УДК 524.8

О. Александров, канд. фіз.-мат. наук,
В. Жданов, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
О. Федорова, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

МЕТОД ПОБУДОВИ СИСТЕМ ВІДЛІКУ ЛОКАЛЬНОГО СПОСТЕРІГАЧА ДЛЯ СЛАБКИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ПОЛІВ

Видатні сучасні перспективи мікросекундної астрометрії потребують створення надточних систем відліку, які б дозволяли враховувати найдрібніші релятивістські ефекти, і були би якомога зручними і прозоро зрозумілими. Ми розробляємо метод побудови систем відліку локального спостерігача в рамках лінеаризованої теорії гравітації. Він базується на наближеному розв'язанні рівнянь для геодезичних, їх девіації і паралельного перенесення, а також на перетворенні від миттєвої системи нормальних координат до координат Фермі і оптичних координат. Головна перевага системи оптичних координат полягає в їх безпосередньому зв'язку зі спостережуваними положеннями віддалених об'єктів на небесній сфері.

Ключові слова: система відліку, гравітаційні поля.

1. Вступ

Непересічні сучасні перспективи мікросекундної астрометрії, в першу чергу ті, що пов'язані з GAIA місією, потребують побудови високоточної системи відліку, яка дозволяла би розглядати тонкі релятивістські ефекти, була би якомога більш зручною та будувалася на прозоро зрозумілих алгоритмах. Наукові підходи, які лягли в основу системи обробки спостережуваних даних проекту GAIA [1], були викладені в роботах [2, 3]. В цих роботах, які певним чином підсумовують багаторічні дослідження, подана всебічно розроблена теоретична модель астрометричних спостережень з борту космічного апарата з урахуванням ефектів загальної теорії відносності (ЗТВ) на рівні точності в 1 μas. При цьому за систему відліку взято Барицентричну небесну систему відліку (БНСВ), що рекомендована Резолюціями МАС, прийнятими на XXIV Генеральній Асамблеї Міжнародного астрономічного союзу [4]. Головними теоретичними складовими БНСВ є барицентричні гармонічні координати та вираз метричного тензора у цих координатах, отриманий з рівнянь ЗТВ. Точніше, в роботах [1-3] вираз для метрики був узагальнений аби додатково врахувати параметри β і γ параметризованого пост ньютонівського формалізму.

У цьому контексті треба зауважити таке. З часу розробки ріманової геометрії та створення ЗТВ відомо, що задання системи координат (тобто її практична реалізація) та метричних коефіцієнтів як функцій цих координат дозволяє розраховувати кути між векторами (в одній точці) і відстані між близькими точками. Але таку конструкцію з різних причин важко вважати повноцінною системою відліку. З одного боку, відсутність інваріантного визначення системи координат означає також відсутність зв'язку з теоретичними системами координат. Тобто всяка інша система координат повинна визначатися явно через задану. З другого боку, явне задання метрики, навіть з параметрами, суттєво обмежує можливості перевірок теорії гравітації. Існують також сумніви, які стосуються питань зручності та доцільності, наприклад, характеризувати положення джерел так званими координатними векторами [2, 3], які не мають безпосереднього геометричного сенсу. У випадку GAIA ряд авторів розробляють альтернативні підходи до опису спостережень [5, 6]. На наш погляд, стратегія систематичного застосування ЗТВ при обробці астрометричних спостережень ще далека від повної розробки і має краще використовувати результати, що отримані в цій теорії, де питання застосувань до майбутніх спостережень глибоко вивчалися принаймні з 60-х років минулого століття (див., напр. [7-12]).

