

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ФАКУЛЬТЕТ РАДІОФІЗИКИ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ**

**кафедра фізичної електроніки**

До захисту допущено:

«На правах рукопису»

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ Анатолій ВЕКЛИЧ

«\_19\_» червня 2023 р.

**БАКАЛАВРСЬКА РОБОТА**

на тему:

**«ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЛЯРИЗАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СЕРЕДОВИЩ З  
АНІЗОТРОПНОЮ ДЕПОЛЯРИЗАЦІЄЮ»**

**Виконала:**

студентка 4-го курсу

денної форми навчання

спеціальності 105 – Прикладна фізика та наноматеріали

ОП «Прикладна фізика, наноелектроніка та комп'ютерні технології»

Бондючна Олена Олегівна \_\_\_\_\_

**Науковий керівник:**

д.ф.-м.н., проф. Веклич Анатолій Миколайович \_\_\_\_\_

к.ф.-м.н., ас. Коломієць Іван Сергійович \_\_\_\_\_

**Рецензент:**

д.ф.-м.н., проф. Савенков Сергійович Миколайович \_\_\_\_\_

Засвідчую, що у цій бакалаврській роботі  
немає запозичень з праць інших авторів без  
відповідних посилань

Студент \_\_\_\_\_

Робота допущена до захисту в ЕК рішенням кафедри фізичної електроніки  
від «15» червня 2023 р., протокол № 32.

Завідувач кафедри фізичної електроніки,

доктор фіз.-мат. наук, професор

Веклич Анатолій Миколайович \_\_\_\_\_

## РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 28 с., 8 рис., 23 джерела.

В рамках матричного диференціально методу Мюллера був розглянутий клас деполяризуючих середовищ із циркулярною амплітудною анізотропією. Були розраховані умови та параметри деполяризації середовища, при виконанні яких запропонована диференціальна матрична модель є фізичною. На основі диференціальної матриці Мюллера була розрахована інтегральна матриці Мюллера, що описує поляризаційні та деполяризуючі властивості даного класу середовищ скінченної товщини. Були розраховані та проаналізовані власні числа та власні поляризації досліджуваного класу середовищ. В рамках даного класу середовищ був досліджений ефект «Поляризаційної пам'яті».

МАТРИЧНИЙ МЕТОД МЮЛЛЕРА, ДИФЕРЕНЦІЛЬНІ МАТРИЦІ МЮЛЛЕРА, АНІЗОТРОПІЯ, ВЛАСНІ ПОЛЯРИЗАЦІЇ, ВЛАСНІ ЧИСЛА, ДЕПОЛЯРИЗАЦІЯ.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
1. ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСУ ПОЛЯРИЗАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СЕРЕДОВИЩ .....	5
1.1 Матричний метод Джонса.....	5
1.2 Матричний метод Мюллера.....	7
1.3 Базові види анізотропії .....	9
1.4 Мультиплікативні матричні моделі в поляриметрії .....	11
1.4.1 Теорема полярного розкладу .....	11
1.4.2 Узагальнена теорема еквівалентності.....	13
1.5 Диференціальні (однорідні) методи в поляриметрії .....	14
2. ПОЛЯРИЗАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ДЕПОЛЯРИЗУЮЧИХ СЕРЕДОВИЩ З ЦИРКУЛЯРНОЮ АМПЛІТУДНОЮ АНІЗОТРОПІЄЮ.....	17
2.1 Диференціальна матриця Мюллера і критерій її застосовності.....	17
2.2 Інтегральна матриця Мюллера .....	19
2.3 Особливості власних чисел.....	20
2.4 Особливості власних поляризацій та ефект поляризаційної пам'яті .....	22
ВИСНОВКИ.....	26
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	27

## ВСТУП

Поляризація є характеристикою, що присутня в усіх типах векторних хвиль. Ця характеристика описує зміну у часі вектора поля, пов'язаного з конкретною хвилею (наприклад, електричне поле, магнітне поле і т. д.). При поширенні через різні типи середовищ ступінь поляризації може збільшуватися (у поляризуючих середовищах) або зменшуватися (у деполаризуючих середовищах) [1-2].

Матричні методи Джонса та Мюллера застосовуються для опису поляризаційних характеристик середовища. Вивчення взаємодії поляризованого світла з досліджуваним середовищем та зміни його поляризації є важливим джерелом інформації про поляризаційні властивості цього середовища. Поляриметричні методи дослідження мають численні переваги, такі як висока чутливість та можливість проведення дистанційних досліджень, що призводить до їх широкого застосування в різних галузях, включаючи медицину та біологію [4-7].

Основною характеристикою, що досліджується в оптичній поляриметрії є різноманітний вплив середовищ на падаючі хвилі з різними станами поляризації. Ця характеристика називається анізотропією і характеризується різноманіттям показника заломлення та коефіцієнта поглинання для різних вхідних станів поляризації. Разом з тим, багато середовищ проявляють анізотропну деполаризацію, що означає, що ступінь поляризації на виході залежить від вхідного стану поляризації світла. Ці середовища мають свої особливості, пов'язані з ефектами перетворення поляризації власних хвиль у деполаризуючих середовищах. Для вивчення цих ефектів у поляриметрії використовуються як інтегральні так і диференціальні методи Мюллера [6-17].

Отже метою даної роботи є дослідження поляризаційних характеристик однорідних деполаризуючих середовищ із деполаризацією пов'язаною з лінійною амплітудною анізотропією.

# 1. ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСУ ПОЛЯРИЗАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СЕРЕДОВИЩ

## 1.1 Матричний метод Джонса

Матричний метод Джонса — метод опису амплітуди, фази та стану поляризації плоских монохроматичних електромагнітних хвиль, що проходять через деякі оптичні системи (ці оптичні системи характеризуються двоприменезаломленням та дихроїзмом). Цей метод базується на поняттях вектора Джонса, який описує стан поляризації електромагнітного випромінювання, та матриці Джонса, яка характеризує властивості оптичної системи. Матричний метод Джонса досить часто використовується для розрахунку поляризації системи в лазерній техніці [1-7].

Щоб описати лінійну взаємодію поляризованого світла певної частоти  $\omega$  із анізотропним недеполяризуючим середовищем використовують матричний метод Джонса [10].

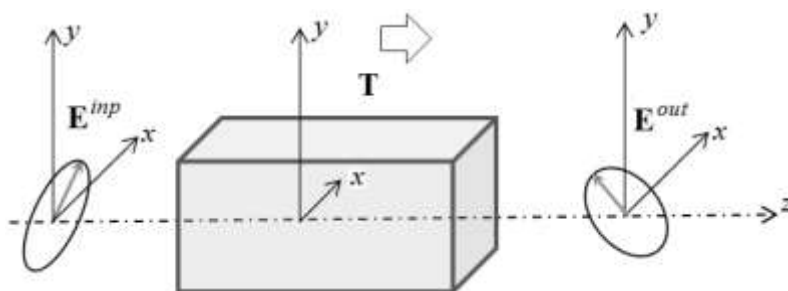


Рис. 1.1 Взаємодія поляризованого світла з анізотропним середовищем.

