означенням – він дорівнює x. Обчислюємо тангенс правої частини (32). Записуємо (31), замінивши x на y:

$$\operatorname{tg} y = y + \frac{y^3}{3} + \cdots. \tag{34}$$

Потім замість y підставляємо в (34) праву частину рівняння (32) і в результаті маємо її тангенс – праву частину рівняння (33).

З рівняння (33) випливає $r_1 = 1, r_3 = -\frac{1}{3}$. Тоді арктангенс x можна записати у вигляді

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots. \tag{35}$$

8. Висновки

Ми пояснили, як знаючи властивості елементарних функцій, можна отримати вирази для них у вигляді степеневих рядів. Для скорочення математичних обчислень ми обрали найменшу кількість членів рядів, необхідну для пояснення. Більш точні обчислення очевидні. Наведемо тепер представлення розглянутих тут елементарних функцій з точністю до сьомого порядку за x:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \cdots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Метод невизначених коефіцієнтів міг використати відомий індійський математик XIV–XV століть Мадхава (див. Plofker, 2009) для пошуку розкладів тригонометричних функцій в ряди задовго до виникнення математичного аналізу, що може бути можливим поясненням, як йому вдалося це зробити.

Список використаних джерел

Давидов, М. О. (1990) *Курс математичного аналізу*: *у 3 ч.: Частина 1: Функції однієї змінної*. Київ: Вища школа. 380 с.

Мироненко, Л. П., & Рубцова, О. А. (2013). Approximations of Some Functions by Polynomial sand the Method of Undefined Coefficients. *Наукові праці ДонНТУ. Серія: обчислювальна техніка та автоматизація* №2 (25). с. 128–135. https://ea.donntu.edu.ua/jspui/handle/123456789/22814 (in Russian).

Plofker, K. (2009). *Mathematics in India*. Princeton University Press. 384 p.

Romanenko, V. I., & Romanenko, A. V. (2024). Series expansion of some elementary functions without using mathematical analysis. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1–15. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2353371

Отримано редакцією журналу: 25.11.2024
Прорецензовано: 05.12.2024
Схвалено до друку:19.12.2024

Victor ROMANENKO, Dr. of Sci. (Phys&Math), Leading Researcher
ORCID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Alexander ROMANENKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID: 0009-0000-1860-496X
e-mail: oleksandr.romanenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna LEBEDEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

EXPANSION OF ELEMETNARY FUNCTIONS INTO A POWER SERIES USING ALGEBRAIC METHODS

Abstract. *As is well known, power series-based methods are one of the pillars of mathematical analysis. For analytic functions, the power series can be easily obtained from Taylor's theorem in the form of Maclaurin series by calculating the derivatives of these functions at x=0. At the same time, it would be useful to be able to expand functions into series without using the concept of a derivative. Such expansions, in particular, would be helpful in calculating limits, which are fundamental to mathematical analysis. In the work of L. P. Myronenko and O. A. Rubtsova (2013), the idea was proposed that the properties of elementary functions can be used for series expansion, and the first terms of their power series expansions were obtained. In the work of V. I. Romanenko and A. V. Romanenko (2024), a generalization of this approach allowed for obtaining the series terms for sine, cosine, and exponential functions in a general form. In the article presented to the reader, the main results of the cited works are provided in a simplified form, supplemented by deriving a formula for the power series expansion of the tangent function. The presentation is structured in such a way that the core idea and the mathematical derivations are accessible to readers with knowledge of the school curriculum. The possibility of an algebraic approach to function series expansion might explain how the Indian mathematician Madhava (14th–15th century) managed to derive the first few terms of the series expansion for sine, cosine, and arctangent long before function analyses methods in the modern form.*

Keywords: *power series; method of undetermined coefficients; elementary functions; history of mathematics.*