

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В. Т. Грінченко
В. Т. Маципура
А. О. Снарський

**КРОК ДО ТАЄМНИЦЬ
НЕЛІНІЙНОГО СВІТУ
ХАОС І ФРАКТАЛИ**

Навчальний посібник



УДК 510.6:530.182/.191(075.8)

Г82

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. НАН України Б. І. Лев,
д-р техн. наук Д. І. Черній

*Рекомендовано до друку
вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол № 4 від 30 листопада 2022 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 2-23 від 2 березня 2023 року)*

Грінченко В. Т.

Г82

Крок до таємниць нелінійного світу : хаос і фрактали :
навч. посіб. / В. Т. Грінченко, В. Т. Маципура, А. О. Снарський.
– К. : ВПЦ "Київський університет". – 2024. – 416 с.

ISBN 978-966-933-283-7

Наведено характерні властивості динаміки нелінійних систем і засоби геометричної візуалізації, що сприяють формуванню загальних уявлень про особливості нелінійного світу. Однією з його особливостей є явище детермінованого хаосу, яке спостерігають під час дослідження динаміки детермінованих систем. Описано властивості фрактальних структур, що дають наочну геометричну інтерпретацію процесів детермінованого хаосу, завдяки побудові атракторів і меж їхніх басейнів притягання. Зазначено важливі етапи в історії формування теорії динамічних систем. Розглянуто можливості аналізу нелінійної динаміки в сигналах біологічного походження.

Для студентів, що навчаються за освітньою програмою "Прикладна математика". Може зацікавити і ширше коло читачів.

УДК 510.6:530.182/.191(075.8)

ISBN 978-966-933-283-7

© Грінченко В. Т., Маципура В. Т. Снарський А. О., 2024
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2024

ВСТУПНЕ СЛОВО

Як до чудес, до них ви і поставтесь.
Багато є, Горацію, на світі,
Що і не снилось нашим мудрецам¹.

В. Шекспір. Гамлет

Відкриємо нашу книгу шекспірівськими рядками, які написані понад 400 років тому. Проте і тоді, і нині людина поступово пізнає природу, розширює горизонт свого бачення, а отже, і в майбутньому дослідники відкриватимуть ще багато нового й цікавого. Зрозуміло, що думки ці не нові, але щоб підкреслити їхню вагомість, ми, звертаючись до читача, хочемо навести висловлювання видатного французького вченого Анрі Пуанкаре², в якому йдеться про розвиток науки та її роль у житті суспільства [37, с. 281–282]:

"Рівень цивілізації залежить від науки та мистецтва. Формула "наука для науки" збуджувала подив; а тим часом це, звичайно, варте "життя для життя", якщо життя не жалюгідне і нікчемне, і навіть "щастя для щастя", якщо не триматися того погляду, що всі задоволення рівноцінні, якщо не вважати, що мета цивілізації полягає в тому, щоб доставляти алкоголь любителям випити.

Будь-яка дія повинна мати мету. Ми маємо страждати, маємо працювати, маємо платити за наше місце у виставі, щоб бачити, або принаймні щоб інші побачили світ... Геологічна історія показує нам, що життя є лише побіжний епізод між двома вічностями смерті, і що в цьому епізоді минула і майбутня діяльність свідомої думки – не більше як мить. Думка – лише спалах світла посеред довгої ночі.

Проте цей спалах – все".

¹ Переклад О. А. Грязнова. Грязнов Олександр Андрійович (1940–2021) – український поет і перекладач.

² Пуанкаре Анрі Жюль (1854–1912) – французький математик, фізик, астроном і філософ.

У цьому виданні читач познайомиться з поняттями детермінованого хаосу, фракталами, отримає короткі відомості з історії їхнього виникнення. Формування змісту зазначених понять знаменувало новий важливий крок у розумінні закономірностей процесів у навколишньому світі. Автори сподіваються, що сторінки книги, стануть невеликим, але цілеспрямованим імпульсом, завдяки якому читач зробить перший крок до глибшого розуміння світу, що нас оточує і в якому ми живемо.

ПЕРЕДМОВА

З давніх часів вважалося, що передбачення – це одна з основних цілей науки. Розвиток математики суттєво розширив можливості дослідників у проведенні наукового прогнозу. Виявилось, наприклад, що рух небесних тіл можна розраховувати, розв'язуючи диференціальні рівняння, які можуть бути досить складними, і для їхнього розв'язання потрібно буде докласти чимало зусиль. Така робота захопила вчених на багато років і, здавалося, що єдиною перешкодою тут стануть суто математичні труднощі, які із часом подолають.

Однак із розвитком науки виникло розуміння того, що не завжди можна виконати задумане. Так, з появою термодинаміки стало зрозуміло, чому ніколи не побудують вічний двигун. Квантова механіка показала, що ми принципово позбавлені можливості виміряти із задалегідь заданою точністю одночасно координату й імпульс елементарної частинки. На непереборні бар'єри указала теорія відносності. Насправді, розуміння нових обмежень стало ознакою фундаментальних теорій.

Важливе місце серед них займають роботи останніх років, пов'язані з передбачуваністю. Стимулом до таких досліджень послужила робота Е. Лоренца¹, опублікована в 1963 р. Лоренц поставив собі питання: чому за наявності потужних ЕОМ не можна дати надійний, досить довгостроковий прогноз погоди. Він запропонував просту модель, яка описувала динаміку атмосфери, прорахував її на ЕОМ і, отримавши результат, не відмахнувся від нього як від помилки обчислень, а поставився дуже серйозно. Цей результат – виникнення хаотичних коливань, що нагадують випадкові. Особливо підкреслимо, що модель Лоренца була детермінованою, тобто у рівняннях її динаміки повністю відсутні випадкові параметри. Проте в системі, де майбутнє однозначно визначається минулим, Лоренц виявив кінцевий обрій прогнозу. Це явище отримало назву *детермінованого (динамічного) хаосу*. Після роботи Лоренца почалися інтенсивні дослід-

¹ Лоренц Едвард (1917–2008) – американський математик і метеоролог.

дження цього явища. Виявилось, що хаотичним коливанням (явищам), що виникають згідно з регулярними законами, притаманний хаос із прихованим порядком. Цей порядок пов'язаний із поняттям *фрактальної структури*. І хоча в математиці подібні конструкції у тій чи іншій формі з'являлися понад 100 років тому, у фізиці цінність подібних ідей була усвідомлена лише у 70-х рр. ХХ ст.

Як свідчення цих змін процитуємо урочисту заяву, з якою виступив 1986 р. всесвітньо відомий англійський гідромеханік сер Дж. Лайтхілл¹ [64], який на той час був президентом Міжнародного союзу теоретичної та прикладної механіки: "Тут я маю зупинитися і знову виступити від імені широкого всесвітнього братства тих, хто займається механікою. Ми всі сьогодні усвідомлюємо, що ентузіазм наших попередників щодо чудових досягнень ньютонівської механіки спонукав їх до узагальнень у галузі передбачуваності, в які до 1960 р. ми всі охоче вірили, але які, як ми тепер розуміємо, були хибними. Нас не залишає колективне бажання визнати свою провину за те, що ми вводили в оману широкі кола освічених людей, розповсюджуючи ідеї про детермінізм систем, що задовольняють закони руху Ньютона, – ідеї, які, як з'ясувалося після 1960 р., виявилися неправильними".

Динамічний хаос і фрактальні структури властиві не лише, як здавалося б, фізичним нелінійним системам. Нині хаосу та фракталам присвячено багато книг та оглядів, велика кількість статей опублікована у провідних наукових журналах світу з математики, фізики, хімії, біології, медицини, астрономії, економіки та ін. Особливо слід зазначити той факт, що явище детермінованого хаосу було виявлено в системах із малою кількістю степенів вільності. Сказане таїть у собі багаті можливості з погляду освітнього процесу.

Якщо говорити про математичні засоби у світлі послідовного викладу матеріалу посібника, потрібно особливо відмітити роль геометричних уявлень. Використання понять лінії, вектора, кривих різних типів дозволяє надати важливу форму наочності багатьом результатам фізичних теорій. В історичному аспекті слід

¹ Лайтхілл Майкл Джеймс (1924–1988) – англійський математик і механік.

зазначити, що розвиток фізичних уявлень про природу значною мірою ґрунтувався на залученні та використанні фундаментальних геометричних ідей. Саме тому в посібнику у дослідженні динаміки систем геометричні уявлення та поняття займають центральне місце, адже, як виявилось, і дослідження хаосу на мові геометричних образів виявилось дуже плідним.

У процесі формування структури посібника автори намагалися реалізувати принципи традиційної послідовності освіти. Тому у виданні наведено основні відомості про фазовий простір, характеристичні показники Ляпунова, лінійний аналіз стійкості й інші поняття, які є тими апаратними засобами, за допомогою яких досліджують хаотичну динаміку.

Після викладу необхідних апаратних засобів досліджено багато систем, що мають хаотичну динаміку. Серед різноманітності таких систем, розглянуто мабуть найвідоміші. Водночас ці системи досить прості й дозволяють виконувати детальний аналіз, прийнятний на початковому етапі вивчення. Далі описано фізичні експерименти, у ході яких спостережено хаотичні режими досліджуваних пристроїв. Варто зазначити, що більшість обчислювальних та експериментальних досліджень, які наведені в посібнику, можуть бути легко повторені й розвинені читачем. Це дозволить йому переконатися у існуванні описаних дивовижних явищ і відчутти себе першовідкривачем. Останні розділи присвячено опису можливостей проведення аналізу нелінійної динаміки в сигналах біологічного походження.

Наука про динамічний хаос і фрактальні структури в нелінійних системах швидко розвивається. Ця наука молода, хоча мабуть її перша молодість уже пройшла. За період розвитку отримано дуже глибокі теорії, написано значну кількість книг, статей тощо. Ми прагнули створити посібник, що був би придатним для першого знайомства з предметом і, водночас, висвітлені питання були б описані послідовно і строго.

Сподіваємося, що посібник знайде свого читача, незважаючи на великий потік видань у цій сфері, і стане першою сходинкою до багатого несподіванками світу хаотичної динаміки нелінійних систем. Зазначимо, що ми не претендуємо на авторство ба-

гатьох ідей, прикладів і порівнянь, які наведено у виданні, навіть якщо відповідні посилання відсутні.

Як говорив французький мораліст Ж. Лабрюєр¹: "За тисячоліття існування людства багато що сказано, але це не означає, що все сказане зрозуміло". Тому ми вважаємо за корисне повторити те, що вже сказано іншими, додати власні напрацювання і представити матеріал у вигляді, з нашого погляду, найбільш прийнятному для першого знайомства з предметом.

Вищою метою будь-якого освітнього процесу є формування власної думки щодо предмета. Проте вона не може бути сформована лише на основі опанування одного, чужого погляду. Читання інших книжок, порівняння викладів, розуміння різних поглядів забезпечує одержання істинного знання.

Ми сподіваємося, що книга буде корисна не лише студентам, а також і представникам різноманітних технічних і гуманітарних спеціальностей, які хотіли б познайомитися із цим цікавим науковим напрямом.

Автори висловлюють щирі подяку доценту кафедри теоретичної та прикладної механіки Григорію Михайловичу Зражевському за доброзичливу критику і пропозиції, які, поза сумнівом, суттєво вплинули на кінцеву редакцію рукопису, асистенту кафедри моделювання складних систем Ярославу Павловичу Троценку за допомогу у програмуванні і розв'язанні ряду математичних питань, інженеру навчальної лабораторії кафедри теоретичної та прикладної механіки Костянтину Володимировичу Полішку за налагодження програмного забезпечення комп'ютера.

Автори наперед виражають подяку за всі зауваження і побажання, що сприятимуть покращенню посібника.

¹ Де Лабрюєр Жан (1645–1696) – французький письменник-мораліст.

ВСТУП

У вступному розділі розкажемо три історії, в яких ідеться про роль комп'ютера в дослідженні нелінійних задач. Вони яскраво засвідчують, що ЕОМ не просто виконувала розрахунки, а, по суті, стала співавтором відкриття. Робота над пошуком розв'язку й аналізом трьох задач, наведених у цих історіях, переконливо показала, що комп'ютер – це справжня скарбниця можливостей у дослідженні нелінійних задач.

Героями *першої історії* є Фермі¹, Паста² й Улам³. У травні 1955 р. Наукова лабораторія Лос-Аламоса (як вона тоді називалася) опублікувала технічний звіт LA-1940 під назвою "Дослідження нелінійних задач: I" [51]. Насправді було чотири виконавці цієї чудової роботи. Розрахунки на електронно-обчислювальній машині Maniac I виконала молода дівчина Мері Цингу⁴ (два рядки у звіті засвідчують подяку Цингу за швидке програмування і виконання розрахунків). Ця ситуація була визнана несправедливою і 2008 р. в науковому журналі "Physics Today" було опубліковано статтю французького фізика Thierry Dauhois [55], в якій її автор закликав перейменувати парадокс Фермі – Паста – Улама на парадокс Фермі – Паста – Улама – Цингу, і тим самим належним чином визнати науковий внесок Цингу-Мензел. З погляду авторів посібника цей факт прекрасно відображає зміну оцінювання ролі програміста і комп'ютера в наукових дослідженнях.

Задача Фермі – Паста – Улама – Цингу (прийнято писати скорочено ФПУЦ) була першою з відкритих для публікації наукових досліджень, проведених за допомогою електронно-обчислювальної машини Maniac I, поклавши початок розвитку обчислювальної математики. Фактично йдеться про комп'ютерні дослідження (комп'ютерний експеримент). Нині обчислювальні

¹ Фермі Енріко (1901–1954) – італійський фізик.

² Паста Джон Роберт (1918–1981) – американський фізик і математик.

³ Улам Станіслав (1909–1984) – польський і американський математик.

⁴ Цингу-Мензел Мері (народ. 1928 р.) – американський математик.

дослідження складних (зазвичай нелінійних) проблем настільки ж звичайні, як і важливі, і комп'ютер зайняв належне місце поряд із фізичним експериментом і теоретичним аналізом як інструмент для вивчення багатьох явищ у науці, інженерії та математиці.

Результати роботи ФПУЦ сколихнули науковий світ [69]. Авторів звіту цікавило питання: чому тверді тіла мають скінченну теплопровідність? Вони вирішили розглянути просту модель твердого тіла, а саме, одновимірний ланцюжок у вигляді набору точкових мас, з'єднаних пружинами.

Зазначимо, що ще 1914 р. Дебай¹ припустив, що скінченна теплопровідність ланцюжка пов'язана з нелінійністю пружної сили пружин. Якщо сила лінійна, то енергія без перешкод переноситься незалежними модами коливальної системи (детально з поняттям нормального коливання, інакше, моди, можна познайомитися в посібнику [9]). У такому випадку ефективна теплопровідність нескінченна, для передачі теплоти з одного кінця ланцюжка до другого не потрібен перепад температури, і рівняння дифузії теплоти не можна отримати.

Може виникнути питання, можливо у цій моделі треба враховувати тертя? Зауважимо, що ми маємо справу із сукупністю молекул, а не з реальними масами і пружинками. З молекулярного погляду, тертя – це перерозподіл енергії, тобто перехід енергії упорядкованого руху в енергію хаотичного теплового руху [56].

Дебай припустив, що коли ланцюжок буде слабо нелінійною системою, то моди (обчислені для лінійних пружних сил) почнуть унаслідок нелінійності взаємодіяти і тим самим обмежать перенесення енергії. Отже, природно допустити, що взаємодія однієї моди з іншими приводить до втрати нею енергії, тобто діятиме подібно до тертя. Тоді впорядкований рух однієї моди переходить в хаотичний рух інших.

Маючи можливість проводити розрахунки, мабуть на найпотужніший на той час ЕОМ, Фермі разом із Пастою, Уламом та Цингу вирішили дослідити просту, на перший погляд, нелінійну систему – ланцюжок мас, з'єднаних пружинами, рух мас дозволено лише уздовж лінії ланцюжка. У цьому дослідженні ФПУЦ включили

¹ Дебай Петер (1884–1966) – німецький і американський фізик.

нелінійні компоненти в математичне співвідношення між величиною деформації пружин та результуючою силою відновлення.

Отже модель ФПУЦ являла собою ланцюжок завдовжки L , який складався з $N + 1$ однакових мас m і пружин, які їх з'єднують. Кінці ланцюжка закріплені. Динаміка ланцюжка описувалася такими рівняннями:

$$m\ddot{x}_n = K[(x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1})] + K\alpha[(x_{n+1} - x_n)^2 - (x_n - x_{n-1})^2], \quad n = 1, 2, \dots, N,$$
$$x_0 = x_{N+1} = 0,$$

де K – лінійна жорсткість пружини, величина $\alpha \geq 0$ визначає міру нелінійності. Нелінійна "добавка" пружної сили вважається малою порівняно з лінійною складовою.

Ключове питання, яке ФПУЦ хотіли вивчити, полягало у тому, скільки часу знадобиться коливанням мас ланцюжка і нелінійних пружин, щоб досягти рівноваги. Рівновага, яку вони очікували, аналогічна стану теплової рівноваги в газі. В одноатомному газі, такому як гелій, тепла (кінетична) енергія молекул у стані рівноваги рівномірно розподілена між трьома можливими компонентами руху вздовж осей тривимірної системи координат.

Поняття рівномірного розподілу енергії між різними видами руху є фундаментальним. Це твердження, що відоме як *теорема рівноподілу* статистичної механіки, можна розширити, щоб включити молекули, які є складнішими ніж молекули гелію, урахувавши енергію обертальних або вібраційних рухів.

ФПУЦ сподівалися, що коли на початку енергія зосереджена в нижній моді, або в кількох нижніх модах, то завдяки нелінійній взаємодії система поступово приходиме до стану статистичної рівноваги. У такому стані енергія розподіляється порівну між усіма модами коливань. За часом такої перебудови в системі можна було б визначити коефіцієнт теплової дифузії, а отже теплопровідність.

В експериментах ФПУЦ енергія на початку зосереджувалася в першій моді лінійної задачі. У лінійній задачі енергія незмінно залишалася б у першій моді і вищі моди не могли збуджуватися. Завдяки нелінійності енергія перетікає від нижніх мод до вищих,

і ФПУЦ очікували, що це насамкінець приведе до рівномірного розподілу енергії по всіх степенях вільності (тобто серед усіх мод, притаманних вказаному ланцюжку). Узятий ними ланцюжок із 32 мас мав відповідно 32 різні власні моди, між якими сподівалися побачити перерозподіл енергії. Якщо б їхні очікування відносно еволюції енергії виправдалися, це дозволило б розглядати їхній розрахунок як модель установаження теплової рівноваги складніших фізичних систем.

Результат був дивовижний – таким він здавався всім, хто брав участь у роботі або чув про неї. Сценарій виявився таким. На початку збуджувалася 1-ша мода (позначимо її період буквою T). Потім справді почалося перекачування енергії в інші моди. Але ніякої хаотичності в цьому не спостерігається. При $t \approx 20T$ збуджується в основному 3-тя мода. Потім починає "виконувати соло" 2-га мода (якщо $t \approx 28T$). Для $t \approx 44T$ енергія виявляється зосередженою в 3-й моді і при $t \approx 56T$ знову повертається до 1-ї. Вищі моди збуджуються мало, максимальна енергія 4-ї моди становила менше половини енергії 1-ї (тобто повної енергії), 5-та мода може отримати не більше шостої частини повної енергії.

Може це випадковий результат? Ні, у разі збільшення кількості точкових мас, зміни α , зміни самої форми нелінійної сили з квадратичної на кубічну це явище зберігалось. Моди не зливаються в загальний хаотичний хор, а виділяють кількох "солістів", які виступають по черзі, інші їм акомпанують. Коли повертається перший "соліст", усе починається спочатку. Час повернення T_B (у цьому випадку $T_B \approx 56T$) залежить від кількості N , від виду нелінійності, але низькі моди, як "солісти", так і повернення при $T = T_B$, спостерігалися завжди [56].

Експеримент ФПУЦ не привів до очікуваного результату. Його могли б віднести до розряду цікавих дивин і забути. На щастя, дивний результат ФПУЦ був забутий не всіма. Щаслива можливість була використана Крускалом¹ і Забускі². Вони вирі-

¹ Крускал Мартін Девід (1925–2006) – американський фізик і математик.

² Забускі Норман Джуліус (1929–2018) – американський фізик і математик.

шили зрозуміти незвичне явище й у процесі роботи відкрили *солітон* і прекрасний світ нелінійних явищ, світ, що збагатив арсенал математичної фізики і дав нове життя багатьом класичним математичним структурам.

Загалом проблема ФПУЦ торкається надзвичайно широкого кола тем нелінійної динаміки, статистичної механіки й обчислювальної фізики. Проте ці широкі категорії представляють лише невелику частину дослідницької літератури, яку породила оригінальна стаття ФПУЦ. Нові дослідження проблеми ФПУЦ усе ще публікуються й нині і мабуть чекають дослідників у майбутньому.

Друга історія (про неї йшлося в передмові) пов'язана з роботою американського метеоролога Е. Лоренца, яка була опублікована 1963 р. (переклад статті див. у збірнику [40]). Лоренц поставив собі питання: чому за наявності потужних ЕОМ не можна дати надійний, досить довготерміновий прогноз погоди?

Лоренц побудував модель атмосфери на підставі законів, що виражають співвідношення між температурою, тиском, швидкістю вітру й іншими параметрами. У результаті, після багатьох спрощень, модель мала вигляд системи з трьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Система рівнянь виявилася нелінійною. Цю систему рівнянь Лоренц розв'язував чисельно, виконуючи розрахунки на цифровому комп'ютері. Якимось він вирішив продовжити попередній числовий експеримент, увівши початкові дані попереднього експерименту. Щоб заощадити час, він округлив початкові дані з 6 до 3 цифр після коми (напр., значення 0,506127 округлив до 0,506). Ця несуттєва відмінність не мала б набути особливого значення. Але, на його подив, погода, яку машина почала передбачати після певного відрізка часу, повністю відрізнялася від погоди, розрахованої раніше. Отримавши такий результат, Лоренц не відмахнувся від нього як від помилки обчислень, а сприйняв дуже серйозно.

Іншими словами, Лоренц виявив, що найменші зміни початкових даних викликають великі зміни в результаті. Таку властивість системи назвали "суттєвою залежністю від початкових умов (СЗПУ)". А оскільки реальні вимірювання проводять зі скінченною точністю, то стає очевидним, що відкриття Лоренца

показало, що сучасна метеорологія не може з прийнятною точністю передбачити погоду на період, що більше тижня.

Отриманий результат розрахунку являв собою хаотичні коливання, що нагадують випадкові. Підкреслимо, що модель Лоренца була детермінованою, тобто в рівняннях її динаміки повністю були відсутні випадкові параметри.

Отже, у системі, де майбутнє однозначно визначається минулим, Лоренц виявив кінцевий обрій прогнозу. Це явище отримало назву *детермінованого (динамічного) хаосу*. Зроблено відкриття – у детермінованій нелінійній системі можливий новий тип коливань. Після роботи Лоренца почалися інтенсивні дослідження цього явища. У нашому посібнику про все це детально поговоритимемо.

Третя історія пов'язана з поняттям фрактала (про фрактали також ідеться в посібнику). Зараз лише продемонструємо яскравий результат обчислень на комп'ютері. По суті, зроблено відкриття, що збудило потік досліджень у різноманітних галузях науки. Обчислення були пов'язані з розрахунком процесу ітерацій в області комплексних чисел.

Історія починається з Жуліа¹ і Фату², які у 1917–1919 рр. написали фундаментальні статті щодо ітерацій функцій комплексної змінної, тобто досліджували таку процедуру:

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

початкову точку z_0 задано. Детально розглядалася, здавалося б проста квадратична функція $f(z) = z^2 + c$, де c – комплексна стала.

Проте, як виявилось, незважаючи на простоту функції $f(z)$, зобразити граничну множину до якої прагне ітераційний процес, Жуліа і Фату не змогли. Тут бачимо вражаючий приклад математичних досліджень, що далеко випередили свій час; знадобилося понад 50 років, перш ніж комп'ютерна графіка досягла рівня, що дозволяє спостерігати ці математичні об'єкти.

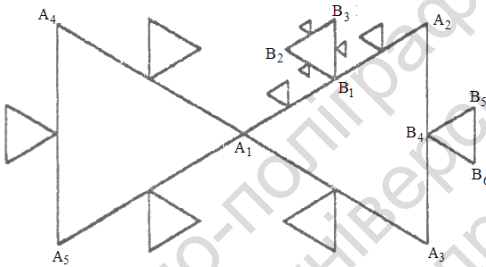
Нижче на рисунку показано один із варіантів розрахунку: зліва – докомп'ютерна "візуалізація" множини Жуліа (1925 р.), справа – множина Жуліа, побудована комп'ютером. Зазначимо,

¹ Жуліа Гастон Моріс (1893–1978) – французький математик.

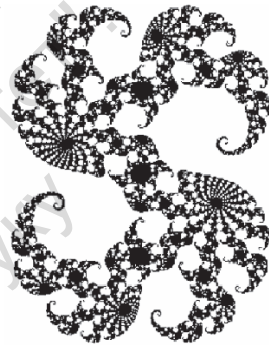
² Фату П'єр Жозеф Луї (1878–1929) – французький математик.

що комп'ютерна графіка наочно ілюструвала фрактальну структуру граничної множини ітераційного процесу (множини Жулія).

На закінчення вступу процитуємо образні й емоційні думки авторів книги [18]: "Ми маємо щастя жити у складному та дивовижному нелінійному світі. Величезну, мабуть досі недостатньо усвідомлену роль, у його пізнанні зіграли комп'ютери, які дозволили досліджувати багато нелінійних математичних моделей, що описують нашу реальність. Виник позитивний зворотний зв'язок. Результати комп'ютерного аналізу приводять до народження нових теорій, понять, моделей. Вивчення цих моделей за допомогою обчислювальних машин веде до народження теорій і моделей нового покоління і т. д."



Докомп'ютерна "візуалізація"
множини Жулія (1925 р.)



Множина Жулія,
побудована комп'ютером

РОЗДІЛ 1

ДИНАМІЧНА СИСТЕМА Й ІНСТРУМЕНТИ ЇЇ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Математична модель

Людина завжди прагнула осягнути й вивчити навколишній світ. Як ми тепер розуміємо, основою цього знання є математика. Але чому така велика роль у пізнанні світу абстрактної математики, такої далекої від нашого конкретного, відчутного, барвистого світу. Який метод використання математики у пізнанні світу? Відповідь така: ми пізнаємо світ, створюючи і вивчаючи його математичні моделі.

Що таке модель? Слово "модель" прийшло з італійської мови й означає "копія, зразок, прототип", вивчивши який ми пізнаємо оригінал. Отже, математична модель – це прототип якоїсь частини світу – об'єкта, системи, устрою, машини, процесу, приладу, вивчаючи який ми осягаємо цю частину світу.

У цьому розділі ми розглянемо, чим є математика, яка її роль у створенні моделі, чому ми цю математичну модель можемо вивчити, і чому, вивчивши її, ми вивчаємо світ. А також зрозуміємо, що, власне, являє собою математика?

Дуже образну відповідь на це питання надано у книзі Ю. І. Неймарка¹ [30]. Якось давно, у позаминулому столітті, на одному з наукових засідань бурхливо обговорювали роль мов і математики у навчанні студентів. Дебати тривали довго. Одні обстоювали роль мов, інші – значення математики. Серед учасників дискусії був В. Гіббс², усіма шанований і надзвичайно мовчазний. Проте тут, на превеликий подив, він попросив слова і сказав: "Математика – теж мова".

Що ж мав на увазі Гіббс? Що спільного між українською, грецькою, французькою, іншими мовами та математикою? А ось

¹ Неймарк Юрій Ісаакович (1920–2011) – радянський математик.

² Гіббс Віллард (1839–1903) – американський математик і фізик.

що: мова людей описує їхні дії, почуття, бажання, спогади, побажання, думки, а математика – це мова опису природи, мова наукового природознавства. Якщо ви хочете поговорити з французом, вам треба вивчити французьку мову, з англійцем – англійську мову, для спілкування з природою – математичну мову.

Лише користуючись математичною мовою, можна відкрити таємниці природи, і якщо ви хочете їх досягнути, то маєте опанувати математичну мову, вивчити математику. Те, що книга природи написана математичною мовою, зазначив ще Галілей¹.

Мовні описи нашого життя – оповідання, повісті, романи – це його мовні моделі. Опис природних явищ математичною мовою – це їхні математичні моделі, тобто математика є мовою точних наук, а математичні моделі – це опис об'єктів і процесів природи чи техніки математичною мовою.

Щоб написати гарний твір, потрібно добре знати те, про що пишеш, так само, щоб скласти математичну модель, треба як слід розуміти те, що хочеш описати. Необхідно відрізнити головне від другорядного, розуміти суть і закономірності процесів, явищ і взаємовідносин, що відбуваються, нарешті, потрібно вміти все це викласти математичною мовою.

Написати твір не просто, але прочитати його і зрозуміти, зазвичай, не дуже важко. Хоча простота може бути оманливою. Скласти модель теж досить важко, але і зрозуміти її, виявляється, не завжди просто, а часом дуже складно. Щоб зрозуміти математичну модель і те, що вона описує, потрібно її вивчити, і це вивчення може бути дуже важким.

Важливо не зробити помилку, яка весь час підстерігає того, хто створює модель: розширити сферу застосування отриманого в межах обраної моделі результату за межі застосування самих модельних припущень. У зв'язку із цим, описуючи модель, потрібно говорити не лише про властивості об'єкта, які відкидаються або враховуються, але і вказувати межі застосування прийнятих припущень. Часто визначення таких меж є досить складним завданням, особливо, коли йдеться про можливі кількісні оцінки.

¹ Галілей Галілео (1564–1642) – італійський фізик, механік, астроном, філософ, математик.

Найважливіша вимога до математичної моделі – це вимога адекватності реального об'єкта обраній системі його характеристик. Зазначимо, що будь-яка адекватність лише відносна і має межі застосовності (як і модель загалом). Про це треба пам'ятати, щоб не виникло бажання нав'язати реальному об'єкту властивості його моделі. Прикладом можуть бути вільні коливання реальної системи з малим тертям. Якщо у математичному аналізі коливань замінити цю систему лінійною моделлю без тертя, то така спрощена модель може мати високий ступінь адекватності за частотами і формами коливань, але буде, очевидно, зовсім неадекватною щодо згасання коливань.

Якщо виходити з вимог адекватності, то складні моделі краще простих. Справді, з одного боку, складна модель дозволяє врахувати більше факторів, які так чи інакше впливатимуть на вивчення характеристик об'єкта. З іншого боку, врахування великої кількості параметрів, які характеризують об'єкт, може призвести до громіздких рівнянь, які не піддаються дослідженню. І це справедливо навіть за наявності потужних ЕОМ. Можна навести багато прикладів, коли, покладаючись лише на потужності ЕОМ, без вдумливого розроблення математичної моделі, дослідник стикався з непереборними труднощами.

Отже, ми приходимо до вимоги достатньої простоти моделі щодо обраної системи характеристик, яка деякою мірою протилежна вимозі адекватності. Тому, разом із наявністю адекватності, модель має бути досить простою, щоб можна було з необхідною точністю провести якісний або кількісний аналіз характеристик об'єкта й осмислити результат.

Узагалі побудова математичної моделі є одним із найбільш складних і відповідальних етапів роботи. Досвід свідчить про те, що у багатьох випадках правильно вибрати модель – це розв'язати завдання більше, ніж наполовину.

Варто зазначити, що не завжди у математичному моделюванні треба щось винаходити: дуже часто можна скористатися вже відомими типовими простими моделями і їхньою комбінацією. Хоч і це може виявитися не таким уже очевидним.

1.2. Лінійні і нелінійні математичні моделі

"Лінійні рівняння дуже важливі. Вони настільки важливі, що фізики й інженери, мабуть, половину всього часу витрачають на розв'язок лінійних рівнянь". Це висловлювання належить Фейнману¹. Справді, є велика кількість лінійних математичних моделей у різних галузях науки. Виникає питання: чому лінійні моделі механіки, оптики, електродинаміки відіграли ключову роль у становленні сучасного природознавства; у чому причина вражаючої ефективності лінійних моделей?

Відповідь на поставлені питання буде така: по-перше, лінійні рівняння адекватно відображають багато явищ природи; по-друге, популярність лінійних рівнянь пов'язана з наявністю ефективного математичного апарату, який активно розвивався протягом останніх 200 років.

Прокоментуємо наведену відповідь. Подивимось очима математика на закон Ома, що зв'язує напругу U , прикладену до провідника, силу струму I , що проходить через нього, й опір R . Природно припустити, що існує певна залежність $I(U)$, $I(0) = 0$. Остання рівність очевидна: коли напруга не прикладена, струму немає. Розклавши цю функцію в ряд Тейлора² за степенями збільшення напруги ΔU в точці $U = 0$, отримаємо

$$I = 0 + \frac{dI(0)}{dU} \cdot \Delta U + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 I(0)}{dU^2} \cdot \Delta U^2 + \dots$$

Назвемо число $dI(0)/dU$ провідністю $1/R$, а R – опором. Суть закону Ома полягає в тому, що в дуже великому інтервалі ΔU , що представляє інтерес для багатьох провідників, член $\frac{dI(0)}{dU} \Delta U$ набагато більший за інших членів ряду. Це і визначає добре знайому нам зі школи формулу $I = U/R$.

¹ Фейнман Річард Філіпс (1918–1988) – американський фізик.

² Тейлор Брук (1685–1731) – англійський математик.

Наступним моментом, який зумовлює наведену вище відповідь, є те, що розв'язання багатьох задач пов'язано з досить малими відхиленнями системи від стану (положення) рівноваги системи. Це дозволяє провести процедуру лінеаризації нелінійних рівнянь і працювати надалі з лінійною моделлю.

Як приклад наведемо одне з фундаментальних рівнянь математичної фізики – хвильове рівняння, яке визначає поширення хвиль різної природи, зокрема і звукових:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

де p – звуковий тиск, c – швидкість звукової хвилі. Відтак із цього рівняння випливає, що швидкість хвилі c не залежить від збурення в середовищі, тобто амплітуди звукового тиску p або змінної густини. Однак це спостерігається лише за малих збурень середовища. Зі зростанням амплітуди звукового тиску стає суттєвою залежність швидкості звуку від збурення в середовищі, тому різні частини хвилі можуть рухатися з різними швидкостями. Унаслідок цього гармонічна хвиля густини трансформується в пилоподібну хвилю, що має ударний фронт. Природно, це не відображено в записаному хвильовому рівнянні.

Задача. Записати рівняння математичного маятника. Початкові умови такі: $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Визначити максимальний кут відхилення маятника за умови, що у розкладі в ряд функції $\sin \theta$ другий член ряду менший за перший як мінімум у 10 разів.

Задача. Розглянути малі коливання ($x \ll l$) маси m , розміщеної посередині натягнутої із силою F струни, що не має маси; l – довжина струни; x – поперечні відхилення маси від положення рівноваги $x = 0$. Визначити власну частоту коливань маси m .

Характерною ознакою лінійних систем є принцип суперпозиції, який дозволяє будувати розв'язок узваної лінійної задачі з розв'язків простих лінійних задач. Згадайте задачу про вільні коливання струни за довільних початкових умов: тут рух струни визначається сумою (суперпозицією) так званих нормальних коливань (гармонік) струни [9]. Нормальні коливання – це періодичні коливання за гармонічним у часі законом, вони є найпростішим видом руху системи. Багато математичних по-

нять, що супроводжують принцип суперпозиції, такі як спектральні складові, нормальні коливання тощо, стали настільки природними і наочними, що навіть здаються такими, що існують незалежно від способу опису. Поводження із цими "майже відчутними" образами часто дозволяє передбачати результат, практично без розв'язування задачі.

Однак під час загального розгляду виявляється, що більшість явищ нашого світу є нелінійними. Насправді життя нелінійне! Тому на початку ХХ ст. кількість нелінійних проблем, розв'язування яких не можна відкласти на майбутнє, почала зростати. Спочатку ці проблеми були пов'язані лише з нелінійною механікою (задача трьох тіл, опис хвиль на поверхні рідини). Однак у 10–30-х рр. ХХ ст. нелінійні задачі перетворилися на першочергові проблеми в акустиці, фізиці твердого тіла, статистичній фізиці. Принципово нелінійні задачі ставилися радіотехнікою (детектування і генерування коливань). Зазначимо, що "нелінійні труднощі" у різних галузях здавалися абсолютно специфічними і не пов'язаними. І лише у 20–30-х рр., значною мірою завдяки активній науковій діяльності Л. І. Мандельштама¹, серед фахівців різних сфер почало вироблятися "нелінійне мислення", і вчені різних галузей фізики та техніки почали переймати один у одного "нелінійний досвід".

Почалося становлення й розвиток нелінійної науки. Оцінюючи ситуацію, що склалася, Фермі у 50-х рр. часто говорив колегам, що в майбутньому фундаментальні фізичні теорії міститимуть нелінійні рівняння. Передбачення Фермі виявилось правильним, причому не тільки для фізичних теорій, але і для науки взагалі. Світ нелінійних явищ, для опису яких необхідні нелінійні математичні моделі, значно багатший за "лінійний світ".

У чому ж головна відмінність у вивченні нелінійних і лінійних математичних моделей? У багатьох випадках розв'язок лінійних рівнянь вдається знайти у явному вигляді за допомогою спеціальних функцій. Зі школи нам добре відомі такі функції, як

¹ Мандельштам Леонід Ісаакович (1879–1944) – радянський фізик.

синус, тангенс тощо; є складніші – функції Бесселя¹ та ін. Для більшості важливих нелінійних рівнянь, які слід досліджувати, неможливо знайти розв'язок в аналітичному вигляді! Їхній аналіз вимагає об'єднання сучасних аналітичних методів із розрахунками на ЕОМ, яке називають *обчислювальним експериментом*. Комп'ютер дає можливість не лише проводити розрахунки з великою точністю, а й досліджувати складні нелінійні рівняння.

Дослідження за допомогою ЕОМ дали можливість по-новому подивитися на фізичні та математичні теорії, а також сприяли появі нових ідей і методів. Фактично комп'ютер постає як спів-автор відкриття, тому саме з появою ЕОМ пов'язане значне просування у розумінні нелінійних явищ.

Нині більшість учених усвідомила той факт, що у розв'язанні складних завдань найважливішим моментом є побудова спрощених математичних моделей (назвемо їх *базовими моделями*). Можна сміливо сказати, що базові моделі часто виступають як кубики, за допомогою яких конструюють опис конкретного явища. Важливо підкреслити два принципові факти, які з'ясували в останні роки:

- базових математичних моделей небагато. Можна будувати дуже прості нелінійні моделі, що є глибоко змістовними;
- за допомогою базових моделей можливе осмислення явищ природи без проходження всіх етапів дослідження, пов'язаних із деталізацією математичного опису.

Глибина й універсальність найпростіших математичних моделей стала основою створення міждисциплінарних підходів. Тобто відомі нелінійні моделі, що з'явилися в одній галузі, можуть використовуватися як своєрідні блоки, кубики в інших галузях. Іншими словами, базові моделі описують поведінку систем найрізноманітнішої природи.

Із цього приводу цікавою є думка, згідно з якою, універсальність базових моделей визначає, так би мовити, самоподібність Природи – властивість, яка дозволяє їй найбільш "економними" способами будувати всі різноманітні об'єкти і явища, що спо-

¹ Бессель Фрідріх Вільгельм (1784–1846) – німецький астроном і математик.

стерігаються нами. Дещо спрощуючи, ми можемо сказати, що Природа, можливо, володіє невеликою кількістю простих методів конструювання, але вона майстерно застосовує їх у різних поєднаннях для створення складних систем, породжуючи таким чином свої досконалі твори.

На закінчення підрозділу наведемо висловлювання Мея¹: "Не лише в науці, а й у повсякденному житті ми робили б менше помилок, якби більшість людей усвідомило той факт, що прості нелінійні системи необов'язково мають прості динамічні властивості".

1.3. Що таке динамічна система?

Поговоримо про одну з основних моделей природознавства та техніки – динамічну систему [30].

Як приклад розглянемо систему, що являє собою вертикальний рух тіла в полі тяжіння. Ми добре знаємо, що коли нам відомі висота положення тіла $h(t)$ і його швидкість $v(t)$ у певний момент часу t_0 , то положення тіла і його швидкість у будь-який момент часу $t > t_0$ визначається згідно з формулами:

$$v(t) = v(t_0) + g(t - t_0),$$

$$h(t) = h(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2.$$

Прийнятий нами опис руху тіла двома величинами h і v має чудову властивість *самодостатності* і, завдяки цій властивості, дозволяє здійснювати однозначний прогноз положення тіла в будь-який момент часу. Тим самим однозначно визначено подальшу зміну величин h і v згідно з наведеними формулами. Якщо задавати лише одну величину h , то однозначний прогноз неможливий.

У цьому прикладі величини h і v визначають так званий *стан системи*, а самі величини h і v називають *динамічними*

¹ Мей Роберт Маккріді (народ. 1936 р.) – американський еколог.

змінними. Зміна стану у часі або, коротко, *динаміка системи*, і визначає саму назву – *динамічна система*.

Отже зазначена властивість стану лягла в основу визначення математичної моделі, що одержала найменування динамічна система. Ця модель описує детерміновані еволюційні процеси і є однією з основних, якщо не основною моделлю сучасного наукового природознавства та техніки.

Про динамічну систему говорять у випадку, якщо можна вказати такий набір величин (динамічних змінних), які характеризують стан системи, за якого значення динамічних змінних у будь-який момент часу знаходять із початкового значення цих змінних за певним правилом. Це правило задає *оператор еволюції системи*. Система може бути механічною, фізичною, хімічною, біологічною або мати іншу природу. Оператор, що визначає еволюцію системи в часі, також допускає різноманітність: він задається за допомогою диференціальних рівнянь, дискретних відображень та іншими способами.

Розрізняють системи з *неперервним* і *дискретним часом*. Системи, в яких час змінюється неперервно, називають також *потоками* за аналогією зі стаціонарною течією рідини. Якщо час змінюється дискретно, то відповідні динамічні системи називають *каскадами* або *системами з дискретним часом*.

Слід чітко усвідомити, що поняття динамічної системи є теоретичною абстракцією, так само як багато звичних і корисних наукових абстракцій (матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, нестислива рідина, ідеальний газ). Будь-яка реальна система підвладна флуктуаціям як внутрішнім, так і зовнішнім, і тому не може бути динамічною системою. Реальні об'єкти можуть розглядатися як динамічні системи тільки в певному наближенні тією мірою, якою в описі динаміки можна ігнорувати тонкі деталі внутрішньої структури системи та її взаємодію з навколишнім світом.

Отже, динамічна система вважається заданою, якщо введено динамічні змінні системи, що визначають однозначно її стан, і вказано еволюційний оператор, що дозволяє розв'язати задачу визначення зміни стану в часі.

Задача [30, с. 3–6]: розглянемо математичну модель заїзду двох велосипедистів на велодромі. Виграє той, хто приїде

до фінішу першим (скільки спортсмени будуть їхати не має значення). Як опис стану візьмемо кути $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$, що проїжджають перший і другий велосипедисти. Намалуйте кілька варіантів заїздів велосипедистів на площині (φ_1, φ_2) . Далі намалуйте на площині (h, v) кілька кривих, які відображають вільне падіння тіла за різних початкових умов. Оскільки $v = \dot{h}(t)$, $\dot{v} = g$, то $h(v) = \frac{v^2}{2g} + C$, де C – довільна стала (зробіть самостійно, точка визначає похідну за часом). Порівняйте отримані графіки. У чому їхня відмінність?

Поглянемо разом на опис змагання велосипедистів на площині (φ_1, φ_2) та вільного падіння тіла на площині (h, v) . У першому випадку опис різних заїздів має вигляд всіляких кривих у квадраті $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$. Можна лише припустити, що у всіх випадках $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ – зростаючі функції часу. Неважко зрозуміти, що у разі опису змінними φ_1 , φ_2 неможливий однозначний прогноз, адже через кожен точку (φ_1, φ_2) можуть проходити кілька кривих. Навпаки, на площині (h, v) криві, що зображують різні випадки падіння, не перетинаються між собою. Саме через те, що вони не можуть перетинатися і через кожен точку проходить єдина крива, можливий однозначний прогноз подальшої зміни величин h і v .

Бачимо, що розглянутий математичний опис вільного падіння тіла в полі сили тяжіння є прикладом математичної моделі, яка є динамічною системою, тоді як математичний опис змагання велосипедистів за допомогою кутів φ_1 , φ_2 не є математичною моделлю, яка являє собою динамічну систему.

У цьому посібнику розглянемо одну із загальних і фундаментальних нелінійних проблем – народження нерегулярної поведінки у динамічних системах, що описуються детермінованими нелінійними рівняннями. Накопичений нами досвід та інтуїція свідчать, що у динамічній системі, що описується детермінованими рівняннями, нічого нерегулярного не може бути. Зда-

ється майже очевидним, що єдиною причиною нерегулярної поведінки детермінованої системи є ті чи інші зовнішні впливи – випадкові зовнішні сили, випадкові зміни параметрів системи у процесі її руху тощо. Причому динамічна система постає як трансформатор випадковості, що перетворює випадковість на вході у випадковість на виході.

Справді, звідки взятися випадковості, якщо задано однозначний алгоритм поведінки у вигляді певних рівнянь, який визначає за конкретних початкових умов однозначне майбутнє системи на скільки завгодно великих проміжках часу? Звичайно, якщо система дуже складна і має велику кількість степенів вільності (наприклад, газ у посудині), ми розуміємо, що детермінований опис втрачає сенс (але у принципі можливий). Він втрачає сенс хоча б тому, що неможливо задати початкові координати та швидкості всіх, скажімо, 10^{19} молекул, що містяться в 1 см^3 газу. Крім того, жодній ЕОМ не під силу розрахувати траєкторії такої кількості частинок з урахуванням їхніх зіткнень. У простій системі, коли степенів вільності системи небагато, така проблема не виникає. Про яку нерегулярність у простій системі можна стверджувати?

І все ж таки виникнення нерегулярності в детермінованій системі твердо встановлено як засобами теорії, так і переконливими експериментами. Таку нерегулярність почали називати *хаосом*. Зрозуміло, що парадоксально звучить словосполучення – *детермінований хаос*, адже сама система не містить жодних елементів випадковості. Зазначимо, що ще на початку ХХ ст. математики вже знали, що певні динамічні системи мають нерегулярні розв'язки. Насамперед, це видатний математик А. Пуанкаре [37, с. 323], який ще 1908 р. писав: "... у нестійких системах зовсім мізерна причина, що вислизає від нас за своєю дрібницею, викликає значну дію, яку ми не можемо передбачити. Передбачення стає неможливим, ми маємо перед собою явище випадкове".