На Рис.1.1 представлена права декартова система координат та електромагнітне випромінювання, яке поширюється вздовж осі  $z$ . За методом Джонса стан поляризації описується вектором Джонса (вектор  $2 \times 1$ ), компоненти якого є проєкціями електричного вектора  $\mathbf{E}$  електромагнітного випромінювання на осі  $x$  та  $y$ :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ Ke^{i\Delta} \end{bmatrix} \exp \left\{ i \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{z}{c} \right) + \phi_x \right] \right\}, \quad (1.1)$$

де  $H$  і  $K$  — амплітуди проєкцій  $E_x$  і  $E_y$  електричного вектора,  $\Delta$  — відносна різниця фаз  $E_x$  і  $E_y$ ,  $\varphi_x$  — початкова фаза компоненти  $E_x$ ,  $\omega$  — частота коливань світлової хвилі. Оскільки розгадаються лише поляризаційні характеристики, можна знехтувати ізотропним множником в рівнянні (1.1). Тоді вектор Джонса набуває вигляду:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} H \\ Ke^{i\Delta} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Вектор Джонса (рівняння (1.2)) містить інформацію про стан поляризації електромагнітного випромінювання та його інтенсивність. Останню можна знайти із рівняння:

$$I = \begin{bmatrix} E_x^* & E_y^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = |E_x|^2 + |E_y|^2 = H^2 + K^2, \quad (1.3)$$

У явному вигляді компонент вектора Джонса як функцій параметрів еліпса поляризації випромінювання представляється як:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\varepsilon) - i\sin(\theta)\sin(\varepsilon) \\ \sin(\theta)\cos(\varepsilon) - i\cos(\theta)\sin(\varepsilon) \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

де  $\theta$  — азимут, який визначає орієнтацію еліпса в його площині в межах  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ;  $\varepsilon$  — кут еліптичності, арктангенс еліптичності  $e$ , ( $\varepsilon = \arctan(e)$ ), змінюється в межах  $-\pi/4 \leq \varepsilon \leq \pi/4$ ; еліптичність  $e$  — відношення малої  $a$  до великої  $b$  півосі еліпса  $e = b/a$  і змінюється в межах  $-1 \leq e \leq 1$  (Рис. 1.2).

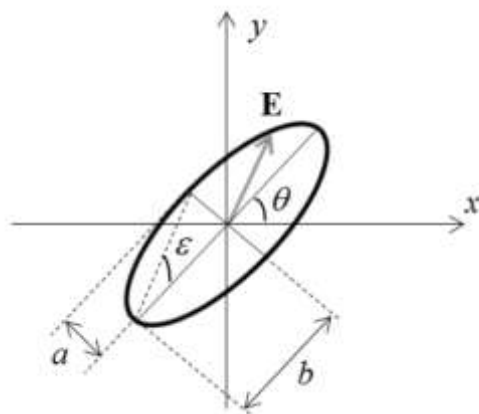


Рис. 1.2. Еліпс поляризації випромінювання.

У випадку взаємодії лінійно-поляризованої хвилі з середовищем, проекції електричного вектора  $E_{x(inp)}$ ,  $E_{y(inp)}$  до взаємодії будуть лінійно пов'язані із відповідними проекціями електричного вектора  $E_{x(out)}$ ,  $E_{y(out)}$  після взаємодії [1,2]:

$$\begin{cases} E_x^{out} = T_{11}E_x^{inp} + T_{12}E_y^{inp} \\ E_y^{out} = T_{21}E_x^{inp} + T_{22}E_y^{inp} \end{cases}, \quad (1.5)$$

де коефіцієнти  $T_{ij}$  — описують поляризаційні властивості середовища для даної довжини хвилі випромінювання та даного напрямку її розповсюдження. Отримане рівняння можна переписати у формі матриці,

$$\mathbf{E}^{out} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^{inp}, \quad (1.6)$$

де  $\mathbf{T}$  — матриця Джонса  $2 \times 2$ , яка описує поляризаційні властивості середовища:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Така матриця Джонса  $\mathbf{T}$  — називається інтегральною матрицею оскільки, описує поляризаційні властивості шару середовища скінченної товщини.

## 1.2 Матричний метод Мюллера

Подібно до матричного методу Джонса, матричний метод Мюллера також дає можливість описати стан поляризації електромагнітного випромінювання, його характеристики та властивості.

За матричним методом Мюллера стан поляризації електромагнітного випромінювання описується вектором Стокса  $\mathbf{S}$  розміром  $4 \times 1$ . Його компоненти визначаються як [3, 4]:

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle, \\ S_2 &= \langle E_x^2 \rangle - \langle E_y^2 \rangle, \\ S_3 &= 2 \langle E_x E_y \cos(\Delta) \rangle, \\ S_4 &= 2 \langle E_x E_y \sin(\Delta) \rangle, \end{aligned} \quad (1.8)$$

Де  $\langle \rangle$  позначає усереднення по часу або по простору.

Компоненти вектора Стокса (параметри Стокса) — це квадратичні функції компонентів електричного вектора електромагнітного випромінювання. Отже, вони мають інтенсивність і виглядатимуть таким чином:  $S_1=I_0^0 + I_{90}^0 = I_{45}^0 + I_{-45}^0 = I_L + I_R = I$ ,  $S_2=I_0^0 - I_{90}^0$ ,  $S_3=I_{45}^0 - I_{-45}^0$ ,  $S_4=I_L - I_R$  де  $I_0^0, I_{90}^0$  і  $I_{\pm 45}^0$  — інтенсивності електромагнітного випромінювання, що пройшло крізь поляризатор, розміщений під кутами  $0^0$ , або  $90^0$  і  $\pm 45^0$ , відповідно;  $I_{L,R}$  — інтенсивності електромагнітного випромінювання, яке пройшло через лівий і правий циркулярні поляризатори. Звідси зрозуміло, що перший параметр Стокса — це повна інтенсивність електромагнітного випромінювання  $I$ , три інші параметри кількісно визначаються лінійною або циркулярною поляризацією.

Вектор Стокса для довільного еліптичного стану поляризації можна записати як [7]:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} I \\ I \cos(2\theta) \cos(2\varepsilon) \\ I \sin(2\theta) \cos(2\varepsilon) \\ I \sin(2\varepsilon) \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Якщо повна інтенсивність електромагнітного випромінювання не розглядається, вектор Стокса нормується на перший елемент.

При неполяризованому електромагнітному випромінюванні у векторі Стокса ненульовим є лише перший елемент  $S_1$ .

При частково поляризованому випромінюванні вектор Стокса можна записати як суму векторів Стокса повністю поляризованого та неполяризованого випромінювання відповідно:  $\mathbf{S}^{PP} = \mathbf{S}^P + \mathbf{S}^D$ .