Використання гармонічних координат не вирішує проблему інтерпретації спостережень, оскільки самі вони ніяк не прив'язані до спостережуваних. З іншого боку, давно є відомими релятивістські системи відліку, які базуються на інваріантних співвідношеннях, що характеризують спостережувані. Ці співвідношення визначаються коректно для будь-якої метрики, незалежно від рівнянь поля. Як приклад таких систем ми можемо нагадати системи відліку локального спостерігача (СВЛС) що ґрунтуються на координатах Фермі (КФ) або на оптичних координатах (ОК) [7-12]. Ці СВЛС будуються на геодезичних лініях і мають чітку геометричну інтерпретацію (тобто є інваріантно визначеними). КФ є найбільш прямим релятивістське узагальненням системи відліку рухомого спостерігача в механіці Ньютона. Водночас, ОК, які оперують безпосередньо з положенням об'єкта на небесній сфері, найбільш тісно пов'язані зі спостереженнями.

КФ більше досліджені (див., наприклад, [13-18]), тоді як ОК було приділено мало уваги [19]. Зауважимо, що в останні роки деякі з варіантів ОК використовуються в космології під назвою "спостережувані координати" (observational coordinates) [20].

Тут ми хочемо продемонструвати, як розроблений математичний апарат, пов'язаний з геодезичними, їх девіацією та паралельним перенесенням застосовується для переходу до КФ і ОК і дозволяє знайти метрику в цих координатах для довільного слабкого поля. Хочемо звернути увагу на близькість до нашого підходу роботи Нестерова [16], в якій також для побудови КФ залучалося рівняння девіації геодезичних. Ми використовуємо більш розвинутий апарат [11], розглядаємо також ОК і досягаємо значного спрощення розрахунків шляхом переходу від інтегрування тензора кривини до інтегралів від збурення метрики.

2. Базові співвідношення в загальному випадку

Умовимося, що індексами з грецької абетки позначаються номери координат і координатних компонент, латинські індекси нумерують вектори орторепера і відповідні реперні компоненти. Також покладемо, що індекси a,b,c,d,e приймають значення від 0 до 3, а індекси i,j,k,l,m – від 1 до 3.

Нехай світовою лінією спостерігача є $x_O^{\rho}(\tau)$, τ – його власний час і e_a^{ρ} – його власна локальна система відліку (лоренцев 4-репер). Вектор e_0^{ρ} – це, звичайно, 4-швидкість спостерігача: $dx_O^{\rho}/d\tau = u^{\rho} = e_0^{\rho}$. Зауважимо, що у ЗТВ система вихідних координат x^α , як правило, чи зовсім не конкретизується, чи обирається з умов зручності математичного розгляду тієї чи іншої задачі (зокрема, це можуть бути гармонічні координати).

Вздовж світової лінії власний репер переноситься за правилом (див., напр., [8,10]):

$$\frac{De_a^\rho}{\partial \tau} = \Omega^\rho_{.\sigma} e_a^\sigma \qquad (1)$$

Тут $\Omega_{\rho\sigma} = a_\rho u_\sigma - u_\rho a_\sigma + \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} u^\mu \omega^\nu$ – тензор 4-обертань спостерігача, $a^\rho = Du^\rho / \partial\tau$ – його 4-прискорення, ω^ν – кутова швидкість. Якщо спостерігач рухається без прискорення і не обертається, то його власний репер переноситься вздовж його світової лінії паралельно.

Вихідними даними, необхідними для побудови СВЛС, є метрика $g_{\alpha\beta}\left(x^\gamma\right)$, світова лінія спостерігача $x_O^\rho(\tau)$, просторові вектори $e_i^\rho\Big|_{\tau=0}$ в початковий момент, та кутова швидкість $\omega^i(\tau)$. Системи відліку локального спостерігача, які будуть розглядатися, будуються на базі сукупності геодезичних ліній, що починаються у точці спостереження. Розглянемо геодезичну $x^\alpha(\tau,s)$, що параметризована канонічним параметром s , і з'єднує спостережуваний об'єкт з точкою $x^\sigma(\tau,0) = x_O^\sigma(\tau)$. Нехай v^ρ – одиничний дотичний вектор цієї геодезичної у точці $x_O^\sigma(\tau)$: $v^\rho \equiv \delta_\alpha^\rho \, dx^\alpha(\tau,s)/ds\Big|_{s=0}$. Тоді рімановими нормальними координатами (миттєвими) точки $x^\alpha(\tau,s)$, що пристосовані до тетради e_a^ρ і починаються у точці $x_O^\sigma(\tau)$, називають величини $y^b = e_\rho^b v^\rho s$, де e_ρ^b – корепер, що є дуальним до e_b^ρ. Величини $y^\rho = v^\rho s$, тобто компоненти геодезичного радіус-вектора відносно координатного репера можна розглядати як РНК, що пристосовані до цього репера.