Інженери називали хаос шумом, завадою чи турбулентністю. Однак лише у 1960–1970 рр., з розвитком комп'ютерної техніки, почалося інтенсивне вивчення хаотичної поведінки нелінійних систем. Виявлено, що особливо є дивним і несподіваним, наявність детермінованого хаосу в системах із малою кількістю степенів вільності; виникли нові ідеї та методи ре-

естрації хаотичних явищ та їхнього кількісного аналізу. Важливо зазначити, що явище детермінованого хаосу відкрито в системах різної фізичної природи.

Мета нашого посібника полягає у тому, щоб продемонструвати присутність хаосу в динамічних системах. Якщо намагатися підійти до проблеми шляхом дослідження реальної фізичної системи, то питання видається зовсім непростим. Тому спочатку розглянемо моделі, які мають такі властивості:

- являють собою динамічні системи;
- припускають теоретичний аналіз;
- демонструють хаос.

Далі у книзі представлено експериментальні дослідження фізичних систем, у яких спостерігається хаотична динаміка.

Описані нижче обчислювальні та фізичні експерименти досить прості, що дозволить читачеві самостійно повторити наведені результати й отримати нові. Це дає можливість йому самому переконатися в існуванні дивовижних явищ, про які повідомляється в літературі. Як то кажуть: "Краще один раз побачити...".

1.4. Фазовий простір динамічної системи

Нехай маємо динамічну систему з неперервним часом, яка припускає опис свого стану заданням величин $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$. Визначення цих величин у певний час $t = t_0$ задає початковий стан системи. Нехай закон еволюції динамічної системи може бути описаний системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_j}{dt} \equiv \dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1)$$

Згідно з (1.1) маємо N невідомих $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$, і система дає явні вирази для перших похідних цих невідомих через самі змінні x_j . Загалом, оператор еволюції часто задають у неявній формі у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Використання диференціальних рівнянь першого порядку не є обмеженням, оскільки рівняння N -го порядку за допомогою відповідної заміни змінних можна звести до системи N диференціальних рівнянь першого порядку вигляду (1.1).

Кожне з рівнянь системи (1.1) можна розглядати як проєкцію векторного рівняння

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

де \mathbf{x} – вектор із проєкціями x_1, x_2, \dots, x_N ; \mathbf{f} – вектор із проєкціями f_1, f_2, \dots, f_N . Систему (1.1) називають *автономною*, оскільки незалежна змінна, якою є час t , не входить явно в систему, тобто $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$.

Будь-яку неавтономну систему можна звести до автономної, якщо збільшити кількість невідомих на одиницю. Нехай задана неавтономна система

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_N, t), \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Позначивши $t = x_{N+1}$, отримаємо автономну систему рівнянь $(N+1)$ -го порядку:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= f_j(x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}), & j=1, 2, \dots, N, \\ \dot{x}_{N+1} &= 1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Розв'язок системи (1.1) відповідає руху точки в N -вимірному просторі $R^N(x_1, x_2, \dots, x_N)$, де кожному з динамічних змінних x_1, x_2, \dots, x_N можна розглядати як незалежну координату N -вимірного простору. Цей простір називають *фазовим простором*. У разі $N=2$ говорять про *фазову площину*.

Точку у фазовому просторі, яка за визначенням визначає стан динамічної системи у певний момент часу, називають *фазовою точкою*. Зміні стану системи у часі відповідає рух фазової точки вздовж деякої орієнтованої лінії, яка називається *фазовою траєкторією*.

У кожній точці \mathbf{x} фазового простору системи (1.2) вектор $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ є вектором швидкості руху фазової точки вздовж фазової траєкторії, що проходить через цю точку. Наприклад, у фазово-

му просторі виявляється заданим векторне поле швидкостей $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, яке можна тлумачити як стаціонарний (не залежний від часу) фазовий потік, тоді як кожний розв'язок рівняння (1.2) означає закон руху фазової точки в цьому потоці.

Унаслідок того, що фундаментальною властивістю розв'язків диференціальних рівнянь є їхня *єдиність*, різні фазові траєкторії не перетинаються! Отже, якщо динамічна система задана рівняннями (1.1), то постулюють таке: кожному початковому стану $x_j(t_0)$, $j = 1, 2, \dots, N$, в N -вимірному фазовому просторі ставить-ся відповідно той єдиний стан $x_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, N$ ($t > t_0$), у який за час $(t - t_0)$ переміститься фазова точка, що рухається згідно з рівняннями (1.1).

Зауважимо, що до поняття *єдиність*, як фундаментальної властивості розв'язків диференціальних рівнянь, слід додати коментар. Із цього приводу, яскравий приклад наведено у статті В. І. Арнольда¹ [3, с. 232]: "...математика вчить нас, що розв'язок рівняння $dx/dt = x$ однозначно визначається початковими умовами (тобто існуючі інтегральні криві на площині (t, x) не перетинаються). Цей висновок математичної моделі далекий від реальності. Комп'ютерний експеримент показує, що вказані інтегральні криві мають спільні точки на від'ємній півосі t . Справді, наприклад, криві з початковими умовами $x(0) = 0$ та $x(0) = 1$ при $t = -10$ практично перетинаються, а при $t = -100$ між ними неможливо вставити атом. Властивості простору на малих відрізках не описуються евклідовою геометрією. Використання теореми єдиності у цій ситуації є явним перевищенням точності моделі. У практичному використанні моделі на це потрібно зважати, інакше можна натрапити на серйозні неприємності".

Властивість єдиності розв'язків диференціальних рівнянь – це по суті математичне оформлення принципу *детермінізму*, коли визначені початкові умови однозначно визначають подальшу поведінку динамічної системи. Зауважимо, що детермінізм має

¹ Арнольд Володимир Ігорович (1937–2010) – радянський математик.

смісл лише в абстрактному математичному просторі, в якому положення тіла або точки може бути визначено з абсолютною точністю, що спричиняє собою знаходження кінцевого стану з абсолютною точністю у довільний момент часу. У фізичному просторі, як зазначає М. Борн¹ [5], такий детермінізм не має сміслу, адже стверджує, що, наприклад, числа 10^{10} і $(10^{10} + 1)$ різні, хоча з погляду фізики вони настільки великі, що їх можна вважати однаковими і, в деяких випадках, приймати за нескінченно великі. Тому існує фізично осмислене визначення детермінізму [5]: кожний фізичний стан системи визначається з малою, але завжди зі скінченною неточністю, тому воно ніколи не визначається за допомогою числа, а тільки завдяки ймовірнісному розподілу, і задача механіки тепер полягає у тому, щоб із початкового розподілу передбачити розподіл у подальші моменти часу.

У дослідженні динамічної системи, серед розв'язків системи рівнянь (1.1) велике значення мають розв'язки, які описують *стаціонарний стан*, тобто той, для якого динамічні змінні не залежать від часу. Для стаціонарних станів систему рівнянь (1.1) записують як

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

Розв'язком системи (1.4) є точки у фазовому просторі, які називають *особливими точками*. Точка є особливою тому, що вона суттєво відрізняється своїми властивостями від інших точок фазового простору, що становлять зазвичай переважну більшість. З фізичного погляду особливі точки відповідають стаціонарним режимам динаміки чи станам рівноваги системи. Тому їх інакше називають також *нерухомими* чи *стаціонарними точками*, або точками положення *рівноваги* системи. Із (1.4) видно, що кількість і розміщення нерухомих точок визначається лише виглядом функцій f_1, \dots, f_N .

Якщо характерні фазові траєкторії відобразити у фазовому просторі, то виникає загальна картина поведінки системи. Таку картину називають *фазовим портретом*.

¹ Борн Макс (1882–1970) – німецький фізик і математик.

Для опису поведінки фізичної системи використовують таке поняття, як *кількість степенів вільності*. Історично воно виникло під час вивчення руху частинок. Найпростіший тип руху – рух уздовж прямої – описується звичайним диференціальним рівнянням другого порядку. У цьому випадку кажуть, що система має один степінь вільності. Одне диференціальне рівняння другого порядку еквівалентне двом рівнянням першого порядку. Тому одне рівняння першого порядку зручно зіставити з половиною степеня вільності. Отже, система, що описується N рівняннями першого порядку, має $N/2$ степенів вільності. Зокрема, система має півтора степені вільності, якщо її поведінка описується трьома звичайними диференціальними рівняннями першого порядку.

Серед широкого класу динамічних систем особливу роль відіграють системи, в яких можливі коливання. Теорія коливань загалом і нелінійних коливань зокрема є класичним прикладом теорії, яку використовують у багатьох розділах фізики й інших наук. Це зумовлено тим, що коливальні процеси, різні за своєю природою, є дуже поширеними і їхня роль у нашому житті ви-
нятково велика.

Оскільки коливальний процес являє собою динаміку системи в околі деякого положення рівноваги, то його фазовий портрет займає певну обмежену область фазового простору. У наступному підрозділі ми дамо короткий огляд типових прикладів фазових портретів коливальної системи з одним степенем вільності.

1.5. Фазовий портрет коливальної системи з одним степенем вільності

Зосередимо увагу на системі з одним степенем вільності, стан якої описують залежністю однієї узагальненої координати $x = x(t)$ від часу. Термін "узагальнена координата" підкреслює той факт, що природа коливальної системи може бути різною.

Усі динамічні системи, зокрема й коливальні, поділяють на *консервативні* та *неконсервативні*. Механічні консервативні

коливальні системи характеризуються сталим у часі запасом енергії. Нехай маємо масу m , що вільно рухається вздовж осі x , за відсутності тертя. У процесі коливань на масу діє відновлювальна сила $F(x)$. Записуючи другий закон Ньютона, отримаємо рівняння руху

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (1.5)$$

або

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (1.6)$$

де $f(x) = -F(x)/m$.

Для механічного лінійного осцилятора масою m та пружиною з жорсткістю K відновлювальна сила $F(x) = -Kx$ і рівняння руху буде таке:

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = K/m. \quad (1.7)$$

Введемо визначення

$$V(x) = -\int_0^x F(z) dz. \quad (1.8)$$

Тоді $F(x) = -V'(x)$ і рівняння (1.5) набуде вигляду

$$m\ddot{x} = -V'(x). \quad (1.9)$$

Представимо рівняння (1.9) як

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right) = 0, \quad (1.10)$$

тобто для будь-якого моменту часу виконується рівність

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = \text{const}. \quad (1.11)$$

Це співвідношення являє собою закон збереження механічної енергії. Перший доданок відповідає кінетичній енергії маси m , другий – потенціальній енергії. Тому функцію $V(x)$ називають *потенціальною функцією*. Співвідношення (1.11) називають *першим інтегралом* рівняння (1.9).

Отже, консервативність – це збереження енергії. Однак у системах, що описують, наприклад, хімічну реакцію або співіснування двох біологічних видів, часто неможливо навіть увести поняття енергії. Якщо до того ж фазовий портрет такої динамічної системи подібний до фазового портрета консервативного осцилятора, то, очевидно, ця система так само консервативна, але для неї перший інтеграл визначає не закон збереження енергії, а закон збереження деякої характерної величини.

Якщо потенціальна функція має мінімум, то поблизу цього мінімуму система може виконувати коливання. Нехай мінімум міститься в точці $x = x_0$. Тоді в околі точки $x = x_0$ функцію $V(x)$ можна розкласти в ряд за степенями відхилення $u = x - x_0$ системи від положення рівноваги:

$$V(x) = V(x_0) + \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot u + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot u^2 + \dots \quad (1.12)$$

Зрозуміло, що другий доданок у (1.12) дорівнює нулю. Якщо обмежитися врахуванням квадратичного члена, то підстановка (1.12) в (1.9) приводить до рівняння $m\ddot{u} = -V''(x_0)u$, $u = x - x_0$, або

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0. \quad (1.13)$$

Це рівняння гармонічного осцилятора, у якого величина $\omega_0 = \sqrt{V''(x_0)/m}$ визначає власну частоту малих коливань.

Задача. Знайти період можливих малих коливань матеріальної точки маси m , яка рухається вздовж осі x , якщо залежність потенціальної функції від координати задано формулою

$$V(x) = V_0 \left[\left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l} \right) \right].$$

Задача. Із жести виготовлено пластинку, що має вертикальний профіль у вигляді синусоїди, в одній з "ямок" коливається кулька масою m . Визначити період малих коливань.

Динамічні системи із запасом енергії, що змінюється в часі, називають відповідно *неконсервативними*. Системи, у яких енер-

гія зменшується в часі через наявність тертя або розсіювання, називають *дисипативними*. Більшість реальних динамічних систем у фізиці, радіотехніці, біології, хімії та інших галузях знань є неконсервативними. Тому саме неконсервативним системам ми приділимо основну увагу.

Консервативні системи також часто зустрічаються у фізиці, коли під час побудови моделі можна знехтувати дисипативними процесами – теплопровідністю, дифузією, тертям тощо. Характерний приклад – маятник без тертя. До досліджень консервативних систем слід віднести також ті, що мають незаперечне практичне значення, а саме задачі небесної механіки та поведінку плазми у прискорювачах. Така характерна відмінність між консервативними та неконсервативними системами є причиною специфіки дослідження цих систем.

Консервативний осцилятор. Повернемося до рівняння лінійного гармонічного осцилятора (1.13). Його розв'язок, який визначає вільні коливання осцилятора, добре відомий [9]:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad \omega_0 = \sqrt{K/m}. \quad (1.14)$$

Сталі A і α визначають із початкових умов $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, отже, також відомі. Для швидкості в системі маємо формулу

$$\dot{x} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.15)$$

Виключаючи час t з формул (1.14) і (1.15), отримаємо рівняння фазових траєкторій на фазовій площині (x, \dot{x}) :

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} = A^2. \quad (1.16)$$

Як бачимо, фазові траєкторії – еліпси. Таким чином, фазова площина заповнена вкладеними один в одного еліпсами із загальним центром на початку координат, які відрізняються один від одного параметром A (рис. 1.1). Значення швидкості $\dot{x} > 0$ відповідає збільшенню координати x , а $\dot{x} < 0$ – зменшенню x . Тому рух фазової точки вздовж фазової траєкторії відбувається у верхній півплощині у бік збільшення x , а в нижній – у бік зменшення.

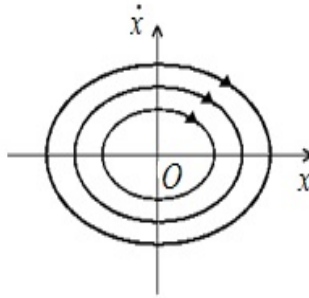


Рис. 1.1. Фазовий портрет гармонічного осцилятора

У механічному гармонічному осциляторі (1.5) відновлювальна сила визначалася лінійним законом $F(x) = -Kx$. Розглянемо ситуацію, коли відновлювальна сила $F(x)$ є нелінійною, але залежить лише від координати x . Для цього звернемося до рівняння у формі (1.6), тобто

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (1.17)$$

до якого зводяться багато задач про консервативні коливання різної фізичної природи. Вводячи потенціальну функцію

$$U(x) = \int_0^x f(z) dz, \text{ це рівняння запишемо у вигляді}$$

$$\ddot{x} = -U'(x). \quad (1.18)$$

Зокрема, для механічної системи $U(x) = m^{-1}V(x)$.

У фазових координатах $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ рівняння (1.17) зводиться до системи двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -f(x_1). \quad (1.19)$$

Перший інтеграл рівняння (1.17) являє собою енергетичне рівняння:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E \quad (E = \text{const}). \quad (1.20)$$

Рівняння (1.20) показує, що кінетична енергія системи з плином часу визначається співвідношенням $E - U(x)$.

Зрозуміло, що рівняння (1.20) – це рівняння фазових траєкторій на фазовій площині (x, \dot{x}) , яке дозволяє побудувати фазові траєкторії, визначивши з (1.20) значення швидкості \dot{x} :

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2[E - U(x)]}. \quad (1.21)$$

Отже, різним значенням E на фазовій площині відповідають різні криві сталої енергії E . Нагадаємо, що із загальних властивостей розв'язку диференціальних рівнянь слідує, що через кожну точку фазової площини має проходити одна і лише одна траєкторія. Для особливих точок одночасно виконуються рівності $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$. У цьому випадку кажуть, що фазовий потік стаціонарний і, як наслідок, швидкість $\dot{x} = 0$ і прискорення $\ddot{x} = 0$. Це означає, що система перебуває у стані спокою чи рівноваги. Властивості цього стану – важливі характеристики системи. Можна сказати, що фазовий портрет системи визначено, якщо позначено особливі точки системи та представлено типові фазові траєкторії.

Розглянемо детальніше поведінку нелінійної системи (1.17) в околі особливої точки. Позначимо цю точку $x = x_0$, тоді $f(x_0) = 0$, а потенціальна функція $U(x)$ при значенні $x = x_0$ має екстремум

$$f(x_0) = \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (1.22)$$

В околі точки $x = x_0$ функцію $U(x)$ можна розкласти в ряд за степенями $u = x - x_0$:

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot u + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot u^2 + \dots \quad (1.23)$$

Оскільки нас цікавить поведінка системи поблизу особливої точки x_0 , коли величина u зазнає малих змін, то величина

$u = x - x_0$ є малою величиною. Тоді, враховуючи (1.22), запишемо рівняння фазових траєкторій (1.20) у вигляді

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x=x_0} \cdot u^2 = E \quad (1.24)$$

або

$$\dot{x}^2 + su^2 = 2[E - U(x_0)], \quad (1.25)$$

де

$$s = \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x=x_0}. \quad (1.26)$$

Нехай $s > 0$. Тоді (1.25) із точністю до вищих степенів $u = x - x_0$ є рівнянням фазових траєкторій поблизу положення рівноваги, яке відповідає мінімуму потенціальної енергії, і є рівнянням еліпсів. Ці еліпси відрізняються між собою розміром півосей, які визначаються різницею $[E - U(x_0)]$. Вибираючи різні значення E , отримуємо на фазовій площині різні еліпси, які у разі наближення E до $U(x_0)$ (при цьому $x \rightarrow x_0$) зменшуються, стягуючись у точку $(x_0, 0)$, якщо $E = U(x_0)$.

Присутність на фазовій площині замкнених фазових траєкторій (у вказаному випадку це еліпси) говорить про наявність періодичних рухів у системі. Таким чином, в околі особливої точки, яка відповідає мінімуму потенціальної енергії, відбуваються періодичні рухи з еліптичними фазовими траєкторіями, що характеризують гармонічні коливання. Отже, реальний коливальний процес тим ближчий до гармонічного, чим на меншу величину повна енергія E перевищує енергію у точці рівноваги $U(x_0)$.

Значимо: якщо потенціальна функція є квадратичною функцією координати x , то $d^n U / dx^n$ завжди дорівнює нулю при $n > 2$ і рівняння фазових траєкторій має вигляд $\dot{x}^2 + su^2 = \text{const}$ за будь-яких значень $[E - U(x_0)]$.

Нехай тепер друга похідна у формулі (1.26) менша нуля і дорівнює $-s$ (s – додатне число). Це відповідає максимуму потенціальної енергії в особливій точці. У цьому випадку рівняння (1.25) має вигляд

$$\dot{x}^2 - su^2 = 2(E - U(x_0)). \quad (1.27)$$

Це рівняння фазових траєкторій в околі особливої точки, воно визначає гіперболи з асимптотами

$$\dot{x} = \pm\sqrt{su}. \quad (1.28)$$

Відтак, особлива точка на фазовій площині, яка відповідає максимуму потенціальної енергії, – це така точка, в околі якої фазові траєкторії локально виглядають як сім'я гіпербол. Отже присутні траєкторії, що ведуть в особливу точку, або ті, що відходять від цієї точки. Подібні точки відповідають нестійкому положенню рівноваги, оскільки будь-яке мале відхилення системи від положення рівноваги призводить до подальшого її віддалення від точки рівноваги. На фазовій площині це відповідає виходу фазової точки з околу особливої точки та її подальшому руху однією з фазових траєкторій, що віддаляються.

Проілюструємо ці міркування графічним зображенням описаних ситуацій. На рис. 1.2 показано графік функції $U(x)$ і типові фазові траєкторії. Значення $x = x_A$ відповідає мінімуму потенціальної енергії $U(x)$, а точка $A(x_A, 0)$ на фазовій площині – це стійке положення рівноваги, та рух поблизу нього стійкий. Точка $B(x_B, 0)$ відповідає максимуму $U(x)$ і є особливою точкою, яка визначає на фазовій площині нестійке положення рівноваги $B(x_B, 0)$.

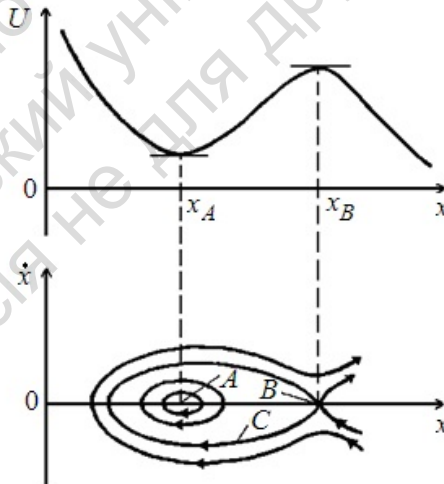


Рис. 1.2. Побудова фазових траєкторій для заданої функції $U(x)$

Сукупність фазових траєкторій та особливих точок на фазовій площині визначає фазовий портрет системи. До цих двох основних елементів фазового портрета слід додати фазові траєкторії, які є граничними між областями фазової площини, де відбувається рух різного характеру. Ці лінії (лінія C на рис. 1.2) називають відокремлювальними лініями або *сепаратрисами* (від лат. *separatio* – поділ). На рис. 1.2 видно, як крива C відокремлює навколо точки A область, усередині якої відбувається коливальний періодичний рух біля положення рівноваги. За межами цієї області такий рух відсутній і характер руху системи, тобто вид фазових траєкторій, може бути визначений тільки для заданої функції $U(x)$ в області зміни координати x .

Поблизу точки B (рис. 1.2) сепаратриси виглядають як криві, що перетинаються у цій точці. Як пояснити твердження про те, що фазові траєкторії не можуть перетинатися? Насправді перетину немає. Зауважимо, що рух по самій сепаратрисі відповідає енергії системи $U(x_B)$. У цьому випадку в околі особливої точки B згідно з (1.28) під час руху фазової точки вздовж сепаратриси швидкість системи визначається співвідношенням $\dot{x} = \pm\sqrt{s}(x - x_B)$. Тому при $x \rightarrow x_B$ маємо $\dot{x} \rightarrow 0$, тобто система входить у стан рівноваги і виходить із нього з нескінченно малою швидкістю і, отже, нескінченно довго. Іншими словами, система, що рухається вздовж сепаратриси, лише асимптотично наближається до нестійкого стану рівноваги при $t \rightarrow \infty$. Причому найменші відхилення енергії в той чи інший бік призводять до якісно різних типів руху, про які ми говорили вище. Звідси випливає, що рух реальної системи, що відповідає на фазовій площині сепаратрисі, неможливий.

Задача. а) на рис. 1.3 (ліворуч) показано графік функції $U(x)$. Зобразіть відповідний йому фазовий портрет консервативної системи;

б) на рис. 1.3 (праворуч) показано фазовий портрет системи. Зобразіть відповідний йому графік функції $U(x)$.

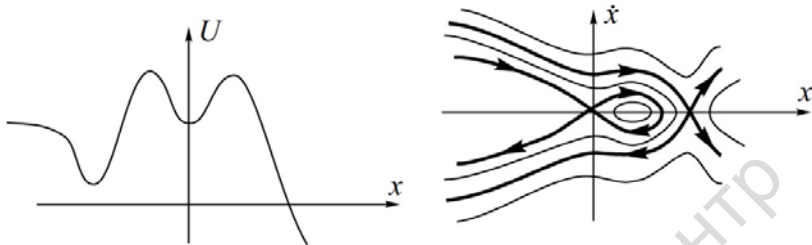


Рис. 1.3. Рисунок до задач

Дисипативний лінійний осцилятор. Дисипація енергії, обумовлена наявністю втрат, має важливий вплив на характер руху системи. Розглянемо процеси в механічному лінійному осциляторі з в'язким тертям, коли сила тертя пропорційна швидкості зміни координати. Рівняння вільних коливань такої системи має вигляд

$$m\ddot{x} = -R\dot{x} - Kx, \quad (1.29)$$

або

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad 2\delta = \frac{R}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad (1.30)$$

де R – коефіцієнт тертя. Якщо $R = 0$, то маємо консервативний лінійний осцилятор, розглянутий вище. Розв'язок рівняння (1.29) при $\delta < \omega_0$ можна представити у такому вигляді [9]:

$$x = Ae^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \alpha). \quad (1.31)$$

Відтак при $\delta < \omega_0$ фазові траєкторії мають вигляд спіралей, що скручуються, за якими фазові точки асимптотично наближаються до початку координат (рис. 1.4, а).

Якщо коефіцієнт загасання $\delta > \omega_0$, то в системі коливальний процес відсутній. Фазові траєкторії мають вигляд характерних кривих, якими фазова точка рухається до початку координат (рис. 1.4, б).

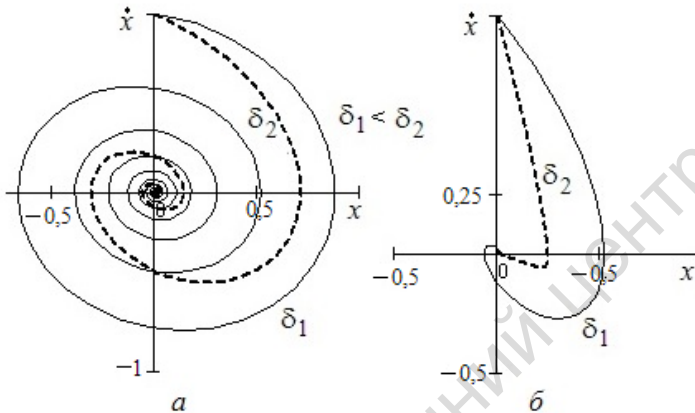


Рис. 1.4. Фазовий портрет дисипативного лінійного осцилятора:
 a – якщо $\delta < \omega_0$; b – якщо $\delta > \omega_0$

Отже, для $\delta > 0$ дисипативний осцилятор характеризується єдиним глобально стійким станом рівноваги в нулі фазових координат. Незалежно від вибору початкових умов спостерігається загасаючий коливальний, або аперіодичний рух. Для $t \rightarrow \infty$ будь-яка фазова точка прагне до початку координат. Зрозуміло, що незатухаючі вільні коливання в лінійних дисипативних системах неможливі, оскільки енергія, яка витрачається на подолання тертя, не поповнюється.

Уведення дисипації енергії в коливальну систему призвело до якісної перебудови структури фазового портрета. З'явилася *притягувальна множина* (*атрактор*, від англійського *to attract* – притягувати) типу стійкого положення рівноваги.

Поняття атрактора є загальним і означає кінцевий стійкий стан деякого процесу або ходу еволюції системи. Взагалі, на відміну від атрактора типу стійкого положення рівноваги, його структура може бути дуже складною (з такими атракторами ми ще познайомимося).

1.6. Зміна фазового об'єму

Як змінюється із часом об'єм деякої виділеної області фазового простору, або, іншими словами, який вплив фазового потоку на об'єм області, яку аналізують? Виявляється на це важливе питання є дві різні відповіді: для консервативних і неконсервативних систем. Спробуємо розібратися у цьому.

Установимо зв'язок швидкості зміни об'єму малої області (назвемо її *краплею*) фазового простору з рівняннями руху динамічної системи. Спочатку розглянемо системи з дискретним часом, які описуються за допомогою дискретних відображень. Для простоти викладу опишемо систему другого порядку (на вищі порядки результати узагальнюють):

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n); \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{1.32}$$

де f і g – деякі, у загальному випадку, нелінійні функції; n – дискретний час.

Важливою характеристикою відображення (1.32) є визначник, складений із похідних даних функцій:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{vmatrix}.\tag{1.33}$$

Цей визначник називають *якобіаном*, він позначається так:

$$\begin{aligned}J &\equiv \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_n} - \frac{\partial f}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n}.\end{aligned}\tag{1.34}$$

Якщо говорити точніше, важливими характеристиками є модуль якобіана та його знак. Як відомо з курсу математичного аналізу, модуль якобіана відображення $|J|$ показує, з точністю до нескінченно малих величин вищих порядків, у скільки разів змінюється при відображенні об'єм нескінченно малої області, що містить дану точку (x, y) , для якої визначається відображення. Для двовимірного відображення йдеться, як зрозуміло, про площу. Знак якобіана відображення обумовлений збереженням напрямку обходу вздовж деякого контуру всередині елементарної області відображення. Якщо напрямок обходу зберігається, то $J > 0$, якщо змінюється на протилежний, то $J < 0$. Таким чином, якобіан визначає локальну (що стосується точки) зміну елементарного об'єму при відображенні.

Нехай V_n – елементарний об'єм (крапля) фазового простору, що містить точку (x_n, y_n) n -ї ітерації. Фазові траєкторії, які розташовані у краплі V_n , характеризують ітераційний процес точок, що близькі до точки (x_n, y_n) . Для $(n+1)$ -ї ітерації маємо точку (x_{n+1}, y_{n+1}) , яку оточує елементарний об'єм V_{n+1} . Тоді відповідно до властивості якобіана маємо $V_{n+1} = |J|V_n$. Якщо позначити V_0 – об'єм краплі у початковий момент часу ($n = 0$), то із часом (під час ітерацій) об'єм V_0 зазнає змін:

$$V_n \approx V_0 |J|^n = V_0 \exp(n \ln |J|). \quad (1.35)$$

Розглянемо динамічні системи з неперервним часом, задані рівняннями (1.1). Нехай маємо множину фазових траєкторій, що починаються в момент часу t у краплі об'ємом $V(t)$. За час τ точки фазової краплі з координатами $\mathbf{x}(t)$ перемістяться так, що їхні нові положення матимуть координати $\mathbf{x}(t + \tau)$. Оскільки фазові траєкторії не перетинаються, то можна стверджувати, що між координатами $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{x}(t + \tau)$ існує взаємно однозначна відповідність

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \Phi(\mathbf{x}(t)). \quad (1.36)$$

Явний вид функції Φ можна визначити, розв'язавши систему рівнянь (1.1). Отримане співвідношення можна, суто формально, інтерпретувати як відображення $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t + \tau)$ з якобіаном

$$J = \frac{\partial(x_1(t + \tau), x_2(t + \tau), \dots, x_N(t + \tau))}{\partial(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))} \equiv \det \left(\frac{\partial x_j(t + \tau)}{\partial x_k(t)} \right). \quad (1.37)$$

У цьому випадку фазова крапля з об'ємом $V(t)$ перетворюється на фазову краплю з об'ємом $V(t + \tau)$ відповідно до співвідношення

$$V(t + \tau) = JV(t). \quad (1.38)$$

Визначимо якобіан (1.37). Нехай інтервал часу τ малий, тобто $\tau = dt$. Тоді згідно з (1.1): $\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $j = 1, 2, \dots, N$, беручи до уваги співвідношення $\dot{x}_j(t) dt = x_j(t + dt) - x_j(t)$, отримаємо таку систему рівнянь:

$$x_j(t + dt) = x_j(t) + f_j(x_1, x_2, \dots, x_N) dt, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.39)$$

Відповідно до рівнянь (1.39) якобіан відображення (1.37), для $\tau = dt$, може бути обчислений як

$$J = \det \left(\frac{\partial x_j(t + \tau)}{\partial x_k(t)} \right) = \det \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k} + dt \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) \equiv \det(\mathbf{E} + dt \cdot \mathbf{F}), \quad (1.40)$$

де \mathbf{E} – одинична матриця, матриця $\mathbf{F} = (\partial f_j / \partial x_k)$, $j, k = 1, 2, \dots, N$.

Виокремлюючи в (1.40) доданки першого порядку по dt , отримаємо

$$J = 1 + dt \cdot \text{div} \mathbf{f}, \quad (1.41)$$

де дивергенція фазового потоку

$$\text{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N}. \quad (1.42)$$

Задача. Переконайтеся в рівності (1.41), розглянувши систему другого порядку.

Підставивши (1.41) в (1.38) при $\tau = dt$, знаходимо

$$V(t + dt) = V(t) + V(t) dt \cdot \text{div} \mathbf{f}. \quad (1.43)$$

Звідси отримуємо локальну (в точці) відносну швидкість зміни фазового об'єму:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (1.44)$$

Формула (1.44) представляє собою зміст важливої теореми Ліувілля¹.

В окремому випадку лінійної системи, коли праві частини системи рівнянь (1.1) є лінійними функціями

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \sum_{k=1}^N a_{jk} x_k, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.45)$$

Тут сталі a_{jk} , $j, k = 1, 2, \dots, N$, утворюють матрицю коефіцієнтів $\mathbf{A} = (a_{jk})$. Тоді дивергенція фазового потоку

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \sum_{k=1}^N a_{kk} = \operatorname{Sp} \mathbf{A}. \quad (1.46)$$

Величину $\operatorname{Sp} \mathbf{A}$, що дорівнює сумі діагональних елементів матриці $\mathbf{A} = (a_{jk})$, $j, k = 1, 2, \dots, N$, називають *слідом матриці*. Можна показати, що значення $\operatorname{Sp} \mathbf{A}$ дорівнює сумі власних значень матриці $\mathbf{A} = (a_{jk})$ лінійної системи рівнянь (1.45) (про власні значення матриці λ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, ідеться в наступному підрозділі):

$$\operatorname{Sp} \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N. \quad (1.47)$$

Задача. Переконайтеся у цьому, розглянувши систему рівнянь (1.45) другого порядку.

Підставивши (1.47) в (1.44) і розв'язавши диференціальне рівняння (1.44), знайдемо, що для лінійної динамічної системи об'єм довільної області фазового простору із часом змінюється за експоненціальним законом:

$$V(t) = V_0 \exp(\operatorname{Sp} \mathbf{A} \cdot t). \quad (1.48)$$

Задача. Визначте дивергенцію фазового потоку для динамічної системи у вигляді маятника з тертям. Переконайтеся у тому, що вона є від'ємною величиною, а за відсутності тертя дорівнює нулю, що відповідає консервативній системі.

Задача. Визначте дивергенцію фазового потоку для динамічної системи: $\dot{x} = x - xy$, $\dot{y} = -y + xy$. Зробіть висновки.

¹ Ліувіль Жозеф (1809–1882) – французький математик.

1.7. Лінійний аналіз стійкості особливих точок на фазовій площині

Розглянуті вище приклади коливальних систем наочно продемонстрували, що особливі точки є "організуючими центрами" динаміки системи у фазовому просторі. Визначивши ці точки і дослідивши їхню стійкість, можна побудувати характерну картину поведінки системи.

Теорія стійкості створювалася багатьма математиками, механіками, фізиками. Фундаментальні результати належать Ляпунову¹.

На початку наведемо деякі визначення. Нехай $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ – розв'язок системи рівнянь (1.1) із початковими умовами $\mathbf{x}|_{t=t_0} = \mathbf{x}_0$.

Інтуїтивно ми вкладаємо в поняття стійкості (або нестійкості) чутливість системи до зовнішніх поштовхів – *збурень*. Саме реакцію системи на слабке збурення і покладено в основу визначення типів стійкості. Щодо стану рівноваги формулюють такі визначення.

Визначення 1. Положення рівноваги \mathbf{a} називають *стійким за Ляпуновим*, якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що коли $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| < \delta$, то $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$.

(Запис $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$ означає евклідову норму вектора \mathbf{x} із компонентами x_1, x_2, \dots, x_N ; тоді $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\|$ – відстань між точками \mathbf{x}_0 та \mathbf{a} в N -му фазовому просторі.)

Згідно з визначенням 1, якщо у початковий момент часу t_0 фазова точка міститься досить близько до положення рівноваги (значення $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\|$ мале), то й в усі наступні моменти часу, рухаючись траєкторією, точка залишатиметься поблизу положення рівноваги.

Визначення 2. Положення рівноваги \mathbf{a} називають *асимптотично стійким*, якщо воно стійке за Ляпуновим і якщо $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{a}$ для досить малих значень $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\|$.

¹ Ляпунов Олександр Михайлович (1857–1918) – російський математик.

Це означає: якщо точку трохи зрушити зі стану рівноваги, вона із часом прагнучиме повернутися до нього.

Виявляється аналіз і класифікацію особливих точок (положень рівноваги) нелінійної системи рівнянь (1.1) можна виконати, досліджуючи якісну поведінку фазових траєкторій у малому околі цих точок. Це дозволяє обмежитися аналізом так званої *лінеаризованої системи* (1.1), що значно спрощує дослідження.

Розглянемо систему з двома динамічними змінними:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y); \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{1.49}$$

де f і g – довільні (зазвичай нелінійні) гладкі функції x і y .

Нехай x_0 і y_0 є координатами особливої точки. Тоді маємо

$$\begin{aligned}f(x_0, y_0) &= 0, \\ g(x_0, y_0) &= 0.\end{aligned}\tag{1.50}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1.50), знаходимо значення координат особливої точки (x_0, y_0) . Їхню стійкість можна визначити, вивчаючи поведінку динамічної системи за малих відхилень в околі особливої точки (x_0, y_0) :

$$x(t) = x_0 + \tilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \tilde{y}(t).\tag{1.51}$$

Підставляємо (1.51) у рівняння (1.49) і знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{d(x_0 + \tilde{x})}{dt} &= f(x_0 + \tilde{x}, y_0 + \tilde{y}), \\ \frac{d(y_0 + \tilde{y})}{dt} &= g(x_0 + \tilde{x}, y_0 + \tilde{y}).\end{aligned}\tag{1.52}$$

Розкладемо функції f і g в ряд за степенями \tilde{x} і \tilde{y} . Тоді з урахуванням (1.50) отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= f_x(x_0, y_0)\tilde{x} + f_y(x_0, y_0)\tilde{y} + f_{xy}(x_0, y_0)\tilde{x}\tilde{y} + \dots \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= g_x(x_0, y_0)\tilde{x} + g_y(x_0, y_0)\tilde{y} + g_{xy}(x_0, y_0)\tilde{x}\tilde{y} + \dots\end{aligned}\tag{1.53}$$

Індекси x і y в рівнянні (1.53) визначають похідні по відповідній змінній.

Якщо обмежитися членами першого порядку по степенях \tilde{x} і \tilde{y} , то (1.53) можна представити у вигляді лінійної системи рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= f_x(x_0, y_0)\tilde{x} + f_y(x_0, y_0)\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= g_x(x_0, y_0)\tilde{x} + g_y(x_0, y_0)\tilde{y}.\end{aligned}\quad (1.54)$$

Систему рівнянь (1.54) називають *лінеаризованою системою*. Перехід від нелінійних рівнянь (1.49) до лінеаризованих (1.54) називають *лінеаризацією* нелінійних рівнянь (1.49) в околі особливої точки (x_0, y_0) . Проведені міркування узагальнюються на системи (1.1) з N динамічними змінними.

У матричному вигляді рівняння (1.54) можна записати так:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

у рівнянні (1.55) називають *матрицею Якобі*¹. По суті вона є *матрицею лінеаризації* системи (1.49) в околі особливої точки (x_0, y_0) .

Розв'язок системи (1.54) шукаємо у вигляді

$$\tilde{x} = a \exp(\lambda t), \quad \tilde{y} = b \exp(\lambda t), \quad (1.56)$$

де a, b і λ – деякі сталі. Звернемо увагу на те, що число λ беремо одне й те саме для всіх функцій, які складають розв'язок.

Підставляючи (1.56) у систему (1.54), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих a і b :

$$\begin{aligned}[f_x(x_0, y_0) - \lambda]a + f_y(x_0, y_0)b &= 0, \\ g_x(x_0, y_0)a + [g_y(x_0, y_0) - \lambda]b &= 0.\end{aligned}\quad (1.57)$$

¹ Якобі Карл Густав Якоб (1804–1851) – німецький математик.

Нас цікавить ненульовий розв'язок системи (1.57). Такий розв'язок існує за умови, що визначник системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) - \lambda & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (1.58)$$

у матричній формі рівняння (1.58) має вигляд

$$\text{Det}[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0,$$

де \mathbf{I} – одинична матриця. Рівняння (1.58) називають *характеристичним рівнянням*.

Для системи другого порядку, що розглядається, матриця \mathbf{A} характеризується двома *власними значеннями* λ_1 і λ_2 , які являють собою корені характеристичного рівняння (1.58). Двом власним значенням λ_1 і λ_2 , відповідають два лінійно незалежні *власні вектори* $\mathbf{e}_1(a_1, b_1)$ і $\mathbf{e}_2(a_2, b_2)$.

Послідовно підставляючи в (1.57) корені λ_1 і λ_2 , розв'язуємо систему (1.57) відносно невідомих координат власних векторів $\mathbf{e}_1(a_1, b_1)$ і $\mathbf{e}_2(a_2, b_2)$. Для кореня λ_1 знаходимо розв'язок системи (1.57) у вигляді чисел a_1 та b_1 , а для кореня λ_2 – a_2 та b_2 .

Отже, для власних векторів $\mathbf{e}_1(a_1, b_1)$ і $\mathbf{e}_2(a_2, b_2)$ систему (1.57) можна представити у вигляді таких векторних рівнянь:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1 \quad \text{і} \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \lambda_2\mathbf{e}_2.$$

Отже, отримали два частинні розв'язки системи (1.54), а саме $\mathbf{e}_1 \exp(\lambda_1 t)$ і $\mathbf{e}_2 \exp(\lambda_2 t)$, або в координатній формі:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = a_1 \exp(\lambda_1 t), & \tilde{y}_1 = b_1 \exp(\lambda_1 t), \\ \tilde{x}_2 = a_2 \exp(\lambda_2 t), & \tilde{y}_2 = b_2 \exp(\lambda_2 t). \end{cases} \quad (1.59)$$

Ці розв'язки характеризують локальний фазовий потік поблизу особливої точки (x_0, y_0) : у напрямку вектора \mathbf{e}_1 з координатами a_1 і b_1 він визначається експоненціальною залежністю $\exp(\lambda_1 t)$, а у напрямку вектора \mathbf{e}_2 з координатами a_2 і b_2 – експоненціальною залежністю $\exp(\lambda_2 t)$.

Нагадаємо основні властивості власних значень і власних векторів:

1) сума N власних значень дорівнює сумі N діагональних елементів матриці \mathbf{A} (див формули (1.46), (1.47));

2) добуток N власних значень дорівнює детермінанту матриці A ;

3) власні вектори, які відповідають попарно різним власним значенням, є лінійно незалежними.

Оскільки отримані розв'язки (1.59) лінійно незалежні, то загальний розв'язок системи (1.54) є суперпозицією частинних розв'язків (1.59):

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2 = c_1 a_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 a_2 \exp(\lambda_2 t); \\ \tilde{y} &= c_1 \tilde{y}_1 + c_2 \tilde{y}_2 = c_1 b_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 b_2 \exp(\lambda_2 t),\end{aligned}\quad (1.60)$$

де c_1 і c_2 – сталі, які визначаються з початкових умов у момент часу $t = t_0$.

Таким чином, характер локальних фазових потоків поблизу особливої точки визначається коренями λ_1 і λ_2 . Тут можна виділити такі варіанти:

а) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ – особлива точка, яку називають *стійкий вузол*. Локальний фазовий потік, згасаючи в обох напрямках, рухається до особливої точки (рис. 1.5, а); простий приклад – осцилятор із великим тертям (див. рис. 1.4, б).

б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ – *нестійкий вузол*. Локальний фазовий потік експоненціально зростає в обох напрямках від особливої точки (рис. 1.5, б); нестійкий вузол перейде у стійкий, якщо змінити на протилежний напрямок часу в динамічній системі;

в) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ – особлива точка типу *сідро*. Тут спостерігається експоненціальне збільшення в одному напрямку й експоненціальне зменшення в іншому (рис. 1.5, в). Фазові траєкторії, що ведуть до особливої точки і відходять від неї, називають сепаратрисами. Вони розділяють області з різною поведінкою фазових траєкторій.

г) $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$, ($\alpha, \beta > 0$) – *стійкий фокус*. Оскільки тут дійсна частина від'ємна, то потік закручується у спіраль у напрямку до нерухомої точки (рис. 1.5, з);

д) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, ($\alpha, \beta > 0$) – *нестійкий фокус*. У цьому випадку дійсна частина додатна, і спіраль розкручується у бік у напрямку від особливої точки (рис. 1.5, д);

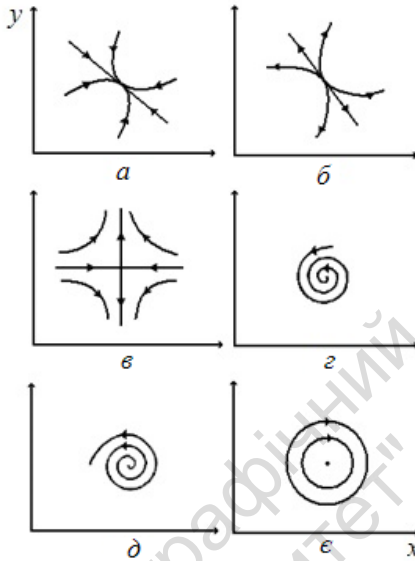


Рис. 1.5. Локальні фазові потоки в околі особливих точок

є) $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$, ($\omega > 0$) – особлива точка типу *центр* відповідає обертанню локального потоку навколо особливої точки (рис. 1.5, є). Приклад – маятник без тертя.

Проведений у попередньому підрозділі аналіз коливальних систем оснований, багато в чому, на аналізі фізики процесу коливань. Класифікація спеціальних точок нелінійної системи, отримана з урахуванням лінійного аналізу стійкості, дає можливість формально досліджувати динамічні системи різної природи.

Отримані результати дозволяють сформулювати фундаментальний результат теорії стійкості (**теорема Ляпунова**):

*Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння від'ємні, то положення рівноваги **a** стійке. Крім того, справедлива оцінка:*

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{a}\| \leq C \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| \exp(-\alpha t), \quad t \geq t_0, \quad (1.61)$$

де $\alpha > 0$, $C > 0$ для всіх \mathbf{x}_0 , достатньо близьких до точки **a**. Якщо хоча б один із коренів має додатну дійсну частину, то положення рівноваги нестійке.

Згідно з нашими дослідженнями можна сказати про особливі точки різних типів таке:

- стійкий вузол і стійкий фокус – це асимптотично стійкі положення рівноваги;
- центр – стійке за Ляпуновим, але не асимптотично стійке положення рівноваги;
- сідло, нестійкий вузол і нестійкий фокус – нестійкі положення рівноваги.