Величина ступіню поляризації світла  $p$  змінюється в межах від 0 (неполяризоване випромінювання) до 1 (повністю поляризоване випромінювання) та визначається як відношення інтенсивності повністю поляризованої компоненти  $I_P$  до повної інтенсивності випромінювання [3]:

$$P = \frac{I_P}{I} = \frac{\sqrt{S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}}{S_1}, \quad (1.10)$$

Параметри випромінювання Стокса  $S_i^{inp}$  до і  $S_i^{out}$  після взаємодії з досліджуваним середовищем лінійно пов'язані між собою та у матричному вигляді ця система рівнянь записується як:

$$\mathbf{S}^{out} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}^{inp}, \quad (1.11)$$

де  $\mathbf{M}$  — матриця розміром  $4 \times 4$  з дійсними елементами  $M_{ij}$  — матриця Мюллера, або інтегральна матриця Мюллера, яка описує і поляризаційні, і деполаризуючі властивості середовища.

### 1.3 Базові види анізотропії

Анізотропія — відмінність властивостей середовища у різних напрямках. В оптиці — це залежність параметрів середовища, а саме показника заломлення  $n$  і коефіцієнта поглинання  $k$ , від напрямку розповсюдження світла в середовищі. При оптичній анізотропії середовища стан поляризації падаючого (вхідного) випромінювання змінюється після взаємодії з цим середовищем. Основна характеристика анізотропного середовища в поляриметрії — це його власні хвилі. Власні хвилі — це хвилі, які поширюються у виділеному напрямку, при цьому стан поляризації не зазнає змін. Однак повна амплітуда і абсолютна фаза власних хвиль можуть змінюватися.

Згідно кваліфікації Джонса анізотропні середовища поділяються на однорідні та неоднорідні. Однорідні в поздовжньому напрямку — середовища, власні поляризації яких не змінюються при розповсюдженні в середовищі [1,15,16]. Неоднорідними в поздовжньому напрямку є середовища, в яких відбувається зміна стану поляризації власних хвиль. При розповсюдженні світла з певною довжиною хвилі в анізотропних однорідних середовищах розрізняють 4 види оптичної анізотропії [15]:

1. Лінійна фазова анізотропія (лінійне двопронезаломлення).

Власні хвилі середовища мають лінійні ортогональні поляризації та поширюються з різною фазовою швидкістю.

2. Циркулярна фазова анізотропія (циркулярне двопроменезаломлення).

Власні хвилі середовища мають циркулярні ортогональні поляризації та поширюються з різною фазовою швидкістю.

3. Лінійна амплітудна анізотропія (лінійний дихроїзм).

Власні хвилі середовища мають лінійні ортогональні поляризації та поглинаються по різному.

4. Циркулярна амплітудна анізотропія (циркулярний дихроїзм).

Власні хвилі середовища мають циркулярні ортогональні поляризації та поглинаються по різному.

Фазова анізотропія — анізотропія середовища, у якому власні хвилі мають ортогональні (лінійні, циркулярні) поляризації, що поширюються з різною фазовою швидкістю [1]. При цьому на виході з середовища виникає зсув фаз, що визначається для лінійної та циркулярної фазової анізотропії наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)z = \delta_0 z, \\ \varphi &= \frac{\pi}{\lambda}(n_l - n_r)z = \varphi_0 z,\end{aligned}\tag{1.12}$$

де  $\delta_0, \varphi_0$  — відносні фазові зсуви між станами поляризацій власних хвиль на одиницю товщини  $z$ ,  $n_o, n_e, n_r, n_l$  — показники заломлення для лінійних, правого та лівого циркулярних станів поляризацій власних хвиль електромагнітного випромінювання.

У середовищах з амплітудною анізотропією власні хвилі мають ортогональні поляризації, що поглинаються по різному. Цей вид анізотропії характеризується різницею коефіцієнтів поглинання для ортогональних поляризацій на виході з середовища (для лінійного та циркулярного дихроїзму відповідно):

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2\pi}{\lambda}(k_0 - k_e)z = \xi_0 z, \\ r &= \frac{2\pi}{\lambda}(k_l - k_r)z = r_0 z\end{aligned}\tag{1.13}$$

де  $\xi_0, r_0$  — відносне поглинання між станами поляризації власних хвиль на одиницю товщини  $z$ ,  $k_0, k_e, k_r, k_l$  — коефіцієнти поглинання для лінійних, правого та лівого циркулярних станів поляризації власних хвиль електромагнітного випромінювання.

Лінійна фазова та амплітудна анізотропії також характеризуються азимутом орієнтації осі двопронезаломлення  $\alpha$  (при коливанні електричного вектора вздовж цієї осі випромінювання поширюється з найбільшою фазовою швидкістю), а також азимутом орієнтації осі дихроїзму  $\theta$  (при коливанні електричного вектора вздовж цієї осі випромінювання поширюється з найменшим поглинанням).

## 1.4 Мультиплікативні матричні моделі в поляриметрії

З попереднього пункту відомо, що значну кількість анізотропних середовищ можна охарактеризувати лише одним видом оптичної анізотропії у виділеному діапазоні довжини хвиль. Однак існують середовища, які можна охарактеризувати одночасно двома, трьома або ж всіма чотирма видами анізотропії. В рамках матричних методів Джонса та Мюллера існує два основних модельних підходи для опису поляризаційних властивостей середовищ із складною анізотропією [18].

### 1.4.1 Теорема полярного розкладу

Для аналізу властивостей недеполяризуючих однорідних середовищ із складною анізотропією використовується алгебраїчна теорема полярного розкладу. За цією теоремою матриця Джонса  $\mathbf{T}$  (Мюллера  $\mathbf{M}$ ) довільного однорідного анізотропного недеполяризуючого середовища може бути представлена наступним чином [19]:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_D \mathbf{T}_R = \mathbf{T}_R \mathbf{T}'_D\tag{1.14}$$

де  $\mathbf{T}_R$  — унітарна полярна форма,  $\mathbf{T}_D, \mathbf{T}'_D$  — ермітові полярні форми. Матриця  $\mathbf{T}_R$  описує еліптичну фазову анізотропію з ортогональними станами поляризацій власних хвиль:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} e^{i\eta_R/2} C_u^2 + e^{-i\eta_R/2} S_u^2 & (e^{i\eta_R/2} - e^{-i\eta_R/2}) C_u S_u e^{-i\xi} \\ (e^{i\eta_R/2} - e^{-i\eta_R/2}) C_u S_u e^{i\xi} & e^{i\eta_R/2} S_u^2 + e^{-i\eta_R/2} C_u^2 \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

де  $C_u = \cos(u)$ ,  $S_u = \sin(u)$ ,  $\eta_K$  — фазовий зсув між еліптичними станами поляризацій власних хвиль матриці  $\mathbf{T}_R$ , кути  $u$  і  $\xi$  визначаються як:

$$\begin{aligned} \tan(2\gamma) &= \tan(2u) \cos(\xi), \\ \sin(2\varepsilon) &= \sin(2u) \sin(\xi), \end{aligned} \quad (1.16)$$