Аби знайти формули координатного перетворення, що пов'язує вихідні координати x^α з РНК, необхідно знайти загальний розв'язок $x^\alpha(\tau,s) = X^\alpha\left(x_O^\sigma(\tau), v^\rho s\right)$ задачі Коші для рівняння геодезичних

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\left(x^\varepsilon\right)\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \, . \qquad (2)$$

Якщо зафіксувати миттєве положення спостерігача, покладаючи $\tau = \tau_0$, то на базі РНК визначається найбільш проста з математичної точки зору система відліку, яка окрім цих координат містить поле репера $e_b^\alpha\left(\tau_0, v^\rho s\right)$, отримане паралельним перенесенням репера $e_b^\rho(\tau_0, 0)$ вздовж геодезичних $X^\alpha\left(x_O^\sigma(\tau_0), y^\rho\right)$: $e_b^\alpha = G_\rho^\alpha e_b^\rho$, де

$$\frac{dG_\rho^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} G_\rho^\beta \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \, , \; G_\rho^\alpha\Big|_{s=0} = \delta_\rho^\alpha \, . \qquad (3)$$

Таке поле репера було введене Е. Картаном.

Для астрономічних застосувань більш практичними видаються СВ Фермі і особливо оптична СВ. При побудові координат Фермі застосовуються лише ті геодезичні лінії, які належать власному простору спостерігача, тобто є ортогональними до його світової лінії: $g_{\rho\sigma}\left(x_O^\lambda(\tau)\right) v^\rho u^\sigma(\tau) = v^0 = 0$. При цьому КФ z^a визначаються таким чином:

$$z^0 = \tau \, , \; z^i = y^i \, . \qquad (4)$$

Поле репера також будується шляхом паралельного перенесення вздовж цих геодезичних [10].

Подібним чином будується і оптична СВ. Відмінність полягає у тому, що при визначенні оптичних координат ζ^a замість ортогональних застосовуються світлові геодезичні $g_{\rho\sigma}\left(x_O^\lambda\right) v^\rho v^\sigma = 0$, спрямовані в минуле, $v^0 = -\sqrt{\Sigma_{i=1}^3 \left(v^i\right)^2}$:

$$\zeta^0 = \tau \, , \; \zeta^i = y^i \, . \qquad (5)$$

У випадку аналітичної метрики добре відомо як будувати розв'язки рівнянь (2) і (3) у вигляді розкладів Тейлора (див. [11]). Якщо ж метрика належить до класу C^k , то відповідний тейлорівський поліном дає наближений розв'язок цієї задачі. Альтернативний підхід до наближеного розв'язку цих рівнянь можна побудувати у випадку малості тензора кривини. При цьому, на відміну від попереднього, використовуються не тейлорівські коефіцієнти, що обчислюються у точці спостереження, а деякі інтегральні характеристики викривленості простору-часу.