Особливі точки, як-от центр, фокус, сідло і вузол, визначають усі можливі типи особливих точок лінійної системи другого порядку (1.54). Проте є значна відмінність між центром і трьома іншими типами особливих точок. Ми бачили, що у разі додавання в рівняння гармонічного осцилятора (1.13) скільки завгодно малого доданка Rx (рівняння (1.29)), центр перетворюється на фокус. Аналогічно можна показати: якщо система (1.54) має особливу точку типу центр, то за будь-якої малої зміни коефіцієнтів цієї системи (похідні від функцій f і g) центр може стати фокусом (який може бути стійким або нестійким залежно від того, як саме змінилися коефіцієнти). Якщо система (1.54) мала вузол, фокус або сідло, то за досить малої зміни коефіцієнтів характер положення рівноваги не зміниться, тобто воно так і залишиться вузлом (хоч один тип вузла може перейти в інший), фокусом чи сідлом.

Отже, якщо лінеаризована система (1.54) має вузол, фокус або сідло, то поведінка траєкторій нелінійної системи (1.49) біля положення рівноваги (x_0, y_0) аналогічна поведінці траєкторій лінеаризованої системи (1.54) біля початку координат. Якщо ж положенням рівноваги для (1.54) є центр, то подібності між поведінкою траєкторій вихідної нелінійної системи (1.49) та лінеаризованої системи (1.54) може й не бути.

Як приклад розглянемо динамічну систему – модель, яку запропонував Вольтерра¹ для пояснення коливань чисельності конкуруючих видів тварин і рослин. Інтерес до побудови такої моделі виник у Вольтерри 1925 р. після бесіди зі своїм зятем, молодим зоологом. З бесіди він дізнався, що коли в роки Першої

¹ Вольтерра Віто (1860–1940) – італійський математик і фізик.

світової війни інтенсивність рибного промислу різко скоротилася, у вилові зросла частка хижих риб.

Ця модель отримала назву "хижак-жертва". До неї можна дійти під час таких міркувань. Нехай на острові живуть кролики (їхня кількість $x(t)$), вони харчуються рослинною їжею, що є в надлишку) і лисиці (їхня кількість $y(t)$), вони харчуються кроликами). Якби кролики жили на острові самі, швидкість зростання їхньої популяції можна було б покласти пропорційною їхній чисельності в даний час, тобто $\dot{x} = x$. Розв'язок цього рівняння $x(t) = x(0)\exp(t)$, $x(0)$ – чисельність популяції в момент часу $t = 0$. Якби на острові жили одні лисиці, то через відсутність їжі вони вимерли б: $\dot{y} = -y$, звідки $y(t) = y(0)\exp(-t)$.

Можна припустити, що у разі спільного проживання кроликів і лисиць чисельність лисиць буде збільшуватися тим швидше, чим більшою буде частота їхніх зустрічей із кроликами. Ця частота пропорційна добутку $x y$. У результаті доходимо до такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy, \\ \dot{y} &= -y + xy.\end{aligned}\tag{1.62}$$

Зазначимо, що динамічна система (1.62) є значно спрощеною моделлю подібних процесів.

Система (1.62) має дві особливі точки $(x_1, y_1) = (0, 0)$ і $(x_2, y_2) = (1, 1)$, а лінеаризовані рівняння, що визначають потоки в околі особливих точок, такі (запишіть рівняння самостійно):

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= (1 - y_j)\tilde{x} - x_j\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= y_j\tilde{x} - (1 - x_j)\tilde{y}, \quad j = 1, 2.\end{aligned}\tag{1.63}$$

Для особливої точки $(x_1, y_1) = (0, 0)$ рівняння (1.63) набувають вигляду $\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{x}$, $\frac{d\tilde{y}}{dt} = -\tilde{y}$. У цьому випадку корені характеристичного рівняння такі: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$, що відповідає сідловій точці, і загальний розв'язок системи (1.63) має вигляд

$$\tilde{x} = C_1 \exp(+t), \quad \tilde{y} = C_2 \exp(-t).\tag{1.64}$$

Цей розв'язок показує, що потік в околі особливої точки $(x_1, y_1) = (0, 0)$ спрямований у від'ємному напрямку вздовж осі y , а вздовж осі x – у додатному (рис. 1.6).

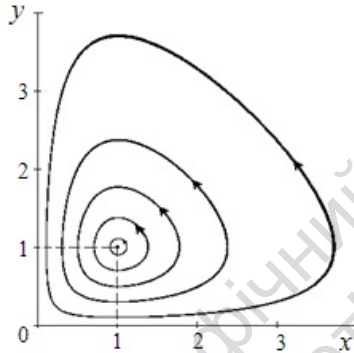


Рис. 1.6. Фазовий портрет моделі "хижак-жертва"

У разі другої особливої точки $(x_2, y_2) = (1, 1)$ рівняння (1.63) зводяться до вигляду $\frac{d\tilde{x}}{dt} = -\tilde{y}$, $\frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x}$. Диференціюючи перше рівняння за часом і використовуючи друге, приходимо до рівняння гармонічного осцилятора (1.13): тут $\omega_0^2 = 1$, таке саме рівняння отримаємо і для \tilde{y} . Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = +i$ відповідають особливій точці типу центр. Таким чином, навколо точки $(x_2, y_2) = (1, 1)$ формуються замкнені траєкторії (рис. 1.6).

Незважаючи на свою простоту, модель Вольтерри якісно правильно відображає коливальний характер чисельності x і y співіснування хижака та жертви. Згідно з фазовим портретом, коливання чисельності популяції мають періодичний характер, але можуть відбуватися з різними розмахами.

Відповідно до цієї моделі, маємо сумну долю жертви бути їжею для хижака. Мабуть, найсприятливіше для неї – перебувати поблизу рівноважного стану, оскільки за великих розмахів

популяції жертви, утім, як і хижака, потім приходять періоди дуже малої чисельності.

Якщо поширити [30], що допустимо лише з великими застереженнями, цю модель на співіснування людини (жертва) з мікробом або вірусом (хижак), можна зробити цікаві висновки про те, як слід і як не слід вживати ліки, що знищують хижака. Насамперед, якщо це можливо, то хижака потрібно добивати повністю: залишаючи навіть дуже малу його кількість, ми мети не досягнемо. Через деякий час він досягне, можливо, ще більшої чисельності. Якщо ж повне винищення хижака неможливе, то зменшувати його кількість доцільно певною мірою, а саме лише у разі верхнього положення фазової точки (див. рис. 1.6), тобто поблизу максимуму його чисельності. Часткове знищення за малої чисельності призведе лише до більшого подальшого загострення захворювання.

Такими є висновки, яких можна дійти, розглядаючи дуже просту модель співіснування хижака та жертви. Надалі цю модель уточнювали й ускладнювали.

Задача. Динамічну систему задано рівнянням $\dot{x} = 3 - 2x^2$. Знайти стаціонарні стани цієї системи і дослідити їхню стійкість.

1.8. Граничні цикли

Задамо собі таке запитання: чи можливі в дисипативній системі незгасаючі коливання без впливу зовнішньої коливальної сили. Виявляється, що так! У цьому випадку для підтримки коливань система має бути пов'язана з будь-яким джерелом енергії, за допомогою якого вона могла б компенсувати втрати, пов'язані з дією сили тертя. Щоб коливання були незгасаючі (стаціонарні), система за період коливань має взяти від джерела стільки енергії, скільки витрачається в ній за цей час. Для цього система має сама керувати надходженням енергії від джерела. Такі динамічні системи настільки важливі при вивченні коливальних процесів, що для їхнього виділення Андро́в¹ запро-

¹ Андро́в Олександр Олександрович (1901–1952) – радянський фізик.

понував спеціальний термін – *автоколивальні системи*, а не-згасаючі коливання назвав *автоколиваннями*.

Зазначимо, що автоколивальні системи, зовсім різні за своєю природою, зустрічаються скрізь. Це духові та смичкові музичні інструменти, годинникові механізми, генератори, різноманітні регулятори, що зустрічаються у техніці, процеси в живому організмі, такі як, дихання та робота серця.

Математичним образом автоколивань служить *граничний цикл* – замкнена траєкторія у фазовому просторі, що відповідає періодичному руху. Можливість існування періодичного асимптотично стійкого руху, який є ізольованою замкненою траєкторією у фазовому просторі системи, до якої згодом притягуються траєкторії з деякого околу, незалежно від початкових умов, забезпечується тільки в нелінійних дисипативних системах.

Граничні цикли, як і особливі точки, можуть бути *стійкими* та *нестійкими*. Граничний цикл *стійкий*, якщо існує така область фазового простору, яка містить цей граничний цикл, що всі фазові траєкторії, що починаються в цій області, при $t \rightarrow \infty$ асимптотично наближаються до граничного циклу. У протилежному випадку граничний цикл називають *нестійким*.

Прикладом автоколивальної системи є нелінійний осцилятор Ван-дер-Поля¹, рівняння коливань якого має вигляд [1]

$$\ddot{\xi} - 2\delta(1 - b\xi^2)\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0. \quad (1.65)$$

У фазових координатах $x = \xi$, $y = \dot{x}$ рівняння (1.65) набуде вигляду системи рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= 2\delta(1 - bx^2)y - \omega_0^2x \end{aligned} \quad (1.66)$$

зі знаковмінною дивергенцією правої частини системи (1.66):

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 2\delta(1 - bx^2) \neq 0. \quad (1.67)$$

Задача. Провести лінійний аналіз стійкості системи (1.66) і встановити існування особливої точки $(x, y) = (0, 0)$, яка для

¹ Ван-дер-Поль Балтазар (1889–1959) – голландський фізик.

нерівності $\delta^2 > \omega_0^2$ є нестійким вузлом, а для $\delta^2 < \omega_0^2$ – нестійким фокусом.

У загальному випадку (1.66) не інтегрується, і дослідження проводять числовими методами. У практично важливому випадку $\delta > 0$, $b > 0$ рівняння (1.66) мають єдиний стійкий розв'язок у вигляді граничного циклу. Проаналізуємо на якісному рівні можливість встановлення режиму автоколивань в осциляторі Ван-дер-Поля. За малих ξ (таких, що $b\xi^2 \ll 1$) рівняння (1.65) можна наближено записати у вигляді

$$\ddot{\xi} - 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0. \quad (1.68)$$

Це лінійне рівняння аналогічне до рівняння лінійного осцилятора з тертям (1.30). Єдина відмінність полягає у заміні δ на $-\delta$, унаслідок чого положення рівноваги виявляється нестійким. Оскільки доданок $(-2\delta\dot{\xi})$ аналогічний до того, що враховує тертя в рівнянні (1.30), то про нього говорять як про *від'ємне тертя*.

За збільшення нестійкості (зростання змінної ξ) нелінійний доданок у рівнянні (1.65) починає відігравати все істотнішу роль, ефективно створюючи додатне тертя. Коли від'ємне та додатне тертя врівноважаться, встановиться стаціонарний режим (автоколивання). Цей режим є стійким. Справді, нехай деяка початкова точка задовольняє умову $b\xi^2 < 1$, тоді другий доданок (1.65) виконуватиме функцію дестабілізації, і коливання будуть зростати. Зі збільшенням амплітуди виникає умова $b\xi^2 > 1$ і другий доданок (1.65) визначатиме дисипативний ефект, що виводить із системи надмірну енергію. Отже, граничний цикл є глобально стабільною структурою, яка притягує до себе траєкторії з будь-якої точки на фазовій площині.

На рис. 1.7 зображено фазовий портрет осцилятора Ван-дер-Поля із значеннями параметрів: $2\delta = 1$, $b = 0,3$, $\omega_0 = 1$. Тут показано дві фазові траєкторії, що відповідають положенню початкової точки всередині та зовні граничного циклу. В обох випадках фазова траєкторія досить швидко виходить на граничний цикл.

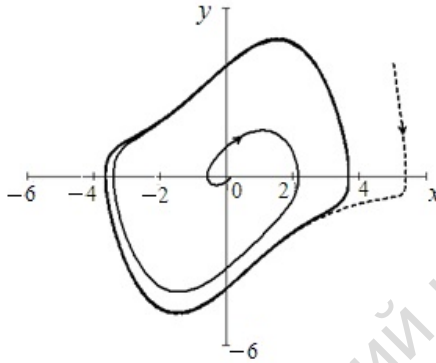


Рис. 1.7. Граничний цикл осцилятора Ван-дер-Поля:
 $2\delta = 1, b = 0,3, \omega_0 = 1$

Рух на граничному циклі визначає складний процес енергетичних змін у часі, що відбуваються в автоколивальній системі. Якщо зовнішнім збуренням змістити траєкторію на фазовій площині всередину граничного циклу, то енергія, що вноситься, у середньому перевищуватиме розсіювану. Середнє значення дивергенції фазового потоку (1.67) тут виявиться додатним. Поза граничним циклом дивергенція (1.67) буде від'ємною, унаслідок чого фазові траєкторії прагнуть до граничного циклу ззовні.

На граничному циклі за час періоду коливань частка енергії, що розсіюється, і та, що вноситься, строго компенсуються. Проте, якщо розрахувати середнє значення дивергенції фазового потоку, задавши початкові умови на граничному циклі, ми отримаємо від'ємне значення дивергенції. Це важлива якість дисипативних систем. Дивергенція характеризує локальні властивості фазового потоку й у цьому разі – стиснення фазового об'єму навколо циклу.

Отже, для систем з одним ступенем вільності, які визначаються одним рівнянням другого порядку, на фазовій площині немає структурних елементів, крім особливих точок, сепаратрис і граничних циклів. Це зумовлено фундаментальною властивістю розв'язків диференціальних рівнянь, а саме єдиністю, що виключає можливість перетину фазових траєкторій. Поведінка фазових траєкторій на площині визначається взаємним розташу-

ванням цих виділених структурних елементів. Якщо на фазовій площині вказати особливі точки та спеціальні траєкторії (сепаратиси, граничні цикли) і показати типові фазові траєкторії, то отримана картина дасть якісне уявлення про характер динаміки досліджуваної динамічної системи. Отже, для динамічної системи з одним ступенем вільності (з розмірністю фазового простору $N = 2$) є лише три можливості:

- здійснювати періодичні рухи;
- необмежено прагнути до положення рівноваги;
- необмежено віддалятися від положення рівноваги.

Розглянемо ще один випадок типової структури у фазовому просторі динамічної системи, що виникає, наприклад, за періодичного збурення системи з граничним циклом. Додамо до рівняння (1.65) джерело гармонічного збурення порівняно малої амплітуди a та частоти ω [1]:

$$\ddot{\xi} - 2\delta(1 - b\xi^2)\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = a \sin(\omega t). \quad (1.69)$$

У фазових координатах $x = \xi$, $y = \dot{\xi}$, $z = \omega t$ отримаємо автономну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= 2\delta(1 - bx^2)y - \omega_0^2x + a \sin z, \\ \dot{z} &= \omega. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Отже, розмірність фазового простору динамічної системи (1.70) дорівнює трьом ($N = 3$). Наявність зовнішнього гармонічного збурення малої амплітуди $a \sin(\omega t)$ призводить до своєрідної модуляції граничного циклу автоколивальної системи (1.66), тобто фазова траєкторія з частотою ω обертається навколо граничного циклу і лежить на поверхні двовимірного тора. Двовимірний у тому сенсі, що положення точки на поверхні тора можна описати за допомогою двох локальних координат φ_1 і φ_2 , які змінюються від 0 до 2π , тобто якщо φ_1 визначає положення фазової точки по "паралелях" тора, то φ_2 – по "меридіанах". Зрозуміло, що мінімальний розмір фазового простору, куди можна вмістити двовимірний тор, дорівнює трьом.

Якщо відношення частоти зовнішнього впливу ω та частоти автоколивань системи є раціональним числом, то фазова траєкторія являє собою замкнену лінію на поверхні тора. Якщо це

відношення є ірраціональним числом, то траєкторія не замикається і заповнює всю поверхню тора. Аналогічно випадку граничного циклу ця поверхня буде стійкою граничною множиною, до якої стягуються із часом всі траєкторії з деякого околу тора (як із середини, так і ззовні!). На рис. 1.8 показано проекцію на площину xu фазової траєкторії на двовимірному торі, одержану числовим інтегруванням системи (1.70).

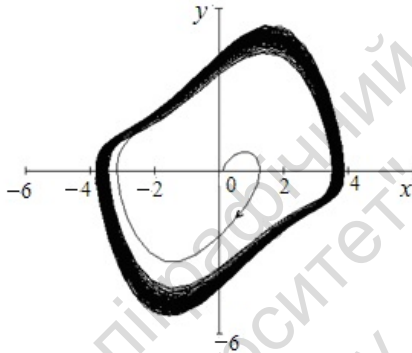


Рис. 1.8. Проекція двовимірного тора (система (1.70)) на площину змінних xu :

$$2\delta = 1, b = 0,3, \omega_0 = 1, a = 0,29, \omega = 1,3$$

1.9. Характеристичні показники Ляпунова

У підрозд. 1.7 дано визначення стійкості за Ляпуновим та асимптотичної стійкості для положення рівноваги. Стосовно траєкторії загального вигляду ці критерії характеризують її з погляду поведінки сусідніх траєкторій, які розташовані в її околі.

Нехай динамічна система (1.2) породжує траєкторію $\mathbf{x}(t)$ з початкової точки \mathbf{x}_0 в момент часу t_0 . Розглянемо іншу траєкторію $\bar{\mathbf{x}}(t)$, початкова точка якої $\bar{\mathbf{x}}_0$ близька до точки \mathbf{x}_0 .

Визначення 1. Траєкторію $\mathbf{x}(t)$ називають стійкою за Ляпуновим, якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\| < \delta$ маємо $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}(t, \bar{\mathbf{x}}_0)\| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$.

Це означає, що обидві траєкторії залишаються близькими в будь-який час $t \geq t_0$. Більш сильна властивість – асимптотична стійкість.

Визначення 2. Траєкторію називають асимптотично стійкою, якщо вона стійка за Ляпуновим і якщо $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}(t, \bar{\mathbf{x}}_0)\| = 0$ для досить малих $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\| < \delta$.

Стійкість за Ляпуновим і асимптотична стійкість визначаються еволюцією у часі малого відхилення між траєкторіями $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}(t, \bar{\mathbf{x}}_0)\|$, тобто чи будуть ці відхилення зменшуватися, зростати або залишаться обмеженими із часом. Малі значення розглянутих відхилень дозволяють лінеаризувати оператор еволюції поблизу траєкторії, що вивчається, і провести аналіз стійкості в лінійному наближенні.

Розглянемо автономну динамічну систему, яку задано векторним диференціальним рівнянням вигляду

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \quad (1.71)$$

і вважаємо, що стан динамічної системи задано залежним від часу N -вимірним вектором $\mathbf{x}(t)$. Тут $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ є векторна функція, яка відображає N -вимірний простір у себе.

Нехай $\mathbf{x}^{(0)}(t) = (x_1^{(0)}(t), x_2^{(0)}(t), \dots, x_N^{(0)}(t))$ є деяка фазова траєкторія динамічної системи (1.71). Траєкторія $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \mathbf{u}(t)$ близька до початкової траєкторії $\mathbf{x}^{(0)}(t)$.

Змінні $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))$ характеризують відхилення двох траєкторій одна від одної. Підставивши вираз $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \mathbf{u}(t)$ у рівняння (1.71), маємо

$$\frac{d\mathbf{x}^{(0)}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}(t) + \mathbf{u}(t)). \quad (1.72)$$

Розклавши праву частину (1.72) у ряд Тейлора по відхиленню $\mathbf{u}(t)$ в околі $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, отримаємо

$$\frac{d\mathbf{x}^{(0)}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}(t)) + \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(0)}(t))\mathbf{u} + \dots,$$

де $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ – матриця, складена із частинних похідних від компонент векторної функції $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ по компонентах вектора \mathbf{x} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \frac{\partial F_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^{(0)}(t)}. \quad (1.73)$$

Нехтуючи членами другого і вищого порядків по збуренню \mathbf{u} , і з огляду на те, що $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ задовольняє рівняння $\frac{d\mathbf{x}^{(0)}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}(t))$, знаходимо, що еволюція малого відхилення $\mathbf{u}(t)$ в лінійному наближенні визначається рівнянням

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(0)}(t))\mathbf{u}. \quad (1.74)$$

Оскільки елементи матриці (1.73) $A_{ik} = \left(\frac{dF_i}{dx_k} \right)_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^{(0)}(t)}$, $i, k = 1, 2, \dots, N$, визначені в точках початкової траєкторії $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, а отже залежать від часу, то і матриця залежить від часу: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(0)}(t)) \equiv \mathbf{A}(t)$. Матрицю $\mathbf{A}(t)$ називають *матрицею лінеаризації* системи (1.71) в околі розв'язку $\mathbf{x}^{(0)}(t)$.

Матриця характеризується N власними значеннями $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)$, які також змінюються із часом. Власні значення є коренями характеристичного рівняння

$$\text{Det}[\mathbf{A}(t) - \lambda \mathbf{I}] = 0, \quad (1.75)$$

де \mathbf{I} – одинична матриця.

N власним значенням відповідають N лінійно незалежних власних векторів $\mathbf{e}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, які змінюють свої напрямки під час руху вздовж траєкторії $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ і задовольняють рівняння

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{e}_i(t) = \lambda_i(t)\mathbf{e}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.76)$$

Отже і напрямки локальних потоків $\mathbf{u}^{(1)}(t), \mathbf{u}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{u}^{(N)}(t)$, які направлені вздовж напрямків власних векторів $\mathbf{e}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, будуть мінятися з плином часу. Причому початкове збурення $\mathbf{u}^{(i)}(t)$ в напрямку i -го власного вектора $\mathbf{e}_i(t)$, задане в момент часу t для деякої точки траєкторії $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, змінюється, у лінійному наближенні, за малий інтервал часу τ таким чином:

$$\mathbf{u}^{(i)}(t + \tau) = \mathbf{u}^{(i)}(t) \exp(\tau \lambda_i(t)). \quad (1.77)$$

Збільшення чи зменшення норми збурення $\|\mathbf{u}^{(i)}(t + \tau)\|$ визначається знаком дійсної частини $\lambda_i(t)$. Під час руху вздовж траєкторії $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ показник експоненти $\lambda_i(t)$ набуває різних значень. Отже, можлива ситуація, коли мале відхилення

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}^{(i)}(t + \tau) \quad (1.78)$$

експоненціально зростає зі збільшенням τ в одних точках траєкторії, яка досліджується, і експоненціально зменшується в інших (саме експоненціально, адже досліджуємо лінеаризовану систему).

Розглянемо еволюцію компоненти малого збурення $\mathbf{u}^{(i)}(t)$, яке направлене вздовж i -го власного вектора $\mathbf{e}_i(t)$ матриці $\mathbf{A}(t)$. Виявляється, що можна запропонувати деякі усереднені аналоги власних значень і тим самим визначити стійкість траєк-

торії уздовж власного вектора $\mathbf{e}_i(t)$. Цю проблему розв'язано у *теоремі Ляпунова*.

Теорема стверджує [1, 23], що стійкість траєкторії уздовж власного вектора $\mathbf{e}_i(t)$ визначається *характеристичним показником Ляпунова* Λ_i :

$$\Lambda_i = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \|\mathbf{u}^{(i)}(t_0)\| \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{t - t_0} \ln \frac{\|\mathbf{u}^{(i)}(t)\|}{\|\mathbf{u}^{(i)}(t_0)\|} \right], \quad (1.79)$$

де у початковий момент часу $t = t_0$ відстань між траєкторіями визначається нормою $\|\mathbf{u}^{(i)}(t_0)\|$.

Бачимо, що стійкість траєкторії у просторі R^N визначається набором з N показників Ляпунова, які нумеруються в порядку зменшення: $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$. Найбільше із цих чисел називають *старшим показником Ляпунова*. Набір чисел $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$ називають *спектром показників Ляпунова*.

Зрозуміло, що наявність у спектрі хоча б одного додатного показника Ляпунова означає нестійкість даної фазової траєкторії. Якщо всі показники від'ємні, то це говорить про асимптотичну стійкість траєкторії. Якщо старший показник нульовий, це може свідчити про недостатність лінійного аналізу для висновку про стійкість чи нестійкість траєкторії за Ляпуновим.

Зауважимо, що розглянуте вище визначення належить до показників Ляпунова *індивідуальної траєкторії*. Чи можна використовувати це поняття щодо всього атрактора? Зрозуміло, це так, якщо атрактор представлений однією орбітою як граничний цикл або стійка нерухома точка. Однак атрактори складнішої природи мають *множину* орбіт. Тому питання не тривіальне, бо різні орбіти на атракторі можуть мати різні показники Ляпунова. Як виявляється, бажаного узагальнення поняття спектра показників Ляпунова можна досягти і воно полягає у тому, що атрактору приписують спектр показників Ляпунова, отриманий для *типової* траєкторії на атракторі. Цей підхід математично обґрунтовано у так званій *мультиплікативній ергодичній теоремі* [34],

інакше, у *теоремі Оселедця*¹. Теорема Оселедця стверджує, що типова, узята навмання, траєкторія на атракторі з імовірністю, що дорівнює одиниці, матиме цілком визначений спектр показників Ляпунова, який можна приписати атрактору в цілому.

Показники Ляпунова пов'язані певним чином із власними значеннями $\lambda_i(t)$ матриці $\mathbf{A}(t)$ системи (1.73). Визначимо цей взаємозв'язок [1]. Нехай у момент часу $t = t_0$ маємо початкове збурення $\mathbf{u}^{(i)}(t_0)$ уздовж i -го власного вектора $\mathbf{e}_i(t)$ лінійної системи (1.73). У лінійному наближенні за малий час τ початкове збурення в момент часу $t_1 = t_0 + \tau$ змінюється так:

$$\mathbf{u}_i(t_1) = \mathbf{u}_i(t_0) \exp(\lambda_i(t_0)\tau). \quad (1.80)$$

Оскільки τ мале, вважатимемо, що напрямок власних векторів \mathbf{e}_i практично не змінюються за час τ і можна вважати, що вектор $\mathbf{u}^{(i)}(t_1)$ направлений уздовж i -го власного вектора $\mathbf{e}_i(t_0)$. Далі вважаємо, що початкове збурення $\mathbf{u}^{(i)}(t_0)$ настільки мале, що воно залишається малим і в наступні моменти часу. Переміщуючись траєкторією $\mathbf{x}(t)$ з малим кроком τ , отримуємо наближений вираз, який описує еволюцію малого збурення в напрямку i -го власного вектора:

$$\mathbf{u}^{(i)}(t) \approx \mathbf{u}^{(i)}(t_0) \exp\left(\sum_k \lambda_i(t_k)\tau\right). \quad (1.81)$$

Якщо перейти до границі $\|\mathbf{u}^{(i)}(t_0)\| \rightarrow 0$ і $\tau \rightarrow 0$, отримуємо строгу рівність

$$\mathbf{u}^{(i)}(t) = \mathbf{u}^{(i)}(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda_i(t') dt'\right). \quad (1.82)$$

У результаті підстановки (1.82) в (1.79) приходимо до рівності

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \lambda_i(t') dt'. \quad (1.83)$$

¹ Оселедець Валерій Іустинович (народ. 1940 р.) – радянський математик.

Отже, i -й показник Ляпунова Λ_i можна розуміти як усереднену вздовж траєкторії дійсну частину власного значення λ_i матриці лінеаризації $\mathbf{A}(t)$. Він показує, що відбувається з відповідним компонентом початкового відхилення в середньому вздовж траєкторії.

Дивергенція потоку i , отже, еволюція фазового об'єму визначається сумою показників Ляпунова: можна показати [1], що середнє вздовж траєкторії значення дивергенції фазового потоку визначається сумою показників Ляпунова:

$$\sum_{i=1}^N \Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{div} \mathbf{f}(t') dt'. \quad (1.84)$$

Для фазових траєкторій, розташованих на аттракторі, елемент фазового об'єму має стискатися. У цьому випадку усереднена дивергенція фазового потоку дисипативної динамічної системи від'ємна, і сума показників Ляпунова задовольняє нерівність

$$\sum_{i=1}^N \Lambda_i < 0. \quad (1.85)$$

Якщо сума показників Ляпунова дорівнює нулю, то фазовий об'єм системи у часі не змінюється, тобто система консервативна й аттракторів не містить. У разі додатної дивергенції фазовий об'єм із часом зростає. З фізичного погляду такий режим як стаціонарний є нереальним. Однак збільшення фазового об'єму може спостерігатися на кінцевому інтервалі часу, що говорить про перехід системи до нового стану.

Якщо досліджуваний розв'язок $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ рівняння (1.71) є станом рівноваги, тобто справедлива тотожність $\mathbf{x}^{(0)}(t) \equiv \mathbf{a} = \text{const}$, то матрицю лінеаризації \mathbf{A} розраховують лише в одній точці фазового простору і, отже, вона є матрицею зі сталими елементами. Збурення $\mathbf{u}(t)$ представляється у вигляді суперпозиції початкових збурень $\mathbf{u}^{(i)}$ в момент часу $t = 0$, які направлені вздовж відповідних власних векторів \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^N C_i \mathbf{u}^{(i)} \exp(\lambda_i t), \quad (1.86)$$

де власні вектори і власні значення визначають із рівняння $\mathbf{A} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Зрозуміло, що вони сталі у часі. Дійсному

власному значенню матриці \mathbf{A} відповідає показник Ляпунова $\Lambda = \lambda_i$, а комплексному $\Lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_i$, так що кожна комплексно-спряжена пара власних значень дає два однакові показники.

Якщо маємо хоча б один додатний показник Ляпунова, то нерухома точка нестійка. Якщо всі показники від'ємні, то це означає асимптотичну стійкість.

У разі граничного циклу залежність стану системи періодична: $\mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t+T)$, де T – період. Матриця лінеаризації $\mathbf{A}(t)$, яка обчислюється в точках траєкторії, що відповідає періодичному розв'язку $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, також буде періодичною $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+T)$. У такому випадку у будь-якої періодичної траєкторії, стійкої або нестійкої, обов'язково є нульовий показник Ляпунова, пов'язаний із відхиленням типу зсуву вздовж траєкторії. Справді, таке відхилення в середньому не наростає і не згасає в часі: відхилення типу зсуву від вихідної траєкторії відповідає руху тією самою траєкторією і, отже, має той самий часовий період, як і початковий розв'язок. Тому стійкий граничний цикл має нульовий старший показник Ляпунова, тоді як інші показники від'ємні.

Спектру показників Ляпунова можна надати наочний геометричний смисл. Нехай у фазовому просторі системи маємо хмарку (у вигляді кульки) фазових точок малого радіуса ε із центром на траєкторії $\mathbf{x}(t)$. Ця хмарка визначає початкові умови, що характеризують відхилення від траєкторії $\mathbf{x}(t)$. Із часом, у процесі руху кожної точки хмарки форма хмарки може змінюватися. Доки розміри хмарки вважатимуться малими, вона матиме вигляд N -вимірної еліпсоїда. За малих ε і з плином часу t розміри еліпсоїда по головних півосях знаходять за допомогою показників Ляпунова, а саме $\{\varepsilon \exp(\Lambda_1 t), \varepsilon \exp(\Lambda_2 t), \dots, \varepsilon \exp(\Lambda_N t)\}$. Причому кожен показник відповідає за розширення або стиснення еліпсоїда фазових точок уздовж однієї з головних осей. Зрозуміло, що із часом малий елемент об'єму розтягнеться найбільше в тому напрямку, якому відповідає найбільший показник.

Узагалі існує досить багато різних визначень стійкості. Найчастіше використовують стійкість за Ляпуновим, асимптотичну стійкість, про них уже йшлося, а також стійкість за Пуассоном¹. Дамо визначення стійкості за Пуассоном.

Стійкість за Пуассоном означає, що через певний час фазова траєкторія повертається в як завгодно малий окіл початкової точки $\mathbf{x}_0(t_0)$. Інтервал часу, за який траєкторія повертається в окіл точки $\mathbf{x}_0(t_0)$ заданого радіуса ε , називають *періодом повертання Пуанкаре*. Періоди повертання можуть відповідати періоду або квазіперіоду регулярного руху або являти собою випадкову послідовність у режимі динамічного хаосу. Стійкість за Пуассоном є важливою, але слабкою властивістю стійкості. Ми нічого не можемо сказати про поведінку сусідніх траєкторій, які із самого початку близькі до $\mathbf{x}_0(t)$.

1.10. Стійкість фазових траєкторій у системах із дискретним часом

Нехай система з дискретним часом описується відображенням

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{P}(\mathbf{x}(n)), \quad (1.87)$$

де \mathbf{x} – N -вимірний вектор стану, n – дискретна змінна часу, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ – вектор-функція з компонентами P_j , $j=1,2,\dots,N$. Проаналізуємо стійкість довільного розв'язку $\mathbf{x}^{(0)}(n)$. Розглянемо траєкторію $\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^{(0)}(n) + \mathbf{u}(n)$, яка близька до траєкторії $\mathbf{x}^{(0)}(n)$ внаслідок малого збурення $\mathbf{u}(n)$. Підставимо вираз $\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^{(0)}(n) + \mathbf{u}(n)$ у відображення (1.87) і розкладемо праву частину в ряд Тейлора по \mathbf{u} в околі траєкторії $\mathbf{x}^{(0)}(n)$:

$$\mathbf{x}^{(0)}(n+1) + \mathbf{u}(n+1) = \mathbf{P}(\mathbf{x}^{(0)}(n)) + \mathbf{M}(\mathbf{x}^{(0)}(n))\mathbf{u}(n) + \dots,$$

де \mathbf{M} – матриця частинних похідних від компонент векторної функції $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ по компонентах вектора \mathbf{x} :

¹ Пуассон Сімеон Дені (1781–1840) – французький математик і механік.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_1} & \frac{\partial P_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial P_N}{\partial x_1} & \frac{\partial P_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial P_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}(n)=\mathbf{x}^{(0)}(n)} \quad (1.88)$$

Нехтуючи членами другого й вищого порядків і враховуючи, що $\mathbf{x}^{(0)}(n)$ задовольняє рівняння (1.87), знаходимо, що еволюція малого збурення в лінійному наближенні описується рівнянням

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{M}(\mathbf{x}^{(0)}(n))\mathbf{u}(n). \quad (1.89)$$

З (1.89) слідує, що початкове збурення еволюціонує згідно із законом

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{M}(n)\mathbf{M}(n-1) \cdot \dots \cdot \mathbf{M}(1)\mathbf{u}(1). \quad (1.90)$$

За аналогією з диференціальними системами вводимо спектр показників Ляпунова для розв'язку $\mathbf{x}^{(0)}(n)$:

$$\Lambda_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|\mathbf{u}^{(i)}(1)\| \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{n} \ln \frac{\|\mathbf{u}^{(i)}(n)\|}{\|\mathbf{u}^{(i)}(1)\|} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.91)$$

Збурення $\mathbf{u}^{(i)}(n)$ являють собою еволюцію початкових збурень $\mathbf{u}^{(i)}(1)$, які направлені вздовж відповідних власних векторів \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Беручи до уваги, що

$$\mathbf{M}(n)\mathbf{u}^{(i)}(n) = \lambda_i(n)\mathbf{u}^{(i)}(n), \quad (1.92)$$

де λ_i – власне значення матриці $\mathbf{M}(n)$, що відповідає i -му власному вектору \mathbf{e}_i , і, використовуючи формули (1.89)–(1.91), отримуємо (зробіть необхідні перетворення самостійно):

$$\Lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |\lambda_i(k)| \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.93)$$

Отже, i -й показник Ляпунова Λ_i можна розуміти як усереднений уздовж траєкторії модуль власного значення λ_i матриці лінеаризації $\mathbf{M}(n)$. Він показує, що відбувається з відповідним компонентом початкового відхилення в середньому вздовж траєкторії.

Геометрична інтерпретація спектра показників Ляпунова, яка розглянута в кінці попереднього підрозділу, залишається в силі. Як і у випадку диференціальних рівнянь, спектр показників Ляпунова слід розуміти як визначений для типової траєкторії на аттракторі. Тих обмежень, які справедливі для автономних диференціальних рівнянь, у відображень немає. Нульовий показник може бути відсутнім. Властивість дисипативності також не обов'язкова, якщо відображення необоротне.

В окремому випадку одновимірних відображень

$$x_{n+1} = P(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.94)$$

рівняння (1.89) набуває вигляду

$$u_{n+1} = P'(x_n)u_n, \quad (1.95)$$

де похідна $P'(x_n) = \left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_{x=x_n}$.

Оскільки u_n визначають через початкове відхилення u_1 як ланцюжок ітерацій

$$u_1, \quad u_2 = P'(x_1)u_1, \quad u_3 = P'(x_2)u_2 = P'(x_2)P'(x_1)u_1, \dots,$$

тобто $u_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1} P'(x_k) \right] u_1$, то згідно з (1.91) показник Ляпунова в одновимірній системі з дискретним часом визначиться таким співвідношенням:

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln |P'(x_k)| \right]. \quad (1.96)$$

Одновимірні відображення є важливими об'єктами дослідження. Їхня простота дозволяє запропонувати нескладний алгоритм для визначення показника Ляпунова. Спочатку формулу (1.94) ітерують таку кількість разів, щоб послідовність чисел зійшлася до атрактора, який має система (якщо такий є). Відтак можна розпочати обчислення показника Ляпунова на основі формули (1.96) (зауважимо, що кількість ітерацій m має бути достатньо великою). Отриманий результат досить близько відповідатиме значенню показника Ляпунова.

1.11. Алгоритм числового обчислення показників Ляпунова

Аналітичний розрахунок характеристичних показників Ляпунова можна виконати лише для кількох простих навчальних моделей [23]. Для скільки-небудь реалістичних динамічних систем ці показники можна розрахувати лише у числовому вигляді.

Алгоритм визначення старшого показника Ляпунова [23]. Спочатку розглянемо алгоритм визначення старшого показника Ляпунова Λ_1 . Значення Λ_1 важливо знати для діагностики режимів динаміки системи, адже наявність додатного старшого показника Ляпунова є критерієм хаосу (далі про це поговоримо детально).

Схема обчислень Λ_1 ґрунтується безпосередньо на визначенні (1.76), тут можливі два варіанти:

1) досліджувати дві траєкторії з близькими початковими умовами, тобто, розв'язуючи систему рівнянь динаміки (1.1), стежимо за еволюцією відстані між фазовими точками в часі;

2) розв'язувати систему рівнянь динаміки (1.1), що описують рух фазової точки вздовж траєкторії, разом із системою у відхиленнях (1.73), яка описує еволюцію нескінченно малого збурення цієї траєкторії.

Процедуру обчислення старшого показника Ляпунова починають із числового розв'язування динамічних рівнянь на інтер-

валі часу, достатньому, щоб бути впевненим у закінченні перехідного режиму та виході системи на атрактор. У результаті одержуємо деяку точку фазового простору x_0 , яку беремо за початкову. Подальша послідовність дій показана на рис. 1.9 і відома як *алгоритм Бенеттіна* [53].

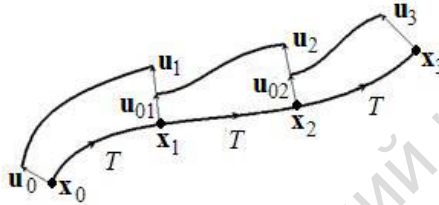


Рис. 1.9. Схема алгоритму Бенеттіна

Розглянемо траєкторію з початком у точці x_0 та прилеглу до неї траєкторію, яка починається у точці $x_0 + u_0$, $\|u_0\| = \varepsilon$. Задамо деякий інтервал часу T і, розв'язуючи у числовому вигляді рівняння динаміки, визначимо стан системи та її відхилення в момент часу T : $x(T) = x_1$, $u(T) = u_1$. Відношення $\|u_1\| / \varepsilon$ характеризує зміну відстані між двома траєкторіями за час T . Щоб у розв'язку не було занадто великих значень, його нормують, це підвищує точність визначення показника Ляпунова. Тому слід перевизначити відхилення так, щоб його напрямок не змінився, а норма дорівнювала початковому значенню ε , а саме $u_{01} = \varepsilon u_1 / \|u_1\|$. Далі продовжимо процедуру числового розв'язання рівнянь із початковою точкою x_1 та прилеглою траєкторією з початковою точкою $x_1 + u_{01}$. Визначивши стан системи та відхилення в момент часу $2T$: $x(2T) = x_2$, $u(2T) = u_2$, обчислимо відношення $\|u_2\| / \varepsilon$, перевизначимо відхилення $u_{02} = \varepsilon u_2 / \|u_2\|$ і т. д. Якщо початкова точка лежить на типовій траєкторії в атракторі й початкове збурення обрано довільно, то еволюція відхилення визначатиметься старшим показником Ляпунова. Зміну значення відхилення за M кроків записують так:

$$P = \prod_{k=1}^M \frac{\|u_k\|}{\varepsilon}. \quad (1.97)$$

Тоді згідно з (1.76) старший показник Ляпунова оцінюють виразом

$$\Lambda \cong \frac{1}{M\tau} \ln P = \frac{1}{M\tau} \sum_{k=1}^M \ln \frac{\|\mathbf{u}_k\|}{\varepsilon}, \quad (1.98)$$

зауважимо, що кількість кроків M має бути достатньо великою.

Перший варіант алгоритму варто використовувати, якщо складно отримати рівняння у відхиленнях. У процесі розрахунків слід стежити, щоб відстань між фазовими точками залишалася малою порівняно з характерними масштабами неоднорідності фазового потоку (векторного поля у фазовому просторі). Другий варіант алгоритму є простішим і точнішим. У ньому немає жорстких обмежень на вибір параметрів ε і T . Величина T не повинна бути великою, щоб не допустити переповнення числових регістрів ЕОМ, а ε можна покласти рівним одиниці [23].

Алгоритм визначення спектра показників Ляпунова [23]. Щоб обчислити кілька показників Ляпунова, необхідно відслідковувати еволюцію відповідної кількості векторів збурення уздовж даної траєкторії. Якщо не запровадити спеціальних заходів, то в кожному векторі буде представлена складова з максимальним показником Ляпунова, яка і буде домінувати. Тому визначення спектра показників Ляпунова потребує певного узагальнення алгоритму Бенеттіна (крім зміни норми векторів, також проводять їхню ортогоналізацію).

У лінійній алгебрі відома ортогоналізація Грама – Шмідта, згідно з якою з набору векторів

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_N, \quad (1.99)$$

що не є лінійно незалежними, будують систему ортонормованих векторів.

Новий набір $\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \mathbf{a}_3^0, \dots, \mathbf{a}_N^0$ будують за такою схемою:

$$\mathbf{a}_1^0 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|},$$

$$\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1^0) \mathbf{a}_1^0, \quad \mathbf{a}_2^0 = \frac{\mathbf{a}'_2}{\|\mathbf{a}'_2\|},$$

$$\mathbf{a}'_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1^0) \mathbf{a}_1^0 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2^0) \mathbf{a}_2^0, \quad \mathbf{a}_3^0 = \frac{\mathbf{a}'_3}{\|\mathbf{a}'_3\|}, \quad (1.100)$$

Круглі дужки в (1.100) визначають скалярний добуток векторів.

Задача. Перевірте, що отримана система векторів ортонормована, тобто

$$(\mathbf{a}_i^0, \mathbf{a}_j^0) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.101)$$

Повернемося до проблеми розрахунку показників Ляпунова. Візьмемо за початкову деяку точку на аттракторі \mathbf{x}_0 і будемо відслідковувати разом із траєкторією, що з неї виходить, еволюцію N векторів збурення. Нехай, наприклад, $N = 3$, необхідно розв'язати у числовому вигляді початкові рівняння системи, доповнені трьома комплектами рівнянь у варіаціях. Як початкові вектори збурення задаємо набір векторів $\mathbf{u}_{00}^{(1)}$, $\mathbf{u}_{00}^{(2)}$, $\mathbf{u}_{00}^{(3)}$, що ортогональні один одному і нормовані на одиницю. Через деякий час T траєкторія прийде в точку \mathbf{x}_1 , а вектори збурення будуть такі: $\mathbf{u}_1^{(1)}$, $\mathbf{u}_1^{(2)}$, $\mathbf{u}_1^{(3)}$. Нормуємо їх і ортогоналізуємо за процесом Грама – Шмідта:

$$\mathbf{u}_{01}^{(1)} = \frac{\mathbf{u}_1^{(1)}}{\|\mathbf{u}_1^{(1)}\|},$$

$$\mathbf{u}_1^{(2)'} = \mathbf{u}_1^{(2)} - (\mathbf{u}_1^{(2)}, \mathbf{u}_{01}^{(1)}) \mathbf{u}_{01}^{(1)}, \quad \mathbf{u}_{01}^{(2)} = \frac{\mathbf{u}_1^{(2)'}}{\|\mathbf{u}_1^{(2)'}\|}, \quad (1.102)$$

$$\mathbf{u}_1^{(3)'} = \mathbf{u}_1^{(3)} - (\mathbf{u}_1^{(3)}, \mathbf{u}_{01}^{(1)}) \mathbf{u}_{01}^{(1)} - (\mathbf{u}_1^{(3)}, \mathbf{u}_{01}^{(2)}) \mathbf{u}_{01}^{(2)}, \quad \mathbf{u}_{01}^{(3)} = \frac{\mathbf{u}_1^{(3)'}}{\|\mathbf{u}_1^{(3)'}\|}.$$

Далі продовжуємо розрахунок, починаючи з точки \mathbf{x}_1 і векторів збурення $\mathbf{u}_{01}^{(1)}$, $\mathbf{u}_{01}^{(2)}$, $\mathbf{u}_{01}^{(3)}$. Через черговий інтервал часу T

отримуємо новий набір векторів збурення $\mathbf{u}_2^{(1)}$, $\mathbf{u}_2^{(2)}$, $\mathbf{u}_2^{(3)}$, який знову ортогоналізуємо і нормуємо за правилом (1.102).