де  $\gamma$  та  $\varepsilon$  — відповідно азимут та кут еліптичності станів поляризації власних хвиль. Матриця  $\mathbf{T}_D$  ( $\mathbf{T}'_D$ ) — описує амплітудну анізотропію з еліптичними ортогональними станами поляризацій власних хвиль і набуває вигляду:

$$\mathbf{T}_D = \begin{bmatrix} P_1 C_v^2 + P_2 S_v^2 & (P_1 - P_2) C_v S_v e^{-j\vartheta} \\ (P_1 - P_2) C_v S_v e^{j\vartheta} & P_1 S_v^2 + P_2 C_v^2 \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

де  $C_v = \cos(v)$ ,  $S_v = \sin(v)$ , а  $P_1, P_2$  — коефіцієнти передачі амплітуд ортогональних еліптичних поляризацій матриці  $\mathbf{T}_D$ , кути  $v$  і  $\vartheta$  визначаються як:

$$\begin{aligned} \tan(2\gamma') &= \tan(2v) \cos(\vartheta), \\ \sin(2\varepsilon') &= \sin(2v) \sin(\vartheta), \end{aligned} \quad (1.18)$$

де  $\gamma'$  та  $\varepsilon'$  — відповідно азимут та кут еліптичності стану поляризації власних хвиль. Звідси, з теореми полярного розкладу, можна розділити фазову та амплітудну анізотропію (рис. 1.3а).



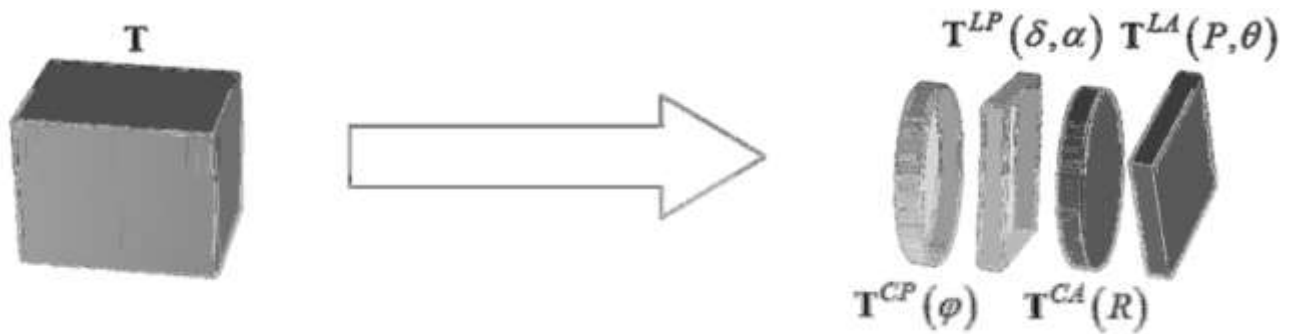


Рис. 1.4. Узагальнена теорема еквівалентності.

Оскільки матриці некомутативні в добутку (1.19), існує  $4! = 24$  поляризаційних базиси — варіанти слідування оптичних елементів. Враховуючи принцип Ван де Хюлстівської взаємності та неповноту базисів  $T^{CA} T^{LP} T^{CP} T^{LA}$  і  $T^{LA} T^{CP} T^{LP} T^{CA}$ , незалежними вважаються лише два базиси [21].

### 1.5 Диференціальні (однорідні) методи в поляриметрії

Однорідне моделювання є ще одним варіантом представлення середовищ із складною анізотропією. В методі однорідного моделювання поляризаційні властивості середовищ із складною анізотропією представляються як одночасна дія на поляризоване (неполяризоване або частково поляризоване) випромінювання складових видів анізотропії.

За основу методу диференціального моделювання взято використання диференціальних матриць [1, 15]. Щоб проілюструвати цей метод, розглянемо поширення поляризованого випромінювання в анізотропному середовищі в напрямку осі  $z$  правої декартової системи координат. Виділимо в цьому середовищі шар товщиною  $\Delta z$ , обмежений двома паралельними площинами із координатами  $z_1$  і  $z_2$  (рис. 1.4).

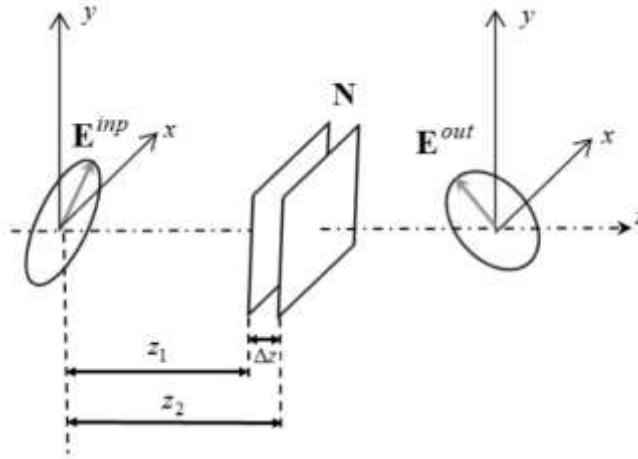


Рис. 1.5. Взаємодія поляризованого випромінювання з нескінченно тонким шаром анізотропного середовища.

В межах кожної площини середовище однорідне, а в додатному напрямку вісі  $z$  анізотропні властивості середовища можуть змінюватися. Еволюція стану поляризації випромінювання із координатою  $z$  описується векторним рівнянням переносу [1,15]:

$$\frac{d\mathbf{E}(z)}{dz} = \mathbf{N}(z)\mathbf{E}(z). \quad (1.20)$$

де  $\mathbf{N}(z)$  — «диференціальна матриця Джонса», що описує поляризаційні властивості нескінченно тонкого шару середовища, який зберігає усі анізотропні властивості такого ж середовища макроскопічної (або скінченної) товщини. Для розрахунку диференціальної матриці Джонса  $\mathbf{N}$  для шару, товщиною  $\Delta z$  з інтегральної матриці Джонса  $\mathbf{T}_{\Delta z}$  цього шару середовища, використовується одне з двох рівнянь:

$$\mathbf{N} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}_{\Delta z} - I}{\Delta z}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{N}(z) = \frac{d\mathbf{T}(z)}{dz} \mathbf{T}^{-1}(z). \quad (1.22)$$

де  $I$  — одинична матриця  $2 \times 2$ .

У випадку однорідних середовищ диференціальна матриця Джонса визначається із рівнянь (1.21), (1.22), а розв'язок рівняння переносу (1.20) має вигляд:

$$\mathbf{T} = \exp(\mathbf{N}z). \quad (1.23)$$

Розв'язки спектральної задачі для диференціальної та інтегральної матриці Джонса однорідних середовищ пов'язані між собою співвідношеннями:

$$\begin{aligned} E_T &= E_N, \\ V_T &= \exp(V_N z). \end{aligned} \quad (1.24)$$

де рівність виконується з точністю до константи.

Для неоднорідних середовищ загального аналітичного розв'язку векторного рівняння переносу (1.20) не існує, а співвідношення (1.24) не виконуються. При цьому, для розрахунку диференціальної матриці Джонса можна використати лише рівняння (1.22).