Формули координатного перетворення, що пов'язують вихідні координати x^α з нормальними координатами, дозволяють надати координатам x^α певний конкретний зміст. За допомогою матриці Якобі $Y_\alpha^b = \dfrac{\partial y^b}{\partial x^\alpha}$ (та оберненої до неї) конкретної визначеності також набувають компоненти тензорів. Нехай, наприклад, V^α – компоненти деякого векторного поля в координатах x^α . Його компоненти в нормальних координатах $\overset{*}{V}{}^b = Y_\alpha^b V^\alpha$ – це вже конкретні величини. Але їх суттєвий недолік полягає у тому, що це компоненти відносно координатного репера, який загалом не є ні нормованим, ні паралельним, що робить безглуздим їх порівняння в різних точках. Саме цей недолік усувається переходом до компонент $\tilde{V}^a$ відносно поля паралельного ортонормованого репера, який здійснюється за допомогою матриці S^a_b [11]: $\tilde{V}^a = S^a_b Y^b_\alpha V^\alpha$. Матриці Y^b_α і S^a_b можна знайти з рівняння девіації геодезичних [11].

Загальні формули перетворення спостережуваних до СВ Фермі були знайдені в роботі [16], а до оптичної СВ – в [19] (див. ткж. [11]). При цьому фундаментальну роль поряд з $S^a_b\left(y^c\right)$ відіграє ще одна матриця $C^a_b\left(y^c\right)$. Ці дві матриці задовольняють такі рівняння:

$$D^2\mathbf{S} + D\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{S}, \tag{6}$$

$$D^2\mathbf{C} - D\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{C}. \tag{7}$$

Тут $D = y^a \dfrac{\partial}{\partial y^a} = s\dfrac{d}{ds}$, $\tilde{r}^a_b = \tilde{R}^a_{.cdb}\left(y^e\right)y^c y^d$, $\tilde{R}^a_{.cdb}$ – це результат паралельного перенесення тензора кривини вздовж геодезичної у точку спостереження. Рівняння (6,7) можна трактувати як деяке переформулювання рівняння девіації геодезичних. Окрім цих рівнянь матриці **S** і **C** задовольняють такі початкові умови:

$$S^a_b(0) = C^a_b(0) = \delta^a_b, \qquad dS^a_b/ds\big|_{s=0} = dC^a_b/ds\big|_{s=0} = 0. \tag{8}$$

Метричний тензор у нормальних координатах дається такою формулою:

$$\overset{*}{g}_{ab}\left(y^c\right) = \eta_{cd} S^c_a S^d_b. \tag{9}$$

В координатах Фермі для метрики g^{Fermi}_{ab} знайдено [16]:

$$g^{Fermi}_{ab} = \eta_{cd} G^{(F)c}_a G^{(F)d}_b, \tag{10}$$

де

$$G^{(F)a}_0 = C^a{}_0 + S^a{}_i \Omega^i{}_k z^k, \quad G^{(F)a}_j = S^a{}_j. \tag{11}$$

Подібним чином, для метрики в оптичних координатах g^{Opt}_{ab} маємо [19]:

$$g^{Opt}_{ab} = \eta_{cd} G^{(O)c}_a G^{(O)d}_b, \tag{12}$$

$$G^{(O)a}_0 = C^a{}_0 + S^a{}_i \Omega^i{}_k \zeta^k, \quad G^{(O)a}_j = S^a{}_j + S^a{}_0 \frac{\zeta^j}{y^0}. \tag{13}$$

Матриці $G^{(F)b}_a$ і $G^{(O)b}_a$, які тут фігурують, це не що інше як оператор паралельного перенесення вздовж геодезичних у відповідних координатах. Точніше, $G^{(F)b}_a = e^b_\mu G^\mu_\beta \dfrac{\partial x^\beta}{\partial z^a}$ і $G^{(O)b}_a = e^b_\mu G^\mu_\beta \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \zeta^a}$, де G^μ_α – оператор паралельного перенесення вздовж відповідних геодезичних. Зауважимо, хвильовий 4-вектор та вектори поляризації електромагнітного випромінювання переносяться паралельно від джерела до спостерігача, отже в координатах спостерігача безпосередньо описується матрицею $G^{(O)a}_b$.