Описану послідовність дій повторюємо достатньо велику кількість разів M , причому у процесі обчислень підраховуємо суми

$$S_1 = \sum_{i=1}^M \ln \|\mathbf{u}_i^{(1)}\|, \quad S_2 = \sum_{i=1}^M \ln \|\mathbf{u}_i^{(2)}\|, \quad S_3 = \sum_{i=1}^M \ln \|\mathbf{u}_i^{(3)}\|, \quad (1.103)$$

в яких фігурують вектори збурень до нормування, але після ортогоналізації. Оцінку показників Ляпунова отримуємо як

$$\Lambda_i = \frac{S_i}{MT}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.104)$$

Приклад числового розрахунку. Як приклад числового розрахунку спектра Ляпунова розглянемо дискретне відображення Ено¹:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= bx_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.105)$$

Індекс n можна трактувати як дискретний час з інтервалом $T=1$. Спочатку задаємо координати (x_1, y_1) початкової точки на траєкторії і координати двох ортогональних нормованих векторів збурень у початковій точці траєкторії:

$$\left(\tilde{x}_1^{(1)} = 1, \tilde{y}_1^{(1)} = 0 \right) \text{ і } \left(\tilde{x}_1^{(2)} = 0, \tilde{y}_1^{(2)} = 1 \right).$$

Фазовий простір системи Ено двовимірний, тому спектр має два показники Ляпунова. Для їхнього обчислення відображення (1.105) ітеруємо разом із двома комплектами рівнянь для збурень (отримайте рівняння (1.106) самостійно):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1}^{(1)} &= -2ax_n^{(1)} \tilde{x}_n^{(1)} + \tilde{y}_n^{(1)}, \\ \tilde{y}_{n+1}^{(1)} &= b\tilde{x}_n^{(1)}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1}^{(2)} &= -2ax_n^{(2)} \tilde{x}_n^{(2)} + \tilde{y}_n^{(2)}, \\ \tilde{y}_{n+1}^{(2)} &= b\tilde{x}_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

¹ Ено Мішель (1931–2013) – французький математик і астроном.

Далі реалізуємо описаний вище алгоритм обчислення спектра показників Ляпунова. У процесі обчислень проводимо ортогоналізацію векторів і нормування збурень за процедурою Грама – Шмідта. Надалі підраховуємо суми S_1 і S_2 (формули (1.103)) і, згідно з формулами (1.104), отримуємо оцінку показників Ляпунова Λ_1 і Λ_2 .

На рис. 1.10 показано залежність сум S_1 і S_2 від дискретного часу накопичення n при значеннях сталих $a=1,4$; $b=0,3$. Показники Ляпунова визначають нахил прямих, які апроксимують ці залежності: $\Lambda_1=0,421$, $\Lambda_2=-1,624$. Відмітимо, що сума показників Ляпунова від'ємна, так і має бути для атратора. Можна показати, що вона точно дорівнює $\ln|b|=-1,20397$, що добре збігається з результатами числового розрахунку.

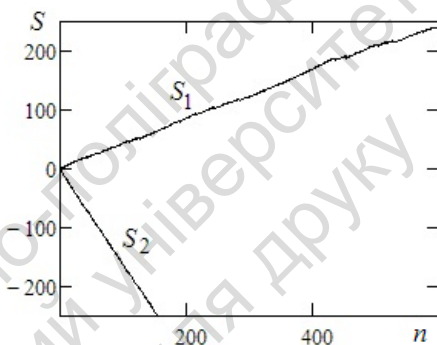


Рис. 1.10. Залежність накопичувальних сум S_1 і S_2 від часу накопичення n , $a=1,4$; $b=0,3$

1.12. Структурна стійкість і біфуркації динамічних систем

Досліджуваний реальний процес зазвичай відбувається за певних зовнішніх умов. Наведемо найпростіший приклад. Якщо розглядати температуру води як певний параметр, то добре відомо, що

зі зміною цього параметра вода різко змінює свої властивості у процесі переходу через 0 і 100 °С. Зрозуміло, що за температури +5 °С і +40 °С вода має різні стани, але залишається рідиною!

У процесі побудови динамічної системи подібні властивості реальної системи (фізичної, біологічної тощо) у загальному випадку можна характеризувати набором параметрів, які входять у відповідну систему рівнянь. Фактично рівняння (1.2) слід записати у вигляді

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (1.107)$$

де $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ – вектор параметрів системи.

Якщо в системі (1.107) трохи змінити параметри $\boldsymbol{\alpha}$, то так само зміниться й оператор еволюції системи \mathbf{f} . Якщо ця мала зміна правої частини (1.107) не впливає істотно на фазовий портрет системи (новий фазовий портрет якісно не відрізняється від початкового), то кажуть, що ця динамічна система є *грубою* або *структурно стійкою*.

Поняття грубості системи, запроваджене Андроном і Понтрягіним¹, виявилось надзвичайно важливим і корисним у фізиці. Цілком зрозуміло, що практично неможливо записати точну систему рівнянь, яка відповідає фізичній системі. Отже, модельна динамічна система повинна мати якісні властивості, які зберігаються за малих збурень.

Якщо змінювати параметри у великому діапазоні, то може статися, що відбудеться якісна зміна фазового портрета, яка відображає перехід реальної системи з одного стійкого стану в інший. Таку якісну зміну називають *біфуркацією* (від лат. *bifurcus* – роздвоєння). Значення параметра $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0$, за якого відбувається біфуркація, називають біфуркаційним або *точкою біфуркації*. Зазначимо, що в точці біфуркації система не є грубою: мала зміна параметра, у той чи інший бік, призводить до різких змін стану системи.

Як простий математичний приклад розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{x} = \alpha x \quad (x, \alpha \in R). \quad (1.108)$$

¹ Понтрягін Лев Семенович (1908–1988) – радянський математик.

Для будь-якого $\alpha \neq 0$ рівняння (1.108) має одну особливу точку $x = 0$, а його розв'язок має вигляд $x(t) = C \exp(\alpha t)$, C – довільна стала. Зрозуміло, що при $\alpha < 0$ особлива точка $x = 0$ є стійкою, а при $\alpha > 0$ – нестійкою. Значення $\alpha = 0$ являє собою точку біфуркації для рівняння (1.108).

Отже, біфуркація означає якісну зміну структури фазового портрета системи. Оскільки ця структура визначається кількістю і типом особливих точок (станів рівноваги) і спеціальних траєкторій (періодичні рухи), то біфуркація полягає у зміні саме цих характеристик. Зазначимо, що поняття біфуркації відносять як до зосереджених, так і до розподілених систем. Нижче, стисло і на простих прикладах, ми познайомимо читача з деякими важливими типами біфуркацій.

Біфуркація стану рівноваги

1. Розглянемо біфуркацію першого типу на прикладі диференціального рівняння

$$\dot{x} = x^2 + \alpha \quad (x, \alpha \in R). \quad (1.109)$$

Для значення $\alpha < 0$, з умови $x^2 + \alpha = 0$, знаходимо дві особливі точки $x_1(\alpha) = -\sqrt{|\alpha|}$ і $x_2(\alpha) = +\sqrt{|\alpha|}$.

Задача. Провести лінійний аналіз стійкості особливих точок рівняння (1.109) і переконатися в тому, що корені характеристичного рівняння будуть такі: $\lambda_1(\alpha) = -2\sqrt{|\alpha|}$ і $\lambda_2(\alpha) = +2\sqrt{|\alpha|}$.

Бачимо, що при $\alpha < 0$ особлива точка $x_1 = -\sqrt{|\alpha|}$ є стійким положенням рівноваги, а особлива точка $x_2 = +\sqrt{|\alpha|}$ – нестійким.

Коли параметр α зростає, наближаючись до нуля ліворуч ($\alpha \rightarrow -0$), стійке і нестійке положення рівноваги наближаються одне до одного і для $\alpha = 0$ зливаються, причому

$$\lim_{\alpha \rightarrow -0} \lambda_1(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -0} \lambda_2(\alpha) = 0, \quad (1.110)$$

тобто маємо нульове значення кореня. Для значення $\alpha > 0$ положення рівноваги одночасно зникають. Можна сказати, що ці положення рівноваги у разі злиття взаємно знищуються. Таку біфуркацію називають *біфуркацією зриву рівноваги*.

Наочніше біфуркацію зриву рівноваги можна описати, побудувавши залежність положень рівноваги рівняння (1.109) від параметра α (рис. 1.11); графік такої залежності називають *біфуркаційною діаграмою*.

Точки параболи $\alpha = -x^2$ на рис. 1.11 характеризують стан рівноваги рівняння (1.109). Верхня гілка параболи є гілкою нестійких положень рівноваги, нижня гілка – стійких.

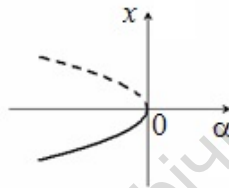


Рис. 1.11. Біфуркаційна діаграма рівняння (1.109)

У разі реальної системи, що описується рівнянням (1.109), система стабілізується у стійкому стані рівноваги так, що про існування іншого, нестійкого стану рівноваги, ми зазвичай нічого не знаємо. Коли параметр α переходить через біфуркаційне значення $\alpha = 0$ зліва праворуч, цей стійкий стан раптово зникає. Навпаки, якщо параметр α переходить через біфуркаційне значення $\alpha = 0$ справа ліворуч, то тут раптово з'являється один стійкий стан рівноваги системи.

2. Розглянемо другий тип біфуркації на прикладі динамічної системи, що являє собою систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \alpha y - y(x^2 + y^2), \quad (x, y, \alpha) \in R. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Система має особливу точку $(x, y) = (0, 0)$ за будь-яких значень параметра α .

Задача. Провести лінійний аналіз стійкості і переконатися, що корені характеристичного рівняння мають вигляд

$$\lambda_1 = \alpha - i, \quad \lambda_2 = \alpha + i. \quad (1.112)$$

Отже, якщо $\alpha < 0$, особлива точка $(x, y) = (0, 0)$ являє собою стійкий фокус, а якщо $\alpha > 0$ – нестійкий.

Досліджуючи фазовий портрет системи (1.111), зручно перейти до полярних координат. Покладемо

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (1.113)$$

і, вважаючи r і φ функціями часу t , диференціюємо (1.113) по t :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Після підстановки (1.113), (1.114) у рівняння (1.111) і деяких простих перетворень матимемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\alpha - r^2), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Змінна φ відіграє роль часу ($\varphi = t + t_0$), тому досліджуємо перше рівняння системи (1.108). Його особливі точки визначаємо з рівняння

$$r(\alpha - r^2) = 0, \quad r \geq 0. \quad (1.116)$$

Звідси, одне положення рівноваги $r_1 = 0$ існує за будь-яких значень параметра α . Якщо $\alpha \leq 0$, інших положень рівноваги немає. Якщо $\alpha > 0$, рівняння (1.116) має ще одну особливу точку $r_2 = \sqrt{\alpha}$.

Задача. Проведіть лінійний аналіз стійкості та переконайтеся у тому, що точка $r_2 = \sqrt{\alpha}$ є стійким положенням рівноваги.

Положення рівноваги $r_1 = 0$ рівняння (1.116) відповідає положенню рівноваги $(x, y) = (0, 0)$ системи (1.115), тоді як положення рівноваги $r_2 = \sqrt{\alpha}$ – стійкій замкненій траєкторії системи (1.115), а саме колу радіуса $\sqrt{\alpha}$.

Отже, під час переходу параметра α через нуль ліворуч стійкий фокус стає нестійким, і від нього відокремлюється замкнена траєкторія, діаметр якої збільшується пропорційно $\sqrt{\alpha}$. Таке явище називають біфуркацією *Андронава – Хопфа*¹ або біфурка-

¹ Хопф Хайнц (1894–1971) – німецький математик.

цією народження циклу. У реальних системах біфуркація Андронова – Хопфа виникає досить часто.

Беручи до уваги важливість біфуркації народження циклу, розглянемо ще один приклад. Нехай динамічна система являє собою систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - (p+1)x + x^2 y, \\ \dot{y} &= px - x^2 y, \quad (x, y, p) \in R, \end{aligned} \quad (1.117)$$

де p – параметр. Єдиним стаціонарним розв'язком системи (1.117) є

$$x_0 = 1, \quad y_0 = p. \quad (1.118)$$

Задача. Провівши лінеаризацію системи (1.117), отримайте характеристичне рівняння, яке матиме такий вигляд:

$$\lambda^2 + (2-p)\lambda + 1 = 0. \quad (1.119)$$

Корені характеристичного рівняння визначають власні значення матриці лінеаризації системи (1.117) (див. підрозд. 1.7):

$$\lambda_{1,2} = -\left(1 - \frac{p}{2}\right) \pm i \sqrt{p \left(1 - \frac{p}{4}\right)}. \quad (1.120)$$

Згідно з визначеною класифікацією (див. підрозд. 1.7), залежно від параметра p , особлива точка $(x_0 = 1, y_0 = p)$ має вигляд

$$\begin{aligned} p \leq 0 & \quad - \text{стійкий вузол,} \\ 0 < p < 2 & \quad - \text{стійкий фокус,} \\ p = 2 & \quad - \text{центр,} \\ 2 < p < 4 & \quad - \text{нестійкий фокус,} \\ p \geq 4 & \quad - \text{нестійкий вузол.} \end{aligned} \quad (1.121)$$

Значення параметра $p = 0$, $p = 2$, $p = 4$ є біфуркаційними, оскільки за цих значень якісно змінюється характер розв'язку. Серед трьох біфуркацій одна заслуговує особливої уваги. Це біфуркація при значенні $p = 2$. При $p = 2$ у власних значеннях (1.120) дійсна частина дорівнює нулю і надалі, під час збільшення p , міняє знак. В результаті, особлива точка $(x_0 = 1, y_0 = p)$ із стійкої при $p < 2$ стає нестійкою при $p > 2$. Причому на фазовій площині (x, y) виникає граничний цикл і функції

$x(t)$, $y(t)$ стають періодичними у часі. Розміри граничного циклу збільшуються зі зростанням параметра p (рис. 1.12).

Якщо $p - 2 \ll 1$, то маємо еліптичну орбіту (рис. 1.12), тобто відбуваються гармонічні коливання із частотою

$$\omega = \text{Im} \lambda = \sqrt{p \left(1 - \frac{p}{4}\right)} \approx 1. \quad (1.122)$$

За збільшення параметра p орбіта граничного циклу стає відмінною від еліптичної, і коливання в системі стають суттєво нелінійними.

Задача. Дослідіть, як змінюється часова залежність функцій $x(t)$, $y(t)$ при величині $p > 2$.

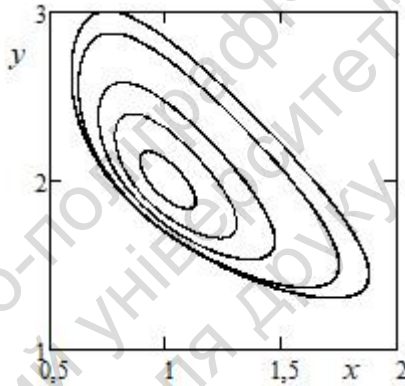


Рис. 1.12. Граничний цикл в системі (1.117).

Показано, як збільшується розмір орбіти при $p = 2,01; 2,05; 2,1; 2,2; 2,25$, відповідно

Цікаво відмітити, що частота ω при критичній величині параметра $p = 2$ не має жодної особливості і є скінченною. Система неначе заздалегідь готувалася до цих коливань. Вони існували і в докритичному режимі (при $p < 2$). Але там ці коливання були згасаючими, їхня амплітуда зменшувалася у часі за експоненціальним законом. Система, виведена з положення рівноваги, із часом поверталась до нього (рис. 1.13). Проте мірою

наближення параметра p до критичного значення $p = 2$ згасання коливальних процесів стає все меншим і меншим і насамкінець при $p = 2$ дорівнює нулю. У разі $p > 2$ згасання коливальних процесів змінюється на їхнє підсилення і подальшу стабілізацію коливального процесу на граничному циклі.

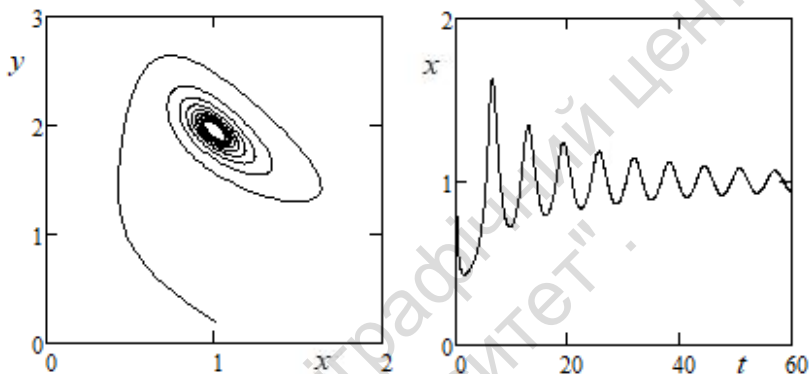


Рис. 1.13. Згасаючі коливання системи (1.117) при $p = 1,95$

3. Якщо реальний процес має певну симетрію, то ця симетрія проявиться в диференціальних рівняннях і тим самим вплине на біфуркації. Як приклад розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad (x, \alpha \in R), \quad (1.123)$$

зауважимо, що $f(-x, \alpha) = -f(x, \alpha)$, тобто функція f непарна відносно змінної x . Щоб зрозуміти, що дає такий тип симетрії, виберемо просту залежність $f(x, \alpha) = \alpha x - x^3$ і дослідимо біфуркації в отриманому рівнянні

$$\dot{x} = \alpha x - x^3. \quad (1.124)$$

Розв'язуючи рівняння $\alpha x - x^3 = 0$, визначаємо особливі точки. Точка $x_1 = 0$ є особливою точкою за будь-яких α з області дійсних чисел, а особливі точки $x_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha}$ існують, якщо $\alpha > 0$.

Задача. Провести лінійний аналіз стійкості та встановити, що при $\alpha \leq 0$ є одне стійке положення рівноваги $x_1 = 0$. Якщо $\alpha > 0$, то цей стан рівноваги стає нестійким, і від нього відгалу-

жується два стійкі стани рівноваги $x_2 = -\sqrt{\alpha}$ та $x_3 = +\sqrt{\alpha}$. Біфуркаційна діаграма рівняння (1.124) представлена на рис. 1.14.

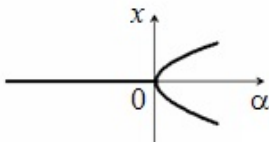


Рис. 1.14. Біфуркація типу вилки

Враховуючи форму цієї діаграми, вказану біфуркацію називають *біфуркацією типу вилки*.

Біфуркації періодичних розв'язків

Познайомимся з основними типами біфуркацій періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь. Фазові траєкторії цих розв'язків – замкнені криві. Як і у випадку положень рівноваги, зміна характеру стійкості замкненої траєкторії супроводжується біфуркацією.

Якщо не наводити строгого визначення орбітальної стійкості замкненої траєкторії, то можна сказати, що замкнена траєкторія γ є стійкою, якщо всі траєкторії, досить близькі до траєкторії γ , зі збільшенням часу наближаються до неї.

Отже, розглянемо динамічну систему, яка за певних значень параметра α має замкнену траєкторію γ . У загальному випадку зміна значень параметра може спричинити одну з таких біфуркацій.

1. Нехай у фазовому просторі динамічної системи існує пара замкнених траєкторій γ_1 і γ_2 , які за зміни (наприклад, у процесі зростання) параметра α наближаються одна до одної і в разі біфуркаційного значення параметра $\alpha = \alpha_0$ зливаються, а за подальшої зміни параметра зникають.

Якщо рухатися в напрямку зменшення параметра α , то описувана біфуркація представляється нам так, що при $\alpha = \alpha_0$ виникає замкнена траєкторія, яка при $\alpha < \alpha_0$ розщеплюється на дві

замкнені траєкторії. Таку біфуркацію називають *біфуркацією виникнення або зникнення пари траєкторій*.

2. Наведемо ще один тип біфуркації замкненої траєкторії. Тут спочатку стійка замкнена траєкторія γ_1 при переході α через α_0 стає нестійкою і від неї відгалужується замкнена траєкторія γ_2 , яка замикається після подвійного обходу навколо траєкторії γ_1 . Нова траєкторія має майже таку саму "амплітуду", але приблизно подвійний період (асимптотично, при $\alpha \rightarrow \alpha_0$, точно подвійний період). Таку біфуркацію називають *біфуркацією подвоєння періоду*.

3. Події у наступній біфуркації відбуваються так. Від замкненої траєкторії, яка стає нестійкою за зміни параметра, відокремлюється тор, заповнений траєкторіями динамічної системи. Таку біфуркацію називають *біфуркацією виникнення інваріантного тора*, або, просто, *народженням тора*, інваріантного в тому смислі, що будь-яка точка на торі за руху у фазовому просторі залишається на поверхні тора.

1.13. Перетин Пуанкаре

У попередніх підрозділах ми, переважно, розглядали поведінку системи на фазовій площині, тобто розмірність фазового простору не перевищувала $N = 2$. Згадаймо, що згідно з теоремою про єдиність розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.1), фазові траєкторії не можуть перетинатися. Інакше одна й та сама початкова умова (точка перетину) породжувала б у фазовому просторі різні траєкторії, тобто поведінка системи була б невизначеною. Отже, ми доходимо висновку, що внаслідок неможливості перетину фазових траєкторій поведінка системи на фазовій площині обмежена. Фактично на фазовій площині для грубих динамічних систем можуть бути характерними лише стани рівноваги як-от: фокус, вузол, сідло та стійкі або нестійкі граничні цикли. Тому нічого незвичайного, що пов'язано з хаотичним рухом детермінованої системи, на фазовій площині виявити

не можна. Звідси у детермінованій системі, яка визначається фазовою площиною, хаос не існує.

Тому розглянемо систему з фазовим простором R^3 . Зрозуміло, що структура фазових траєкторій у фазовому просторі може бути складною, тому слід подумати над можливістю ефективного аналізу фазового портрета у фазовому просторі з розмірністю $N = 3$. Звичайно, виникає бажання якось скористатися досвідом роботи на фазовій площині. Стратегію розв'язання цього питання можна проілюструвати завданням, над яким розмірковував Платон¹: подивіться на тінь предмета і спробуйте відновити його за двовимірною проекцією.

Аналогічна ідея для аналізу фазового портрета системи була реалізована у методі, який розробив Пуанкаре. Суть методу полягає у тому, що замість розгляду фазового портрета у просторі R^3 слід розглядати точки перетину фазових траєкторій із деякою площиною S . Схематично цю процедуру представлено на рис. 1.15.

Зрозуміло, що S може бути довільною площиною, однак, саме вдало вибравши S , ми отримаємо перетин, прийнятний для аналізу. Зрозуміло, що всі траєкторії, які належать атрактору, повинні перетинати площину S під ненульовим кутом. Множина точок перетину площини S фазовими траєкторіями і є *перетином Пуанкаре*.

Якщо відомий закон еволюції системи, то можна за допомогою визначених функцій пов'язати положення фазової точки в моменти часу t_k і t_{k+1} , коли вона перетинає площину S . Наприклад, згідно з рис. 1.15 маємо такі рівняння для відповідних координат точок $A_k(\xi_k, \eta_k)$ перетину фазовою траєкторією площини S :

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= h(\xi_k, \eta_k), \\ \eta_{k+1} &= g(\xi_k, \eta_k).\end{aligned}\tag{1.125}$$

¹ Платон (427–347 до н. е.) – грецький філософ.

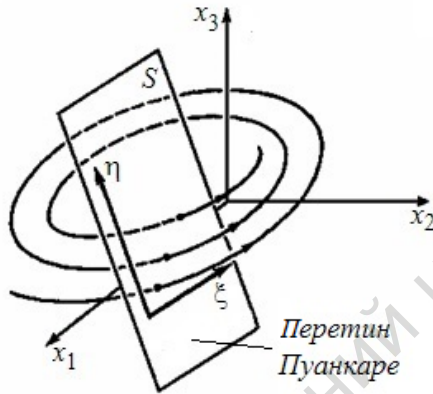


Рис. 1.15. Перетин Пуанкаре

У загальному вигляді співвідношення (1.125) можна записати так:

$$\begin{aligned}
 A_{k+1} &= \Phi(A_k) = \Phi(\Phi(A_{k-1})) \equiv \Phi^{(2)}(A_{k-1}) = \\
 &= \Phi^{(3)}(A_{k-2}) = \dots = \Phi^{(k+1)}(A_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \quad (1.126)$$

Оскільки система (1.1) за певних початкових умов має єдиний розв'язок, який визначає еволюцію системи у часі, то початкова точка A_0 однозначно визначає точку A_1 , що у свою чергу визначає точку A_2 і т. д. Мовою математики, відображення площини S на себе, наведене у рівняннях (1.125) і (1.126), визначається функціями h, g та Φ . Це відображення називають *відображенням Пуанкаре*.

Важливість моменту полягає у тому, що перетину Пуанкаре властиві ті самі особливості, що й потоку, який його породжує! Якщо потік (1.1) дисипативний, що обумовлює зменшення об'ємів у фазовому просторі, то і перетин Пуанкаре зменшує площі на площині S . Навпаки, якщо відображення зберігає площі, то потік (1.1) консервативний. Аналогічно, якщо потік має атрактор, то його структурні характеристики виявляться у перетині Пуанкаре!

Можна сказати, що перетин Пуанкаре спрощує дослідження неперервних потоків із чотирьох причин:

- ми переходимо від потоків у тривимірному фазовому просторі до відображення на площині, знижуючи тим самим кількість координат на одиницю (загалом неперервний потік в R^n зводиться до відображення R^{n-1} на себе);

- час набуває дискретних значень і тому диференціальні рівняння замінюються різницевиими рівняннями, які визначають відображення Пуанкаре! Ці алгебраїчні рівняння легше піддаються розв'язанню. Зауважимо, що хоча перетин Пуанкаре тривимірного фазового потоку визначається на площині, часто процес дослідження зводиться до відображення прямої R^1 на себе;

- різко скорочується кількість даних, які слід обговорювати, оскільки не розглядається майже вся фазова траєкторія;

- за обчислення розмірності хаотичного атратора точніші результати можна отримати, якщо обчислити розмірність множини в перетині Пуанкаре, а потім оцінити розмірність атратора, збільшити отриманий результат на 1.

Опишемо два типи перетину Пуанкаре, установивши відповідність між виглядом перетину Пуанкаре та динамічними властивостями системи. Якщо динамічна система здійснює періодичний рух, то фазова траєкторія буде замкненою. Відповідний перетин Пуанкаре – це одна точка A_0 (рис. 1.16, *a*). Точка A_0 є нерухомою точкою відображення Φ , оскільки

$$A_0 = \Phi(A_0) = \Phi^{(2)}(A_0) = \dots \quad (1.127)$$

Тепер розглянемо динамічну систему, для якої у фазовому просторі R^3 формується атратор у вигляді тора (прикладом є система (1.70)). Будь-яку фазову траєкторію на поверхні тора можна розглядати як суперпозицію двох рухів: обертання по "паралелях" тора з частотою f_1 та обертання навколо "циліндра", який утворює тор, із частотою f_2 (рис. 1.16, *б*).

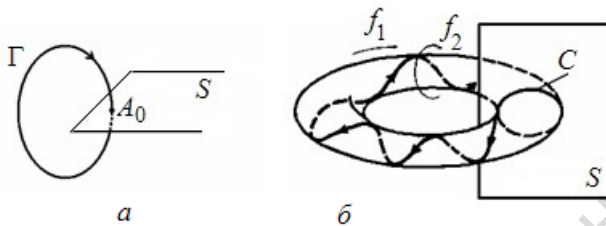


Рис. 1.16. Перетин Пуанкаре:
a – періодичного розв'язку; *б* – поверхні двовимірного тора

Точки перетину фазової траєкторії з площиною перетину S виникають через регулярні інтервали часу, які дорівнюють періоду першого руху (у нашому прикладі $T_1 = 1 / f_1$). Форма перетину Пуанкаре залежить від відношення f_1 / f_2 . Якщо воно ірраціональне, то фазова траєкторія не замикається і всюди густо вкриває поверхню тора. Перетином Пуанкаре буде замкнена крива C у вигляді кола, еліпса чи іншої кривої. Якщо відношення раціональне $f_1 / f_2 = n_1 / n_2$, то перетин Пуанкаре складається зі скінченної кількості точок, що розташовані на C . Тут відбувається періодичний рух із періодом $T = n_1 / f_1 = n_2 / f_2$, тобто здійснивши n_1 оборотів по "паралелях" та n_2 оборотів по "меридіанах", фазова траєкторія замкнеться. Перетин Пуанкаре містить n_1 точок таких, що $A_1 = \Phi^{(n_1)}(A_1)$.

Цілком зрозуміло, що досліджувати перетин Пуанкаре, який має властивості потоку, значно легше, ніж сам потік. Однак цим шляхом можна піти ще далі: наприклад, розглянути, як змінюється в часі будь-яка координата (нехай це x) кожної точки з перетину Пуанкаре. Для цього будують одновимірний графік, який визначає залежність між координатами поточної та попередньої точок: $x_{k+1} = f(x_k)$. Аналіз такого одновимірного відображення містить, подібно до перетину Пуанкаре, важливу

інформацію про динамічні властивості системи! Відображення p -го порядку визначають як функцію $x_{k+p} = f^{(p)}(x_k)$.

На закінчення першого розділу ще раз наголосимо на тому, що існує принципова різниця між нелінійними явищами, які описуються дисипативними та консервативними системами. Щоб моделювати те чи інше явище за допомогою консервативної системи, потрібно мати зрозуміле уявлення, що в досліджуваному випадку зберігається і за яких причин. Саме тому у моделюванні економіки, екології, соціології, психології зазвичай звертаються до дисипативних систем. У багатьох фізичних, хімічних, біологічних задачах істотну роль відіграють дисипативні процеси, пов'язані з розсіюванням енергії, речовини, з незворотними явищами, тому й тут зазвичай використовують дисипативні динамічні системи.

Консервативні системи виникають у завданнях класичної механіки, особливо небесної механіки, фізики плазми, теорії хвиль, а також у багатьох фундаментальних теоріях, у яких ключову роль відіграють закони збереження.

Звичайно, відрізняється і математичний апарат, розроблений для аналізу цих двох класів систем. Надалі зосередимо нашу увагу на дисипативних системах.

РОЗДІЛ 2

ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ І СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Хаотична динаміка нелінійних систем породжує складну, нерегулярну, візуально випадкову поведінку динамічних змінних системи. Проте цей хаос є повністю детермінованим процесом (тобто без будь-яких зовнішніх випадкових сил і випадкової зміни параметрів системи). Тому теорію хаосу розглядають як частину теорії динамічних систем. Утім, беручи до уваги поведінку динамічних змінних у режимі хаосу, мабуть доречно використовувати методи теорії випадкових функцій. Справді, для такого роду функцій ніколи, повною мірою, не відома точна функціональна залежність від часу, та зазвичай у ній і нема потреби. Зазвичай нас задовольняє інформація про деякі усереднені характеристики. Наприклад, достатньо знати середнє значення та середнє квадратичне відхилення.

Тому у другому розділі розглянемо деякі відомості з теорії випадкових функцій і спектрального аналізу [8, 29, 39, 52].

2.1. Поняття випадкової функції

Випадковою функцією $X(t)$ ¹ називають функцію свого аргументу t , значення якої для будь-якого t є випадковою величиною. Аргумент t вважаємо не випадковою величиною.

Нагадаємо, що *законом розподілу* (інакше, *функцією розподілу*) випадкової величини називають будь-яке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм імовірностями. Наприклад, імовір-

¹ Випадкові величини і випадкові функції позначатимемо великими літерами, а набуті ними значення – малими.

ності властивості випадкової величини X є заданими, якщо відома функція розподілу, що визначається формулою

$$F(x) = P(X < x),$$

тобто задано ймовірність P події, для якої значення випадкової величини X менше за певне значення x .

Функція розподілу дискретної випадкової величини має вигляд східчастої функції, а у випадку неперервної випадкової величини функція розподілу неперервна і диференційована.

Використовуючи диференційованість функції розподілу для неперервної випадкової величини доцільно ввести другу характеристику випадкової величини – *щільність розподілу* (інакше, *щільність імовірності*), яка визначається як похідна від функції розподілу:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Її диференціал $f(x)dx = P(x \leq X < x + dx)$ визначає імовірність того, що випадкова величина X міститься в діапазоні значень між x та $x + dx$.

Функція розподілу випадкової величини виражається через її щільність розподілу таким чином:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x_1) dx_1,$$

де змінна інтегрування позначена через x_1 .

У дослідженні випадкових функцій виокремлюють два випадки:

1) аргумент випадкової функції t може набувати будь-яких значень у заданому інтервалі (скінченному або нескінченному); у такому випадку $X(t)$ зазвичай називають *випадковим процесом*.

Нехай у дослідженні випадкового процесу $X(t)$ виконано n незалежних дослідів. У кожному досліді була отримана певна функція або, як зазвичай говорять, *реалізація випадкового процесу* $X(t)$. Реалізація $x(t)$ – це вже детермінована (невипадкова) функція часу t . Сукупність реалізацій утворює *ансамбль реалізацій*. Як приклад, на рис. 2.1 показано три реалізації.

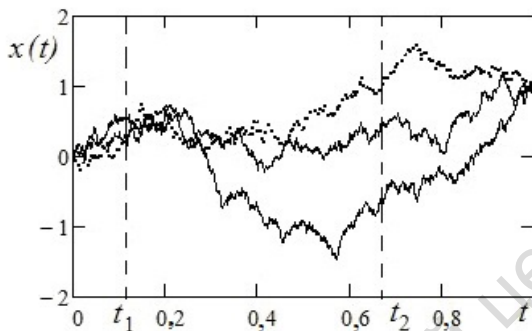


Рис. 2.1. Приклад трьох реалізацій випадкового процесу

2) аргумент випадкової функції t може набувати лише визначених дискретних значень; у такому випадку $X(t)$ називають *випадковою послідовністю*, або, якщо аргументом $t \in$ час, – *часовим рядом*.

2.2. Характеристики випадкових функцій

У будь-який фіксований момент t (на рис. 2.1 виділено два моменти t_1 і t_2) значення випадкового процесу $X(t)$ є випадковою величиною. Вона називається *перетином* випадкового процесу в момент часу t і характеризується *щільністю розподілу* $f(x, t)$ або, інакше кажуть, *одновимірним законом розподілу*. Знаючи функцію $f(x, t)$, можна обчислити *математичне очікування* і *дисперсію* випадкового процесу в момент часу t . Якщо закон розподілу змінюється залежно від часу, то можуть змінюватися і математичне очікування процесу

$$\bar{X}(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t) dx, \quad (2.1)$$

і його дисперсія

$$\begin{aligned}\sigma^2(t) &= D[X(t)] = M\left[\left(X(t) - \bar{X}(t)\right)^2\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X}(t))^2 f(x, t) dx,\end{aligned}\quad (2.2)$$

де риска зверху \bar{X} означає усереднення по ансамблю. Відповідно $\sigma(t)$ – середньоквадратичне відхилення. Буквою M позначено процедуру обчислення *статистичного середнього по ансамблю* (математичного очікування). Отримані функції (2.1), (2.2) є детерміновані (не випадкові) функції часу, оскільки випадковість була виключена у процесі усереднення.

Підкреслимо, що виконуючи інтегрування у (2.1) або (2.2), час t вважають сталою величиною і підінтегральний вираз множать на ймовірність $f(x, t)$ того конкретного значення, якого набуває величина $X(t)$. Цю ймовірність $f(x, t)$ раніше визначають на великій кількості незалежних реалізацій.

Перетини $X(t)$ у різні моменти часу t_1 і t_2 мають, узагалі, різні функції щільності розподілу $f(x_1, t_1)$ і $f(x_2, t_2)$. Сумісна поведінка перетинів описується двовимірною щільністю розподілу $f_2(x_1, t_1, x_2, t_2)$. Якщо перетини $X(t_1)$ і $X(t_2)$ *незалежні*, то двовимірна щільність розподілу

$$f_2(x_1, t_1, x_2, t_2) = f(x_1, t_1) f(x_2, t_2). \quad (2.3)$$

Можна задати n -вимірні закони розподілу f_n для будь-яких наборів t_1, t_2, \dots, t_n . Вони утворюють сукупність скінченновимірних розподілів випадкового процесу $X(t)$. Ймовірності властивості процесу повністю визначені, якщо задано всю цю сукупність. Але оскільки вона являє собою нескінченну множину законів розподілу, то в загальному випадку повністю описати випадковий процес практично неможливо.

Реально обмежуються використанням моментів невисоких порядків, які визначають математичне очікування, дисперсію та

кореляційну функцію. *Кореляційна функція* в загальному випадку залежить від двох аргументів:

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M \left[(X(t_1) - \bar{X}(t_1))(X(t_2) - \bar{X}(t_2)) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{X}(t_1))(x_2 - \bar{X}(t_2)) f(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Оскільки йдеться про один і той самий процес $X(t)$, то функція $K(t_1, t_2)$ також має назву *автокореляційна функція*.

Автокореляційна функція характеризує ступінь *лінійної залежності* між перетинами випадкової функції $X(t)$, які відносяться до різних моментів часу t . Там де $X(t_1)$ і $X(t_2)$ залежать одне від одного, автокореляційна функція відмінна від нуля. Якщо ж значення функції $X(t_1)$ і $X(t_2)$ не зв'язані одне з одним, то їхній середній добуток, а значить, і кореляція $K(t_1, t_2)$ дорівнюють нулю.

Кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів, тобто не змінюється, якщо аргументи поміняли місцями:

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1).$$

Якщо аргументи функції $K(t_1, t_2)$ збігаються, то кореляційна функція дорівнює дисперсії випадкової функції:

$$K(t_1, t_1) = D[X(t_1)], \quad K(t_2, t_2) = D[X(t_2)]. \quad (2.5)$$

З формули (2.4) неважко отримати такі співвідношення:

$$D[X(t)] = M \left[(X(t))^2 \right] - \bar{X}^2(t), \quad (2.6)$$

$$K(t_1, t_2) = M \left[X(t_1) X(t_2) \right] - \bar{X}(t_1) \bar{X}(t_2). \quad (2.7)$$

Якщо функцію $K(t_1, t_2)$ нормувати на середньоквадратичні відхилення, то отримаємо *нормовану автокореляційну функцію*

$$r(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sigma(t_1) \sigma(t_2)}, \quad (2.8)$$

тобто *коефіцієнт кореляції* між випадковими величинами $X(t_1)$ і $X(t_2)$. Нормована автокореляційна функція набуває значень в інтервалі між -1 до 1 .

Розділ теорії випадкових функцій, який розглядає лише моменти перших двох порядків, носить назву *кореляційної теорії* випадкових функцій. Виявляється, досить багато технічних задач досліджуються в межах кореляційної теорії.

Особливістю автокореляційної функції є те, що її можна обчислювати незалежно від природи сигналу: один і той самий алгоритм застосовують до повністю детермінованих процесів, хаотичних сигналів і до зовсім випадкових процесів.

Класифікацію випадкових функцій можна визначити законом розподілу випадкової функції. Найчастіше зустрічається нормальний закон (закон Гауса¹) [8]. Такі функції називатимемо *нормальними*. Виявляється, що повною характеристикою нормального випадкового процесу є його математичне очікування $\bar{X}(t)$ і кореляційна функція $K(t_1, t_2)$. Цього досить, щоб визначити закон розподілу будь-якого порядку.

В окрему групу можна виокремити випадкові процеси, для яких майбутні значення будь-якої реалізації можна точно визначити, знаючи минулі. Такі випадкові процеси називають *квазі-детермінованими*. Як приклад наведемо випадковий процес

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.9)$$

де A і ω – сталі, φ – випадкова величина з визначеною щільністю розподілу, тобто для деякої реалізації величина φ має одне і те саме значення для всіх моментів часу t , але для інших членів ансамблю реалізацій – інші значення.

2.3. Стаціонарність і ергодичність випадкових процесів

Важливою властивістю процесу є його *стаціонарність* (або *нестационарність*). *Стаціонарним у вузькому смислі* називають

¹ Гаусс Карл Фрідріх (1777–1855) – німецький математик, фізик, механік, астроном.

такий процес, усі скінченновимірні закони розподілу якого не змінюються у разі зсуву в часі, тобто для будь-яких n, t_1, \dots, t_n, τ маємо

$$f_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = f_n(x_1, t_1 + \tau, \dots, x_n, t_n + \tau). \quad (2.10)$$

Іншими словами, у разі зсуву в часі не змінюється жодна з характеристик процесу.

Стаціонарним у широкому смислі називають такий випадковий процес, для якого при зсуві у часі не змінюються математичне очікування, дисперсія і кореляційна функція (тобто моменти до другого порядку включно). Справді, оскільки щільність розподілу $f(x, t) = f(x, t + \tau) = f(x)$ не залежить від часу, а двовимірна щільність розподілу $f_2(x_1, t, x_2, t + \tau) = f_2(x_1, x_2, \tau)$ залежить тільки від зсуву τ , то маємо

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \text{const}, \quad (2.11)$$

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx = \text{const}, \quad (2.12)$$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{X})(x_2 - \bar{X}) f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \quad (2.13)$$

тобто математичне очікування і дисперсія стаціонарної випадкової функції є сталими, а кореляційна функція залежить тільки від різниці моментів часу $\tau = t_2 - t_1$.

Задача. Обчислюючи математичне очікування випадкового процесу (2.9), показати, що процес буде стаціонарним, якщо випадкова величина Φ рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 2\pi]$, і буде нестаціонарним, якщо Φ рівномірно розподілена на інтервалі $[0, \pi]$.

Загалом термін "стаціонарність" означає незмінність будь-якої властивості процесу в часі. Якщо властивість, що нас цікавить, не змінюється, то процес називають *стаціонарним* відносно цієї властивості.

Ергодичним називають процес, усі характеристики якого можуть бути отримані по одній його реалізації (нескінченно довгій). Якщо по одній реалізації можна отримати всі характерис-

тики процесу, то його називають *ергодичним у строгому смислі*. Якщо по одній реалізації можна отримати лише деякі характеристики, то його називають ергодичним відносно цих характеристик. Надалі говоритимемо про ергодичність відносно моментів перших двох порядків.

Статистичні характеристики ергодичного процесу, отримані усередненням по ансамблю реалізацій і усередненням по часу для однієї реалізації, з імовірністю, що як завгодно близька до 1, будуть однаковими. Це твердження являє собою смисл *ергодичної теореми*.

Підкреслимо: умова ергодичності виконується тільки для стаціонарного процесу. Таким чином, ергодичні процеси є також стаціонарними. Отже для ергодичного процесу матимемо

$$M[X(t)] = \langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = a, \quad (2.14)$$

$$D[X(t)] = \langle (X(t) - a)^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - a)^2 dt = \sigma^2, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} M[(X(t) - a)(X(t + \tau) - a)] &= \langle (X(t) - a)(X(t + \tau) - a) \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - a)(x(t + \tau) - a) dt = K(\tau), \end{aligned} \quad (2.16)$$

де $\langle X \rangle$ – середнє у часі значення, a – стала.

Цінність ергодичної теореми полягає у тому, що числові характеристики випадкового процесу можуть бути отримані по одній реалізації випадкового процесу, яка спостерігається упродовж достатньо великого проміжку часу T . Якщо T скінченне, то рівність середніх по ансамблю і по часу може братися тільки з певним ступенем достовірності й точності. Проте на практиці часто маємо лише одну реалізацію, а не великий ансамбль. Тому у дослідженні певного випадкового процесу, якщо його можна хоча б наближено вважати стаціонарним і ергодичним, приймають гіпотезу про його ергодичність. Якщо ні, то застосовують спеціальні методи аналізу.

Ергодичний процес є стаціонарним, але не всякий стаціонарний процес є ергодичним.

Приклад. Реальний аналог випадкового процесу дає практично будь-яке вимірювання. Нехай маємо набір електронних пристроїв, однією з характеристик яких є рівень внутрішніх шумів. Шум кожного з пристроїв – стаціонарний, але залежно від якості складових пристрою, його шум може бути різним. Зрозуміло, що математичне очікування і дисперсія шуму, обчислені при усередненні по ансамблю реалізацій і по одній реалізації у часі, можуть бути різними.

2.4. Властивості кореляційної функції

Дамо перелік деяких властивостей кореляційної функції стаціонарних і ергодичних випадкових процесів. Поряд із кореляційною функцією використовують так звану *коваріаційну* (або *автоковаріаційну*) функцію $B(\tau)$. Із формули (2.7), отримуємо

$$B(\tau) = M[X(t)X(t+\tau)] = K(\tau) + a^2, \quad (2.17)$$

де a – математичне очікування.

Як відомо, квадрат деякої фізичної величини (тиску, сили струму) визначає потужність (звукової хвилі, електричного струму). Тоді згідно з (2.17)

$$B(0) = M[X(t)^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt \quad (2.18)$$

визначає *середню потужність випадкового процесу*.

1. Отже для дисперсії процесу $D[X(t)] = K(0) = \sigma^2$ маємо співвідношення

$$\sigma^2 = B(0) - a^2. \quad (2.19)$$

Відтак дисперсія σ^2 , тобто потужність змінної складової процесу, дорівнює середній потужності процесу $B(0)$ мінус потужність a^2 сталої складової.

$$2. |K(\tau)| \leq K(0), \quad |B(\tau)| \leq B(0). \quad (2.20)$$

$$3. K(\tau) = K(-\tau), \quad B(\tau) = B(-\tau). \quad (2.21)$$

4. Визначимо $B(\infty) = M[X(t)X(t+\tau)]|_{\tau \rightarrow \infty}$. Зі збільшенням величини τ зв'язок між перетинами випадкового процесу $X(t)$ і $X(t+\tau)$ повинен слабшати і при $\tau \rightarrow \infty$ ці величини стають незалежними. Тоді маємо

$$M[X(t)X(t+\tau)] = M[X(t)]M[X(t+\tau)] = a^2.$$

Таким чином,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B(\tau) = B(\infty) = a^2, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = K(\infty) = 0. \quad (2.22)$$

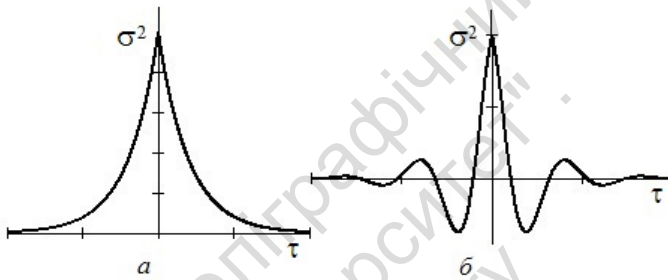


Рис. 2.2. Типовий вигляд кореляційної функції

5. Згідно з властивостями 2–4 вигляд кореляційної функції не може бути довільним. Функція $K(\tau)$ може або монотонно спадати, як це зображено на рис. 2.2, а, або прагнути до нуля по більш складному закону (рис. 2.2, б), ніде, причому, не перевищуючи за модулем $K(0)$.

Функція вигляду (рис. 2.2, а) може бути апроксимована, наприклад, виразом

$$K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \quad (2.23)$$

а функція вигляду (рис. 2.2, б) – виразом

$$K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \cos(\beta\tau). \quad (2.24)$$

6. Додавання до випадкової функції не випадкової (детермінованої) величини або не випадкової функції не змінює значення кореляційної функції.

7. Якщо $X(t)$ – періодична з періодом T функція, то її кореляційна функція також буде періодичною функцією з тим самим періодом $K_x(\tau) = K_x(\tau + T)$.