В межах матричного методу Мюллера для опису поляризаційних та деполаризуючих властивостей нескінченно тонкого шару середовища використовується диференціальна матриця  $\mathbf{m}$ , що визначається як [21]:

$$\mathbf{m}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}(z, \Delta z) - I}{\Delta z}, \quad (1.25)$$

або

$$\mathbf{m}(z) = \left( \frac{d\mathbf{M}(z)}{dz} \right) \mathbf{M}(z)^{-1}. \quad (1.26)$$

Векторне рівняння переносу для вектора Стокса виглядає як [15]:

$$\mathbf{m}(z) = \left( \frac{d\mathbf{M}(z)}{dz} \right) \mathbf{M}(z)^{-1}. \quad (1.27)$$

В цьому випадку векторне рівняння переносу (1.27) описує еволюцію стану поляризації, ступеня поляризації та інтенсивності повністю поляризованого, частково поляризованого або неполяризованого випромінювання при його розповсюдженні у відповідному анізотропному середовищі.

У випадку недеполаризуючого середовища з повністю поляризованим випромінюванням, між диференціальними матрицями Джонса  $\mathbf{N}$  та Мюллера  $\mathbf{m}$  існує взаємно однозначний зв'язок, аналогічний зв'язку відповідних інтегральних матриць Джонса  $\mathbf{T}$  та Мюллера  $\mathbf{M}$  [1].

## 2. ПОЛЯРИЗАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ДЕПОЛЯРИЗУЮЧИХ СЕРЕДОВИЩ З ЦИРКУЛЯРНОЮ АМПЛІТУДНОЮ АНІЗОТРОПІЄЮ

### 2.1 Диференціальна матриця Мюллера і критерій її застосовності

Для опису анізотропних та деполаризуючих характеристик нескінченного тонкого шару однорідного середовища, як показано в [15] може бути використаний диференціальний матричний метод Мюллера. Основною особливістю диференційної матриці Мюллера, що описує деполаризуюче середовище є порушення симетрії елементів  $m_{ij} \neq m_{ji}$ , яка реалізується за рахунок додавання і віднімання однакового деполаризуючого параметра від симетричних елементів матриці. Зокрема, для зазначеного класу середовищ диференціальна матриця Мюллера може бути записана в наступному вигляді:

$$\mathbf{m}_{gen} = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_0 \cos(2\theta) + d_1 & \xi_0 \sin(2\theta) + d_2 & r_0 + d_3 \\ \xi_0 \cos(2\theta) - d_1 & \xi_0 - d_7 & d_6 + 2\phi_0 & d_5 - \delta_0 \sin(2\alpha) \\ \xi_0 \sin(2\theta) - d_2 & d_6 - 2\phi_0 & \xi_0 - d_8 & d_4 + \delta_0 \cos(2\alpha) \\ r_0 - d_3 & d_5 + \delta_0 \sin(2\alpha) & d_4 - \delta_0 \cos(2\alpha) & \xi_0 - d_9 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

де параметри  $\xi_0, \theta, r_0, \delta_0, \alpha, \phi_0$  — відповідають за анізотропні властивості середовища,  $d_{1-6}$  — відповідають пов'язаним з анізотропними властивостями деполаризуючим властивостям даного середовища,  $d_{7-9}$  — відповідають за ізотропну деполаризацію.

Розглянемо клас середовищ, що характеризується циркулярною амплітудною анізотропією (описується параметром  $r_0$ ) і пов'язаною з нею деполаризацією (описується параметром  $d_3$ ). Диференціальна матриця Мюллера для даного класу середовищ згідно матриці (2.1) буде мати вигляд:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & r_0 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_0 - d_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Перевіримо чи є матриця (2.2) фізичною матрицею Мюллера. Для цього повинна виконуватись необхідною і достатньою умова, щоб матриця розміром  $4 \times 4$

була матрицею Мюллера. Ця умова полягає у є невід’ємності власних чисел матриці когерентності  $\mathbf{C}$  (для відповідної матриці Мюллера) розміром  $3 \times 3$  [17]:

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

елементи якої можуть бути розраховані із відповідних елементів матриці Мюллера на основі наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} C_{311} &= \frac{1}{4}(\mathbf{m}_{u11} + \mathbf{m}_{u22} - \mathbf{m}_{u33} - \mathbf{m}_{u44}) \\ C_{322} &= \frac{1}{4}(\mathbf{m}_{u11} - \mathbf{m}_{u22} + \mathbf{m}_{u33} - \mathbf{m}_{u44}) \\ C_{333} &= \frac{1}{4}(\mathbf{m}_{u11} - \mathbf{m}_{u22} - \mathbf{m}_{u33} + \mathbf{m}_{u44}) \\ C_{312} &= C_{321}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{m}_{u23} + i\mathbf{m}_{u14}) \\ C_{313} &= C_{331}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{m}_{u24} - i\mathbf{m}_{u13}) \\ C_{323} &= C_{332}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{m}_{u34} + i\mathbf{m}_{u12}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для застосування даного критерію як показано в [17], потрібно спочатку розрахувати матрицю  $\mathbf{m}_u$ :

$$\mathbf{m}_u = \frac{1}{2}(\mathbf{m}_d + \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}_d^T \cdot \mathbf{G}) \quad (2.5)$$

де  $\mathbf{G}$  — метричний тензор Мінковського:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

а  $\mathbf{m}_d$  — деполаризуюча частина матриці, яка для матриці (2.2) має вигляд:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Далі, використовуючи рівняння (2.2)-(2.7) і використовуючи співвідношення для розрахунку власних чисел матриці (2.3)  $\lambda_{1-3}$  [17], був отриманий наступний результат:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad (2.8)$$

Як можна бачити, із рівняння (2.6) власні числа матриці когерентності (2.3) завжди є невід'ємними, а отже матриця (2.2) є фізичною диференційною матрицею Мюллера, яка описує реальне середовище.

## 2.2 Інтегральна матриця Мюллера

Диференціальна матриця Мюллера (2.2) може бути використана лише для опису анізотропних і деполаризуючих властивостей нескінченного тонкого шару середовища даного класу. Для дослідження ж анізотропних та деполаризуючих властивостей, яким характеризується середовища даного класу скінченної товщини, потрібно розрахувати інтегральну матрицю Мюллера. Для цього скористаємось векторним рівнянням переносу [15]:

$$\frac{d\mathbf{S}(z)}{dz} = \mathbf{m}\mathbf{S}(z), \quad (2.9)$$

яке може бути представлена, як система лінійних диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_1}{dz} = m_{11}S_1 + m_{12}S_2 + m_{13}S_3 + m_{14}S_4 \\ \frac{dS_2}{dz} = m_{21}S_1 + m_{22}S_2 + m_{23}S_3 + m_{24}S_4 \\ \frac{dS_3}{dz} = m_{31}S_1 + m_{32}S_2 + m_{33}S_3 + m_{34}S_4 \\ \frac{dS_4}{dz} = m_{41}S_1 + m_{42}S_2 + m_{43}S_3 + m_{44}S_4 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Розв'язуючи цю систему із початковими умовами:  $S_1(0) = S_{10}, S_2(0) = S_{20}, S_3(0) = S_{30}, S_4(0) = S_{40}$ , отримуємо наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} S_1 = M_{11}S_{10} + M_{12}S_{20} + M_{13}S_{30} + M_{14}S_{40} \\ S_2 = M_{21}S_{10} + M_{22}S_{20} + M_{23}S_{30} + M_{24}S_{40} \\ S_3 = M_{31}S_{10} + M_{32}S_{20} + M_{33}S_{30} + M_{34}S_{40} \\ S_4 = M_{41}S_{10} + M_{42}S_{20} + M_{43}S_{30} + M_{44}S_{40} \end{cases} \quad (2.11)$$