3. Основні співвідношення у випадку слабкого гравітаційного поля

У наближенні слабкого поля метричний тензор простору-часу $g_{\alpha\beta}\left(x^\gamma\right)$ задається у вигляді суми тензора Мінковського $\eta_{\alpha\beta}$ і малого збурення $h_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\left(x^\gamma\right); \tag{14}$$

компоненти матриці $h_{\alpha\beta}$ набагато менші за одиницю (те саме стосується і всіх її похідних). Далі у всіх розрахунках нехтують будь-якими добутками компонент $h_{\alpha\beta}$ (або їх похідних) [8]. При цьому символи Кристофеля приймають вигляд

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon}\left(g_{\varepsilon\beta,\gamma} + g_{\varepsilon\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\varepsilon}\left(h_{\varepsilon\beta,\gamma} + h_{\varepsilon\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\varepsilon}\right), \tag{15}$$

і тензор Рімана

$$R_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\varepsilon,\beta\gamma} + h_{\beta\gamma,\alpha\varepsilon} - h_{\beta\varepsilon,\alpha\gamma} - h_{\alpha\gamma,\beta\varepsilon}\right). \tag{16}$$

Звичайно, ці формули справджуються лише у певному класі координатних систем, які відрізняються одна від одної лише малими доданками. Просте координатне перетворення, що має такий вид

$$x'^\alpha = x^\alpha - \delta^\alpha_\mu\left[\frac{1}{2}h^\mu_\nu\left(x^\sigma_O\right)\left(x^\nu - x^\nu_O\right) - \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left(x^\sigma_O\right)\left(x^\nu - x^\nu_O\right)\left(x^\lambda - x^\lambda_O\right)\right] \tag{17}$$

трансформує метрику таким чином:

$$g'_{\alpha\beta}\left(x^\varepsilon\right) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\left(x^\varepsilon\right) - h_{\alpha\beta}\left(x^\varepsilon_O\right) - h_{\alpha\beta,\gamma}\left(x^\varepsilon_O\right)\left(x^\gamma - x^\gamma_O\right). \tag{18}$$

В малих доданках замість координат x^{β} можна застосовувати x'^{β}, і далі різниці $\left(x'^{\rho}-x_O^{\rho}\right)$ заміняються відповідними компонентами геодезичного радіус-вектора $\left(x'^{\rho}-x_O^{\rho}\right)\to y^{\rho}$:

$$g'_{\alpha\beta}\left(x'^{\varepsilon}\right)=\eta_{\alpha\beta}+h'_{\alpha\beta}\left(x_O^{\rho},y^{\mu}\right), \tag{19}$$

$$h'_{\alpha\beta}\left(x_O^{\rho},y^{\mu}\right)=h_{\alpha\beta}\left(x_O^{\rho}+y^{\rho}\right)-h_{\alpha\beta}\left(x_O^{\rho}\right)-h_{\alpha\beta,\sigma}\left(x_O^{\rho}\right)y^{\sigma}. \tag{20}$$

У випадку рухомої опорної точки $x_O^{\rho}(\tau)$ це перетворення звичайно залежить від параметра τ.

Далі, щоби не ускладнювати формули, будемо відкидати штрихи, що пов'язані з перетворенням (17). При цьому метрика задовольняє таким умовам:

$$g_{\alpha\beta}\left(x_O^{\rho}\right)=\eta_{\alpha\beta}, \quad h_{\alpha\beta}\left(x_O^{\rho}\right)=0, \quad h_{\alpha\beta,\gamma}\left(x_O^{\rho}\right)=\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\left(x_O^{\rho}\right)=0. \tag{21}$$

У випадку слабкого поля лінеаризоване рівняння паралельного перенесення (3) приймає такий вид:

$$DG_{\sigma}^{\alpha}=-\frac{1}{2}\left[Dh_{\beta}^{\alpha}+\eta^{\alpha\gamma}y^{\rho}\left(h_{\rho\gamma,\beta}-h_{\rho\beta,\gamma}\right)\right]\delta_{\sigma}^{\beta}; \tag{22}$$

а рівняння геодезичних (2) можна подати у вигляді: $D\left(x^{\alpha}-x_O^{\alpha}\right)=G_{\rho}^{\alpha}y^{\rho}$.