Задача. Доведіть властивість 6.

Задача. Нехай $X(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, де A і ω – сталі, φ – випадкова величина, рівномірно розподілена в діапазоні від 0 до 2π : щільність розподілу $f(\varphi) = 1 / (2\pi)$ при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ і $f(\varphi) = 0$ при інших φ . Запишіть кореляційну функцію для моментів часу t_1 і $t_1 + \tau$, а також переконайтеся в тому, що $K_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau)$.

2.5. Взаємна кореляційна функція

Розглянемо систему двох випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$. Для системи випадкових функцій, як і для однієї функції, звичай обмежуються лише обчисленням перших двох моментів цих функцій, тобто використовують кореляційну теорію випадкових функцій. Отже, вводимо функцію двох змінних, яка визначається рівністю

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M \left[(X(t_1) - \bar{X}(t_1))(Y(t_2) - \bar{Y}(t_2)) \right]. \quad (2.25)$$

Функція $K_{xy}(t_1, t_2)$, яку називають *взаємно кореляційна функція*, характеризує ступінь схожості (лінійної залежності) перетину функції $X(t_1)$ і перетину функції $Y(t_2)$.

Значимо її основні властивості. Взаємно кореляційна функція $X(t)$ і $Y(t)$ та взаємно кореляційні функції $Y(t)$ і $X(t)$ мають такий зв'язок:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = K_{yx}(t_2, t_1). \quad (2.26)$$

Нерівність, що зв'язує взаємно кореляційну функцію $K_{xy}(t_1, t_2)$ з дисперсіями $K_x(t_1, t_1)$ і $K_y(t_2, t_2)$, має вигляд

$$|K_{xy}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{K_x(t_1, t_1) K_y(t_2, t_2)}. \quad (2.27)$$

Нааявність такої нерівності дозволяє замість розмірної взаємно кореляційної функції $K_{xy}(t_1, t_2)$ ввести безрозмірну нормовану взаємно кореляційну функцію

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \frac{K_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)K_y(t_2, t_2)}}, \quad (2.28)$$

у якій $-1 \leq r_{xy}(t_1, t_2) \leq 1$.

Якщо система функцій $X(t)$ і $Y(t)$ стаціонарна, то другі моменти перетинів цих функцій не залежать від початку відліку часу. Тому і взаємно кореляційна функція не може залежати від значень t_1 і t_2 , а визначається величиною різниці $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = K_{xy}(t_2 - t_1) = K_{xy}(\tau), \quad (2.29)$$

а рівність (2.26) стає такою:

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau). \quad (2.30)$$

Значення взаємно кореляційної функції при $\tau=0$ нічим не виділяється; максимум може міститися в будь-якому місці на осі τ .

2.6. Перетворення Фур'є не випадкових функцій

Перед тим, як говорити про спектр випадкового процесу, надамо деякі відомості про спектральний аналіз детермінованих функцій. Для неперіодичної функції $s(t)$ маємо пару перетворень Фур'є¹:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (\text{пряме}), \quad (2.31)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (\text{обернене}), \quad (2.32)$$

де $S(\omega)$ – спектральна щільність, або комплексний спектр. Модуль спектральної щільності називають амплітудним спек-

¹ Фур'є Жан Батіст Жозеф (1768–1830) – французький математик.

ром, а аргумент – *фазовим спектром*. Для визначеності казати-
 мемо, що змінна t – це час, а змінна ω має розмірність кругової
 частоти. Формули (2.31) і (2.32) є основними формулами теорії
 спектрів. Вони представляють собою пару перетворень Фур'є,
 які пов'язують між собою дійсну функцію часу $s(t)$ і комплекс-
 ну функцію частоти $S(\omega)$. Комплексний спектр визначено і для
 додатних, і для від'ємних частот.

Умовою того, що функція $s(t)$ дійсна, є певна властивість
 комплексного спектра $S(\omega)$, а саме

$$S(\omega) = S^*(-\omega). \quad (2.33)$$

Виникає питання про фізичний смисл від'ємних частот. Від'ємні
 значення ω в комплексній формі перетворення Фур'є безумовно
 не мають будь-якого фізичного смислу. Вони з'являються у фор-
 мулах лише в результаті переходу (за формулою Ейлера¹) від
 гармонічної функції з фізично зрозумілою додатною частотою ω
 до комплексної експоненти. Роблять це для скорочення запису
 і (це головне) викладок. Після закінчення розв'язування задачі
 повертаються до гармонічних функцій і від'ємні частоти зникають.

Внесемо певне уточнення. Згідно з (2.32) неперіодична функ-
 ція являє собою неперервну (континуальну) суму нескінченно
 близьких за частотою гармонічних компонент із нескінченно
 малими амплітудами. Отже, величина $S(\omega)$ виражає не безпосе-
 редньо амплітуду, а так звану спектральну щільність. Часто цю
 деталь відкидають і називають $S(\omega)$ комплексним спектром.

Можна надати таку фізичну інтерпретацію спектральній
 щільності. Розглянемо малий інтервал частот $\Delta\omega$, який утворює
 околі деякого значення частоти ω_0 , тобто $\Delta\omega \leq |\omega - \omega_0|$. Спект-
 ральна щільність $S(\omega_0)$ є коефіцієнтом пропорційності між дов-
 жиною малого інтервалу частот $\Delta\omega$ і відповідною йому комплекс-
 ною амплітудою ΔA_{ω_0} гармонічного сигналу із частотою ω_0 :

$$\Delta A_{\omega_0} = S(\omega_0) \cdot \Delta\omega.$$

¹ Ейлер Леонард (1707–1783) – швейцарський і німецький математик.

Отже, перехід від ряду Фур'є вигляду $s(t) = \sum_k a_k \exp(i\omega_k t)$

для періодичної функції до інтеграла (2.32) подібний до переходу від дискретної моделі струни у вигляді пружно зв'язаних одна з одною кульок до неперервної моделі, у якій маса "розмазана" по всій довжині струни з певною густиною. Так і в представленні (2.32) амплітуда гармонік "розмазана" по усьому діапазону частот.

Запишемо функцію комплексного спектра $S(\omega)$ за допомогою двох дійсних функцій $S(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$. Тоді властивість (2.33) можна подати у вигляді

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad B(\omega) = -B(-\omega), \quad (2.34)$$

тобто, дійсна частина $S(\omega)$ є парна функція частоти ω , а уявна частина $S(\omega)$ – непарна функція ω . Отже, амплітудний спектр $|S(\omega)| = \sqrt{(A(\omega))^2 + (B(\omega))^2}$ – парна функція, фазовий спектр $\arg S(\omega)$ – непарна.

У формулі (2.32) можна перейти від представлення за допомогою $\exp(i\omega t)$ до представлення за допомогою $\cos(\omega t)$ і $\sin(\omega t)$ (зробіть самостійно):

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t) d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega t) d\omega. \quad (2.35)$$

Отже, дійсна функція $s(t)$ представляється у вигляді інтеграла від дійсних функцій $\cos(\omega t)$ і $\sin(\omega t)$, причому складові спектральної щільності $A(\omega)$ і $B(\omega)$ теж дійсні. Інтегрування в цьому випадку проводять лише по додатних частотах, які змінюються від 0 до ∞ .

Перетворення Фур'є можна застосовувати до абсолютно інтегрованих функцій, тобто коли

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt \neq \infty. \quad (2.36)$$

Для виконання умови (2.36) потрібно, щоб

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} s(t) \rightarrow 0. \quad (2.37)$$

Значимо, що представлення процесу у частотній області (спектральна щільність) утримує рівно стільки ж інформації, скільки і сам процес у часовій області. Проте визначення спектра дозволяє в багатьох випадках спростити викладки за аналізу процесу і досягти більшої наочності.

Дамо перелік основних властивостей перетворення Фур'є. Нехай маємо дві функції $s(t)$ і $g(t)$ з відповідними комплексними спектрами $S(\omega)$ і $G(\omega)$.

1. Якщо $h(t) = \alpha s(t) + \beta g(t)$, де α, β – сталі, то спектр функції $h(t)$ буде

$$H(\omega) = \alpha S(\omega) + \beta G(\omega). \quad (2.38)$$

2. Нехай $s(t) = g(t - \tau)$, де τ – час затримки, то

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) \exp(-i\omega t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) \exp(-i\omega(t - \tau)) d(t - \tau) \exp(-i\omega\tau) = \\ &= G(\omega) \exp(-i\omega\tau). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Отже, амплітудний спектр не змінився, а фазовий спектр отримав доданок $-\omega\tau$, що лінійно залежить від частоти.

3. Нехай відбувається зміна тривалості процесу без зміни його форми, тобто $s(t) = g(\alpha t)$, $\alpha > 0$. Якщо $\alpha > 1$, то тривалість процесу зменшується, а при $\alpha < 1$ – збільшується. Тоді комплексний спектр

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha t) \exp(-i\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha t) \exp\left(-i\frac{\omega}{\alpha} \alpha t\right) d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} G\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Отже, збільшення тривалості процесу призводить до зменшення ширини спектра і, навпаки, зменшення тривалості процесу призводить до збільшення ширини спектра.

4. Нехай $s(t)$ – процес скінченної тривалості, а $S(\omega)$ – його комплексний спектр. Утворимо на основі $s(t)$ періодичний

процес із періодом T . Тоді формули для спектра одиночного імпульсу $S(\omega)$ і коефіцієнти ряду Фур'є C_k періодичної послідовності імпульсів мають такий вигляд:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp\left(-ik \frac{2\pi}{T} t\right) dt.$$

Як бачимо, обчислюється один і той самий інтеграл. Дістаємо співвідношення

$$C_k = \frac{1}{T} S\left(k \frac{2\pi}{T}\right). \quad (2.41)$$

Відтак маємо дві основні різновидності спектрів: *лінійчасті* та *суцільні* (інакше, *дискретні* і *неперервні*). Гармонічні лінійчасті спектри належать до періодичних функцій, суцільні – до неперіодичних.

Загалом спектр сигналу скінченної тривалості завжди нескінченно широкий і навпаки, спектр скінченної ширини відповідає сигналу необмеженої тривалості.

Задача. Як наочний приклад обчисліть:

1) спектральну щільність процесу скінченної тривалості

$$s(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2; \end{cases}$$

2) визначте процес, який має скінченну ширину спектра

$$S(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi, \\ 0, & |\omega| > \pi. \end{cases}$$

5. Доведемо теорему про спектр похідної: якщо комплексний спектр функції $s(t) \in S(\omega)$, то комплексний спектр похідної $s'(t) = ds/dt \in i\omega S(\omega)$. Для доведення запишемо вираз

$$S_{(1)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s'(t) \exp(-i\omega t) dt$$

й інтегруємо його по частинах. Отримаємо

$$S_{(1)}(\omega) = s(t) \exp(-i\omega t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Оскільки функція, яка представляється перетворенням Фур'є, прагне до нуля при $t \rightarrow \pm\infty$, то маємо

$$S_{(1)}(\omega) = i\omega S(\omega). \quad (2.42)$$

Це доведення можна поширити на випадок n -ї похідної. Виконавши інтегрування по частинах n разів, отримаємо комплексний спектр n -ї похідної (за умови, що всі похідні функції до $n-1$ порядку включно дорівнюють нулю при $t \rightarrow \pm\infty$)

$$S_{(n)}(\omega) = (i\omega)^n S(\omega). \quad (2.43)$$

6. Подібним чином можна отримати спектр інтеграла від даної функції, а саме

$$S_{(-1)}(\omega) = \frac{1}{i\omega} S(\omega), \quad (2.44)$$

але за умови, що $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = 0$, тобто коли функція не має сталої складової.

2.7. Спектрально-кореляційний аналіз не випадкових функцій

Виконуючи спектральний аналіз не випадкових функцій, вводять корисні в застосуванні характеристики, аналітичні визначення яких нагадують імовірності характеристики ергодичних стаціонарних випадкових процесів (кореляційна функція, інтервал кореляції). Зрозуміло, що вони не мають ніякого смислу ймовірності.

Взаємно кореляційна функція двох не випадкових процесів

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t + \tau) dt, \quad (2.45)$$

дозволяє оцінити ступінь схожості зсунутих на час τ один відносно одного процесів. Якщо $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$, то маємо автокореляційну функцію $K_s(\tau)$ процесу $s(t)$, яка дозволяє оцінити ступінь схожості зсунутих на час τ двох копій процесу.

Оскільки кореляційна функція і спектр є інтегральними перетвореннями процесу, то між ними повинен бути зв'язок. Нехай процеси $s_1(t)$ і $s_2(t)$ мають комплексні спектри $S_1(\omega)$ і $S_2(\omega)$. Застосуємо до функції $B_{12}(\tau)$ перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_{12}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t+\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \exp(-i\omega t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t+\tau) \exp(i\omega(t+\tau)) d(t+\tau) \right] dt = \\ &= S_1(\omega) S_2^*(\omega). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Отже, взаємно кореляційна функція пов'язана перетворенням Фур'є з так званим *взаємним спектром* процесів:

$$S_{12}(\omega) = S_1(\omega) S_2^*(\omega). \quad (2.47)$$

Якщо спектри процесів $S_1(\omega)$ і $S_2(\omega)$ не перекриваються, то взаємний спектр $S_{12}(\tau) = 0$, а отже і $B_{12}(\tau) = 0$ для будь-якого τ . Такі процеси називають *некорельованими*.

Нехай $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$, тоді аналогічний результат для автокореляційної функції має вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_s(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau = S(\omega) S^*(\omega) = |S(\omega)|^2. \quad (2.48)$$

Отже, автокореляційна функція процесу пов'язана з квадратом модуля спектральної щільності, інакше кажучи, з *енергетичним спектром* процесу. Як бачимо, автокореляційна функція не залежить від фазового спектра, тому відновити процес по кореляційній функції не можна. Як наслідок, два різні процеси можуть мати однакову автокореляційну функцію.

Відповідно обернене, відносно прямого (2.46), перетворення Фур'є визначає

$$\begin{aligned} B_{12}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2^*(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Поклавши у (2.49) $\tau=0$ і розкривши вираз для взаємної кореляційної функції і взаємного спектра, отримаємо співвідношення, що має назву *теорема Релея*¹:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)S_2^*(\omega)d\omega. \quad (2.50)$$

Якщо $s_1(t)=s_2(t)=s(t)$, то отримаємо співвідношення, яке дозволяє обчислити енергію процесу як у часовій, так і в частотній області, і називається *рівність Парсеваля*²:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.51)$$

2.8. Фур'є-аналіз неінтегрованих функцій

Формули перетворень Фур'є (2.31) і (2.32) хоч і схожі, але суть їхня різна. Інтеграл (2.31) – це визначення прямого перетворення Фур'є, а рівність (2.32) є твердженням, що інтеграл у його правій частині збігається з функцією $s(t)$. Важливо підкреслити, що умови (2.36), (2.37) є достатніми, але не необхідними. Це означає, що існують функції, які не задовольняють зазначені умови, та все ж мають перетворення Фур'є. І перш за все поговоримо про *дельта-функцію Дірака*³.

Досліджуючи задачі квантової механіки, Дірак 1929 р. ввів нову функцію, яку позначив $\delta(x)$ (читають: *дельта-функція* або *дельта-функція Дірака*). Ця функція визначається таким співвідношенням:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

¹ Релей Джон Вільям Стретт (1842–1919) – англійський механік і фізик.

² Парсеваль Марк-Антуан Парсеваль (1755–1836) – французький математик.

³ Дірак Поль Адріан Морис (1902–1984) – англійський фізик.

Виявилось, що за допомогою дельта-функції можна сформулювати математичною мовою такі ідеалізовані поняття, як густина матеріальної точки, миттєвий імпульс, густина точкового заряду тощо.

Загалом для побудови математичних моделей фізичних явищ доводиться використовувати різні математичні абстракції – точку, лінію, площину. Наприклад, ми говоримо про масу, яка зосереджена в даній точці простору, про силу, яка діє в даний момент часу, про точкове джерело того чи іншого фізичного поля, хоча розуміємо, що будь-яка маса має певний об'єм, будь-яка сила діє певний проміжок часу, а будь-яке джерело поля має певні розміри.

Щоб краще зрозуміти суть питання, припустимо, що на тіло протягом певного проміжку часу 2ϵ діє стала сила, яку позначимо як $\delta_\epsilon(t)$, рис. 2.3.

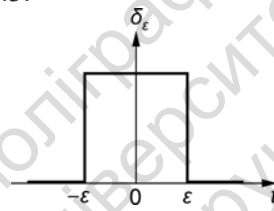


Рис. 2.3. Графік функції $\delta_\epsilon(t)$

Нехай за цей час тіло отримує імпульс, що дорівнює одиниці, тобто $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1$. Оскільки сила $\delta_\epsilon(t)$ дорівнює нулю поза проміжком часу $[-\epsilon, \epsilon]$, а на цьому проміжку вона стала, то

$$2\epsilon\delta_\epsilon(t) = 1, \text{ звідки } \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & -\epsilon \leq t \leq \epsilon, \\ 0, & t < -\epsilon \text{ і } t > \epsilon. \end{cases}$$

Якщо тепер $\epsilon \rightarrow 0$, то маємо силу, яка діє на дуже малому проміжку часу. Причому амплітуда сили прагне до нескінченності. Якщо визначити границю $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$, то отримуємо функцію, яка дорівнює нулю всюди крім точки $t=0$, в точці $t=0$

вона дорівнює нескінченності, тобто приходимо до визначення дельта-функції.

Зрозуміло, що дельта-функція не є функцією у звичайному розумінні. Адже рівність нулю функції у всіх точках, крім однієї, де вона дорівнює нескінченності, і водночас рівність інтеграла від цієї функції одиниці суперечать одна одній в межах математики, яку можна назвати класичною. Тим не менш, Дірак та інші фізики протягом багатьох років вільно і продуктивно використовували дельта-функцію, не визначаючи строго ці дивні математичні об'єкти. Згодом математичну теорію незвичайних функцій, подібних до функції $\delta(x)$, які сьогодні називають *узагальненими функціями*, побудували Соболев¹ і Шварц². Зазначимо, що дельта-функція Дірака є яскравим прикладом математичної інтуїції фізика, яка випередила рівень розвитку математики свого часу.

Природно навести таке фізичне твердження: імпульс сили, наданий тілу миттєвою силою $\delta(t)$, тобто інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, являє собою границю імпульсу сили, яку отримує тіло внаслідок дії розподіленої у часі сили $\delta_\epsilon(t)$, коли час її дії прямує до нуля ($\epsilon \rightarrow 0$). Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1.$$

Отже, коли кажуть, що інтеграл від дельта-функції дорівнює одиниці, цей інтеграл слід розуміти як границю відповідних звичайних інтегралів від $\delta_\epsilon(t)$ -функцій при $\epsilon \rightarrow 0$.

Узагальнимо сказане. Нехай $\varphi(x)$ – деяка функція, тоді виконується співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0).$$

Ця формула означає, що границею послідовності вказаних інтегралів є *функціонал* (а не функція), який ставить у відповід-

¹ Соболев Сергій Львович (1908–1989) – радянський математик.

² Шварц Лоран (1915–2002) – французький математик.

ність кожній неперервній функції $\varphi(x)$ число $\varphi(x_0)$ – її значення в точці $x = x_0$. Цей функціонал і є *дельта-функція Дірака*.

Підкреслимо особливість використання дельта-функції у фізичних задачах: опис будь-якого впливу (тобто такої функції $\varphi(x)$) за допомогою дельта-функції можливий і доречний тоді, коли детальна форма впливу $\varphi(x)$, тобто його залежність від x , не суттєва, а важливим є лише інтеграл.

Ще раз наголосимо, що, дельта-функція не є звичайною функцією, тому говорити про її значення в окремих точках не є логічно строгим, адже вона не визначена як функція точки. Тому висловлювання, що дельта-функція всюди на числовій осі дорівнює нулю, крім точки $x=0$, де вона дорівнює $+\infty$, можливе лише як зручний засіб для відповідних міркувань. Потрібно пам'ятати, що *дельта-функція – це поняття іншої природи*. Вона визначена не як функція $\delta(x)$, а як інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) dt = 1. \text{ Використання дельта-функції обумов-$$

лено тим, що для багатьох фізичних задач безпосередній фізичний смисл мають саме інтеграли від деяких функцій.

Дамо перелік перетворень Фур'є кількох функцій, для яких воно формально непридатне, але при цьому можна отримати осмислений і практично корисний результат.

1. Дельта-функції $s(t) = \delta(t)$.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-i\omega t) dt = 1. \quad (2.52)$$

Спектральна щільність дельта-функції являє собою константу, тобто є рівномірною в нескінченній смузі частот. Це узгоджується із загальним співвідношенням між тривалістю функції і шириною її спектра: дельта-функція має нескінченно малу тривалість, а її спектр нескінченно широкий. Тоді обернене перетворення Фур'є

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega. \quad (2.53)$$

2. Стала функція $s(t) = A$. Беручи до уваги (2.53), маємо

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp(-i\omega t) dt = 2\pi A \delta(\omega). \quad (2.54)$$

Знову отримали обернену пропорційність між тривалістю функції і шириною її спектра: нескінченно тривалий процес має нескінченно вузький спектр.

3. Гармонічна функція $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Подаючи косинус через комплексну експоненту, отримайте таку формулу для спектральної щільності гармонічної функції:

$$S(\omega) = \pi A \exp(i\varphi) \delta(\omega - \omega_0) + \pi A \exp(-i\varphi) \delta(\omega + \omega_0). \quad (2.55)$$

2.9. Спектр потужності випадкової функції

Оскільки реалізації $x(t)$ випадкового процесу $X(t)$ не прагнуть до нуля при $t \rightarrow \pm\infty$, тобто не виконується умова для абсолютно інтегрованих функцій (2.36), то перетворення Фур'є не можна безпосередньо застосовувати до випадкових функцій.

Введемо узагальнення спектральних уявлень, яке можна буде застосувати і для випадкових процесів. Якщо детермінована функція означає тиск, силу струму, коливальну швидкість, то її квадрат пропорційний миттєвій потужності. Узагальнимо цей факт і на випадкові функції, визначаючи $x^2(t)$ як миттєву потужність. Тоді повна енергія випадкового процесу $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$

буде нескінченна. Але припустимо, що середня потужність

$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \right]$ є скінченною величиною. Спираючись на це

припущення, міркуватимемо таким чином.

Розглянемо функцію $x_T(t)$ таку, що $x_T(t) = x(t)$ на інтервалі $0 \leq t \leq T$ і $x_T(t) = 0$ при $t < 0$ і $t > T$. Комплексний спектр функції $x_T(t)$:

$$S_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \exp(-i\omega t) dt = \int_0^T x_T(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (2.56)$$

Оскільки при скінченному значенні T інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_0^T x_T^2(t) dt \quad (2.57)$$

не розходиться, то можна записати рівність Парсеваля у вигляді

$$\int_0^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.58)$$

Середня за час T потужність визначиться як

$$\frac{1}{T} \int_0^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.59)$$

Спрямуємо у (2.59) $T \rightarrow \infty$, адже при цьому $\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$ може

не розходитися, навіть коли інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ розходиться.

Запишемо

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_T^2(t) dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(\omega)|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (2.60)$$

де функцію

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(\omega)|^2}{T} \quad (2.61)$$

називають *спектральна щільність потужності* або *спектр потужності*. Отже, спектр потужності являє собою середнє значення від квадрата модуля перетворення Фур'є урізаної реалізації.

У загальному випадку спектральну щільність потужності $W(\omega)$ слід усереднити по ансамблю реалізацій. На практиці, приймаючи гіпотезу про ергодичність цього випадкового процесу, обчислюють спектр потужності по одній реалізації, замінюючи усереднення по ансамблю усередненням по різних ділянках реалізації процесу. Іншими словами, реалізація розбивається на неперетинні або перетинні сегменти, які називають *періодограмами*. Для кожної з періодограм обчислюють квадрат модуля Фур'є-перетворення, а потім результати усереднюють. Для отримання достатньо гладких функцій $W(\omega)$ зазвичай розглядають хоча б 8–10 періодограм. Зазначимо, що розрахунок спектра потужності супроводжується пошуком компромісу між довжиною періодограми (чим вона більша, тим краще спектральне розрізнення) і кількістю сегментів (зі збільшенням кількості періодограм спектр стає гладкішим завдяки кращому усередненню).

Згідно з (2.48) автокореляційна функція не випадкового процесу пов'язана перетворенням Фур'є з його енергетичним спектром, а саме:

$$|S(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (2.62)$$

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 \exp(i\omega\tau) d\omega. \quad (2.63)$$

Застосуємо цю властивість до відрізка реалізації ергодичного процесу тривалістю T . Для цього, представивши у (2.63) вираз для кореляційної функції, матимемо

$$\int_0^T x(t)x(t-\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(\omega)|^2 \exp(i\omega\tau) d\omega. \quad (2.64)$$

Поділимо обидві частини (2.64) на T і спрямуємо $T \rightarrow \infty$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(\omega)|^2}{T} \exp(i\omega\tau) d\omega. \quad (2.65)$$

У лівій частині (2.65) стоїть кореляційна функція процесу, отримана шляхом усереднення у часі. У правій частині під зна-

ком інтеграла міститься вираз (2.61) для спектральної щільності потужності випадкового процесу. Отже маємо

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega. \quad (2.66)$$

Відповідно

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (2.67)$$

Відтак кореляційна функція випадкового процесу і його спектральна щільність потужності пов'язані одна з одною перетворенням Фур'є. Це співвідношення носить назву *теорему Вінера¹ – Хінчина²*.

Оскільки $K(\tau)$ і $W(\omega)$ є парні дійсні функції, то формули (2.66), (2.67) перетворення Фур'є можна записати у вигляді

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (2.68)$$

$$W(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (2.69)$$

На перший погляд здається дуже дивним, що такі статистичні явища, як турбулентність, або шум потоку, або шуми, що породжуються вітром, можна описати простими функціями на зразок спектра потужності або кореляційної функції. Це пояснюється тим, що ми використовуємо величини, які отримані за рахунок усереднення на достатньо великому часовому інтервалі. Як результат, будь-які нерегулярності, що виникають на коротких інтервалах часу, згладжуються, і ми отримуємо функції, які плавно залежать від своїх аргументів. Проте, нехтуючи фазовими характеристиками, ми втрачаємо інформацію, внаслідок чого виявляється неможливим відновити початкову функцію часу за її спектром потужності або автокореляційною функцією.

¹ Вінер Норберт (1894–1964) – американський математик.

² Хінчин Олександр Якович (1894–1959) – радянський математик.

2.10. Час кореляції і ефективна ширина спектра

Для випадкових процесів, які цікаві у практичних дослідженнях, характерним є прагнення автокореляційної функції до нуля за збільшення часового зсуву τ (це є достатньою умовою ергодичності процесу). Чим швидше спадає функція $K(\tau)$, тим слабшим виявляється статистичний зв'язок значень випадкового процесу в різні моменти часу: зі збільшенням τ попередній стан "забувається".

Кількісною оцінкою швидкості спадання автокореляційної функції є *час кореляції* τ_k , який визначає часовий інтервал, упродовж якого обвідна автокореляційної функції $\gamma(\tau)$ спадає в e (або 10) разів.

Нехай випадковий процес характеризується спектром потужності $W(\omega)$, який має максимальне значення W_{\max} . *Ефективну ширину спектра* $\Delta\omega_{ef}$ випадкового процесу визначають із співвідношення

$$W_{\max} \Delta\omega_{ef} = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega, \quad (2.70)$$

звідси

$$\Delta\omega_{ef} = \frac{1}{W_{\max}} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (2.71)$$

Ефективну ширину спектра випадкового процесу можна знайти інакше, наприклад, визначаючи частотний інтервал, на межі якого значення щільності спектра зменшиться до $0,1 \cdot W_{\max}$.

Значимо такі загальні співвідношення між тривалістю процесу t_i , його ефективною шириною спектра $\Delta\omega_{ef}$ та інтервалом кореляції τ_k :

– чим менша тривалість процесу t_i , тим ширший його спектр, тобто тим більша ефективна ширина спектра $\Delta\omega_{ef}$;

– чим більша ефективна ширина спектра $\Delta\omega_{ef}$ (інакше, чим вища верхня гранична частота спектра процесу), тим меншим виявляється інтервал кореляції τ_k .

Задача. Переконайтеся у зазначених співвідношеннях, розглянувши дві задачі:

1) часова залежність процесу має вигляд

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < -t_i / 2, \\ U_0, & -t_i / 2 \leq t \leq t_i / 2, \\ 0, & t > t_i / 2. \end{cases}$$

Визначити спектральну щільність $S(\omega)$ процесу й отримати співвідношення між t_i і $\Delta\omega_{ef}$ (оцінити величину $\Delta\omega_{ef}$, фіксуючи значення першого нуля у функції $S(\omega)$);

2) нехай процес має спектральну щільність потужності вигляду

$$W(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ W_0, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B \end{cases}$$

де ω_B – верхня гранична частота спектра. Визначити автокореляційну функцію $K(\tau)$ процесу й отримати співвідношення між $\Delta\omega_{ef}$ і τ_k (оцінити величину τ_k , фіксуючи значення першого нуля у функції $K(\tau)$).

2.11. Теорема Котельникова¹

Як ми знаємо, для відновлення процесу по його спектру необхідно враховувати всі складові із частотами, які розміщені в інтервалі від нуля до нескінченності. Але з фізичного погляду така процедура принципово нездійсненна. До того ж внесок спектральних складових при $\omega \rightarrow \infty$ нехтовно малий унаслідок обмеженості енергії процесу. Насамкінець, будь-який реальний

¹ Котельников Володимир Олександрович (1908–2005) – радянський радіофізик.

пристрій, який призначено для передавання й оброблення сигналів, має скінченну ширину смуги пропускання.

Комплексний спектр $S(\omega)$ і детермінована функція $s(t)$ пов'язані між собою парою перетворень Фур'є (2.31) і (2.32). Нехай функція $s(t)$ є функцією з обмеженим спектром, а саме $[-\omega_B, \omega_B]$, де $\omega_B = 2\pi f_B$ – верхня гранична частота спектра. Тоді обернене перетворення Фур'є (2.32) можемо записати у вигляді

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (2.72)$$

Виконаємо періодичне продовження функції $S(\omega)$ уздовж осі частот. Тоді спектральну функцію $S(\omega)$, як періодичну, представимо у вигляді ряду Фур'є по моментах часу $t_n = \Delta t \cdot n$, кратних часовому відрізку $\Delta t = \frac{2\pi}{2\omega_B}$:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(-i \frac{2\pi}{2\omega_B} n\omega\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(-i \cdot \Delta t \cdot n\omega), \quad (2.73)$$

де

$$\Delta t = \frac{2\pi}{2\omega_B} = \frac{2\pi}{2 \cdot 2\pi f_B} = \frac{1}{2f_B}, \quad f_B = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}. \quad (2.74)$$

Величина Δt являє собою часовий інтервал дискретизації, а добуток $\Delta t \cdot n$ – відлік часу на часовому проміжку визначення функції $s(t)$. Тоді частоту $f_d = \frac{1}{\Delta t}$ можна назвати *частотою дискретизації*. Отже верхня гранична частота спектра функції f_B пов'язана з частотою дискретизації таким співвідношенням:

$$f_B = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} = \frac{f_d}{2}.$$

Беручи до уваги ортогональність набору функцій $\exp\left(-i\omega\left(\frac{2\pi}{2\omega_B}n\right)\right) = \exp(-i\omega \cdot \Delta t \cdot n)$ на проміжку $[-\omega_B, \omega_B]$ (перевірте), коефіцієнти розкладу (2.73) дорівнюють:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) \exp(i\omega t_n) d\omega = \\ &= \frac{2\pi}{2\omega_B} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) \exp(i\omega t_n) d\omega = \frac{2\pi}{2\omega_B} s(t_n), \end{aligned} \quad (2.75)$$

де $s(t_n)$, $t_n = \Delta t \cdot n$ – значення сигналу в n -й точці відліку (див. формулу (2.72)). Тоді з урахуванням (2.74) і (2.75) формула (2.72) набуде вигляду

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) \exp(i\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp(-i\omega t_n) \exp(i\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{2\omega_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp(i\omega(t-t_n)) d\omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \frac{\sin(\omega_B(t-t_n))}{\omega_B(t-t_n)}. \end{aligned}$$

Отже

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \frac{\sin(\omega_B(t-t_n))}{\omega_B(t-t_n)}, \quad t_n = \Delta t \cdot n, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_B}. \quad (2.76)$$

Процес $s(t)$ може бути однозначно відновлений по дискретній вибірці $s(\Delta t \cdot n) = s(t_n)$, якщо максимальна частота у спектрі f_B не перевищує так звану частоту Найквіста¹ f_N , тобто

$$f_B \leq f_N = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} = \frac{f_d}{2}. \quad (2.77)$$

¹ Найквіст Гаррі (1889–1976) – американський фізик.

У цьому полягає суть *теорему Котельникова*. Якщо ж умови теорему Котельникова порушуються і відліки у часі беруться не достатньо часто, то однозначне відновлення процесу принципово неможливе. Через точки відліку можна провести незліченно багато кривих, спектральні щільності яких відмінні від нуля поза смугою $-\omega_B \leq \omega \leq \omega_B$.

Звісно, якщо взяти частоту дискретизації f_d такою, що частота Найквіста буде строго більша ніж верхня частота спектра процесу $f_N = \frac{f_d}{2} > f_B$, то, за практичного використання теорему Котельникова, де сума (2.76) буде скінченною, матимемо суттєво краще відновлення процесу по його дискретній вибірці.

Отже, у випадку виконання умови $f_N = \frac{f_d}{2} > f_B$, формули (2.76) набудуть вигляду

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \frac{\sin(\omega_N(t-t_n))}{\omega_N(t-t_n)}, \quad t_n = \Delta t \cdot n, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_N}. \quad (2.78)$$

Додамо коментар до співвідношення (2.78). Нехай маємо гармонічну функцію із частотою ω . Розглянемо три випадки.

1) Якщо частота ω менша за частоту Найквіста ($\omega < \omega_N$), то дискретні відліки правильно відновлять функцію.

2) Якщо частота ω дорівнює частоті Найквіста ($\omega = \omega_N$), то дискретні відліки правильно відновлять гармонічну функцію з тією самою частотою, але можлива ситуація, коли амплітуда і фаза зміняться.

3) Якщо частота ω більше за частоту Найквіста ($\omega > \omega_N$), то відновлена по дискретних відліках функція буде також гармонічною, але з іншою частотою. Такий ефект носить назву *яви хибних частот*.

Формули (2.76) і (2.78) являть собою розклад функції $s(t)$ в ряд згідно із системою функцій $\{\varphi_n(t)\}$, яку називають *базисом Котельникова*:

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(\omega_B(t-t_n))}{\omega_B(t-t_n)}. \quad (2.79)$$

Властивість обмеженості спектра дозволяє знаходити цікаві й важливі системи ортогональних функцій. Таким прикладом є функції $\{\varphi_n(t)\}$ базису Котельникова (2.79). Переконаємося у цьому. Розглянемо функцію $u(t)$ зі сталою дійсною спектральною щільністю S_0 в межах відрізка від нуля до верхньої граничної частоти ω_B ; поза цим відрізком спектральна щільність функції $u(t)$ дорівнює нулю:

$$S_u(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ S_0, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B. \end{cases} \quad (2.80)$$

Згідно з (2.72) функція $u(t)$ має вигляд

$$u(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp(i\omega t) d\omega = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B t}. \quad (2.81)$$

Якщо у формулу (2.80) для спектральної щільності ввести фазу, яка лінійно залежить від частоти, тобто

$$S_v(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ S_0 \exp(-i\omega t_0), & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B, \end{cases} \quad (2.82)$$

то матимемо функцію

$$v(t) = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin(\omega_B(t-t_0))}{\omega_B(t-t_0)}, \quad (2.83)$$

що зсунута у часі відносно функції $u(t)$ на t_0 секунд (див. формулу (2.39)).

Формула Релея (2.50) дозволяє обчислити скалярний добуток функцій $u(t)$ і $v(t)$ через їхні спектральні щільності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp(i\omega t_0) d\omega = \frac{S_0^2 \omega_B}{\pi} \frac{\sin(\omega_B t_0)}{\omega_B t_0}. \quad (2.84)$$

Як бачимо, скалярний добуток дорівнює нулю, і дві однакові за формою функції виявляються ортогональними, якщо часовий зсув між ними задовольняє умову

$$\omega_B t_0 = k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.85)$$

Мінімально можливий зсув, що призводить до ортогональності, отримуємо, якщо $k = \pm 1$:

$$t_0 = \pm \frac{\pi}{\omega_B} = \pm \frac{1}{2f_B} = \pm \frac{1}{f_d} = \pm \Delta t. \quad (2.86)$$

Отже, величина t_0 кратна інтервалу дискретизації Δt . На рис. 2.4 показано графіки ортогональних функцій $u(t)$ і $v(t)$ для двох значень параметра $t_0 = \Delta t$ (рис. 2.4, а) і $t_0 = 2 \cdot \Delta t$ (рис. 2.4, б). Відмітимо, що коли одна з функцій сягає максимуму, всі інші дорівнюють нулю.

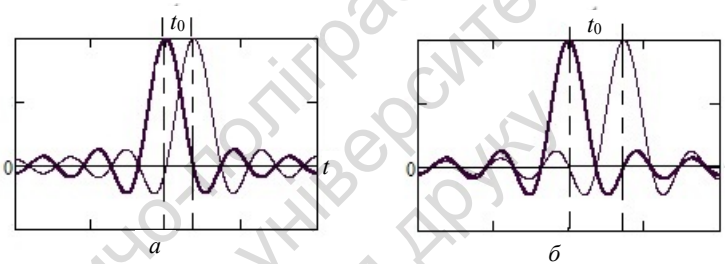


Рис. 2.4. Графіки двох ортогональних функцій:
а – при $t_0 = \Delta t$, б – при $t_0 = 2 \cdot \Delta t$

Принципово важливо, що вдалося не просто досягти ортогональності двох функцій. Вказано шлях побудови нескінченного ортогонального базису, в якому можна записати будь-який процес зі спектром, обмеженим частотою ω_B .

Ще раз зазначимо, що будь-яка інша крива, що проходить через ті самі точки дискретизації, що і графік даного процесу, буде характеризуватися ширшим спектром, тобто не відповідатиме умовам обмеження заданою частотою ширини спектра. Така крива єдина. Це – найважливіше твердження теореми Котельникова, воно є математично доведеним твердженням.

Зауважимо, що теорему Котельникова можна поширити і на випадкові функції.

Вимоги, сформульовані теоремою Котельникова, належать до ідеалізованого процесу з обмеженим спектром, який у природі не зустрічається.

Справді, по-перше, скінченний (обмежений) спектр може характеризувати тільки нескінченний у часі сигнал. По-друге, саме значення відліків має братися з ідеальною точністю. По-третє, на практиці неможлива ситуація, щоб при деякій частоті дискретизації f_d процес можна було відновити ідеально, а при частоті, яка відрізняється від f_d на будь-яку малу величину, ця задача стає нерозв'язною. Тому на практиці рекомендують використовувати частоту дискретизації згідно з нерівністю $f_N = \frac{f_d}{2} > f_B$.

2.12. Застосування теорема Котельникова до процесу скінченної тривалості

Оцінимо можливість застосування теорема Котельникова до процесу $s(t)$ скінченної тривалості T_s . Як відомо, такі процеси мають нескінченно широкий спектр. Але на практиці можна обмежитися деякою верхньою частотою f_B , за межами якої у спектрі утримується мала частка енергії порівняно з енергією всього процесу. Таким критерієм може бути 90 % потужності процесу в межах спектра.

Тоді процес $s(t)$, визначений на проміжку часу $t = [0, T_s]$ з верхньою граничною частотою f_B , може бути представлений рядом Котельникова з обмеженою кількістю дискретних відліків:

$$s(t) = \sum_{m=0}^M s(t_m) \frac{\sin(\omega_N(t-t_m))}{\omega_N(t-t_m)}, \quad (2.87)$$

де $M = T_s / \Delta t$ – кількість відліків; $t_m = \Delta t \cdot m$, $m = 0, 1, \dots, M$.

У цьому разі має справджуватися нерівність (на відміну від (2.78) писатимемо строгу нерівність): $f_B < f_N = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} = \frac{f_d}{2} = \frac{M}{2T_s}$.

Як простий приклад розглянемо функцію $s(t)$, яка є сумою трьох гармонічних функцій із частотами

$f_1 = 0,5$ Гц, $f_2 = 1,0$ Гц, $f_3 = 2,3$ Гц, а саме:

$$s(t) = \sin(2\pi f_1 \cdot t) + 0,5 \sin(2\pi f_2 \cdot t) + 0,3 \sin(2\pi f_3 \cdot t). \quad (2.88)$$

Нехай нас цікавить відрізок часу тривалістю $T_s = 10$ с від 0 до 10 с, тобто на цьому відрізку часу ми хочемо, використовуючи теорему Котельникова, відновити функцію $s(t)$ за її дискретними відліками:

$$s_n = \sin(2\pi f_1 \cdot t_n) + 0,5 \sin(2\pi f_2 \cdot t_n) + 0,3 \sin(2\pi f_3 \cdot t_n), \quad (2.89)$$

де $t_n = \Delta t \cdot n$, $n = 0, 1, \dots, N$, часовий проміжок між моментами відліку $\Delta t = T_s / N$.

Оскільки верхня частота у спектрі нашої функції, а саме $f_3 = 2,3$ Гц, повинна бути меншою частоти Найквіста

$f_3 < f_N = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} = \frac{N}{2T_s}$, то правильний вибір кількості точок відліку N забезпечить виконання цієї нерівності.

Сказане ілюструє рис. 2.5 (тонка лінія – графік функції $s(t)$; жирна лінія – функція, відтворена за дискретною вибіркою на відрізку часу від 0 до 10 с; кружки – значення функції $s(t)$ в точках дискретизації). На рис. 2.5, а кількість точок дискретизації M вибрана правильно і частота Найквіста $f_N = 3,2$ Гц виявилася більшою за верхню частоту спектра функції $f_3 = 2,3$ Гц. Як результат, використання ряду Котельникова (2.87) привело до відтворення функції на відрізку часу від 0 до 10 с.

Ситуація докорінно змінилася на рис. 2.5, б, тут частота Найквіста $f_N = 1,6$ Гц менша за частоту $f_3 = 2,3$ Гц. Незважаючи на те, що відтворена крива проходить через точки дискретної вибірки (2.89), в інших точках відрізка часу $T_s = 10$ с відтворений графік не збігається з графіком функції (2.88).

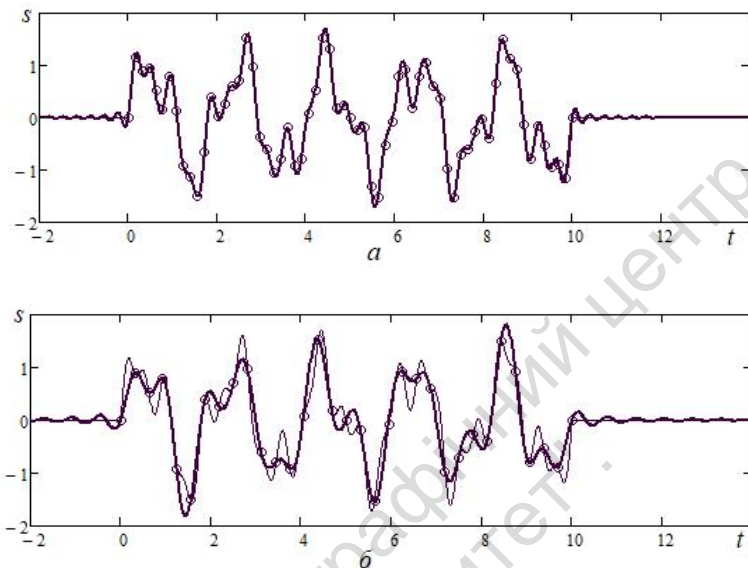


Рис. 2.5. Приклад застосування теореми Котельникова:
a – якщо $M = 64$, $f_N = 3,2$ Гц; *б* – якщо $M = 32$, $f_N = 1,6$ Гц

На рис. 2.5 наочно продемонстровано властивість функції з обмеженим спектром – її нескінченність у часі. Як бачимо, поза межами відрізка часу від 0 до 10 с маємо осциляції, хоча їхня амплітуда із часом прямує до нуля. Зрозуміло, що збільшення величини M у формулі (2.87) зменшує ці осциляції.

На рис. 2.6 показано амплітудні спектри дискретної вибірки (2.89) s_m , $m = 0, 1, \dots, M$, функції $s(t)$ (дані про спектр дискретної вибірки процесу подано в наступному підрозділі). Як бачимо, на рис. 2.6, *a* спектр відповідає спектру функції (2.88) ($f_1 = 0,5$ Гц, $f_2 = 1,2$ Гц, $f_3 = 2,3$ Гц), а на рис. 2.6, *б* гармоніка із частотою $f_3 = 2,3$ Гц відсутня і з'явилася гармоніка з хибною частотою 0,9 Гц.

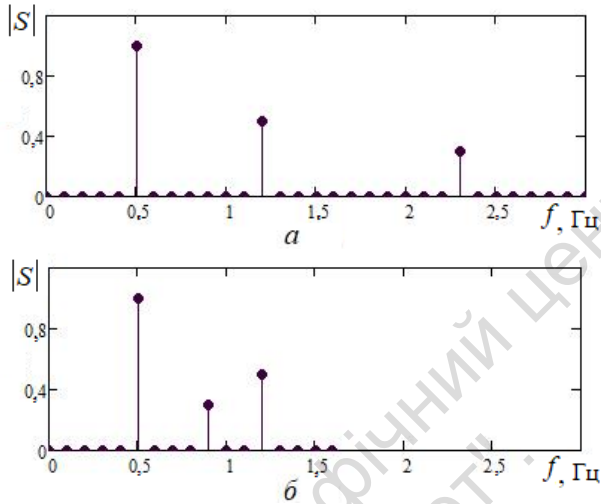


Рис. 2.6. Амплітудні спектри дискретної вибірки s_m , $m = 0, 1, \dots, M$, функції (2.88): a – якщо $M = 64$, $f_N = 3,2$ Гц; b – якщо $M = 32$, $f_N = 1,6$ Гц

2.13. Дискретне перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є (2.31), (2.32) не є локальним: щоб визначити комплексний спектр $S(\omega)$, варто проводити інтегрування в діапазоні $(-\infty, \infty)$, тобто функція $s(t)$ має бути заданою на всій нескінченній прямій t .