Розрахуємо елементи інтегральної матриці Мюллера із рівняння (2.11) на основі співвідношень [15]:

$$\mathbf{M}^{CA} = \begin{bmatrix} \cosh \left[ z\sqrt{r_0^2 - d_3^2} \right] & 0 & 0 & \frac{(r_0 + d_3)\sinh \left[ z\sqrt{r_0^2 - d_3^2} \right]}{\sqrt{r_0^2 - d_3^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{r_0^2 - d_3^2} \sinh \left[ z\sqrt{r_0^2 - d_3^2} \right]}{(r_0 + d_3)} & 0 & 0 & \cosh \left[ z\sqrt{r_0^2 - d_3^2} \right] \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

При порівнянні інтегральної матриці Мюллера для середовища з циркулярною амплітудною анізотропією і пов'язаною з нею деполяризацією з відповідною матрицею для лінійної фазової анізотропії [12], можна побачити, що в обох матрицях елементи  $M_{12} = M_{13} = M_{21} = M_{23} = M_{24} = M_{31} = M_{32} = M_{34} = M_{42} = M_{43} = 0$ . При цьому на відміну від недеполяризуючого випадку порушується симетрія елементів  $M_{14} \neq M_{41}$ .

### 2.3 Особливості власних чисел

При розрахунку власних чисел диференціальної і інтегральної матриць на основі співвідношень, представлених в [3], були отримані наступні результати:

$$V_{1,2d} = \pm \sqrt{r_0^2 - d_3^2} \quad (2.13)$$

$$V_{1,2i} = e^{\pm z\sqrt{r_0^2 - d_3^2}} \quad (2.14)$$

де  $V_{1,2d}$  — власні числа диференціальної матриці Мюллера,  $V_{1,2i}$  — власні числа інтегральної матриці Мюллера, які описують зсув фаз і відносне поглинання між власними хвилями досліджуваного класу середовищ. Для цього було використано власні числа інтегральної матриці Джонса (2.14) і перехід до інтегральних

параметрів анізотропії середовища:  $r_0 = 2 \operatorname{Arctan}(R)$ ,  $d_3 = 2 \operatorname{Arctan}(D_3)$ . Результат розрахунку представлений на Рис. 2.1

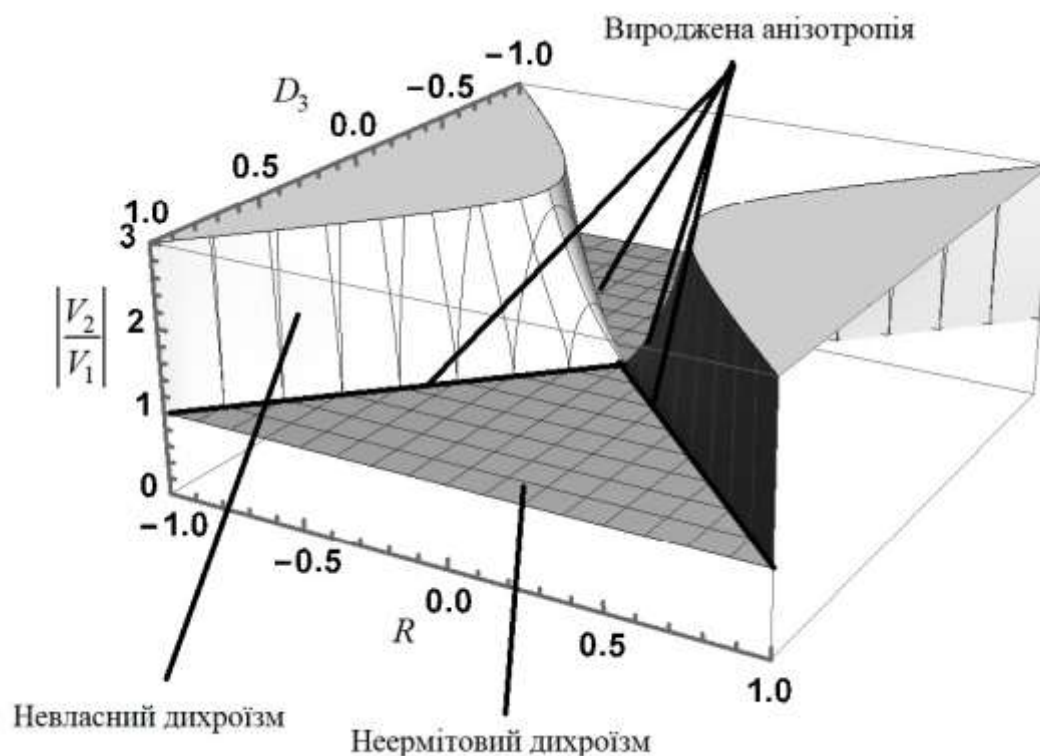


Рис. 2.1 Залежність відношення власних чисел інтегральної матриці Мюллера від параметрів анізотропії середовища для класу однорідних середовищ з циркулярною амплітудною анізотропією і пов'язано з нею анізотропною деполаризацією.

Аналізуючи Рис. 2.1, можна побачити, що в даному класі середовищ реалізуються три типи складної анізотропії, а саме:

- 1) Неермітовий дихроїзм, — дві власні хвилі, по-різному поглинаються в середовищі. Неермітовий дихроїзм реалізується за виконання умови:

$$r_0^2 > d_3^2 \quad (2.15)$$

- 2) Вироджена анізотропія — власні числа співпадають, та в середовищі присутня лише одна власна хвиля; Вироджена анізотропія реалізується за виконання умови:

$$r_0^2 = d_3^2 \quad (2.16)$$

3) Невласний дихроїзм — власні хвилі поширюються з різними фазовими швидкостями (на відміну від усіх інших хвиль, які до того ж по-різному поглинаються). Невласний дихроїзм реалізується за виконання умови:

$$r_0^2 < d_3^2 \quad (2.17)$$

Ці співвідношення є аналогічні співвідношенням, отриманим для різних класів однорідних недеполяризуючих середовищ [18].

#### 2.4 Особливості власних поляризацій та ефект поляризаційної пам'яті

Аналіз власних поляризацій інтегральної матриці Мюллера (2.12) для даного класу середовищ показав, що такими поляризаціями є права та ліва циркулярні поляризації, що описуються наступними векторами Стокса:

$$\mathbf{S}_{R,L} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

При взаємодії таких станів поляризації із середовищем, на виході утворюються поляризації, що описуються векторами Стокса:

$$\mathbf{S}_{R,L} = \begin{bmatrix} 1 \\ p * 0 \\ p * 0 \\ p * (\pm 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p * (\pm 1) \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

де  $p$  – ступінь поляризації світла, що визначається рівнянням (1.10).