Матриці $\mathbf{S}$ і $\mathbf{C}$ у випадку слабкого поля можна подати у вигляді:

$$S_b^a=\delta_b^a+\Sigma_b^a, \quad C_b^a=\delta_b^a+\Delta_b^a, \tag{23}$$

де Σ, Δ є малими. Рівняння (6,7) приймають такий вигляд:

$$D(D+1)\Sigma=\tilde{\mathbf{r}}, \quad D(D-1)\Delta=\tilde{\mathbf{r}}. \tag{24}$$

Вводимо три системи інтегралів, через які можна виразити всі необхідні величини:

$$I_{\alpha\beta}\left(x_O^{\sigma},y^{\rho}\right)=\frac{1}{s}\int_0^s h_{\alpha\beta}\left(x_O^{\sigma},s_1v^{\rho}\right)ds_1, \quad J_{\alpha\beta}\left(x_O^{\sigma},y^{\rho}\right)=\int_0^s\frac{h_{\alpha\beta}\left(x_O^{\sigma},s_1v^{\rho}\right)}{s_1}ds_1, \; K_{\alpha\beta}\left(x_O^{\sigma},y^{\rho}\right)=s\int_0^s\frac{h_{\alpha\beta}\left(x_O^{\sigma},s_1v^{\rho}\right)ds_1}{s_1^2}. \tag{25}$$

Зауважимо, що внаслідок співвідношень (21) всі ці інтеграли при малих s змінюються як s^2, отже при $s=0$ вони разом з першими похідними дорівнюють нулю.

Інтегрування розглядуваних рівнянь значно спрощується, якщо виразити ці інтеграли через раніше введений оператор D:

$$\mathbf{I}=\frac{1}{D+1}\mathbf{h}, \quad \mathbf{J}=\frac{1}{D}\mathbf{h}, \quad \mathbf{K}=\frac{1}{D-1}\mathbf{h}, \tag{26}$$

та взяти до уваги комутаційні співвідношення

$$(D\pm k)^{-1}y^{\sigma}=y^{\sigma}(D\pm k+1)^{-1}, \quad (D\pm k)^{-1}\frac{\partial}{\partial y^{\sigma}}=\frac{\partial}{\partial y^{\sigma}}(D\pm k-1)^{-1}, \tag{27}$$

і, звичайно, враховувати початкові умови. Операторні рівності (27) мають сенс лише на тих функціях, для яких обидві частини рівності однозначно визначені. Саме в зв'язку з цим ми зробили заміну (17-20).

Після інтегрування рівняння геодезичних (2) з виразом (15) для коефіцієнтів Кристофеля знаходимо формули перетворення до ріманових нормальних координат (cf. [17])

$$x^{\alpha}=x_O^{\alpha}+y^{\alpha}-y^{\rho}\eta^{\alpha\beta}I_{\beta\rho}+\frac{1}{2}\eta^{\alpha\rho}y^{\mu}y^{\nu}\left(J_{\mu\nu,\rho}-I_{\mu\nu,\rho}\right). \tag{28}$$

Тут і далі комою позначені частинні похідні за нормальними координатами. Координати y^{ρ} пристосовані до координатного репера в точці x_O^{σ}, який згідно (21) є ортонормованим, і який в загальному випадку відрізняється від власного репера спостерігача деяким перетворенням Лоренца. Конкретний вид цього зв'язку визначається рівнянням (1) і відповідними початковими умовами.