Під час роботи із часовими рядами аналізують дискретні вибірки $s(n \cdot \Delta t)$, де Δt – крок дискретизації. Це призводить до того, що спектр буде визначеним лише для частот, які не перевищують частоти Найквіста (див. формулу (2.77)). Поява частоти Найквіста є наслідком теореми Котельникова, згідно з якою функція може бути однозначно відтворена за дискретною вибіркою $s(n \cdot \Delta t)$, якщо максимальна частота в спектрі не перевищує

частоти Найквіста. У протилежному випадку під час відновлення функції $s(t)$ за часовим рядом виникатимуть неоднозначності.

У процесі розрахунку спектра на комп'ютері відбувається дискретизація не тільки самого сигналу $s(t)$, але й обчислюваної спектральної функції, тобто приходимо до поняття дискретного перетворення Фур'є. Отже, бажано мати певні уявлення про дискретне перетворення Фур'є [52].

Нехай маємо функцію $s(t)$, задану на інтервалі (для зручності, казатимемо про час) тривалістю T . Виконаємо періодичне, з періодом T , продовження функції $s(t)$. Тоді формули розкладу в ряд Фур'є неперервної періодичної функції $s(t)$ з періодом T мають вигляд

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_1 n t), \quad (2.90)$$

де

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-i\omega_1 n t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \exp(-i\omega_1 n t) dt, \quad (2.91)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \text{ – основна кругова частота.}$$

Інакше формулу (2.91) можна записати як скалярний добуток:

$$C_n = (s(t), \exp(i\omega_1 n t)). \quad (2.92)$$

Далі нехай маємо ряд із N числових значень функції $s(t)$ на основному відрізку $[0, T]$ із кроком дискретизації у часі Δt , тобто утворюємо вектор

$$\mathbf{s} = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1}\}. \quad (2.93)$$

Тоді основний період дискретної функції визначається як $N \cdot \Delta t$.

Знайдемо для такої дискретної функції ряд Фур'є. Для цього слід визначити дискретний аналог ортонормованої системи функцій $\exp(i\omega_1 n t)$ у формулі (2.92). Позначимо його як \mathbf{e}_n . Тоді шукані коефіцієнти визначатимуться скалярним добутком

$$C_n = (\mathbf{s}, \mathbf{e}_n). \quad (2.94)$$

Як же знайти \mathbf{e}_n ? Визначимо ці вектори як вибірку функції $\exp(i\omega_1 nt)$ з інтервалом $\frac{T}{N}$ у моменти часу $t_j = \frac{T}{N}j$, $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$:

$$\exp(i\omega_1 nt_j) = \exp\left(i\omega_1 n \frac{T}{N} j\right) = \exp\left(i \frac{2\pi}{T} n \frac{T}{N} j\right) = \exp\left(i \frac{2\pi}{N} nj\right). \quad (2.95)$$

Позначивши $\frac{2\pi}{N} = \Delta\omega$, маємо

$$\mathbf{e}_n = \left\{ 1, \exp(in \cdot \Delta\omega), \exp(in2 \cdot \Delta\omega), \dots, \dots, \exp(inj \cdot \Delta\omega), \dots, \exp(in(N-1)\Delta\omega) \right\}, \quad (2.96)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Множина векторів \mathbf{e}_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, утворює в N -вимірному просторі ортонормовану систему функцій (базис). Можна переконатися, що

$$(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left(i \frac{2\pi}{N} mj\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} nj\right) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (2.97)$$

Відтак вектор $\mathbf{s} = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1}\}$ можна розкласти по ортонормованому базису згідно з формулою

$$\mathbf{s} = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \mathbf{e}_n. \quad (2.98)$$

Коефіцієнти C_n визначаємо як скалярний добуток \mathbf{s} та \mathbf{e}_n :

$$C_n = (\mathbf{s}, \mathbf{e}_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} nj\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.99)$$

Це співвідношення називають *дискретним перетворенням Фур'є* (ДПФ) дискретної функції $\mathbf{s} = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1}\}$.

Існує і обернене дискретне перетворення Фур'є (ОДПФ). Перехід від дискретного спектра до часових відліків процесу $\mathbf{s} = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1}\}$ визначається такою формулою:

$$s_j = (\mathbf{s}, \mathbf{e}_n) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp\left(i \frac{2\pi}{N} nj\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.100)$$

Відмітимо основні властивості ДПФ.

1) Періодичність спектра з періодом N , тобто коефіцієнти Фур'є пов'язані співвідношенням $C_{N+n} = C_n$.

Переконаємося у цьому. Згідно з формулою (2.99)

$$\begin{aligned} C_{n+N} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} (n+N)j\right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} nj\right) \exp(-i2\pi j), \end{aligned} \quad (2.101)$$

але j є цілими числами, а отже $\exp(-i2\pi j) = 1$. Звідси маємо

$$C_{N+n} = C_n. \quad (2.102)$$

Із властивості періодичності слідує, що C_0, C_1, \dots, C_{N-1} – основні коефіцієнти Фур'є, отримані з N дискретних значень даної функції. Всі інші коефіцієнти є їхнім повторенням.

2) Симетрія спектра, а саме $C_{N-n} = C_{-n} = C_n^*$ (зірочка – знак комплексного спряження). Це слідує з того, що

$$\begin{aligned} C_{N-n} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} (N-n)j\right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} (-n)j\right) = C_{-n}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

До того ж, коли всі значення функції дійсні, комплексні коефіцієнти Фур'є з протилежними n є комплексно-спряженими, тобто $C_{-n} = C_n^*$. Отже маємо співвідношення

$$C_{N-n} = C_{-n} = C_n^*. \quad (2.104)$$

Ця рівність означає, що спектр дійсної функції є спряжено-симетричним відносно $n = N/2$. Переконаємося у цьому, роз-

глянувши пари симетричних, відносно $n = N/2$, коефіцієнтів C_n (див. формулу (2.99); скорочуючи запис, знак суми не пишемо):

для $n = \frac{N}{2} - 1$ маємо

$$\begin{aligned} & \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \left(\frac{N}{2} - 1\right) j\right) = \\ & = \exp(-i\pi j) \exp\left(i \frac{2\pi}{N} j\right) = (-1)^j \exp\left(i \frac{2\pi}{N} j\right), \end{aligned}$$

для $n = \frac{N}{2} + 1$ маємо

$$\begin{aligned} & \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \left(\frac{N}{2} + 1\right) j\right) = \\ & = \exp(-i\pi j) \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} j\right) = (-1)^j \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} j\right). \end{aligned}$$

Отже періодична дискретна функція породжує періодичний дискретний спектр, а періодичний дискретний спектр, відповідно, породжує періодичну дискретну функцію.

Дискретне перетворення Фур'є, що є по суті спектром дискретної періодичної функції з обмеженою смугою частот, дозволяє відновити задану неперервну періодичну функцію. Для цього переписемо формулу (2.100) у вигляді

$$s(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp\left(i \frac{2\pi}{T} n \left(\frac{T}{N} j\right)\right) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(i\omega_1 n \cdot t_j) \quad (2.105)$$

і перейдемо до неперервного часу, враховуючи властивість симетрії спектра (2.104):

$$s(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{N/2} C_n \exp(i\omega_1 n \cdot t) \right]. \quad (2.106)$$

Зрозуміло, що результат відновлення неперервної періодичної функції за допомогою ДПФ збігається з результатом, отриманим під час використання ряду Котельникова (2.76).

Сказане ілюструє рис. 2.7, на якому побудовано графіки відтвореної функції (2.88). Тут тонка лінія – графік функції $s(t)$,

відтворений за допомогою дискретного перетворення Фур'є; жирна лінія – функція, відтворена за допомогою ряду Котельникова. Вихідною інформацією, в обох варіантах, слугував той самий набір з N числових значень (2.89) функції $s(t)$ на відрізьку $[0, T_s]$ з кроком дискретизації у часі $\Delta t = T_s / N$: $N = 64$, $T_s = 10$ с. Як бачимо, на визначеному інтервалі часу тривалістю від 0 до $T_s = 10$ с два графіки збігаються, а поза цим інтервалом часу їхня поведінка різна (спробуйте пояснити чому?).

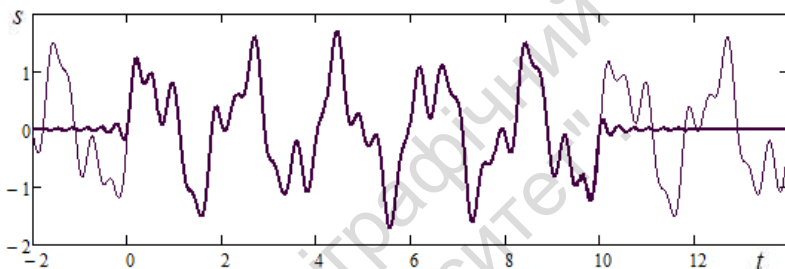


Рис. 2.7. Графік відтвореної функції $s(t)$ (формула (2.88)): тонка лінія – з використанням дискретного перетворення Фур'є; жирна лінія – за допомогою ряду Котельникова

Порівнюючи (2.99) і (2.100), можна сказати, що програма для ЕОМ буде однаковою¹, тільки для ДПФ вхідними даними є дискретні значення функції, а для ОДПФ – коефіцієнти Фур'є. У програмах ДПФ реалізовано у вигляді дуже економного у часі алгоритму, так званого *швидкого перетворення Фур'є* (ШПФ).

¹ Значимо: немає стандартної процедури обчислення швидкого перетворення Фур'є, у кожному математичному пакеті (Matlab, MathCad, Mathematica) використовують не тільки своє визначення прямого і оберненого перетворень, а й різні нормування. Треба на це зважати.

РОЗДІЛ 3

ФРАКТАЛИ В НЕЛІНІЙНІЙ ДИНАМІЦІ

Поява фрактальних об'єктів і фрактальної геометрії не відразу зацікавила представників природознавчих наук. Це зрозуміло, адже незвичні геометричні уявлення на початку сприймалися як абстракції, що позбавлені конкретного практичного змісту.

Із часом стало зрозуміло, що фрактальна геометрія не є лише математичною екзотикою, а відображає властивості реальних процесів і об'єктів. Суттєво вплинуло на інтерес до фрактальної геометрії відкриття детермінованого хаосу. Установлено, що у фазовому просторі атрактори динамічних систем із хаотичною динамікою є об'єктами зі складною, зазвичай, фрактальною геометрією. Фрактальну структуру можуть мати межі різних режимів у просторі параметрів динамічної системи.

Нині про фрактали накопичено багато знань, та в посібнику ми розглянемо лише елементи теорії фрактальних множин в об'ємі, який нам потрібен для опису властивостей динамічного хаосу. Введемо поняття фрактала, розглянемо кілька прикладів фрактальних об'єктів, обміркуємо природу фрактальності в динамічних системах, визначимо фрактальні розмірності граничних множин. Для детального ознайомлення з фракталами рекомендуємо літературу [11, 22, 33, 35, 43].

3.1. Поняття фрактала

1975 р. Мандельброт¹ увів поняття *фрактал* (яке походить від лат. *fractus*, що означає *дробовий, порізаний*). Згідно з нестрогим визначенням Мандельброта, *фракталом називають структуру, що складається із частин, які в якомусь сенсі подібні цілому*.

¹ Мандельброт Бенуа (1924–2010) – американський математик.

Наведене визначення відображає важливу характерну ознаку фрактальних об'єктів. Однак ні це визначення, ні більш строгі визначення, не дають повного уявлення про фрактали. На нашу думку, це та ситуація, коли починати знайомитися з поняттям потрібно не з його визначення, а з розгляду конкретного прикладу.

Давайте разом спробуємо побудувати геометричний об'єкт, який буде фракталом. Уявімо собі рівносторонній трикутник (рис. 3.1). Тепер подумки виконаємо деяку нескладну процедуру: видалимо на кожній стороні трикутника середню третину і замінимо її двома відрізками такої самої довжини, як показано на рис. 3.1. Отримаємо фігуру, що складається з 12 сторін. Повторимо цю операцію, замінюючи тепер середню третину кожної з 12 сторін двома відрізками відповідної довжини. Якщо цю процедуру повторювати знову і знову, то кількість деталей в утвореному контурі буде збільшуватися і збільшуватися, і процес можна продовжувати до нескінченності. Зображення набуває вигляду сніжинки з геометрично ідеальними обрисами. Воно відоме як *крива Коха*, на ім'я фон Коха¹, який уперше описав подібний феномен 1904 р.

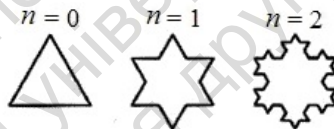


Рис. 3.1. Побудова сніжинки Коха

Процес побудови сніжинки Коха дозволяє усвідомити основну властивість фракталів, а саме, внутрішню подібність. Інша властивість, яка відразу звертає на себе увагу, полягає в тому, що фрактальна крива, в ідеалі, на будь-яких, навіть найменших масштабах, не зводиться до прямої лінії і є в загальному випадку геометрично нерегулярною, тобто для неї характерна зламаність. Очевидно, поняття дотичної в точці для такої кривої не існує. Справді, якщо ми направимо мікроскоп в якусь точку звич-

¹ Кох Нільс Фабіан Гельге фон (1870–1924) – шведський математик.

ної для нас диференційованої функції, то при збільшенні зображення побачимо пряму лінію, дотичну в даній точці.

Отже, можна сказати, що фракталами є геометричні об'єкти: лінії, поверхні, просторові тіла, які мають ламану форму і властивість *самоподібності*. Іншими словами, говорять про властивість *масштабної інваріантності* (від лат. *invariants* – незмінний) або *скейлінгу* (від англ. *scaling* – вимірювати, масштабувати).

Сніжинка Коха є прикладом побудови самоподібного фрактала, бо вона однаково сконструйована в будь-якому масштабі, тобто маленькі фрагменти фрактала повністю повторюють великі. Зрозуміло, що ця властивість характерна лише для *регулярних фракталів*.

Якщо замість детермінованого способу побудови в алгоритм їхнього створення внести деякий елемент випадковості, то виникнуть так звані *випадкові фрактали*. Дуже важливим прикладом випадкового фрактального об'єкта є траєкторія броунівської частинки. Графік кривої залежності координати броунівської частинки від часу також ніде не диференціюється. Основна їхня відмінність від регулярних фракталів полягає у тому, що властивість самоподібності справедлива лише після відповідного усереднення за всіма статистично незалежними реалізаціями об'єкта. Причому збільшена частина фрактала неточно ідентична початковому фрагменту, проте їхні статистичні характеристики збігаються.

Криву Коха, як уже зазначалося, побудовано більше 100 років тому. Вона й інші аналогічні конструкції були введені в математику, щоб показати, наскільки складними і незвичайними можуть бути такі поняття, як функція і крива. Вони справили дуже сильне враження на математиків свого часу, за що були прозвані математичними монстрами. Згодом почали з'являтися і моделі фізичних об'єктів, які мали властивість самоподібності. Однак це були окремі розрізнені приклади.

Накопичені знання про фрактали узагальнено і вперше представлено у книзі Мандельброта "Фрактали: форма, випадок, розмірність", що вийшла 1975 р. французькою мовою і 1977 р. англійською. У ній описано безліч математичних і фізичних прикладів фрактальних об'єктів. Друга книга Мандельброта,

що вийшла 1982 р., називалася "Фрактальна геометрія природи". Ця назва якнайкраще відображає реальну суть.

Фрактальна самоподібність присутня у багатьох реальних системах. Вона проявляється в геометрії дерев і русел річок, будові легень, розгалуженні кровеносних судин, динаміці серцевого ритму, зміні рівнів водних поверхонь, турбулентності тощо.

Якщо розглядати нейрони (нервові клітини) через мікроскоп із невеликим збільшенням, то можна чітко побачити клітини, що відходять від тіла нейрона, як асиметричні розгалужені відростки (дендрити). У подальшому збільшенні можна спостерігати ще менші відгалуження, що відходять від великих гілок. У ще більшому збільшенні виявляється новий рівень структури: відгалуження від відгалужень і т. д. На кожному рівні масштабу структура гілок нейрона подібна (хоча й не обов'язково ідентична, як у випадку ідеальних фракталів) структурам, що спостерігаються як у більших, так і у дрібніших масштабах.

Багато фракталоподібних утворень міститься у людському організмі, де вони відіграють важливу роль у підтримці нормального функціонування організму. Наприклад, фракталоподібна структура артерій і вен здійснює рівномірне кровопостачання різних ділянок органів, фрактальні відгалуження та складки значно збільшують поверхню всмоктування в кишечнику. Справді, уявіть собі всю складність системи кровообігу людини, що складається з великої кількості капілярів і судин, завдяки яким кров поступає до кожної клітинки людського тіла. Уявіть, як хитромудро влаштовані легені, нирки, за своєю структурою вони нагадують дерева з гіллястою кроною.

Послідовні злами, вигини та розгалуження дозволяють лінійній структурі (напр., криві Пеано¹ [11]) "майже" заповнити певну область площини. Так само лінійна система артерій майже суцільно пронизує тривимірний організм, забезпечуючи його безперервне кровопостачання. Тут *фрактал постає як спосіб організувати взаємодію просторів різної розмірності.*

Мабуть можна стверджувати, що реальні фрактальні структури є слідом хаотичних процесів. Де у природі, в результаті

¹ Пеано Джузеппе (1858–1932) – італійський математик.

хаотичного процесу, не формувався б, той чи інший об'єкт (берег моря, атмосфера, геологічний розлом тощо), скрізь із великою імовірністю можна виявити фрактали (у контурі берегової лінії, у формі хмар, у конфігурації скельних утворень).

Спостереження зображень фракталів заспокоює і викликає почуття полегшення й упевненості. Так само діє сталий ритм церковного богослужіння або рефрен колискової пісні. Музичні твори в основі також фрактальні, оскільки правила їхнього створення аналогічні правилам, які за допомогою повторювань дозволяють творити фрактальні образи.

Отже, як влучно відмічено Мандельбротом, природа любить фрактали не менше (якщо не більше) регулярних форм. На кожну гладку криву або поверхню в навколишньому світі припадає багато (щоб не сказати дуже багато) нерегулярних, а нерідко фрактальних, кривих і поверхонь, наділених найтоншою структурою в різноманітних масштабах.

Звичайно, для реального природного фрактального об'єкта існує певний мінімальний масштаб завдовжки l_{\min} такий, що на відстанях $l \approx l_{\min}$ його основна властивість – самоподібність – зникає. Крім того, на великих масштабах завдовжки $l > l_{\max}$, де l_{\max} – характерний геометричний розмір об'єктів, властивість самоподібності також порушується. Тому властивості природних фракталів розглядаються лише на масштабах завдовжки l , що задовольняють співвідношення $l_{\min} < l < l_{\max}$.

Повернемося до сніжинки Коха (рис. 3.1) і поглянемо на неї як на острів із дивною береговою лінією. Обчислимо довжину берегової лінії острова Коха. На n -му кроці побудови довжина відрізочків, з яких складається лінія Коха, становить $1/3^n$, а їхня кількість – $3 \cdot 4^n$. Тоді довжина берегової лінії на n -му кроці буде $3(4/3)^n$. При $n \rightarrow \infty$ довжина берегової лінії прямує до нескінченності. Отже, на відміну від гладкої кривої, довжина не може бути характерною величиною для фрактальної кривої.

3.2. Розмірності множини

Представлені результати вимірювання довжини берегової лінії острова Коха здаються абсолютно несподіваними. Справді, чим меншою є довжина лінійки, тим більша виміряна довжина узбережжя. Найпростіша процедура вимірювання довжини виявляється не такою простою, як здається спочатку. Виникає питання: яка розмірність може бути у такої лінії?

Одна з останніх статей Пуанкаре [37, с. 430–449], що опублікована у збірнику "Останні думки", називалася "Чому простір має три виміри". У цій статті Пуанкаре розмірковує над питанням, що таке розмірність. Наведемо коротко його міркування.

Розглянемо замкнену криву, так Пуанкаре називав неперервність одного виміру. Якщо ми відмітимо на цій кривій дві будь-які точки, через які ми заборонимо собі переступати, то крива виявиться розділеною на дві частини і неможливо буде перейти від однієї в іншу, залишаючись на кривій і не переходячи через заборонені точки (точка є нульвимірний об'єкт). Тому потрапити з однієї в іншу частину кривої можна лише, вийшовши з одновимірного простору, тобто ввівши поняття двовимірного простору. Далі візьмемо замкнену поверхню (напр., сферу), яка утворює за термінологією Пуанкаре неперервність двох вимірів. Якщо відмітити на ній заборонені точки (нуль-виміри), то їх завжди можна обійти і поверхня не розділиться на дві незв'язані частини. Проте, якщо провести на поверхні замкнену криву (одновимірну) і розглядати її як переріз, який заборонено перетинати мешканцям двовимірності, то наша поверхня буде розділена на дві частини. Тепер, щоб потрапити з однієї частини в іншу, треба вводити ще один вимір (третій). Переходячи до нашого простору, бачимо, що його не можна розділити на частини, заборонивши переступати будь-які точки або замкнені криві, оскільки їх завжди можна обійти. Тут слід заборонити переступати замкнені поверхні (на зразок сфер), тоді тривимірний простір розпадається на частини. Але із цим ми стикаємося кожний день: нам необхідно увійти всередину будівлі або вийти з неї. Отже, ми живемо у світі, де межами є двовимірні замкнені поверхні, які ми не можемо долати в межах нашого простору,

не порушуючи цілісність замкнених поверхонь. Звідси робимо висновок: ми живемо у тривимірному просторі.

Одновимірність часу природно впливає із самого способу його вимірювання: як упорядкованої послідовності подій.

Спробуємо, не вдаючись у математичні тонкощі, осмислити важливе поняття: розмірність множини. Поняття розмірності n -вимірного евклідового простору R^n (інакше, евклідова розмірність) знайоме нам зі школи. Звичайно, вводять *евклідову розмірність* D_e як мінімальну кількість параметрів, необхідних для опису положення точки у просторі R^n . Звісно $D_e = n$.

У наших задачах евклідова розмірність являє собою *розмірність фазового простору* (n) і відповідає кількості змінних, які визначають стан динамічної системи. Якщо математичну модель динамічної системи задано у вигляді системи диференціальних рівнянь (1.1), то n визначається кількістю цих рівнянь.

Щоб характеризувати деяку множину M у просторі R^n , можна скористатися *топологічною розмірністю* D_T . Вона дорівнює мінімальній кількості змінних, які необхідно задати, щоб визначити положення точки на множині M . Будується топологічна розмірність за індукцією. Порожній множині приписується розмірність $D_T = -1$. Розмірність будь-якої непорожньої множини відмінна від -1 і визначається таким чином: якщо деяку множину можна розділити на незв'язані одна з одною частини за допомогою множини розмірності D_T , то її топологічна розмірність дорівнює $D_T + 1$. Наприклад, точка має розмірність $D_T = 0$, якщо вважати, що дві точки розділені порожньою множиною. Зчислення множини точок також має розмірність $D_T = 0$. Пряма має розмірність $D_T = 1$, оскільки її можна розділити точкою на дві неперетинні частини; площину можна розділити лінією, тому розмірність площини $D_T = 2$. Зрозуміло, що топологічна розмірність сфери дорівнює двом, кулі – трьом і т. д. Із самого визначення топологічної розмірності випливає, що вона може бути тільки цілим числом. Очевидно, топологічна розмірність n -вимірного евклідового простору R^n така: $D_T = n$. Величина D_T (як і D_e) набуває лише цілих невід'ємних значень.

Мандельброт звернув увагу на те, що думка про розмірність як про внутрішню характеристику тіла, поверхні або кривої, не-

правильна. Насправді розмірність об'єкта залежить від спостерігача, точніше від зв'язку об'єкта із зовнішнім світом.

Наведемо наочний приклад [13, с. 11]. Уявімо, що ми розглядаємо клубок ниток. Якщо відстань, що відокремлює нас від клубка, досить велика, то клубок ми бачимо як точку, позбавлену будь-якої внутрішньої структури. Перед нами геометричний об'єкт із топологічною розмірністю $D_T = 0$. Наблизившись до клубка на деяку відстань, ми бачитимемо його як плоский диск, тобто як геометричний об'єкт розмірності $D_T = 2$. Підійшовши до клубка ще на кілька кроків, ми побачимо, що він складається з ниток. Тепер топологічна розмірність клубка стане $D_T = 1$. Нарешті, якби наші очі могли розрізняти окремі атоми, то, проникнувши всередину нитки, ми побачили б окремі точки; клубок розсипався на атоми, став геометричним об'єктом розмірності $D_T = 0$.

Отже, якщо розмірність залежить від конкретних умов, то її можна вибирати по-різному! Можна сказати, що труднощі визначення поняття розмірності у тому, що намічений шлях не єдиний. Можна сформулювати й інші, настільки ж природні, підходи до такого визначення.

Математики накопичили досить багато різних визначень розмірності. Раціональний вибір вказаного визначення залежить від того, для чого ми хочемо його використовувати. Ситуація з вибором розмірності подібна до ситуації, коли вам задають питання [13, с. 11]: скільки пальців на руках $3+7$ чи $2+8$. Доки ми не вирішили вдягти рукавички, будь-яку відповідь можна вважати однаково правильною. Але щойно рукавички вдягнено, то відповідь на питання стає однозначною: $5+5$.

Розглянемо і ми варіант визначення розмірності геометричних об'єктів. Проте на початку введемо поняття міри множини.

Назвемо *мірою* на R^n функцію μ , яка надає кожній підмножині $A \subset R^n$ число $\mu(A) \in [0, \infty)$ таке, що

- 1) міра порожньої множини \emptyset дорівнює нулю, $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2) $\mu(A) \leq \mu(B)$, якщо $A \subseteq B$;

3) якщо B_1, B_2, \dots – зліченна або скінченна послідовність множин, то $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$; рівність справедлива у випадку, коли B_i – неперетинні множини, тобто $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Нехай треба визначити об'єм (міру) приміщення. Для цього покриємо його множиною стандартних одиничних кубиків. Зауважте, що в нашому прикладі, одиничні кубики межують ребрами, але не мають спільних об'ємів. Тоді загальна міра дорівнює сумі мір кубиків.

Міркуючи далі, можна дійти до такого визначення розмірності. Справді, якщо тіло можна покрити $N(\delta)$ непорожніми і неперетинними кубиками розміром δ , то його об'єм $V = N(\delta) \delta^D$. Об'єм – величина скінченна і показник D можна вважати *розмірністю*. Що робити, якщо ми не знаємо її заздалегідь для довільної множини, структура якої не така проста, як у евклідових об'єктів? Спробуємо знайти розмірність, використовуючи наш вираз $V = N(\delta) \delta^D$. А саме, перебиратимемо пробні значення D , домагаючись того, щоб V було скінченним у разі зменшення δ , тобто

$$0 < \lim_{\delta \rightarrow 0} [N(\delta) \delta^D] < \infty. \quad (3.1)$$

Дамо коментар до формули (3.1). Тут приховано одну ідею, яку ми використовуватимемо в подальшому. Щоб зрозуміти її, розглянемо найпростіший приклад. Нехай наша множина – це фрагмент лінії завдовжки L . Покриємо її кульками, що не перетинаються, діаметром δ . Очевидно, що для цього нам знадобиться $N(\delta) = L/\delta$ кульок. Тоді наша формула для об'єму набуває вигляду

$$V = \frac{L}{\delta} \delta^D = L \delta^{D-1}.$$

Бачимо, що для $D < 1$ об'єм (міра) прямує до нескінченності у разі зменшення δ . З іншого боку, об'єм прямує до нуля, якщо $D > 1$. Правильне значення $D = 1$ визначається точкою переходу міри від нескінченного значення до нульового! Цей факт є вирішальним для визначення багатьох корисних величин.

З виразу $V = N(\delta) \delta^D$ маємо асимптотичне співвідношення між кількістю елементів покриття (напр., кубиками) множини $N(\delta)$ і характерним розміром елемента покриття δ , а саме

$$N(\delta) \sim \delta^{-D}. \quad (3.2)$$

Тут необхідно навести одне пояснення. Згідно з проведеними міркуваннями під *фрактальною розмірністю* розуміємо показник степеня D у співвідношенні (3.2). Але число N – безрозмірна величина, тому воно має виражатися у вигляді безрозмірного відношення

$$N(\delta) \sim \left(\frac{L}{\delta}\right)^D, \quad (3.3)$$

де L – характерний розмір множини. Це пов'язано з тим, що у фрактала немає свого виділеного масштабу, окрім власного розміру. Справді, адже самоподібність і означає, що у структурі фрактала відсутні будь-які характерні розміри. Тому фрактальна розмірність D з одного боку показує, як зі зменшенням масштабу δ зростає кількість елементів, необхідних для покриття цієї фрактальної множини. З іншого боку, цей показник степеня показує, як ця сама кількість зростає зі збільшенням розміру самого фрактала.

З формули (3.2) визначимо розмірність за допомогою границі

$$D = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \delta} \quad (3.4)$$

за припущення, що границя існує. Величину D називають *ємністю* множини і це не обов'язково ціле число! Визначення ємності фігурує в основі більшості числових методів оцінювання розмірності.

Недолік визначення *фрактальної розмірності* як *ємності* полягає у тому, що покриття фрактальної множини проводиться шаблонами (кажуть також комірками; це можуть бути кульки, кубики, різні множини) однакового розміру і їхній підрахунок є досить "грубим" засобом вимірювання. "Тонший" засіб можна отримати, якщо множина покривається комірками довільної форми і розміру, з тим обмеженням, що діаметр окремої комірки не перевищує заданої величини δ . Строге визначення такої процедури призводить до *розмірності Гаусдорфа*¹ D_H [43].

¹ Гаусдорф Фелікс (1868–1942) – німецький математик.

Визначення розмірності Гаусдорфа має важливе теоретичне значення. Але на практиці ним не користуються з двох причин: по-перше, безпосереднє обчислення D_H , навіть за допомогою ЕОМ, неможливе, а по-друге, у важливих для практики "хороших" фракталів розмірність Гаусдорфа і ємність збігаються.

Топологічна розмірність, ємність і розмірність Гаусдорфа відносяться до самого об'єкта, який розглядається, а евклідова розмірність – до простору, в якому розміщено об'єкт. Розмірність Гаусдорфа, обчислена для зліченної кількості точок, відрізка лінії, частини поверхні, скінченного об'єму, дорівнює їхній топологічній розмірності.

Застосуємо описаний підхід до визначення розмірності берегової лінії острова Коха. На n -му кроці побудови довжина комірок становить $\delta = 1/3^n$, а їхня кількість $N(\delta) = 3 \cdot 4^n$. Тоді згідно з (3.2) фрактальна розмірність лінії Коха

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618.$$

Як бачимо, фрактальна розмірність лінії Коха виявилася нецілою величиною, причому більшою за топологічну розмірність лінії $D_T = 1$ і меншою за евклідову розмірність простору $D_e = 2$ (у цьому випадку площини), в якому міститься лінія Коха. Той факт, що ємність лінії Коха більша одиниці, говорить про те, що швидкість зростання кількості комірок, які покривають лінію Коха у випадку зменшення розміру комірки, більша аніж $1/\delta$, як це виконується для гладкої кривої. Фактично числове значення ємності характеризує ступінь нерегулярності кривої Коха.

Розглянемо ще один приклад регулярного фрактала. Ідеться про *множину Кантора*¹. Фрактальні властивості множини Кантора мають велике значення, оскільки багато відомих фракталів мають подібні властивості.

Схема його побудови така (рис. 3.2). Вибирають відрізок одиничної довжини (йому приписують номер $n = 0$). Потім його ділять на три частини і виймають середню третину (виключаючи кінці) одиничного відрізка, тобто видаляють інтервал $(1/3, 2/3)$. На рис. 3.2 це відповідає $n = 1$. На наступному ($n = 2$) і всіх

¹ Кантор Георг (1845–1918) – німецький математик.

інших етапах виймають середню третину (виключаючи кінці) всіх відрізків поточного рівня. І так триває до нескінченності. Отримана гранична множина і називається множиною Кантора.

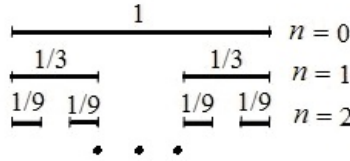


Рис. 3.2. Побудова множини Кантора

Задача. Переконайтеся у тому, що сумарна довжина інтервалів, видалених за побудови множини Кантора, точно дорівнює 1.

Порівнюючи множину Кантора з відрізком $[0,1]$, отримали дивовижний результат, суть якого в тому, що потужності цих множин рівні. Для доведення вказаного твердження встановимо взаємно однозначну відповідність між точками множини Кантора і точками відрізка $[0,1]$. Для цього нам буде потрібно розглянути двійкове і трійкове представлення точок відрізка $[0,1]$. Помічаємо, що точка потрапляє до множини Кантора тоді і тільки тоді, коли в її трійковому поданні відсутні одиниці, тобто коли в ньому наявні тільки нулі і двійки. Тоді кожному елементу множини Кантора (напр., $0,020022020\dots$) можна поставити у відповідність точку відрізка $[0,1]$, записану у двійковій системі. Для цього слід замінити всі двійки в трійковому поданні точки з множини Кантора на одиниці (у цьому прикладі, $0,010011010\dots$). Отримане таким чином двійкове подання визначає деяке дійсне число з відрізка $[0,1]$. Цим і встановлюється необхідна взаємно однозначна відповідність.

Обчислимо фрактальну розмірність множини Кантора. На n -му кроці побудови маємо 2^n відрізків завдовжки $1/3^n$ кожний. Утворюємо покриття множини Кантора комірками, розмір яких дорівнює довжині відрізка на відповідному кроці. Тоді $N(\delta)$ на n -му кроці має значення 2^n , а як δ – значення $1/3^n$. Умова $\delta \rightarrow 0$ відповідає границі $n \rightarrow \infty$, тому згідно з (3.2) ємність множини Кантора

$$D = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln(1/3)^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309.$$

Вона виявилася не цілим числом, причому більшим за топологічну розмірність $D_T = 0$ елементів (точок) множини Кантора і меншим за евклідову розмірність $D_e = 1$ відрізка $[0,1]$, як носія множини Кантора.

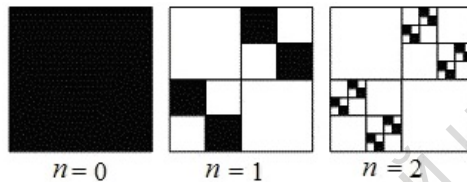


Рис. 3.3. Побудова множини Кантора з $D = 1$ [22]

Часто будь-яку незв'язну фрактальну множину точок називають множиною Кантора. Нехай маємо квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці. На кожному кроці побудови наявні квадрати замінюються чотирма меншими, як показано на рис. 3.3. Гранична множина такої побудови – самоподібний фрактал. Міркуючи аналогічно, зазначаємо що на n -му кроці маємо $N(\delta) = 4^n$ квадратиків зі стороною $\delta = 1/4^n$. Тоді ємність такої множини $D = 1$. Загалом для фракталів характерна наявність нецілої розмірності, однак, як бачимо, можлива і цілочислова розмірність.

Фрактальна розмірність D відображає щільність заповнення фрактальним об'єктом області простору, в якому він розміщений: чим ближче значення D до D_e , тим вища щільність. Чим більше відрізняються D і D_e ($D < D_e$), тим більш "дірявим" є фрактал. Зауважимо: з рівності фрактальних розмірностей не слідує рівність їхніх структур.

Узагальнюючи викладене на основі описаних прикладів, наведемо більш строгі визначення фрактала, дані Мандельбротом: *"Фракталом називається множина, розмірність Гаусдорфа якої строго більша за її топологічну розмірність"*.

На закінчення підрозділу відмітимо ще одну загальну властивість самоподібності фракталів. Самоподібність означає, що в структурі фрактала відсутні будь-які характерні розміри. За відсутності характерних розмірів система повинна мати однакові властивості у всіх масштабах, оскільки жодна область

масштабів не виділена порівняно з іншими. Тому самоподібність інакше називають масштабною інваріантністю.

Самоподібність (або масштабна інваріантність) означає, що будь-яка характеристика фрактала у вигляді певної функціональної залежності $Q(l)$, при зміні величини l у деяку кількість разів η , зберігається, з'являється лише константа у вигляді множника. Математичне співвідношення, що виражає цю властивість, можна записати у вигляді

$$Q(\eta l) = \eta^{D_0} Q(l). \quad (3.5)$$

Розглядаючи це рівняння як функціональне рівняння для функції $Q(l)$, отримуємо

$$Q(l) \sim l^{D_0}, \quad (3.6)$$

тобто степеневу залежність.

Експоненціальна залежність $g(x) = \exp(x/x_0)$ такої властивості не має (щоб показник експоненти був безрозмірним, до нього повинен входити характерний масштаб x_0).

Отже, *самоподібність фракталів призводить до того, що їхні властивості описуються степеневими законами.*

Можна стверджувати, що наявність степеневого закону (3.2), є невичерпним джерелом створення самоподібних структур, зокрема і фрактальних множин.

З приводу своєрідної унікальності степеневого закону наведемо цитату з книги [18, с. 56–57]. Часто ставлять таке "недоречне" запитання: "Чому слід серйозно ставитися до розв'язку однієї, нехай навіть дуже гарної задачі, в якій нелінійні залежності мають абсолютно конкретний вигляд? Адже степеневі функції – це крапля в океані всіх можливих нелінійностей". І це справді так. Більше того, це питання є дуже загальним. Багато фундаментальних законів визначаються степеневими нелінійностями. Закон всесвітнього тяжіння, закон Кулона та інші, інші, інші. Якби тяжіння залежало від відстані не за законом обернених квадратів, то орбіти планет Сонячної системи були б незамкнені. Дослідники так званого антропного принципу встановили: щоб у Всесвіті могла з'явитися людина, світові константи мали бути підігнані дуже точно. Але степеневі залежності у фундаментальних

законах природи видаються ще важливішими. Чому ж нашому світу так пощастило? Загалом на це питання немає гарної відповіді.

Для фізичних застосувань визначення (3.2) не підходить. Фрактальні властивості реальних об'єктів, як ми вже зазначали, проявляються на масштабах, які перевищують деяку характерну величину. Тому перехід до границі, необхідний згідно з формальним визначенням, неможливий. Типовий фізичний підхід полягає не у знаходженні границі (3.2), а в побудові графіка залежності $\log N(\delta)$ від $\log \delta$ (див. формулу (3.1)). Кут нахилу прямої, яку отримуємо під час побудови, визначає ємність D [43].

3.3. Гельдерова регулярність функції

Перш ніж вивчати характер розподілу міри на деякій множині, звернімося до класу неперервних однозначних функцій, у яких одному значенню аргументу відповідає одне значення функції. Ейлер розумів неперервну функцію як криву, накреслену вільним рухом руки. Рух кривої від точки до точки може бути різним або, в іншому разі, говорять про варіації функції. У загальному випадку варіації можуть бути випадковими чи цілком упорядкованими. Вони не порушують неперервності, але пов'язані з *регулярністю* кривої. Для фрактальних кривих характерна сильна нерегулярність, яка може істотно відрізнитися для різних ділянок кривої.

Для оцінювання регулярності функції можна застосувати прийом, що використаний у попередньому підрозділі для введення поняття фрактальна розмірність.

Отже, у загальному випадку, ми досліджуємо поведінку приростів функції Δf залежно від зміни аргументу Δx . Напевно можна виділити функції, для яких відношення $|\Delta f|/|\Delta x| \leq A$, тобто є рівномірно обмеженим сталою величиною A , у досить малому околі точки x . Можна уявити собі функції, які надмірно "гостро" реагують на зміни аргументу, так що відношення $|\Delta f|/|\Delta x|$ необмежено зростає. З іншого боку можна уявити функції, які "стійкі" до зміни аргументу, так що $|\Delta f|/|\Delta x| \rightarrow 0$.

Можна сподіватися, однак, що в багатьох випадках є обмеженням відношення $|\Delta f|/|\Delta x|^\alpha \leq A$. Причому "правильне" значення α визначається як критична точка таких значень β , для яких наше відношення $|\Delta f|/|\Delta x|^\beta$ прагне до нуля, якщо $\beta < \alpha$, і до нескінченності, коли $\beta > \alpha$. Таке значення α називають *показником Гельдера*¹ регулярності функції. З визначення зрозуміло, що цей показник може змінюватися від точки до точки.

Задача. Переконайтеся у тому, що для функції $f(x) = x^{1/3}$ на відрізку $[0,1]$ маємо $\alpha = 1/3$ в точці $x=0$, а у всіх інших точках $\alpha = 1$.

Дамо більш строгі визначення, придатні для будь-якої функції. Нехай функція $f(x)$ у точці $x_0 \in n$ разів диференційованою, а $(n+1)$ -ї похідної немає. Тоді $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора до степеня n включно. Позначимо отриманий ряд – поліном степеня n – як $P_n(x)$. Показником Гельдера в точці x_0 називають найбільше значення α , за якого виконується нерівність

$$|f(x) - P_n(x - x_0)| \leq A|x - x_0|^\alpha. \quad (3.7)$$

Тоді в околі точки x_0 функцію $f(x)$ можна представити як

$$f(x) = P_n(x) + A|x - x_0|^{\alpha(x_0)} = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + A|x - x_0|^{\alpha(x_0)}, \quad (3.8)$$

тобто у вигляді суми регулярної компоненти (полінома P_n) і доданка, який визначає нерегулярну поведінку і характеризується нецілим значенням $\alpha(x_0)$. Тут

$$c_0 = f(x_0), \quad c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big|_{x=x_0}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3.9)$$

Отже, аналіз регулярності зводиться до послідовного віднімання поліномів та оцінювання залишку. У загальному випадку, коли $n \leq \alpha \leq n+1$, функція $f(x)$ у точці x_0 має n похідних, та її $(n+1)$ -ша похідна не існує (не обмежена).

¹ Гельдер Отто Людвіг (1859–1937) – німецький математик.

Зазначимо, що чим більше α , тим регулярнішою (більш гладкою) є функція $f(x)$. Інтегрування цієї функції збільшує значення α на 1, а диференціювання – зменшує на 1.

Задача. Визначте поточкові значення показника Гельдера для функції $f(x) = x^{4/3}$ на відрізку $[0,1]$.

3.4. Приклади фрактальних функцій

Легко вловити зв'язок між кривою Коха і прикладами неперервних функцій, які ніде не диференціюються. Такі функції побудовано Веєрштрассом¹ і його послідовниками.

Розглянемо, наприклад, функцію Веєрштрасса, що задається у вигляді збіжного ряду [27]:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (3.10)$$

де $0 < b < 1$, $ab > 1$. Диференціюємо ряд (3.10), у результаті отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n \sin(a^n \pi x)$, який не збігається, а отже функція (3.10) не диференціюється в жодній точці.

Якісно зрозуміти причину її недиференційованості можна з таких міркувань. Згідно з (3.10) для побудови $f(x)$ спочатку беруть звичайну гладку функцію $f_1 = b \cos(a\pi x)$. Потім на цю гладку функцію накладають "брижі" $f_2 = b^2 \cos(a^2 \pi x)$, що мають меншу амплітуду і більшу частоту, ніж $f_1(x)$. Потім додають ще дрібніші й густіші "брижі" $f_3 = b^3 \cos(a^3 \pi x)$ і т. д. У результаті виникає нескінченно ламана крива.

Графік цієї функції є масштабно-інваріантною (тобто фрактальною) кривою, що можна показати аналітично.

¹ Веєрштрасс Карл Теодор Вільгельм (1815–1887) – німецький математик.

Справді,

$$\begin{aligned}
 f(ax) &= \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^{n+1}\pi x) = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} b^{n+1} \cos(a^{n+1}\pi x) = \\
 &= \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x) = \frac{1}{b} f(x).
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Звідси випливає, що якщо ділянку кривої $f(x)$ на відріжку $\left[0, \frac{1}{a}\right]$ розтягнути в a разів по осі x і b^{-1} разів по осі y , то матимемо початкову криву на ділянці $[0,1]$. Оскільки коефіцієнти розтягування по осях x і y неоднакові, то функцію $f(x)$ називають, на відміну від кривої Коха, не самоподібною, а самоафінною (надалі, просто говоритимемо про самоподібність).

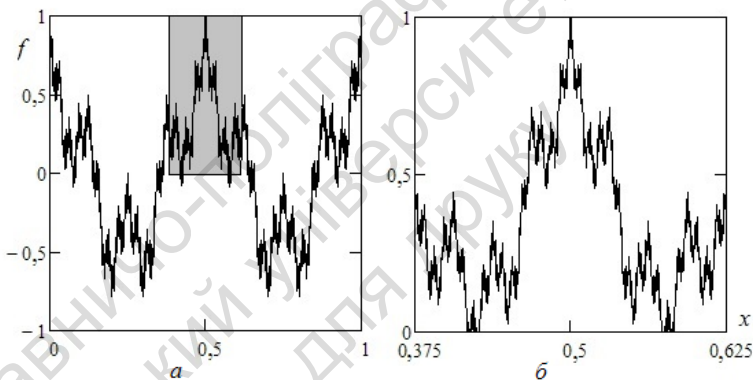


Рис. 3.4. Функція Веєрштраса ($a = 4, b = 0,5$):
 a – якщо $0 \leq x \leq 1$, b – якщо $0,375 \leq x \leq 0,625$

Графік функції Веєрштраса при $a = 4, b = 0,5$ показано на рис. 3.4. Побудовані криві ілюструють властивість самоподібності. На рис. 3.4, a графік $f(x)$ зображено для $0 \leq x \leq 1$. Розглянемо частину кривої, виділену на рис. 3.4, a прямокутником. Ця частина в $1/b$ разів менша по вертикалі і в a разів вужча по горизонталі ніж розмір графіка. Якщо цю область збільшити до по-

чаткового розміру графіка, ми побачимо майже точно початкову криву (рис. 3.4, б). Повторюючи побудову, можна переконатися, що крива відтворюється на будь-якому як завгодно малому масштабі. Отже, графік функції Веєрштрасса самоподібний: при розтягуванні по абсцисі в a разів і в $1/b$ разів по ординаті він інваріантний.

Крім функції (3.10), існує багато інших функцій, що мають аналогічні властивості самоподібності і недиференційованості. Часто такі функції можна записати як

$$\Psi(x) = \sum_n b^n \psi(a^n x), \quad (3.12)$$

де $\psi(x)$ – деяка неперервна функція.

Як другий приклад фрактальних функцій наведемо функцію Веєрштрасса – Мандельброта [43]:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(b^k x)}{b^{(2-d)k}}, \quad (3.13)$$

тут параметр d набуває значення в діапазоні $1 < d < 2$. Функція Веєрштрасса – Мандельброта неперервна, але не диференційована в жодній точці. Вважають [43], що ємність цієї функції приблизно дорівнює значенню параметра d .