Отже, як можна бачити з рівняння (2.19), ліва та права циркулярні поляризації розповсюджуються в середовищі без зміни стану поляризації, але із зменшенням ступеню поляризації.

Одним з найпростіших випадків дослідження деполаризуючих властивостей середовища за допомогою лише одного параметру, є розрахунок залежності ступеню поляризації вихідного світла від параметрів стану поляризації світла на вході в середовище. Такий розрахунок дозволяє проаналізувати такі ефекти як «Поляризаційна пам'ять», а також «Поляризаційне забування», суть яких полягає в

тому, що ступінь поляризації є максимальним і відповідно мінімальним для певних станів поляризації світла.

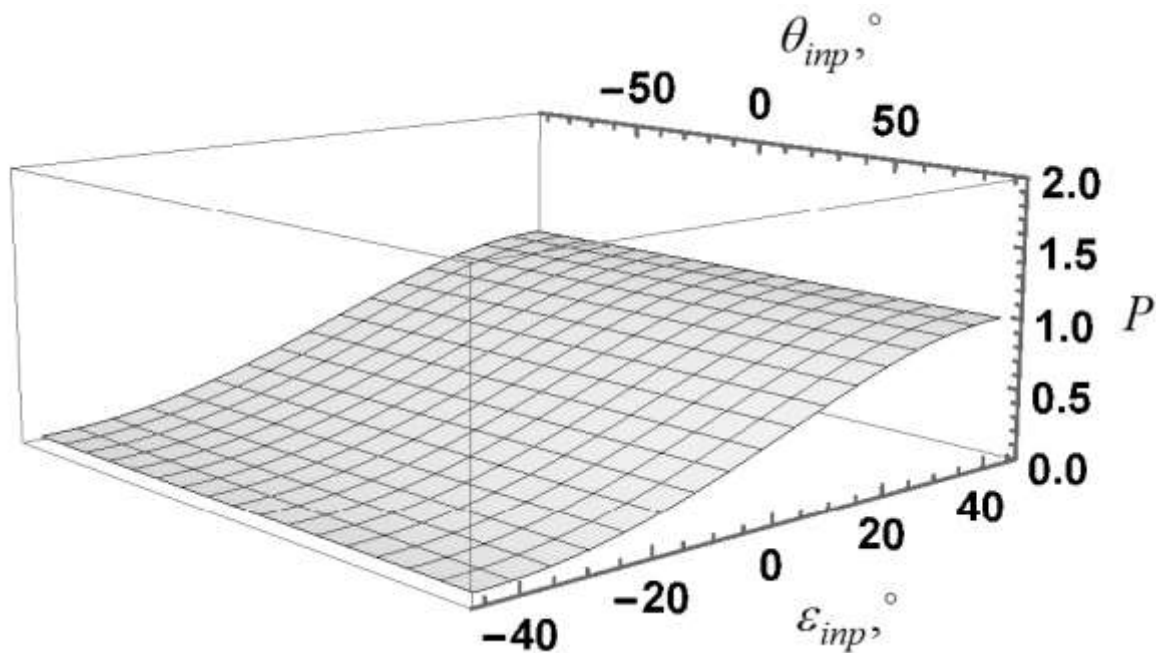
Для розрахунку ступеню поляризації вихідного світла (описується вектором Стокса  $\mathbf{S}_{out}$ ) можна скористатись співвідношенням:

$$P(\varepsilon_{inp}, \theta_{inp}) = \frac{\sqrt{S_{2out}^2 + S_{3out}^2 + S_{4out}^2}}{S_{1out}}, \quad (2.20)$$

вектор Стокса вхідного світла при цьому можна записати як:

$$\mathbf{S}_{inp} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta_{inp})\cos(2\varepsilon_{inp}) \\ \sin(2\theta_{inp})\cos(2\varepsilon_{inp}) \\ \sin(2\varepsilon_{inp}) \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

Використовуючи рівняння (1.11), (2.20), (2.21) для інтегральної матриці Мюллера (2.12), для класу середовищ із циркулярною амплітудною анізотропією і пов'язаною із нею деполіризацією, був отриманий результат представлений на Рис. 2.2.



*Рис. 2.2 Залежність ступеня поляризації світла на виході із середовища із циркулярною амплітудною анізотропією ( $z = 0.7, r_0 = 0.7, d_3 = 0.6$ ) і пов'язаною із нею деполіризацією від азимута та кута еліптичності стану поляризації світла на вході в дане середовище.*

Аналізуючи Рис. 2.2 бачимо, що максимальний ступінь поляризації (ефект «Поляризаційної пам'яті») в даному класі середовищ реалізується для правої циркулярної поляризації ( $\varepsilon_{inp} = 45^\circ$ ), тоді як мінімальне значення ступеню поляризації (ефект «Поляризаційного забування») в даному класі середовищ реалізується для лівої циркулярної поляризації ( $\varepsilon_{inp} = -45^\circ$ ). Отже, обидва ефекти реалізуються для власних поляризацій даного класу середовищ. При цьому слід зазначити, що ступінь поляризації в даному класі середовищ не залежить від значення азимута вхідного стану поляризації, а отже, еліптичні поляризації з одним значенням кута еліптичності, або лінійні стани поляризацій з довільним значенням азимута характеризуються однаковим значенням ступеню поляризації.

Для більш детального аналізу залежності ступеня поляризації від параметрів вхідного еліпса на Рис. 2.3 побудована залежність ступеня поляризації від кута еліптичності вхідної поляризації при довільному значенні азимута цієї поляризації:

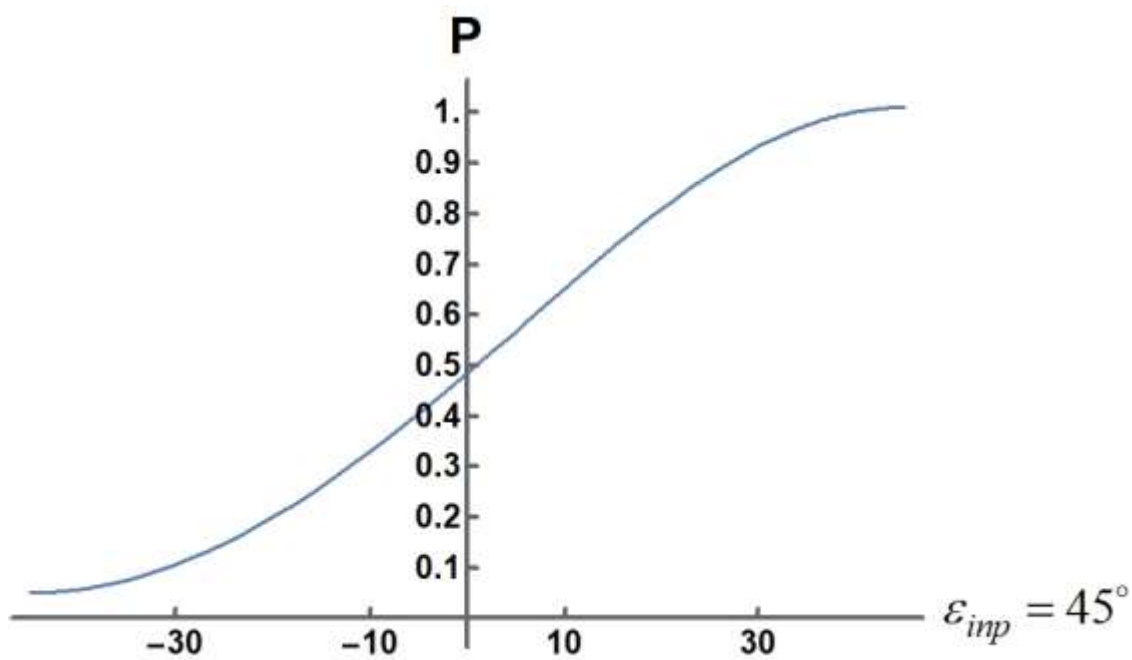


Рис. 2.3 Залежність ступеня поляризації світла на виході із середовища із циркулярною амплітудною анізотропією ( $z = 0.7, r_0 = 0.7, d_3 = 0.6$ ) і пов'язаною із нею деполаризацією від кута еліптичності стану поляризації світла на вході в дане середовище.

Аналізуючи Рис. 2.3, можна отримати, що максимальним значенням ступеня поляризації, яке досягається, є  $P_{\max} \approx 0.99$ , а мінімальним —  $P_{\min} \approx 0.05$ .

## ВИСНОВКИ

В рамках наукової роботи було розглянуто клас однорідних середовищ, що характеризуються циркулярною амплітудною анізотропією і пов'язаною із нею деполаризацією. Диференційна матриця Мюллера даного класу середовищ, у якій деполаризація враховується за допомогою додавання (віднімання) до (від) відповідних елементів матриці Мюллера параметру анізотропної деполаризації, є матрицею, яка може бути фізично реалізована. Інтегральна матриця Мюллера даного класу середовищ характеризується тим, що як і у випадку даного класу середовищ без деполаризації,  $M_{12} = M_{13} = M_{21} = M_{23} = M_{24} = M_{31} = M_{32} = M_{34} = M_{42} = M_{43} = 0$ , однак при цьому  $M_{14} \neq M_{41}$ . Аналіз власних чисел показав, що в даному класі середовищ можуть бути реалізовані ефекти невласного дихроїзму, неермітового дихроїзму та вироджена анізотропія. Власними станами поляризації для даного класу середовищ є права та ліва циркулярна поляризації. Аналіз ефекту «Поляризаційної пам'яті» та «Поляризаційного забування» показав, що вони реалізуються саме для власних поляризацій середовища.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Azzam R.M. Ellipsometry and Polarized Light / R.M. Azzam, N.M. Bashara. – New York: North-Holland Publishing Company, 1977. – 584 p.
2. Shurcliff W.A. Polarized light-production and use / Shurcliff W.A. – Harvard: Harvard University Press, 1962 – 207 p.
3. Kokhanovsky A.A. Light Scattering Media Optics: Problems and Solutions / A.A. Kokhanovsky. – Chichester: Springer-Praxis Books in Environmental Sciences, 2nd Edition, 2001. – 365 p.
4. Mishchenko M.I. Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles / M.I. Mishchenko, L.D. Travis, and, A.A. Lacis. – Cambridge: Camb Univ Press, 2002. – 247p.
5. Ney J.F. Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices // J.F. Ney. – Oxford science publication, 1972. – 352 p.
6. Born M. Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light // M. Born, E. Wolf. – Cambridge University Press, 1999. – 952 p.
7. Lu S.Y. Interpretation of the Mueller matrices based on polar decomposition / S.Y. Lu, R. Chipman // J. Opt. Soc. Am. – 1996. - A 13. – p. 1106–1113.
8. Ossikovski R. Interpretation of nondepolarizing Mueller matrices based on singular-value decomposition / R. Ossikovski // J. Opt. Soc. Am. – 2008. – A 22 (2). – p.473 – 482.
9. Hurwitz H. A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of the three general equivalence theorems / H. Hurwitz , R.C. Jones // J. Opt. Soc. Am. – 1941. – V.31. – p.493–499.
10. Barakat R. Jones matrix equivalence theorems for polarization theory / R. Barakat // Eur. J. Phys. – 1998. – Vol.19. – p.209–216.
11. Savenkov S.N. Generalized matrix equivalence theorem for polarization theory / S.N. Savenkov, V.V. Marienko , E.A. Oberemok // J. Phys. Rev. - 2006. – E. 74. – p. 1- 8.
12. Effective dichroism in forward scattering by inhomogeneous birefringent medium / S. N. Savenkov et al. // JQSRT. – 2009. – Vol.110, Iss.1-2. – P. 30-42.

13. Azzam R.M.A. Propagation of partially polarized light through anisotropic media with or without depolarization. A differential 4 X 4 matrix calculus / R.M.A. Azzam // J. Opt. Soc. Am. – 1979. – Vol.68. – P. 1756 – 1767.
14. Azzam R. M. A., Bashara. N. M., B. E. Merrill Trajectories Describing the Evolution of Polarized Light in Homogeneous Anisotropic Media and Liquid Crystals// J Appl. Opt. – 1973. – Vol. 12. – p. 764-771.
15. Ossikovskii R., General criterion for the physical realizability / R. Ossikovskii, V. Devlaminck // Opt. Lett. – 2014. – Vol. 39, No. 5. – P. 1216-1219.
16. Savenkov S. N., Sydoruk O. I., Muttiah R. S. Eigenanalysis of dichroic, birefringent, and degenerate polarization elements: a Jones-calculus study / S. N. Savenkov, O. I. Sydoruk, R. S. Muttiah // J. Applied Optics. – 2007. – Vol. 46, No. 27, p. 6700-6709.
17. Generalized matrix equivalence theorem for polarization theory / S.N. Savenkov, V.V. Marienko, E.A. Oberemok, O.I. Sydoruk // Phys. Rev. E. – 2006. – Vol.74. - P. 056607 (8 pages).
18. Horn R. Matrix Analysis / R. Horn, Ch. Johnson. - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. – 655 p.
19. Whitney C. Pauli-algebraic operators in polarization optics / C. Whitney // J. Opt. Soc. Am. A. – 1971. - Vol.61. - No9. - P. 1207-1213.
20. van de Hulst H.C. Light Scattering by Small Particles / van de Hulst H.C. - New York: Wiley, 1957 - 437 p.
21. Savenkov S.N. Inverse problem of polarimetry for homogeneous anisotropy media on basis of Mueller matrix calculus / S.N. Savenkov, Ye.A. Oberemok. // Proceedings of SPIE. – 2007. – Vol.6536. – P. 65360E (8 pages).