Інтегруючи рівняння (3), отримуємо: $e_a^{\alpha}\left(x^{\beta}\right)=G_{\rho}^{\alpha}e_a^{\rho}\left(x_O^{\sigma}\right)$, де

$$G_{\sigma}^{\alpha}=\delta_{\sigma}^{\alpha}-\frac{1}{2}h_{\sigma}^{\alpha}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}y^{\gamma}\left(J_{\gamma\beta,\sigma}-J_{\gamma\sigma,\beta}\right). \tag{29}$$

З формули (16) маємо

$$\tilde{r}_{\mu\nu}=\tilde{R}_{\mu\rho\sigma\nu}y^{\rho}y^{\sigma}=\frac{1}{2}\left[y^{\rho}y^{\sigma}\partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\rho\sigma}+\left(D^2-D\right)h_{\mu\nu}-2y^{\rho}D\partial_{(\nu}h_{\mu)\rho}\right]. \tag{30}$$

З рівнянь (24) після інтегрування знаходимо

$$\Sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left[h_{\mu\nu}-2I_{\mu\nu}+2y^{\alpha}\left(J_{\alpha(\nu,\mu)}-2I_{\alpha(\mu,\nu)}\right)+y^{\alpha}y^{\beta}\left(J_{\alpha\beta,\mu\nu}-I_{\alpha\beta,\mu\nu}\right)\right], \tag{31}$$

$$\Delta_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left[h_{\mu\nu}-2y^{\alpha}J_{\alpha(\mu,\nu)}+y^{\alpha}y^{\beta}\left(K_{\alpha\beta,\mu\nu}-J_{\alpha\beta,\mu\nu}\right)\right]. \tag{32}$$

Підставляння цих виразів в рівняння (10-13) дає вирази для метрики в координатах Фермі та оптичних координатах. Приклади застосування отриманих формул автори сподіваються розглянути в іншій публікації.

4. Обговорення

Ми розглянули задачу переходу від довільної початкової системи координат до миттєвої системи РНК і далі до КФ і ОК вздовж світової лінії спостерігача. Раніше знайдені загальні формули застосовані до випадку слабких гравітаційних полів. Формули перетворення координат та вирази для метричного тензора в цих координатах сформульовані через однократні інтеграли (вздовж прямих, що проходять через спостерігача) від виразів, які містять безпосередньо збурення метрики у вихідних координатах. Результати можуть бути застосовані при математичному моделюванні надточних астрометричних спостережень.