3.5. Що таке мультифрактал?

Розглянуті вище приклади регулярних фракталів визначаються суто геометричними параметрами. Надамо їм певних статистичних характеристик, що наблизить побудовані моделі до реальних об'єктів, для яких характерною рисою є наявність розподілу міри фізичних (напр., маса, заряд) або будь-яких інших величин на геометричному носії. (Нагадаємо, що *міра* – це числова функція, яка ставить у відповідність кожній множині деяке невід'ємне число.)

Для прикладу, звернемося до побудови, так званого, *мультипликативного процесу*, який породжує розподіл міри на одиничному відрізьку (детальніше див. [11]). Цей процес широко використовують, адже його властивості легко піддаються теоретичному аналізу.

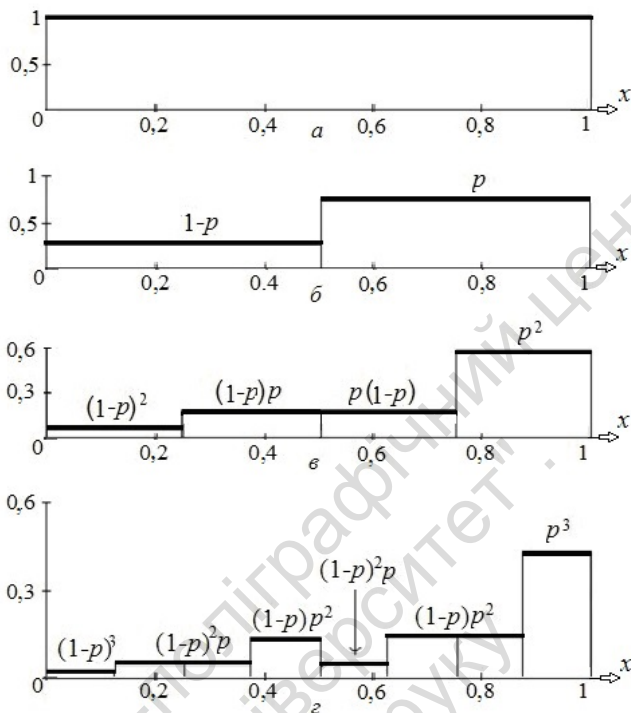


Рис. 3.5. Перші кроки побудови мультифрактала

Отже, нехай на нульовому кроці (рис. 3.5, *a*) маємо одиничний відрізок, на якому рівномірно розподілена міра $M = 1$. Розмірність одиничного відрізка, як носія міри, $D = 1$. На першому кроці маємо два відрізки (рис. 3.5, *б*). Нехай на правому відрізку залишається частина від повної міри, яку позначимо p , а на лівому $(1 - p)$. Надалі кожний із відрізків ділимо на два у тій самій пропорції розподілу міри. На n -му кроці матимемо $N = 2^n$ відрізків, які перенумеруємо послідовно індексом $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Якщо $n \rightarrow \infty$, отримуємо самоафінний розподіл міри, оскільки вздовж напрямку осі x відрізки кожного разу діляться навпіл (тобто маємо коефіцієнт подібності $1/2$), а міра розподіляється з коефіцієнтом подібності p для правих половин відрізків і з коефіцієнтом подібності $(1 - p)$ – для лівих половин.

Послідовність, згідно з якою точка x виявляється то у правій, то у лівій половині відрізка, можна зафіксувати у двійковому коді числа x , оскільки потрапляння в ліву половину означає появу нуля у двійковому коді, а попадання у праву половину означає появу одиниці.

На n -му кроці міра окремого відрізка дорівнюватиме $p^k (1-p)^{n-k}$, де k – кількість одиниць у двійковому коді. Величина k набуває значень $0, 1, 2, \dots, n$, визначаючи тим самим усе різноманіття міри на відрізках n -го кроку побудови алгоритму мультиплікативного процесу.

Кількість відрізків міри $p^k (1-p)^{n-k}$ визначається кількістю комбінацій із n по k , а саме $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Наприклад, на шостому кроці ($n=6$) при $k=2$ міру $p^2 (1-p)^4$ мають $C_6^2 = 15$ відрізків завдовжки 2^{-6} . Їхнє розміщення на носії міри буде дуже неупорядкованим.

Побудований розподіл міри є прикладом *неоднорідного фрактала*. Під словом "неоднорідний" розуміємо нерівномірний розподіл міри на носії міри. Подібні неоднорідні фрактали називають *мультифракталами*. Мультифрактали принципово мають певні статистичні властивості, урахування яких і робить їх неоднорідними структурами.

Незважаючи на нерівномірність розподілу міри по фракталу, його фрактальна розмірність залишилася при цьому незмінною, а саме $D = 1$. Справді, покриття множини все дрібнішими шаблонами можна здійснити таким самим чином, як і в разі однорідного розподілу міри на нульовому кроці. Такий збіг змушує нас задуматися над пошуком нових кількісних характеристик, які дозволили б відрізнити неоднорідний розподіл міри на множині від однорідного.

Слід сказати, що мультифрактали важливі тому, що саме вони, зазвичай, зустрічаються у природі, тоді як прості самоподібні об'єкти є ідеалізацією реальних явищ. Важливими представниками мультифракталів є сигнали, які реєструють у натурних експериментах (напр., сигнали біологічного походження).

3.6. Мультифрактальний спектр міри

Виконаємо певні узагальнення. Нехай на деякій множині S задано розподіл міри M , наприклад, розподіл маси або заряду. Щодо деякої неперервної функції, різницю функції у двох сусідніх точках можна розуміти як міру "осциляції" функції на малому інтервалі. Вважатимемо, що міра $M(S) = 1$, що досягається завдяки нормуванню. Задана таким чином міра визначає відносне наповнення деякої комірки на множині, або, іншими словами, імовірність заповнення комірки. Таку міру називають *нормалізованою або ймовірнісною мірою*.

У загальному випадку, міра як розподіл "маси" в D_e -вимірному евклідовому просторі, може бути неоднорідною (під "масою" розуміємо будь-яку фізичну або іншу величину). Вона може концентруватися в окремих точках, інтервалах, площинах тощо. При цьому її густина може змінюватися випадковим чином.

Покриємо множину S елементами покриття (шаблонами). Нехай $\mu_x(\delta)$ – кількість маси в шаблоні розміром δ із центром у точці x . Можливо, що її густина $\rho = \Delta\mu / \Delta\delta$, де $\Delta\mu = \mu_x(\delta + \Delta\delta) - \mu_x(\delta)$, не обмежена при $\Delta\delta \rightarrow 0$. Таку міру називають *сингулярною з показником сингулярності* (інакше, *показником Гельдера*) $\alpha(x)$. Величина α визначається двома, уже нам знайомими, умовами:

$$\Delta\mu / |\Delta\delta|^\beta = 0, \text{ якщо } \beta < \alpha, \text{ і } \Delta\mu / |\Delta\delta|^\beta = +\infty, \text{ якщо } \beta > \alpha.$$

У різних ситуаціях універсальною апроксимацією розподілу міри є степеневий закон

$$\mu_x(\delta) \sim \delta^{\alpha(x)}. \quad (3.14)$$

Клас мір, які задовольняють локальний закон (3.14), називають *мультифрактальними мірами*. Цей термін підкреслює наявність неоднорідного розподілу міри на множині S . Символ "тільда" означає асимптотичну рівність (при $\delta \rightarrow 0$) з точністю до константи. Зрозуміло, що мультифрактальні міри мають властивість масштабної інваріантності, тобто за зміни масштабу функціональна залежність для міри зберігається, з'являється лише константа у вигляді множника (див. формули (3.5), (3.6)).

У загальному випадку будь-яку міру можна розкласти на три компоненти: гладку, яку можна характеризувати густиною, атомарну, зосереджену на зліченній множині точок, і "проміжну" між ними сингулярну компоненту. Випадок $\alpha(x) = 0$ відповідає атомарному, тобто точковому розподілу міри. Випадок $\alpha(x) = D_e$ відповідає рівномірному розподілу маси (міри) зі сталою густиною. Усі інші випадки оголошуються сингулярними.

Наприклад, нехай маса розподілена на множині з $D_e = 1$ згідно із законом $\mu_x(\delta) \sim \delta^\alpha$, $\alpha < 1$. Тоді її густина $\frac{\Delta\mu}{\Delta\delta} \sim \alpha\delta^{\alpha-1}$ не обмежена, коли $\delta \rightarrow 0$. У випадку $\alpha > 1$ нічого неприємного не відбувається, але і його прийнято оголошувати сингулярним.

Залежність (3.14) перепишемо у вигляді

$$\alpha(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mu_x(\delta)}{\log \delta} \quad (3.15)$$

Позначимо через S_α множину всіх точок x , у яких показник сингулярності α має одне значення. Іншими словами, розділимо носій міри на підмножини з фіксованим значенням сингулярності. Груба аналогія – це ковдра із шматків тканини різного кольору. Виділимо певне значення показника α і вимірємо розмірність множини S_α , що утворена шматками відповідного кольору. Для цього покриваємо її шаблонами розміром δ . Кількість таких шаблонів N_α поводить себе як

$$N_\alpha(\delta) \sim \delta^{-f(\alpha)}, \quad (3.16)$$

де $f(\alpha)$ – ємність (фрактальна розмірність) S_α . Потім виберемо інше значення α (інший колір) і т. д., поки не переберемо весь діапазон кольорів. Функцію $f(\alpha)$ називають *мультифрактальним спектром* міри або *спектром сингулярностей* мультифрактала. У випадку рівномірного розподілу міри на множині S величина $\alpha = \text{const}$, і спектр сингулярності є єдиною точкою на площині (α, f) .

Проілюструємо сказане на прикладі канторової множини (див. підрозд. 3.2). Припустимо, що на цій множині задано рівномірний розподіл міри M , наприклад, маси, і для покриття

множини беремо 2^n елементів (кругів) діаметром $\delta = 3^{-n}$. Міра кожного елемента покриття $\mu_{x_i}(\delta) = 2^{-n}$, де x_i – центр круга. Відповідно до формули (3.15), показник сингулярності $\alpha(x_i)$ набуває значення $\alpha(x_i) = \log 2 / \log 3$. Оскільки кількість елементів покриття $N_\alpha = 2^n$, то згідно з (3.16) функція $f(\alpha)$ набуває одного значення, що дорівнює $\log 2 / \log 3$. Як бачимо, показник сингулярності α збігається з фрактальною розмірністю множини Кантора і спектр сингулярностей $f(\alpha)$ складається з однієї точки $f(\alpha) = \alpha \approx 0,63$. Відтак ми маємо лише одне значення у спектрі сингулярностей, і відповідну міру називають *однорідною*.

3.7. Мультифрактальний формалізм

На практиці обчислити функцію $f(\alpha)$ на основі формули (3.16) досить важко через дуже повільну збіжність, коли $\delta \rightarrow 0$, і часто значну неоднорідність мультифрактала. З метою розв'язання цієї проблеми запропоновано спеціальний підхід, який отримав назву *мультифрактального формалізму*.

Заповнимо область простору, в якому визначена міра, шаблонами розміром δ і визначимо *функцію Реньї*¹, яка по суті являє собою суму моментів міри по всіх непорожніх шаблонах:

$$Z(q, \delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i^q(\delta), \quad (3.17)$$

де $N(\delta)$ – кількість шаблонів покриття, $\mu_i(\delta)$ – міра, яку утримує окремий шаблон, показник степеня $-\infty < q < \infty$. Функція Реньї характеризує ступінь неоднорідності розподілу міри на носії міри. Великі значення $q > 0$ сприяють підвищенню вкладу в суму $Z(q, \delta)$ шаблонів із відносно великими значеннями $\mu_i(\delta)$. Якщо $q < 0$, то виділяють шаблони з відносно малими значеннями $\mu_i(\delta)$.

¹ Реньї Альфред (1921–1970) – угорський математик.

Функція Реньї нормалізованої міри при $q = 1$ дорівнює одиниці й не залежить від розміру шаблону:

$$Z(1, \delta) = M(S) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i(\delta) = 1. \quad (3.18)$$

Нас цікавить випадок, коли при $\delta \rightarrow 0$ функція Реньї має степеневу асимптотику:

$$Z(q, \delta) \sim \delta^{\tau(q)}. \quad (3.19)$$

Функцію $\tau(q)$ називають *показник Реньї*, або *показник скейлінгу*, або *масовий показник* (тут слово "маса" співвідноситься з мірою довільної природи).

Установимо зв'язок масового показника $\tau(q)$ з мультифрактальним спектром $f(\alpha)$. За визначенням мультифрактального спектра, кількість шаблонів, для яких міра має сингулярність порядку α , зростає як $N_\alpha(\delta) \sim \delta^{-f(\alpha)}$. Групуючи в сумі (3.17) доданки з однаковими показниками сингулярності $\mu(\delta) \sim \delta^\alpha$, отримаємо асимптотичну формулу

$$Z(q, \delta) = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\delta) \delta^{\alpha q} = \sum_{\alpha} \delta^{\alpha q - f(\alpha)}. \quad (3.20)$$

Оскільки величина δ дуже мала, то основний внесок у цю суму, за визначеного значення q , дадуть складові, для яких показник $\alpha q - f(\alpha)$ виявиться мінімальним. Тому (3.20) можна переписати у вигляді

$$Z(q, \delta) \sim \delta^{\min_{\alpha}(\alpha q - f(\alpha))}. \quad (3.21)$$

Із виразів (3.19) і (3.21) маємо

$$\tau(q) = \min_{\alpha}(\alpha q - f(\alpha)). \quad (3.22)$$

Наявність мінімуму дозволяє прирівняти до нуля похідну від правої частини (3.22)

$$\frac{d}{d\alpha}(\alpha q - f(\alpha))_{\alpha=\alpha(q)} = 0 \quad (3.23)$$

і тим самим установити залежність $\alpha(q)$ у неявному вигляді:

$$q = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}. \quad (3.24)$$

Підставляючи значення $\alpha(q)$ у формули (3.21) і (3.22), отримуємо

$$Z(q, \delta) \sim \delta^{q\alpha(q) - f(\alpha(q))}, \quad (3.25)$$

$$\tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q)). \quad (3.26)$$

Отже, величина $f(\alpha(q))$ визначає фрактальну розмірність тієї підмножини $S_{\alpha(q)}$, яка дає визначальний внесок у суму (3.17) для заданого значення показника степеня q .

Формули (3.24) і (3.26) являють собою *перетворення Лежандра*¹ від змінних $\{\alpha, f(\alpha)\}$ до змінних $\{q, \tau(q)\}$. Якщо функція $\tau(q)$ диференційована, то з виразу (3.26) маємо співвідношення

$$\frac{d\tau}{dq} \frac{dq}{d\alpha} = q + \alpha \frac{dq}{d\alpha} - \frac{df}{d\alpha}. \quad (3.27)$$

Звідси, беручи до уваги (3.24) і (3.26), отримуємо перетворення Лежандра від змінних $\{q, \tau(q)\}$ до змінних $\{\alpha, f(\alpha)\}$:

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq}, \quad (3.28)$$

$$f(\alpha) = q\alpha(q) - \tau(q). \quad (3.29)$$

Це і є формули так званого *мультифрактального формалізму*.

На практиці масовий показник $\tau(q)$ часто можна обчислити безпосередньо з експериментальних даних. Тоді мультифрактальний формалізм дозволяє визначити спектр сингулярностей $f(\alpha)$ або, інакше кажучи, визначити мультифрактальну структуру міри M .

3.8. Властивості функції спектра сингулярностей

Значимо деякі *важливі властивості функції $f(\alpha)$* .

1. Перетворенням Лагранжа від випуклої вгору функції $\tau(q)$ є також випукла вгору функція. Тому функція $f(\alpha)$ всюди випукла вгору.

¹ Лежандр Андієн Мері (1752–1833) – французький математик.

2. Відповідно до (3.24), похідна функції $f(\alpha)$ при $q=0$ дорівнює нулю. Це означає, що в деякій точці $\alpha_0 = \alpha(q=0)$ функція $f(\alpha)$ має максимум.

З іншого боку, $Z(0, \delta) = N(\delta) \sim \delta^{-D_0}$ і $Z(0, \delta) \sim \delta^{\tau(0)}$, тут D_0 – фрактальна розмірність множини S , як носія міри. Згідно з (3.29) $f(\alpha_0) = -\tau(0)$. Тому маємо такі рівності:

$$f(\alpha_0) = \max_{\alpha} f(\alpha) = -\tau(0) = D_0. \quad (3.30)$$

3. Оскільки множина S має розмірність D_0 , то у підмножин S_{α} фрактальна розмірність становитиме $f(\alpha) \leq D_0$.

4. На межах інтервалу $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, в якому визначена функція $f(\alpha)$, вона може дорівнювати нулю або бути відмінною від нуля (в одній або обох точках). Причому в зазначених точках похідна $f'(\alpha)$ стає нескінченною і справедливі рівності [11, 43]:

$$\left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = \alpha_{\min}, \quad \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = \alpha_{\max}. \quad (3.31)$$

5. Згідно з (3.18), (3.19) при $q=1$ маємо $\tau(1) = 0$.

6. Із формули (3.22) слідує нерівність

$$\tau(q) \leq \alpha q - f(\alpha) \quad \text{при всіх } \alpha, q. \quad (3.32)$$

Оскільки $\tau(1) = 0$, то з (3.32) отримуємо співвідношення

$$f(\alpha) \leq \alpha \quad \text{при всіх } \alpha. \quad (3.33)$$

7. Якщо $q=1$, то маємо $\tau(1) = 0$, тоді з формул (3.28), (3.29) отримуємо, що рівність $f(\alpha) = \alpha$ виконується при $\alpha = \tau'(1)$, де штрих визначає похідну у формулі (3.29). Величина $f(\alpha(1))$ – це значення фрактальної розмірності тієї підмножини, яка дає найбільший внесок у суму (3.17) при $q=1$. Відтак для міри, що зосереджена на цій підмножині, маємо рівності:

$$\tau'(1) = \alpha(1) = f(\alpha(1)). \quad (3.34)$$

У побудові мультифрактальних моделей часто користуються величинами

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (3.35)$$

які називають *узагальненими розмірностями* чи *розмірностями Реньї*. Беручи до уваги (3.26), запишемо (3.35) у вигляді

$$D_q = \frac{q\alpha(q) - f(\alpha(q))}{q-1}. \quad (3.36)$$

Потрібно виділити кілька важливих окремих випадків узагальненої розмірності:

1) $q=0$: $D_0 = -\tau(0) = \max_{\alpha} f(\alpha)$. Величина D_0 збігається з фрактальною розмірністю носія міри.

2) $q=1$: $D_1 = \tau'(1)$. Цю розмірність часто називають *інформаційною розмірністю*, що пов'язано з поняттями з теорії інформації. Розмірність D_1 визначається на кривій $f(\alpha)$ у точці $\alpha = f(\alpha)$, де похідна $f'(\alpha) = 1$.

3) $q=2$: $D_2 = \tau(2) = 2\alpha(2) - f(\alpha(2))$. Указану величину називають *кореляційною розмірністю*. Є відносно простий алгоритм обчислення розмірності D_2 з використанням так званого кореляційного інтеграла [1, 23, 26]. Цим і пояснюється термін "кореляційна розмірність".

Зазначимо, що D_q монотонно зменшується зі зростанням q . Причому, вважаючи, що функція D_q має скінченні границі при $q \rightarrow \pm\infty$ (рівні $D_{\pm\infty}$), функція $\tau(q)$ (див. вираз (3.35)) може бути записана у вигляді $\tau(q \rightarrow \pm\infty) \approx qD_{\pm\infty}$. Звідси згідно з (3.31) маємо

$$\left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = D_{\infty} = \alpha_{\min}, \quad \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = D_{-\infty} = \alpha_{\max}, \quad (3.37)$$

тобто інтервали можливих значень показника сингулярності α й узагальнених фрактальних розмірностей D_q збігаються. Це не випадковий результат, адже розмірності D_q є просто іншою формою представлення сингулярностей досліджуваної множини, до того ж не використовується диференціювання функції $\tau(q)$.

Справді, з формули (3.35), рівності $\tau(1)=0$ та теореми про середнє маємо

$$D_q = \frac{\tau(q) - \tau(1)}{q - 1} = \frac{d\tau(\tilde{q})}{dq}, \quad (3.38)$$

де \tilde{q} – деяка точка інтервалу $(1, q)$ при $q > 1$ та інтервалу $(q, 1)$ при $q < 1$. За зміни параметра q значення похідної $d\tau(q)/dq$ пробігають, згідно з (3.28), усю множину значень показника сингулярності α , що і стверджує сказане вище.

Повернемося до мультиплікативного процесу і, як ілюстрацію описаних вище властивостей спектра сингулярностей, визначимо його характеристики. На n -му кроці процесу побудови мультифрактала міра $\mu_i(\delta)$ окремого відрізка становить $p^k(1-p)^{n-k}$. У такому випадку функцію Реньї (3.17) визначають як

$$Z(q, p) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^{qk} (1-p)^{q(n-k)} = \left[p^q + (1-p)^q \right]^n. \quad (3.39)$$

Тоді згідно з (3.19) маємо $\left[p^q + (1-p)^q \right]^n \sim \delta^{\tau(q)}$. Оскільки на n -му кроці розмір відрізка $\delta = 2^{-n}$, то отримуємо формули для показника скейлінгу

$$\tau(q) = - \frac{\ln \left(p^q + (1-p)^q \right)}{\ln 2} \quad (3.40)$$

і його похідної, яка визначає показник сингулярності α ,

$$\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq} = - \frac{1}{\ln 2} \frac{p^q \ln p + (1-p)^q \ln(1-p)}{p^q + (1-p)^q}. \quad (3.41)$$

Відповідно узагальнено розмірності

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} = - \frac{\ln \left(p^q + (1-p)^q \right)}{(q-1) \ln 2}. \quad (3.42)$$

Задача. Якщо $q = 1$, то формула (3.42) має невизначеність. Отримайте аналітичну формулу для розмірності D_1 .

У випадку коли $p = 0,5$, тобто міра ділиться порівну на кожному кроці, показник сингулярності α та узагальнені фрактальні

розмірності D_q мають однакове значення, яке дорівнює фрактальній розмірності носія міри. У нашому випадку носієм міри є одиничний відрізок прямої лінії, фрактальна розмірність якого дорівнює одиниці, тобто $D_0 = 1$.

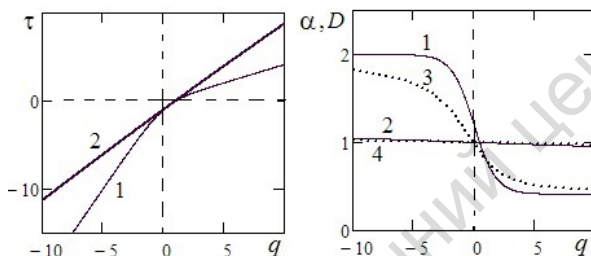


Рис. 3.6. Графіки функцій $\tau(q)$, $\alpha(q)$ – криві 1, 2; D_q – криві 3, 4 (для кривих 1 та 3 $p = 0,75$; для кривих 2 та 4 $p = 0,53$)

На рис. 3.6 показано графіки функцій $\tau(q)$, $\alpha(q)$ і D_q для двох значень параметра p . Як бачимо, чим ближче значення p до величини 0,5 (рівномірний розподіл міри), тим ближче до прямої лінії графік $\tau(q)$. Відбувається звуження діапазону зміни функцій $\alpha(q)$ і D_q , їхні графіки наближаються до горизонтальної прямої на рівні 1.

Навпаки, чим ближче p до 0 або 1, тим неодноріднішим стає розподіл міри на його носії, що й відображено на графіках рис. 3.6. Графік функції $\tau(q)$ стає нелінійним із характерним вигином угору й асимптотичними прямими при $|q| \gg 1$. Діапазон зміни функції $\alpha(q)$ і D_q розширюється за наявності асимптотики при $|q| \gg 1$. Для обох кривих $\tau(q)$ маємо дві характерні точки: $\tau(0) = -D_0 = 1$ і $\tau(1) = 0$.

Діапазон зміни показника сингулярності $\alpha(q)$ визначається формулами (3.24), (3.30). З огляду на те, що для достатньо великих $|q|$ значення показника сингулярності стабілізуються, отримуємо такі результати:

- 1) для $p = 0,53$: $\alpha_{\min} \approx 0,93$, $\alpha_{\max} \approx 1,075$;
- 2) для $p = 0,75$: $\alpha_{\min} \approx 0,415$, $\alpha_{\max} \approx 2$.

Звернемося далі до побудови функції мультифрактального спектра, використовуючи формули (3.28), (3.29) та рис. 3.7. Куполоподібна форма кривої є типовою. Інтегральну оцінку спектра сингулярностей дають два параметри, які визначають положення і ширину спектра.

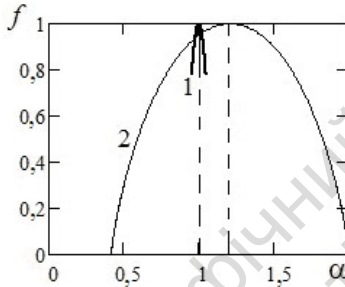


Рис. 3.7. Графіки функцій $f(\alpha)$:
1 – якщо $p = 0,6$, 2 – якщо $p = 0,2$

Положення спектра визначається значенням показника α^* , за якого функція $f(\alpha)$ досягає максимуму: $f(\alpha^*) = \max f(\alpha)$. Беручи до уваги, що носієм міри є відрізок $[0,1]$, і враховуючи формулу (3.30), маємо $f(\alpha^*) = \max f(\alpha) = D_0 = 1$.

Згідно з (3.24) максимум функції $f(\alpha)$ відповідає значенню $q = 0$. Тоді, як випливає з формули (3.30), значення α^* визначається так:

$$\alpha^* = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q=0} = - \frac{\ln p + \ln(1-p)}{2 \ln 2}. \quad (3.43)$$

Ширина спектра $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$. Для $p = 0,75$ маємо $\alpha^* \approx 1,208$ та $\Delta\alpha \approx 1,585$, а для $p = 0,53$ відповідно $\alpha^* \approx 1,003$ та $\Delta\alpha \approx 0,145$.

За наближення p до числа 0,5 інтервал $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$ стискається, а коли $p = 0,5$, то графік функції $f(\alpha)$ вироджується в точку з координатами (1, 1).

Як бачимо, аналіз графіків $\tau(q)$, $\alpha(q)$, D_q та $f(\alpha)$ справді дає уявлення про ступінь неоднорідності розподілу міри на мультифрактальному об'єкті.

Задача. Нехай під час побудови множини Кантора нормалізована міра розподіляється так само, як і в розглянутому вище випадку побудови мультифрактала на основі мультиплікативного процесу. Знайдіть аналітичні вирази для функцій $\tau(q)$, $\alpha(q)$, D_q та $f(\alpha)$ і побудуйте графіки, як на рис. 3.6 та 3.7.

3.9. Кореляційна розмірність

У цьому підрозділі поговоримо окремо про кореляційну розмірність. Її особливе значення для нелінійної динаміки полягає у тому, що для її обчислення є відносно простий і ефективний алгоритм Гроссберґера – Прокаччіа [58, 1, 23, 26]. Причому кореляційною розмірністю зручно користуватися для аналізу часових рядів (будь-яких експериментальних даних).

Як ми вже говорили, поняття розмірності Гаусдорфа добре визначено з погляду математики, але її надзвичайно важко обчислити. Тому зазвичай використовують "практичніше" визначення фрактальної розмірності – через ємність D_0 . Нехай S – деяка множина у просторі R^n , яку покриємо кубиками (елементи покриття) розміром δ . Якщо позначити через $N(\delta)$ кількість кубиків, необхідних для покриття всієї множини, то ємність являтиме собою границю (3.3):

$$D_0 = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \delta}. \quad (3.44)$$

По суті, ця величина характеризує, як змінюється кількість елементів покриття за зміни δ : $N(\delta) \sim \delta^{-D_0}$. Надалі в логарифмічних координатах будемо залежність $N(\delta)$ від δ , і нахил лінійної ділянки графіка й визначатиме ємність D_0 .

На жаль, у багатьох випадках, що представляють практичний інтерес, провести числове обчислення ємності фактично не-

можливо внаслідок дуже повільної збіжності до границі у формулі (3.44). Крім того, D_0 не залежить від розподілу міри на множині S , а визначає фрактальну розмірність множини S як носія міри, тобто являє собою суто *метричну* розмірність. З урахуванням цього зроблено висновок про "непрактичність" алгоритму визначення ємності.

Тому увагу було звернено на узагальнені розмірності D_q , які за своєю суттю є *метрично-ймовірнісними*. Конкретно зосередимо увагу на *кореляційній розмірності* D_2 (тут $q=2$, див. підрозд. 3.8). Згідно з формулами (3.17), (3.19), (3.35) маємо

$$D_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log Z(2, \delta)}{\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(\delta)} (\mu_i(\delta))^2}{\log \delta}, \quad (3.45)$$

де μ_i – міра i -го кубика, який покриває атрактор. Отже, в основі визначення розмірності D_2 лежить обчислення функцій Реньї

$$(3.17): Z(2, \delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i^2(\delta). \text{ Зрозуміло, що основний внесок у суму, що стоїть під знаком логарифма у формулі (3.45), будуть давати кубики з більшою мірою, а вплив кубиків із малою мірою буде незначним. Якщо далі у визначенні } D_2, \text{ йти шляхом визначення ємності } D_0, \text{ тобто знаходити нахил лінійної ділянки відповідного графіка, то така методика також потребує дуже великої кількості вибірок (вибірка – кількість елементів покриття).}$$

Вирішальною виявилася така ідея [26, с. 261]. Представимо суму $Z(2, \delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i^2(\delta)$ у вигляді

$$Z(2, \delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i^2(\delta) \text{ у вигляді} \quad (3.46)$$

$$Z(2, \delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i \mu_i = \overline{\mu_i^2},$$

тобто як середнє значення міри (звісно, асимптотично) кубика розміром δ .

Нехай ми отримали, як результат числового розв'язку рівнянь динаміки системи, набір векторів стану $\{\mathbf{x}_i, i=1, 2, \dots, M\}$, тобто маємо послідовність із M точок, які належать деякій множині

у просторі R^n . Ідея полягає в тому, щоб оцінити середнє значення (3.46) найточніше. Для цього слід розрахувати міру елемента покриття (кубика або кульки) розміром δ із центром в кожній точці x_i , які визначають досліджувану множину, а потім усереднити по всіх таких кульках. Позначимо через $k_i(\delta)$ кількість точок x_j всередині кульки із центром у точці x_i (рис. 3.8). Тоді її міру можна наближено оцінити співвідношенням

$$P_i(\delta, M) = \frac{k_i(\delta)}{M}, \quad (3.47)$$

а відтак усереднити по всіх таких кульках. Сума $Z(2, \delta)$ матиме вигляд

$$Z(2, \delta) = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M k_i(\delta). \quad (3.48)$$

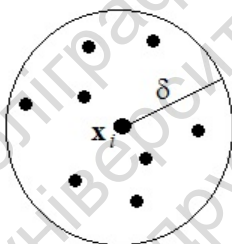


Рис. 3.8. Ілюстрація до визначення кореляційної розмірності

Сума у формулі (3.48) – це кількість пар точок, відстань між якими $\|x_i - x_j\|$ не перевищує δ (рис. 3.8). Перейшовши у формулі (3.48) до границі, отримуємо

$$Z(2, \delta) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i, j=1; i \neq j}^N \theta(\delta - \|x_i - x_j\|) \equiv C_M(\delta), \quad (3.49)$$

де $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – функція Гевісайда¹.

¹ Гевісайд Олівер (1850–1925) – англійський інженер і математик.

Величину $C_M(\delta)$ називають *кореляційним інтегралом*. За достатньо великих M (зазвичай тисячі або десятки тисяч, та все ж такі вибірки суттєво менші ніж у випадку обчислення ємності) кореляційний інтеграл $C_M(\delta)$ може бути статистичною оцінкою суми $Z(2, \delta)$, а отже може бути використаний для визначення розмірності D_2 . Визначення кореляційної розмірності ґрунтується на властивості масштабної інваріантності кореляційного інтеграла $C_M(\delta)$, тобто полягає в наявності степеневої залежності за малих значень параметра δ :

$$C_M(\delta) \cong \delta^{D_2}. \quad (3.50)$$

Отже, розраховують $C_M(\delta)$ для різних δ і представляють результати в координатах $\log \delta$ і $\log C_M(\delta)$. Отриманий графік повинен мати вигляд прямої лінії з кутовим коефіцієнтом D_2 . Саму D_2 називають *кореляційною розмірністю*.

Значимо, що графік відхиляється від прямої лінії в області великих значень δ , порівнянних з розмірами атрактора, і дуже малих δ , коли кількості пар точок стає мало для надійної статистичної оцінки. Інтервал лінійності буде тим ширший, чим більша кількість точок M врахована (деякі рекомендації з вибору кількості точок M обговоримо в розд. 9).

3.10. Розмірність Ляпунова

Згадаймо (див. підрозд. 1.9), що утворення атракторів відбувається за рахунок розтягування та стиснення фазового об'єму, що пов'язано відповідно з наявністю додатних і від'ємних показників Ляпунова. У зв'язку із цим можна поставити питання про зв'язок між розмірністю атрактора і спектром його показників Ляпунова. Відповідь на це питання пропонує *формула Каплана – Йорке* [61]. Надалі текст цього підрозділу запозичено з книги [23, с. 198–200]. Нехай розмірність фазового простору дисипативної системи N , і ми маємо N показників Ляпунова, які занумеровані в порядку зменшення: $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N$ від додатних значень до від'ємних. На атракторі сума всіх показників Ляпунова є від'ємною:

$S_N = \sum_{i=1}^N \Lambda_i < 0$. Тому, обчислюючи суму $S_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i$ послідовно

для $m = 1, 2, \dots$, ми в результаті отримуватимемо спочатку додатні, а потім від'ємні величини S_m . Знайдемо таке m , що $S_m > 0$, але $S_{m+1} < 0$. Якщо розглянути підпростір, утворений векторами збурень, які відповідають першим m показникам Ляпунова, то в цьому просторі об'єм хмарки фазових точок у процесі динаміки зростатиме. З іншого боку, у підпросторі, що асоціюється з кількістю показників на одиницю більшим, обсяг уже стискатиметься. За іншими вимірами фазового простору, яким відповідають показники Ляпунова $\Lambda_{m+2}, \dots, \Lambda_N$, стиснення відбувається ще швидше, і ці виміри ігноруватимемо.

У підпросторі розмірності $m + 1$ розглянемо покриття атратора кубиками зі стороною δ , причому орієнтація ребер передбачається відповідною до напрямків, що асоціюються з показниками $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m+1}$. Загальна кількість елементів покриття нехай буде $N(\delta)$.

Унаслідок руху зображувальних точок по фазових траєкторіях область, покрита кубиками, перейде через деякий час T в область, сильно витягнуту за напрямком, що відповідає старшому показнику, і сплюснену за напрямком, пов'язаним з останнім показником Λ_{m+1} , що враховується. Кожен кубик перетвориться у цьому процесі на паралелепіпед розміром $\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \dots \cdot \delta_{m+1}$, де $\delta_i = \delta \exp(\Lambda_i T)$, $i = 1, 2, \dots, m + 1$. Покриття одного паралелепіпеда кубиками зі стороною δ_{m+1} потребує елементів.

$$n = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\delta_i}{\delta_{m+1}} \right) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\delta \exp(\Lambda_i T)}{\delta \exp(-|\Lambda_{m+1}| T)} \right) \quad (3.51)$$

Виконавши ці дії з усіма $N(\delta)$ паралелепіпедами, отримаємо нове покриття атратора з кількістю елементів

$$\begin{aligned} N(\delta_{m+1}) &= nN(\delta) = N(\delta) \prod_{i=1}^m \left(\frac{\delta \exp(\Lambda_i T)}{\delta \exp(-|\Lambda_{m+1}|T)} \right) = \\ &= N(\delta) \prod_{i=1}^m \left(\frac{\exp(\Lambda_i T)}{\exp(-|\Lambda_{m+1}|T)} \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Визначення фрактальної розмірності за формулою (3.2) тоді дає

$$\begin{aligned} D &= -\frac{\log N(\delta_{m+1})}{\log \delta_{m+1}} = \\ &= \frac{\log N(\delta) + \log \prod_{i=1}^m \exp(\Lambda_i T) - m \log \exp(-|\Lambda_{m+1}|T)}{-\log \delta + |\Lambda_{m+1}|T}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Помноживши ліву і праву частини на $-\log \delta + |\Lambda_{m+1}|T$, маємо

$$-D \log \delta + D |\Lambda_{m+1}|T = \log N(\delta) + \sum_{i=1}^m \Lambda_i T + m |\Lambda_{m+1}|T, \quad (3.54)$$

причому перші члени в лівій і правій частинах скорочуються, адже $D \equiv -\log N(\delta) / \log \delta$. Остаточо з (3.54) знаходимо формулу Каплана – Йорке для розмірності Ляпунова D_L :

$$D_L = m + \frac{\sum_{i=1}^m \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|}. \quad (3.55)$$

Нагадаємо, що число m визначається так, що $S_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i > 0$,

але вже $S_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \Lambda_i < 0$.

Велика практична перевага розмірності Ляпунова обумовлена простотою її обчислення, оскільки для цього потрібен лише спектр показників Ляпунова. Водночас, емпірично ця формула зазвичай дає хороші результати, які у багатьох випадках близькі до коректних оцінок розмірності атраторів.

У процесі вибору, яким визначенням розмірності краще скористатися, зазвичай виходять із можливостей числових розрахунків. За числового моделювання динамічної системи найзручніше використовувати розмірність Ляпунова або ємність множини. Для оцінювання фрактальної розмірності атрактора, за експериментальними даними, найкраще підходить кореляційна розмірність [1, с. 178].

РОЗДІЛ 4

ОДНОВИМІРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Ще недавно здавалося, що глибше розуміння нелінійних явищ пов'язане з аналізом дедалі складніших математичних моделей. І тим більше вражає, що великих успіхів у вивченні нелінійних систем, у передбаченні нових ефектів було досягнуто в ході дослідження простих математичних моделей – одновимірних відображень, що залежать від параметрів. Говорять, що співвідношення (4.1) визначає *відображення*:

$$x_{n+1} = f(x_n, r), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.1)$$

де r – параметр. По черзі застосовуючи відображення (4.1), отримуємо нескінченну послідовність точок

$$x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, \quad (4.2)$$

яка однозначно визначається початковою точкою x_0 .

Виявилось: якщо $f(x, r)$ є деякою простою нелінійною функцією аргументу x , наприклад, квадратичною параболою, то властивості послідовності $\{x_n\}$, що виникає під час ітераційного процесу, можуть виявитися несподіваними. Принциповий крок у їхньому розумінні зроблено у 70-х рр. ХХ ст.

Нині одновимірні відображення виступають як спрощені моделі різних процесів. Якщо фізики більш схильні розглядати неперервні в часі процеси, то біологи, навпаки, вважають за краще розглядати зміни з року в рік або від покоління до покоління. Зрозуміло, в послідовності (4.2) індекс n може визначати не лише дискретні моменти часу, а й мати інше значення.

Крім того, одновимірні відображення є засобом, за допомогою якого досліджують багато складних процесів. Ідеться про перетин Пуанкаре. Суть важливого відкриття Анрі Пуанкаре у тому, що неперервний потік у фазовому просторі, який визначає поведінку системи, можна вивчати за допомогою дискретного відображення, яке утворюється потоком на перетині Пуанкаре. Фактично, Пуанкаре зрівняв у правах неперервний потік і його дискретне в часі відображення, що дає можливість вивчати

простіше дискретне відображення та зробити висновок про характер неперервного потоку!

Зауважимо, що у природі неперервність наявна поруч із дискретністю і очевидно немає сенсу в суперечці, що первинне: дискретне чи неперервне. Можна сказати: якщо якісь експериментальні дані визначають одновимірне відображення, це слід розглядати як велику удачу. Як образно відмітив В. І. Арнольд: "Математичний опис світу засновано на делікатній взаємодії неперервних (плавних) і дискретних (стрибкоподібних) явищ".

Дослідження одновимірних відображень дозволило запровадити нові поняття, застосовні до великого класу дисипативних систем, виявити нові явища, відповісти на важливі питання. Як відбувається перехід від простих упорядкованих до хаотичних режимів у разі зміни параметрів? Які найпростіші типи хаосу в таких системах і способи їхнього опису?

Звернімо увагу на парадоксальність цих питань. Справді, одновимірне відображення – система детермінована. Проте процеси, які вона описує, можуть мати хаотичні властивості. Розглянутий нижче ітераційний процес простого квадратичного відображення дозволить осмислити загальну картину хаосу в детермінованій системі.

4.1. Властивості одновимірних відображень

Важливими для розуміння властивостей відображень (4.1) є поняття нерухомих точок і циклів різної кратності та їхня стійкість.

Нерухома точка x^* під дією відображення (4.1) переходить у себе, тобто справедливе співвідношення

$$x^* = f(x^*, r). \quad (4.3)$$

Стійкість нерухомої точки неважко визначити, провівши лінійний аналіз стійкості. Нехай $x_n = x^* + \Delta x_n$, де Δx_n – мала величина. Якщо точка x^* стійка, то під час ітераційного процесу

($n \rightarrow \infty$) значення $|\Delta x_n| \rightarrow 0$. Запишемо відображення (4.1) у вигляді ряду Тейлора, залишаючи два перші члени:

$$x^* + \Delta x_{n+1} = f(x^* + \Delta x_n, r) \approx f(x^*, r) + \frac{\partial f(x^*, r)}{\partial x} \Delta x_n. \quad (4.4)$$

Оскільки $x^* = f(x^*, r)$, то стійкість точки x^* визначається поведінкою відображення

$$\Delta x_{n+1} = \frac{\partial f(x^*, r)}{\partial x} \Delta x_n. \quad (4.5)$$

Це не що інше, як звичайна геометрична прогресія. Отже $|\Delta x_n| \rightarrow 0$, якщо виконується нерівність

$$\left| \frac{\partial f(x^*, r)}{\partial x} \right| < 1. \quad (4.6)$$

Нерівність (4.6) є достатньою умовою стійкості нерухомої точки x^* . Якщо виконано протилежну нерівність, можна стверджувати, що точка x^* буде нестійкою. Якщо похідна дорівнює одиниці, то в межах лінійного наближення, цю точку можна назвати нейтральною. Отже стійка нерухома точка притягує до себе послідовність точок ітераційного процесу, нестійка – відштовхує від себе, а в околі нейтральної точки значення ітерацій скупчуються, не відчуваючи притягання чи відштовхування.

Зауважимо: якщо x^* є нерухомою точкою відображення f , то вона також буде нерухомою точкою n -кратного відображення $f^{(n)}$, яке формально записують у вигляді

$$x^* = \underbrace{f\left(f\left(\dots f\left(x^*, r\right)\right)\right)}_{n \text{ разів}} = f^{(n)}(x^*, r). \quad (4.7)$$

Аналогічно умові стійкості (4.6) для нерухомої точки x^* можна записати умову стійкості циклу з елементами $x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*$. Справді, оскільки точки $x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*$ є нерухомими точками відображення $f^{(p)}(x, r)$, тобто

$$x_1^* = f(x_p^*, r) = f(f(x_{p-1}^*, r)) = \dots = \underbrace{f(f(\dots f(x_1^*, r)))}_{p \text{ разів}} \equiv f^{(p)}(x_1^*, r),$$

і так для будь-якої точки з набору $x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*$, то подібно до (4.4) маємо

$$x_1^* + \Delta x_{n+p} = f^{(p)}(x_1^* + \Delta x_n, r) \approx f^{(p)}(x_1^*, r) + \frac{\partial f^{(p)}(x_1^*, r)}{\partial x} \Delta x_n.$$

Звідси стійкість циклу періоду p (позначимо його P^p) визначається формулою

$$\left| \frac{\partial f^{(p)}(x_1^*, r)}{\partial x} \right| < 1, \quad (4.8)$$

або, провівши диференціювання складної функції, маємо

$$\left| \frac{\partial f(x_1^*, r)}{\partial x} \frac{\partial f(x_2^*, r)}{\partial x} \dots \frac{\partial f(x_p^*, r)}{\partial x} \right| < 1. \quad (4.9)$$

Значимо, що стійку нерухому точку можна визначити як цикл періоду 1 (інакше P^1).

Проаналізувати поведінку відображення (4.1) на площині можна за допомогою побудови залежності $x_{n+1}(x_n)$, доповненої *діаграмою Ламерея* (як кажуть, *сходами Ламерея*) (рис. 4.1). Для такого аналізу важливе значення має бісектриса першого і третього квадрантів $x_{n+1} = x_n$. По-перше, перетин бісектриси $y = x$ і функції $y = f(x)$ дає нерухомі точки, а, по-друге, оскільки похідна за x у бісектриси дорівнює одиниці, то візуально можна визначити стійкість нерухомої точки.

Перші кілька "сходинок" діаграми Ламерея зображено на рис. 4.1. Алгоритм її побудови можна сформулювати в такому вигляді.

1. Від початкової точки $(x_0, 0)$ рухаємося вертикально до графіка функції відображення $f(x)$, відмічаємо точку перетину (x_0, x_1) , де x_1 отримана в результаті ітерації $x_1 = f(x_0)$.

2. Від точки (x_0, x_1) переходимо по горизонталі до точки (x_1, x_1) . Сукупність точок, у яких обидві координати рівні, – це бісектриса першої чверті, отже, горизонтальна лінія має поєднувати криву відображення з бісектрисою.

3. Від бісектриси знову будемо вертикальну лінію до перетину з кривою відображення $f(x)$, тобто до точки (x_1, x_2) , де x_2 отримано внаслідок ітерації $x_2 = f(x_1)$, і далі повторюємо пункти, починаючи з п. 2.

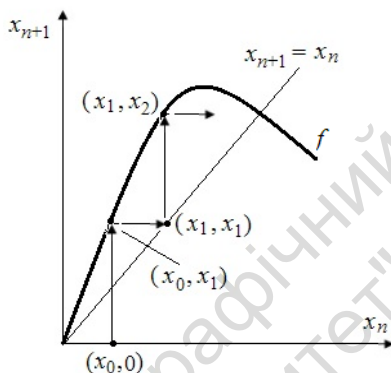


Рис. 4.1. Ілюстрація до побудови сходів Ламерея

Після закінчення побудови маємо ламану лінію, на якій дуже легко спостерігати, як відображення прямує до притягувальних точок або до стійких циклів. Як приклад, на рис. 4.2 показано побудову діаграми Ламерея деякого одновимірного відображення $x_{n+1} = f(x_n)$. Видно, що починаючи з точки x_0 , приходимо до стійкої нерухомої точки x^* , а стартуючи з точки x'_0 , потрапляємо до циклу P^2 (цикл періоду 2), який визначається точками $x^{*(1)}, x^{*(2)}$.