Список використаних джерел

1. Lindegren L., Lammers U., Hobbs D. et al. The astrometric core solution for the Gaia mission: Overview of models, algorithms and software implementation // Astron. Astrophys. – 2012. – V. 538. – A78.
2. Klioner S.A. A practical relativistic model for microarcsecond astrometry in space // Astron. J. – 2003. – V.125. – P. 1580–1597.
3. Klioner S. A. Physically adequate proper reference system of a test observer and relativistic description of the GAIA attitude // Phys. Rev. D. – 2004 – V. 69, 124001.
4. Soffel M., Klioner S., Petit G. et al. The IAU 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics and metrology in the relativistic framework: explanatory supplement // Astron. J. – 2003 – V. 126. – P. 2687-2706. DOI:10.1086/378162.
5. Crosta M. Tracing a relativistic Milky Way within the RAMOD measurement protocol // Springer Proceedings in Physics. – 2014. – V. 157. – P. 347-353.
6. Bertone S., Le Poncin-Latte C., Crosta M. et al. Relativistic models for GAIA at the (cross)check-point // SF2A-2013: Proc. of Ann. meet. of French Soc. of Astron. and Astrop. Eds.: L. Cambresy, F. Martins, E. Nuss, A. Palacios. – P.155-159.
7. Синг Дж. Л. Ощая теория относительности. – М: Изд. иностр. лит., 1963.
8. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. – М: Мир, 1977. Т. 1-3.
9. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.
10. Мицкевич Н.В., Ефремов А.П., Нестеров А.И. Динамика полей в общей теории относительности. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
11. Пирагас К.А., Жданов В.И., Александров А.Н., Кудря Ю.Н., Пирагас Л.Е. Качественные и аналитические методы в релятивистской динамике. – М.: Энергоатомиздат, 1995.
12. Яцків Я.С., Александров О.М., Вавилова І.Б. та ін. Загальна теорія відносності: горизонти випробувань. – К.: ГАО НАНУ, 2013.
13. Ashby N., Bertotti B. Relativistic Effects in Local Inertial Frames // Phys. Rev. D. – 1986. – 34(8). – P. 2246-2259.
14. Fukushima T. The Fermi coordinates for weak gravitational fields // Cel. Mech. – 1988. – V. 44. – P. 61-75.
15. Александров А.Н., Жданов В.И., Парновский С.Л. Релятивистская система отсчета в околоземном пространстве // Кинемат. физ. небесн. тел. – 1990. – Т. 6, № 2. – С. 3-7.
16. Жданов В.И., Александров А.Н. Координаты Ферми и радиоинтерферометрические наблюдения // Вестник Киев. Ун-та. Астрономия. – 1990. – Т. 32. – С. 24-28.
17. Marzlin K. Fermi coordinates for a weak gravitational fields // Phys. Rev. Dc 1994. – V. 50. – P. 888-891.
18. Nesterov A. Riemann normal coordinates, Fermi reference system and the geodesic deviation equation // Class. Quantum. Grav. – 1999. – V.16. – P. 465-477.
19. Александров О.М., Жданов В.І. До теорії релятивістських систем відліку, побудованих на основі оптичних координат // Вісник Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 1992. – № 3. – С. 6-11.
20. Clarkson C., Maartens R. Inhomogeneity and the foundations of concordance cosmology // Class. Quantum Grav. – 2010. – V. 27. – 124008.

Надійшла до редколегії 01.07.14

А. Александров, канд. физ.-мат. наук,
В. Жданов, д-р физ.-мат. наук, проф.,
О. Федорова, канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченка, Киев

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА ЛОКАЛЬНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ ДЛЯ СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

Выдающиеся современные перспективы микросекундной астрометрии требуют создания сверхточных систем отсчета, позволяющих учитывать мельчайшие релятивистские эффекты, и были бы как можно более удобными и прозрачно понятными. Мы разрабатываем метод построения систем отсчета локального наблюдателя в рамках линеаризованной теории гравитации. Он базируется на приближенном решении уравнений для геодезических, их девиации и параллельного переноса, а также на преобразовании от мгновенной системы нормальных координат к координатам Ферми и оптических координат. Главное преимущество системы оптических координат заключается в их непосредственной связи с наблюдаемыми положениями удаленных объектов на небесной сфере.

Ключевые слова: система отсчета, гравитационные поля.

A. Alexandrov, Ph.D. in Phys. and Math. Sciences,
V. Zhdanov, Dr. Phys. and Math. Sciences, Prof.,
E. Fedorova, Ph.D. in Phys. and Math. Sciences
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

CONSTRUCTION OF LOCAL OBSERVER REFERENCE SYSTEMS FOR WEAK GRAVITATIONAL FIELDS

Outstanding modern perspectives of microarcsecond astrometry demand to construct accurately the reference system which would be appropriate to consider the tiniest relativistic effects, and be convenient as possibly and clearly understandable as well. We develop a method to construct the reference system of a local observer within the linearized gravitation theory. It is based on the solution of equations for the geodesics, their deviation and for parallel transport, and also on the transformation from the instant normal coordinates to the Fermi and optical ones. The main advantage of the optical coordinates system is due to their direct link with observable positions of distant objects on the celestial sphere.

Keywords: reference system, gravitational fields.