Спостерігаючи, як виглядають сходи Ламерея для різних значень параметра r відображення (4.1), можна встановити, що за певних значень параметра r змінюється кінцевий результат побудови сходів. Таку зміну, як ми вже знаємо, називають *біфуркацією*. Значення параметра r , за якого відбувається така біфуркація, називають *точкою біфуркації*.

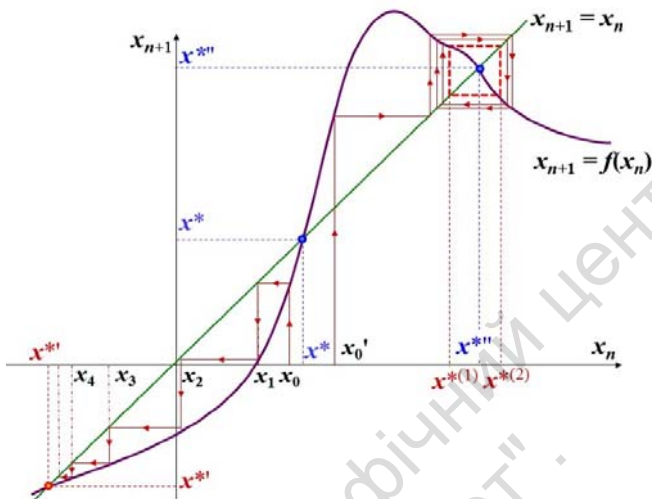


Рис. 4.2. Діаграма Ламерея деякого одновимірного відображення $x_{n+1} = f(x_n)$

Розглядаючи загальні властивості відображень, зупинимось на одновимірних взаємно однозначних відображеннях. Точкове відображення (4.1) називають *взаємно однозначним*, якщо за жодних різних x_1 та x_2 не справджується рівність $f(x_1) = f(x_2)$. Отже, у разі монотонної зміни x функція $f(x)$ теж змінюється монотонно, і для всіх x маємо $f'(x) \geq 0$ або $f'(x) \leq 0$.

Розглянемо відображення, для якого $f'(x) \geq 0$ для будь-якого x . Як приклад, візьмемо функцію, представлену на рис. 4.3. Відображення з такою функцією $f(x)$ має нерухомі точки x_1^* , x_2^* , x_3^* . Легко бачити, що x_2^* – нестійка, а x_1^* і x_3^* – стійкі точки, причому будь-яка початкова точка x_0 у послідовному застосуванні відображення прагне або до x_1^* , якщо $x_0 \in (-\infty, x_2^*)$, або до x_3^* , якщо $x_0 \in (x_2^*, \infty)$. Отже, уся пряма x_n розбивається нестійкою нерухомою точкою x_2^* на ділянці притягання стійких точок x_1^* і x_3^* (рис. 4.3).

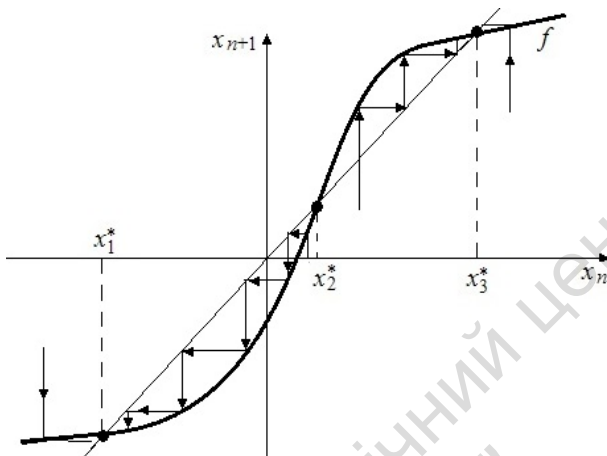


Рис. 4.3. Приклад взаємно однозначного відображення, для якого $f'(x) \geq 0$

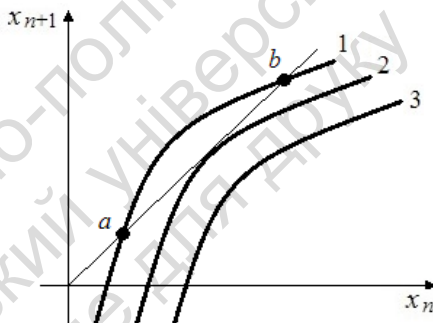


Рис. 4.4. Народження (зникнення) пари нерухомих точок: стійкої b і нестійкої a

Зазначимо особливий випадок, коли графік функції $f(x)$ торкається бісектриси $x_{n+1} = x_n$. Така ситуація, за зміни параметра r у відображенні (4.1), приводить до біфуркації відображення. У результаті біфуркації перебудовується якісна картина динаміки системи. Наприклад випадок, зображений на рис. 4.4, відповідає злиттю і зникненню стійкої та нестійкої нерухомих точок

відображення, якщо за зміни параметра r перехід здійснюється від кривої 1 до кривої 3. За переходу від 3 до 1, навпаки, відбувається виникнення (народження) двох нових нерухомих точок. Якщо розглядати відображення (4.1) як деяке відображення Пуанкаре для системи диференціальних рівнянь, то розглянутому біфуркаційному випадку відповідає народження або зникнення у фазовому просторі системи пари граничних циклів – стійкого та нестійкого.

Приклад біфуркації для взаємно однозначного відображення з $f'(x) \leq 0$ показано на рис. 4.5. Тут зміна стійкості нерухокої точки x^* супроводжується народженням (рис. 4.5, б), або зникненням циклу P^2 (рис. 4.5, а).

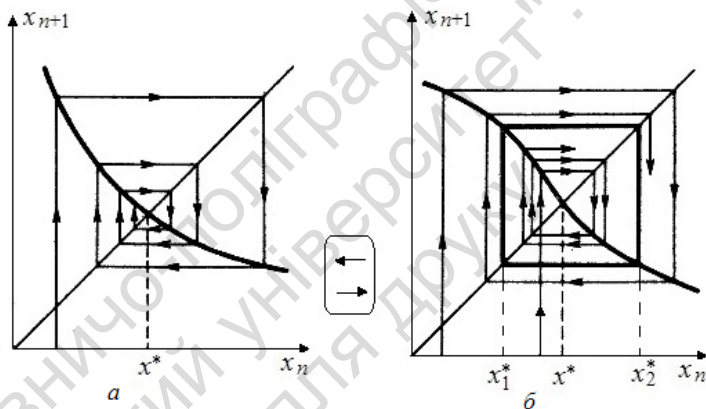


Рис. 4.5. Біфуркація зміни стійкості нерухокої точки x^* , за якої відбувається народження або зникнення циклу P^2

4.2. Логістичне відображення

Розглянемо тепер *невзаємно однозначні* відображення. Характерною особливістю таких відображень є можливість появи дуже складної динаміки – аперіодичних послідовностей x_0, x_1, x_2, \dots , коли за певних початкових умов відображення не

має жодних стійких нерухомих точок будь-якої кратності. Це впливає з такого: якщо ми спробуємо відновити послідовність точок у зворотному напрямку, то оскільки зворотне відображення неоднозначне (напр., двозначне, як у випадку квадратичного відображення), щоразу виникає питання, яку з гілок відображення вибрати.

Прикладом такого відображення є так зване *логістичне відображення*. Логістичне відображення одержало свою назву у зв'язку із задачею про життя популяції тварин (лат. *logistics* – постачання, харчування). Воно є спрощеною моделлю динаміки популяцій. Припустимо, що маємо можливість визначити чисельність популяції, скажімо, щорічно. Нехай x_n – кількість тварин на ізольованій території в році з номером n , поділена на максимальну кількість тварин, яку ця територія здатна прогодувати. Природно очікувати, що чисельність популяції в даний рік – x_{n+1} , залежить від того, скільки тварин було рік тому, тобто від значення x_n . Цю залежність можна визначити логістичним відображенням

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq 1. \quad (4.10)$$

Вочевидь, величина $1 - x_n$ пропорційна кількості наявної їжі. Іншими словами, у міру того, як кількість тварин наближається до допустимого значення (одиниці), кількість їжі, постійно скорочуючись, наближається до нуля. Фізичний зміст параметра r може бути плодючістю популяції. Чим вище значення r , тим швидше населення оправиться після будь-якої катастрофи. Однак, як не дивно, великі значення r якраз і призводять дуже швидко до хаотичних популяцій.

Згідно з побудованою моделлю значення x_n невід'ємні й не перевищують одиниці, тобто $0 \leq x_n \leq 1$. Ця умова забезпечується за зміни параметра r у межах $0 < r \leq 4$. Функція $f(x) = rx(1 - x)$ має максимальне значення $r/4$ при $x = 1/2$.

Дослідимо залежність послідовності $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для різних значень параметра r . За невеликих значень r ($0 \leq r \leq 1$), а це відповідає зниженню кількості тварин із року в рік, $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ незалежно від вибору початкової точки x_0 (рис. 4.6).

Як бачимо, точка $x^* = 0$ є точкою стійкої рівноваги і являє собою аттрактор системи (4.10) при $r < 1$.

Нехай тепер $r > 1$. У цьому випадку послідовність веде себе по-іншому (рис. 4.7): $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ прагне до сталого значення $x^* > 0$. Значення x^* може бути визначене з рівняння $x^* = f(x^*, r)$, тобто

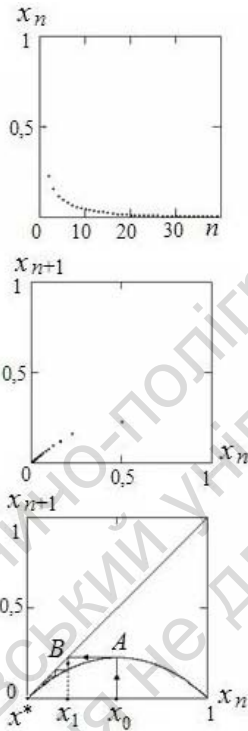
$$x^* = rx^*(1 - x^*). \quad (4.11)$$


Рис. 4.6. Дослідження логістичного відображення при $r = 0,9$ ($r < 1$); $x_0 = 0,5$. Цикл P^1

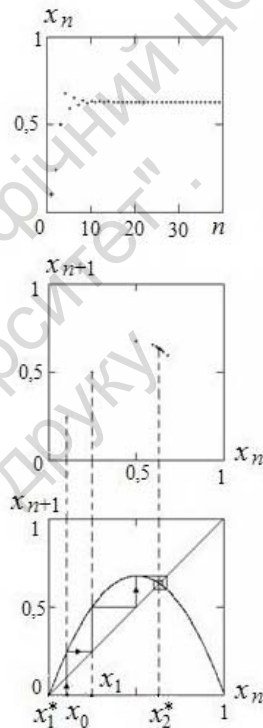


Рис. 4.7. Дослідження логістичного відображення при $r = 2,7$; $x_0 = 0,1$. Цикл P^1

Усі точки, що задовольняють рівняння (4.11), є особливими або нерухомими точками, адже $x_n = x^*$ для будь-якого n , якщо початкова точка $x_0 = x^*$.

Якщо $r < 1$, то квадратичне рівняння (4.11) мало один невід'ємний корінь $x^* = 0$. При $r > 1$ таких коренів уже два: $x_1^* = 0$ та $x_2^* = (r-1)/r$. Умова стійкості нерухомої точки (4.6) для логістичного відображення матиме вигляд

$$|r(1 - 2x^*)| < 1. \quad (4.12)$$

Коли $r < 1$, нерухома точка $x^* = 0$ є згідно з (4.12) стійкою. При $r > 1$ точка $x_1^* = 0$ втрачає стійкість, а для другої нерухомої точки $x_2^* = 1 - 1/r$ критерій стійкості (4.12) дає $|2 - r| < 1$.

Це означає: якщо $1 < r < 3$, то нерухома точка $x_2^* = 1 - 1/r$ стійка і являє собою атрактор для системи (4.10). На рис. 4.7 для значення параметра $r = 2,7$ маємо $x_2^* = 0,6296$. Дані на рис. 4.6 і рис. 4.7 відповідають атрактору з періодом 1, або, інакше, у системі присутній стійкий цикл періоду 1 (його позначають P^1).

Ситуація, зображена на рис. 4.7, не єдино можлива (див. рис. 4.8, 4.9). Справді, вигляд кривої $f(x)$ залежить від параметра r . Змінюючи r , ми змінюємо криву $f(x)$, що може змінити хід ітераційного процесу. Щоб переконатися в цьому, подивимося на рис. 4.8, для якого $r = 3,3$. Тут нерухомі точки відображення (4.10) такі: $x_1^* = 0$ та $x_2^* = (r-1)/r = 0,6969\dots$ – вони є нестійкими.

Проте згідно з рис. 4.8 у відображення з'являються дві особливі точки з абсцисами x_3^* та x_4^* такі, що $x_3^* = f(x_4^*)$ та $x_4^* = f(x_3^*)$. Таким чином, ітерації збігаються то з однією, то з другою точкою (рис. 4.8). Почавши з будь-якої із цих точок, ми через дві ітерації повертаємося до неї. Такі дві точки утворюють атрактор із періодом 2 (позначимо його P^2). Оскільки

$$\begin{aligned} x_3^* &= f(x_4^*) = f(f(x_3^*)) = f^{(2)}(x_3^*), \\ x_4^* &= f(x_3^*) = f(f(x_4^*)) = f^{(2)}(x_4^*), \end{aligned} \quad (4.13)$$

то ці дві точки не є нерухомими точками відображення $f(x)$; вони, як випливає з (4.13), є нерухомими точками функції $g(x) = f(f(x)) = f^{(2)}(x)$, рис. 4.8. Отже, відображення $f^{(2)}$ має чотири нерухомі точки, дві з яких (x_3^* та x_4^*) стійкі.

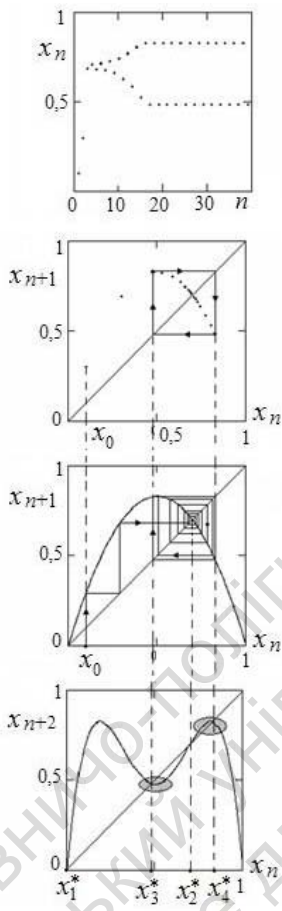


Рис. 4.8. Дослідження логістичного відображення при $r = 3,3$; $x_0 = 0,1$. Цикл P^2

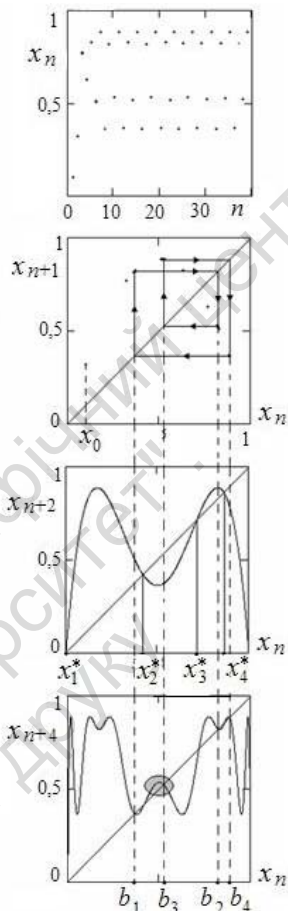


Рис. 4.9. Дослідження логістичного відображення при $r = 3,54$; $x_0 = 0,1$. Цикл P^4

Числове значення нерухомих точок визначається з рівняння $x = f(f(x))$ або $x = rx(1-x)(1-rx(1-x))$. Легко перевірити, що точки $x_1^* = 0$ та $x_2^* = 1 - 1/r$ є коренями записаного рівняння четвертого степеня. Це очевидно також із того, що нерухомі точки відображення $f(x)$ завжди будуть нерухомими точками

будь-якого ітераційного відображення $f^{(n)}$. Знаючи два корені, можна переписати це рівняння у вигляді

$$x(x-1+1/r)[r^2x^2-r(r+1)x+r+1]=0. \quad (4.14)$$

Видно, що умова перетворення на нуль перших двох множників дає вже відомі нам корені $x_1^*=0$ та $x_2^*=1-1/r$, а третій множник має дійсні корні за значення $r \geq 3$:

$$x_{3,4}^* = \frac{1}{2r^2} \left[r(r+1) \pm \sqrt{r^2(r+1)(r-3)} \right]. \quad (4.15)$$

Для випадку на рис. 4.8 ($r=3,3$) знаходимо $x_3^* \approx 0,4794$; $x_4^* \approx 0,8236$. Перевіривши умову (4.9), переконуємося, що нерухомі точки x_3^* та x_4^* відображення $f^{(2)}(x)$ утворюють стійкий цикл періоду 2.

Отже, за збільшення параметра r відбувається неперервний перехід від циклу P^1 (рис. 4.7) до циклу P^2 (рис. 4.8). Сам перехід відбувається за значення $r=r_1=3$. У цей момент стійка нерухома точка відображення f стає нестійкою, і з'являються дві стійкі нерухомі точки відображення $f^{(2)}$. Атрактор із періодом 2 виник замість атрактора із періодом 1: відбулося подвоєння періоду. Таким чином відбулася *біфуркація подвоєння періоду* (її ще називають *субгармонічною біфуркацією*), або *біфуркацією типу вилки* (див. підрозд. 1.11).

Процес плавного переходу від циклу P^1 до циклу P^2 можна зрозуміти за допомогою рис. 4.10, де показано графік ітераційного відображення $x_{n+2}=f^{(2)}(x_n)$ за значень параметра $r=2,7$; $3,0$; $3,3$ (криві 1, 2, 3 відповідно). Важливо, що відображення має вигляд двогорбої кривої. За вибраного значення $r=2,7 < r_1$ (крива 1) діагональ $x_{n+2}=x_n$ перетинає цю криву лише у двох точках $x_1^*=0$ та $x_2^*=1-1/r=1-1/2,7 \approx 0,63$.

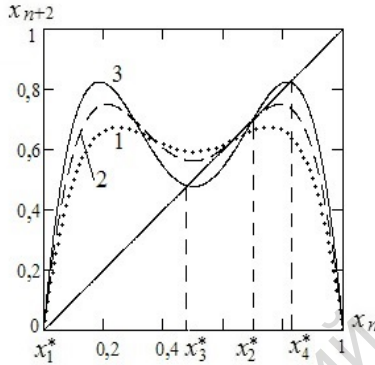


Рис. 4.10. Ітераційне відображення $x_{n+2} = f^{(2)}(x_n)$ за значень параметра $r = 2,7; 3,0; 3,3$ (криві 1, 2, 3 відповідно)

За збільшення r "провал" двогорбої кривої опускається все нижче і нижче. За значення $r = r_1 = 3$ (крива 2) діагональ торкається кривої в точці $x_2^* = 1 - 1/3 \approx 0,667$, а за значень $r = 3,3 > r_1$ (крива 3) точка дотику розпадається на три різні точки x_2^*, x_3^*, x_4^* , дві з яких, а саме x_3^* і x_4^* , утворюють стійкий цикл періоду 2.

Що станеться, якщо надалі збільшувати параметр r ?

Криві f і $f^{(2)}$ поступово деформуються таким чином, що нерухомі точки відображення $f^{(2)}$ також урешті-решт втратять стійкість. Справді, звернемо увагу на овальні області, які виділені навколо нерухомих точок і відображення (рис. 4.8, з). У середині овалів бачимо параболічну криву зі стійкою нерухомою точкою, тобто спостерігається ситуація, аналогічна тій, що зображена на рис. 4.7, для відображення $f!$ Отже, у разі деформування кривої (за рахунок збільшення r) ця нерухома точка стане нестійкою і ми, очевидно, повинні очікувати на явище, подібне до раніше викладеного: заміна нерухомої точки відображення $g = f^{(2)}$ двома точками, які є нерухомими точками функції

$$h(x) = g(g(x)) = f^{(4)}(x). \quad (4.16)$$

Справді, нерухомі точки відображення g з абсциссами x_3^* та x_4^* втрачають стійкість, якщо $r_2 = 3,44948\dots$ При $r > r_2$ у

відображенні g нема стійких нерухомих точок. Проте, як видно з рис. 4.9, для якого $r = 3,54$, відображення $h = f^{(4)}$ серед восьми нерухомих точок уже має чотири стійкі. Вони утворюють атрактор із періодом 4 (рис. 4.9), причому $b_2 = f(b_1)$, $b_3 = f(b_2)$, $b_4 = f(b_3)$, $b_1 = f(b_4)$. Отже, з якої із чотирьох точок ми не розпочали б ітераційний процес, для повернення до неї нам знадобиться чотири послідовні ітерації: період атрактора дорівнює 4. Бачимо, що знову відбулося подвоєння періоду у випадку субгармонічної біфуркації.

За подальшого збільшення параметра r у відображення (4.10) з'являються цикли P^8, P^{16}, \dots і так до нескінченності: ми отримали каскад біфуркацій, кожна з яких супроводжується подвоєнням періоду. Звернемо увагу на овал (рис. 4.9, ε), який виділено навколо однієї з нерухомих точок функції. Крива, що міститься всередині овалу, знову є параболічною кривою, подібно до кривої на рис. 4.8. Це дуже важливий момент: ми зазначаємо аналогію між структурами у всіх масштабах! Як тут не згадати про фрактали – множина Кантора, крива Коха тощо!

Зауважимо, що збільшуючи параметр r , ми спостерігаємо послідовність атракторів із періодами 2^m , $m = 0, 1, 2, \dots$. Значення r , при яких спостерігається цей каскад біфуркацій, мають цікаву особливість: вони утворюють зростаючу послідовність, яка швидко збігається до точки накопичення $r_\infty = 3,569945672\dots$. Наведемо кілька перших наближених числових значень параметра r , які відповідають біфуркації подвоєння періоду (нагадаємо, що $r_1 = 3$):

$$\begin{aligned}
 r_1 < r < 3,449499\dots &= r_2 \text{ – цикл порядку } P^2 = 2; \\
 r_2 < r < 3,544090\dots &= r_3 \text{ – цикл порядку } P^4 = 2^2; \\
 r_3 < r < 3,564407\dots &= r_4 \text{ – цикл порядку } P^8 = 2^3; \\
 r_4 < r < 3,568759\dots &= r_5 \text{ – цикл порядку } P^{16} = 2^4; \\
 r_5 < r < 3,569692\dots &= r_6 \text{ – цикл порядку } P^{32} = 2^5; \\
 r_6 < r < 3,569891\dots &= r_7 \text{ – цикл порядку } P^{64} = 2^6; \\
 r_7 < r < 3,569934\dots &= r_8 \text{ – цикл порядку } P^{128} = 2^7;
 \end{aligned}$$

...

...

При $r > r_\infty$ ітераційний процес перестає демонструвати періодичні властивості. Можна сміливо сказати, що для $r > r_\infty$ відсутність стійких нерухомих точок переводить систему загалом у розряд нестійких, що кардинально змінює характер ітераційного процесу. Прикладом є ситуація, зображена на рис. 4.11, де $r = 3,7$.

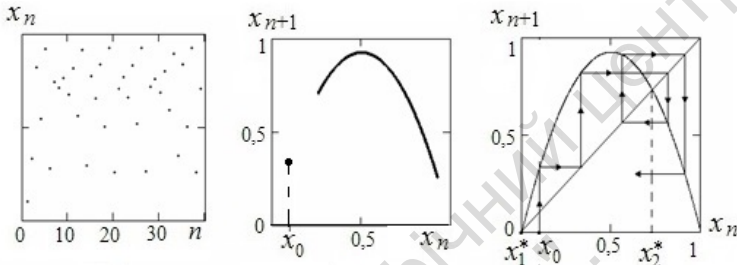


Рис. 4.11. Дослідження логістичного відображення при $r = 3,7$. Хаос

Незважаючи на повну детермінованість відображення (4.10), прогнозувати ітераційний процес практично неможливо. Подібну поведінку називають *хаотичною*. Слід зазначити відмінність графіків на рис. 4.11 від аналогічних графіків на рис. 4.7–4.9 для періодичних режимів у системі. За наявності хаосу в системі точки $\{x_k, x_{k+1}\}$ на рис. 4.11 густо лягають на неперервну криву $f(x)$, у цьому разі, квадратичну параболу. Звичайно, таку характерну особливість потрібно використовувати для дослідження складних динамічних систем, якщо є можливість побудови деякого одновимірного відображення.

4.3. Біфуркаційна діаграма логістичного відображення

Узагальнимо наш аналіз, проведений у попередньому підрозділі. Для цього побудуємо так звану біфуркаційну діаграму (рис. 4.12). На рис. 4.12 уздовж осі абсцис відкладено параметр r , а вздовж осі ординат – значення ітераційного процесу x_n .

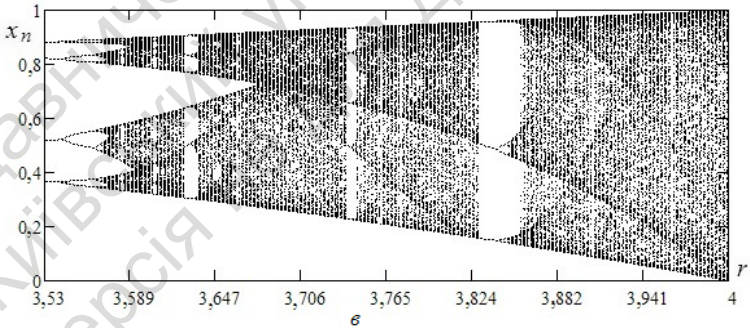
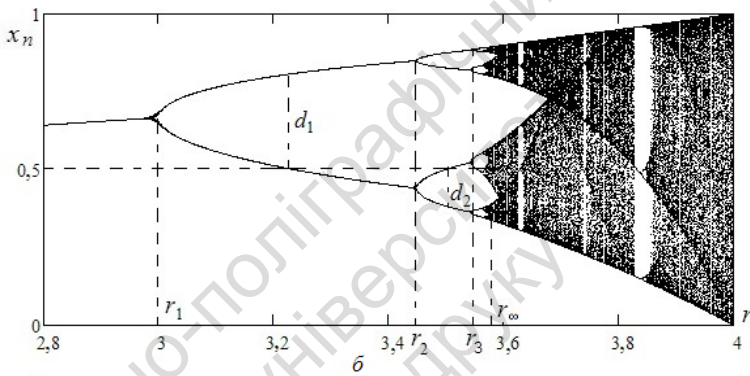
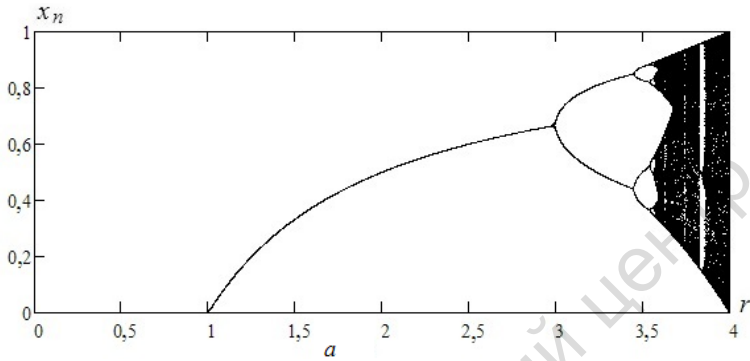


Рис. 4.12. Біфуркаційна діаграма логістичного відображення

Таку біфуркаційну діаграму досить просто побудувати на комп'ютері. Для кожного значення r перші, скажімо 500 ітерацій, не слід враховувати, щоб процес встиг вийти на свій атрак-

тор (який характеризує асимптотичну поведінку, що не включає особливості перехідного періоду), а наступні 100–200 ітерацій нанести на діаграму, щоб показати природу атрактора. Відповідно до рис. 4.12 він складається з однієї точки при значеннях $r < r_1 = 3$, з двох точок при $r_1 < r < r_2$, потім з 4, 8, 16, ... точок аж до області хаосу, де точки атрактора можуть заповнювати цілі смуги. Якщо виділити деяку частину біфуркаційної діаграми і представити її у збільшеному вигляді, як на рис. 4.12, *в*, то картина буде ідентична всій діаграмі на рис. 4.12, *а*, *б*. Це свідчить про фрактальну природу каскаду біфуркацій.

Дослідимо залежність показника Ляпунова для логістичного відображення (4.10). В області зміни параметра $0 < r < 1$ відображення (4.10) має одну нерухому точку $x_1^* = 0$. У цьому випадку, незалежно від початкової точки x_0 , траєкторії процесу ітерації при $n \rightarrow \infty$ прямують до точки $x_1^* = 0$ (див. рис. 4.6). Згідно з формулою (1.96) для обчислення показника Ляпунова, ми розуміємо, що в сумі (1.96) будуть наявні однакові доданки. Справді, адже розрахунки за формулою (1.96) проводять після того, як у процесі ітерацій, система виходить на атрактор. За значень $0 < r < 1$ система (4.10) має атрактор у вигляді нерухомої точки $x_1^* = 0$. Отже, оскільки $f'(x) = r(1 - 2x)$, то похідна $f'(x_1^* = 0) = r$ і показник Ляпунова $\Lambda = \ln r < 0$ для значень параметра $0 < r < 1$.

При значенні $r = 1$ нерухома точка $x_1^* = 0$ втрачає стійкість і показник Ляпунова $\Lambda = 0$. Рівність нулю показника Ляпунова означає якісну зміну вигляду траєкторії ітераційного процесу.

Справді, при $1 < r < 3$ нерухома точка буде нестійкою й атрактором системи стає інша нерухома точка (див. рис. 4.7), а саме $x_2^* = 1 - 1/r$, для якої $f'(x_2^*) = 2 - r$. Тоді показник Ляпунова $\Lambda = \ln|2 - r| < 0$ для параметра $1 < r < 3$.

У точці $r = r_1 = 3$ показник Ляпунова знову дорівнює нулю. У цій точці спостерігається біфуркація подвоєння періоду. За значень $r > 3$ в системі наявний атрактор, який складається з двох нерухомих стійких точок (атрактор періоду 2, див. рис. 4.8).

Тоді в сумі (1.96) після виходу на стаціонарний режим маємо попарно однакові доданки. У цій ситуації показник Ляпунова буде від'ємним, що говорить про стійкий ітераційний процес, і таким він залишається доки не набуде значення $r = r_2 = 3,44948\dots$. За значення $r = r_2 = 3,44948\dots$ показник Ляпунова стає рівним нулю – відбувається біфуркація подвоєння періоду. Така картина повториться і надалі у випадку зростання параметра r аж до його критичного значення $r = r_\infty$. При $r > r_\infty$ маємо $\Lambda > 0$ і поведінка системи (4.10) набуває хаотичного характеру. У "вікнах" періодичності, які бачимо на біфуркаційній діаграмі при $r > r_\infty$ (рис. 4.12), рух системи буде регулярним і, відповідно, показник Ляпунова $\Lambda < 0$.

На рис. 4.13 зображено залежність показника Ляпунова системи (4.10) від параметра r . У процесі розрахунку показника Ляпунова за формулою (1.96) перші 200 ітерацій відкидалися, а кількість врахованих ітерацій $M = 1800$. Подивіться уважно на рис. 4.12 і 4.13. Ви побачите взаємозв'язок між значенням показника Ляпунова і характером ітераційного процесу (регулярний чи хаотичний) у системі (4.10).

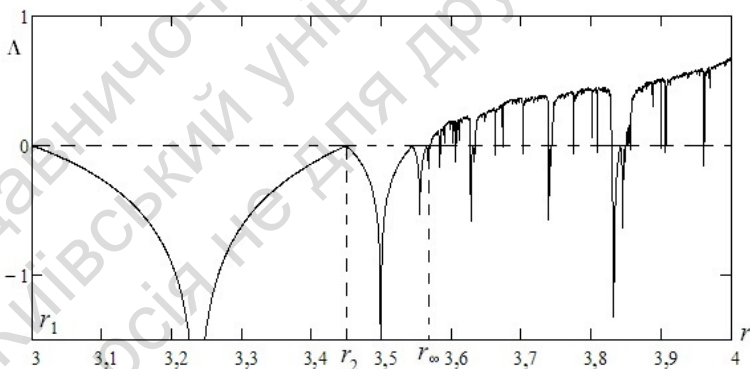


Рис. 4.13. Залежність показника Ляпунова від параметра r для логістичного відображення

Уважне вивчення чисел r_k , які визначають точки біфуркації, показує, що збіжність значень r_k до точки накопичення r_∞ визначається простим законом: різниця значень r_k , які відповідають двом біфуркаціям, що сліднують одна за одною, зменшується кожен раз відповідно до практично сталого коефіцієнта (рис. 4.12):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = \delta. \quad (4.17)$$

Цей фундаментальний результат означає, що коефіцієнт зменшення масштабу δ є універсальна константа

$$\delta = 4,6692016091029909\dots \quad (4.18)$$

Друга універсальна константа задає коефіцієнт зменшення масштабів відстаней уздовж осі ординат (рис. 4.12): відстань d_k від точки з ординатою $1/2$ до найближчої точки циклу P^k визначається як

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = \alpha = 2,50290787509589284\dots \quad (4.19)$$

Такі чудові закономірності відкрито Фейгенбаумом¹ 1978 р. По суті, відкриті закономірності вказують на те, що хаотичний режим при $r > r_\infty$ має певний порядок, який на перший погляд, зрозуміло, не видно.

Особливо варто зазначити, що універсальні числа є універсальними не лише для квадратичних відображень, але і для всіх *унімодальних* відображень, для яких *похідна Шварца* (4.20) від'ємна:

$$Sf \equiv \frac{f'''}{f'} - \frac{2}{3} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 < 0. \quad (4.20)$$

Демо визначення унімодальності відображення. Нехай функція $f(x)$ має єдиний максимум чи мінімум x_c .

Тоді $f'(x_c) = 0$. Таку точку називають *критичною* точкою відображення. Якщо при цьому функція $f(x)$ неперервна і монотонна ліворуч і праворуч від критичної точки, то відображення називають *унімодальним*. Логістичне відображення є унімодальним на всьому інтервалі $[0,1]$, оскільки має від'ємну похідну Шварца, адже третя похідна $f''' = 0$.

¹ Фейгенбаум Мітчелл (1944–2019) – американський фізик і математик.

Як бачимо з рис. 4.12, якщо параметр r змінюється в межах $[r_\infty, 4]$, то серед хаотичної поведінки системи можна спостерігати вікна періодичності, в яких наявні періодичні траєкторії і зрозуміло, що атрактор складається з окремих точок. На рис. 4.12 видно, що найбільше вікно пов'язано із циклом P^3 (існують цикли і з іншими непарними періодами). Стійкі коливання періоду 3 виникають при $\tilde{r} = 3,8285 \dots$. Зі збільшенням параметра r у цьому вікні відбуваються біфуркації $P^3 \rightarrow P^6 \rightarrow P^{12} \rightarrow P^{24} \rightarrow \dots$, які розчиняються в хаосі при $r > 3,8496 \dots$, тобто ми знову маємо справу з каскадом біфуркацій подвоєння періоду. Якщо розглянути еволюцію стійких циклів відображення $f^{(3)}(x)$, то вона виявиться аналогічною тій, яка обговорювалася для каскаду $P^1 \rightarrow P^2 \rightarrow P^4 \rightarrow P^8 \rightarrow \dots$. Її характеризують ті самі константи δ і α . Подібна картина спостерігається і в інших вікнах періодичності – перехід до хаосу відбувається в них відповідно до сценарію Фейгенбаума. Кожне вікно займає певний відрізок на осі абсцис, довжина якого варіює в широких межах, але в більшості випадків відрізки дуже малі. Саме тому їх важко розглянути на рис. 4.12. Найбільше вікно у біфуркаційній діаграмі, яке містить цикл P^3 , визначається нерівністю $3,8285 \dots < r < 3,8496 \dots$.

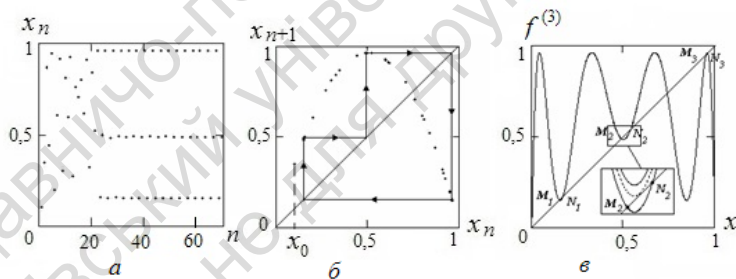


Рис. 4.14. Дослідження логістичного відображення при $r = 3,84$. Цикл P^3

Як виникає з хаотичного стану системи при збільшенні r стійкий цикл P^3 ? На рис. 4.14, *a*, *б* який відповідає $r = 3,84$, можна спостерігати, після перехідного режиму, наявність стійкого циклу P^3 . Розглянемо графік функції $f^{(3)}(x) = f(f(f(x,r)))$ на рис. 4.14, *в* при значенні $r = 3,84$. На фрагменті показано відображення $f^{(3)}(x,r)$ при $r < \tilde{r}$, $r = \tilde{r}$ і $r > \tilde{r}$. Як бачимо, при $r > \tilde{r}$ у кривій $f^{(3)}(x,r)$ з'являються шість точок перетину з прямою

де \rightarrow означає таке: $a \rightarrow b$ (a та b – цілі додатні числа) свідчить про те, що коли динамічна система має цикл періоду a , то вона також має цикл періоду b .

У верхньому рядку (4.21) представлено в порядку зростання всі прості числа, крім 2, у другому рядку – добуток простих чисел на 2, у третьому – добуток простих чисел на 2^2 , в k -му рядку – добуток простих чисел 2^k . В останньому рядку представлено степені двійки.

Із співвідношення порядку (4.21) випливає, що цикл періоду 3 є найскладнішим. У роботі [63] 1975 р. незалежно від Шарковського показано, що коли відображення має цикл періоду 3, то це відображення має цикли всіх (зокрема і як завгодно великих) періодів і незліченну множину неперіодичних траєкторій. Із цієї причини робота була названа "Період три породжує хаос".

Отже, якщо відомо, що неперервне відображення має P^m цикл, то воно має також і цикли, періоди яких відповідають усім числам, що стоять у співвідношенні (4.21) праворуч від m . Теорема Шарковського про існування циклів стала одним із перших результатів, що вказували на існування складної, неперіодичної поведінки одновимірних відображень.

4.5. Дві фундаментальні властивості відображення, які визначають стан хаосу в системі

За зростання параметра r та його прагнення до r_∞ з'являються атрактори з дедалі більшим періодом. Отже, щоб установити відповідну періодичність, за явищем потрібно спостерігати протягом тривалішого (нескінченно великого в точці r_∞) часу. За значень $r > r_\infty$ у хаотичному режимі ітерації функції f породжують послідовність таких значень x , які не повторюються і залежать від початкових умов. Зокрема, дві спочатку близькі точки породжують траєкторії, що розходяться одна з одною.

Провівши числовий експеримент, читач зможе у цьому легко переконатись.

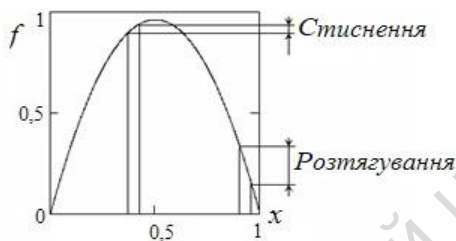


Рис. 4.15. Графік функції $f(x) = rx(1-x)$ при $r = 3,84$

Щоб зрозуміти такі особливості хаотичного режиму, розглянемо графік функції $f(x) = rx(1-x)$ при значенні r , близькому до чотирьох (рис. 4.15) [4]. З'ясуємо, що відбувається, коли x набуває значення на відрізку $[0,1]$. Образ точки $x=0 \in 0$, образ точки $x=1/2 \in 1$. Отже, перша половина відрізка $[0,1/2]$ "розтягується" при відображенні на весь відрізок $[0,1]$. Далі образ точки $x=1 \in 0$ і відображення розтягує другу половину відрізка $[1/2,1]$ на всю довжину відрізка, змінюючи напрямок на протилежний. Інакше висловлюючись, коли x одноразово пробігає одиничний відрізок, образ точки x проходить одиничний відрізок туди й назад. Таку поведінку образу можна розглядати як результат двоякої операції: розтягування у поєднанні зі складанням. Зрозуміло, що для заданої параболічної форми $f(x)$ може бути визначено тільки розтягнення в середньому (рис. 4.15); області поблизу кінців $x=0, x=1$ одиничного відрізка будуть у ході ітерації розтягнуті максимально, тоді як області поблизу максимуму $x=1/2$ схилитимуться до стиснення. Вочевидь, розтягнення у середньому визначається також частотою потраплянь значень ітераційного процесу $\{x_n\}$ у той чи інший інтервал з відрізка $[0, 1]$. Кожна із цих двох операцій веде до такого важливого наслідку.

1. Розтягнення приводить до того, що мала початкова відстань між близькими точками δ_0 множиться при кожній ітерації на коефіцієнт розтягування. Якщо коефіцієнт розтягування (у середньому) більший за одиницю, цей процес призводить до збільшення відстані між траєкторіями цих точок. Як ми знаємо, у лінійному наближенні збільшення цієї відстані відбувається за експоненціальним законом, якщо показник Ляпунова $\Lambda > 0$:

$$\delta_n = \delta_0 \exp(\Lambda n). \quad (4.22)$$

Тут n – номер ітерації відображення. Ситуацію, яка визначається виразом (4.22) при $\Lambda > 0$, називають *суттєвою залежністю від початкових умов* (СЗПУ).

Як ілюстрацію на рис. 4.16 показано еволюцію початкової відстані δ_0 між двома траєкторіями логістичного відображення. Рис. 4.16, *а* відповідає параметру $r = 3,3$, тут розрахунок показника Ляпунова дає значення $\Lambda \approx -0,618$. Як бачимо, оскільки $\Lambda < 0$, то після виходу ітераційного процесу на атрактор значення δ_n зменшується у разі збільшення номера ітерації. Рис. 4.16, *б* відображає ситуацію, коли параметр $r = 3,8$, і даному хаотичному режиму відповідає додатне значення показника Ляпунова $\Lambda \approx +0,43$ і, як наслідок, відстань δ_n зростає. Коли δ_n досягне значення, порівнянного з довжиною відрізка $[0,1]$, настає насичення.

2. Складання, необхідне для того, щоб відстань була порівнянна з обмеженістю області (у цьому випадку відрізок $[0,1]$), призводить до "перемішування" образів різних точок. Воно також є важливою характеристикою хаосу. Саме утворення "складок" не дозволяє однозначно вказати для точки її попередню точку: у кожній точці є два прообрази в попередній ітерації, чотири прообрази ще на одну ітерацію раніше і т. д. Отже, відображення (4.10) не може бути виконане у зворотний бік. Такі відображення називають *незворотними*. Виявляється справедливим загальне твердження: будь-яке неперервне відображення R^1 у R^1 має бути незворотним, щоб воно призводило до хаосу [4].

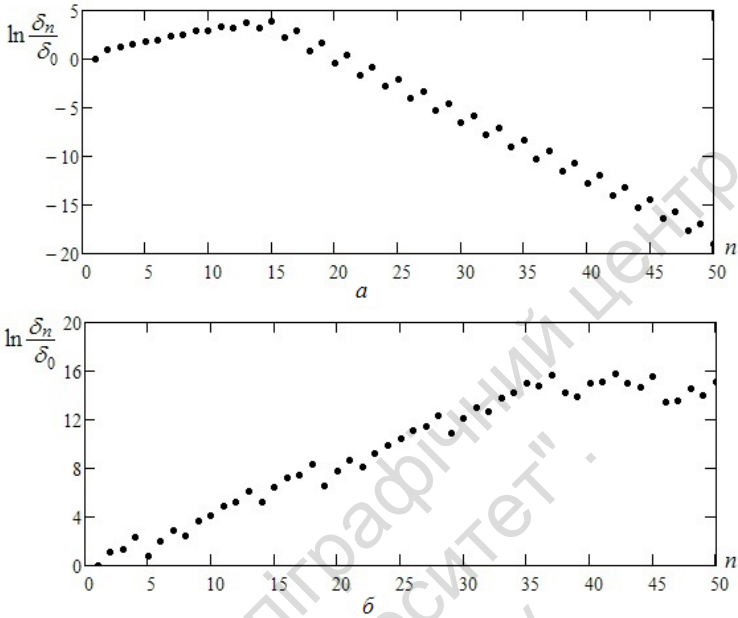


Рис. 4.16. Еволюція відстані δ_n між двома траєкторіями логістичного відображення:

a – якщо $r = 3,3$, $\Lambda \approx -0,62$, $\delta_0 = 10^{-7}$;

b – якщо $r = 3,8$, $\Lambda \approx +0,43$, $\delta_0 = 10^{-7}$

Отже, наше відображення забороняє знання минулих значень x , а також внаслідок СЗПУ – передбачення майбутніх значень x через якийсь інтервал часу. Довготривале передбачення значень x вимагало \bar{b} , щоб початкова умова була відома з нескінченною точністю, оскільки найменша невизначеність у завданні δ_0 призведе до того, що близькі сусідні траєкторії розійдуться. Зрозуміло, нескінченна точність недосяжна практично. Тому, незважаючи на те, що динамічна система описується детермінованим рівнянням (4.10), її еволюція за певних параметрів є принципово непередбачуваною і представляється нам невідповідною і хаотичною. Можна сказати, що наше відображення на відрізку $[0,1]$ має атрактор, який не утримує в собі жодної стійкої траек-

торії: *стійка нестійкість!* Саме так можна визначити явище хаосу в детермінованій системі [4].

Ці висновки, що отримані на основі дослідження логістичного рівняння (4.10), мають загальний характер і справедливі для інших систем, що мають відповідні властивості. Можна впевнено сказати, що детермінованість і хаос не є протилежностями, які взаємно виключають одна одну.

4.6. Шум і біфуркаційне дерево

У реальних системах завжди присутні випадкові флуктуації або шум. Аналіз систем із шумом – непроста задача. Справді, якщо система описується диференціальним рівнянням, не зовсім очевидно, як урахувати у процесі її описування природні шуми. А от для дискретних відображень ця задача значно простіша. Розглядаючи біологічну інтерпретацію логістичного відображення (4.10) $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, уявимо собі, що кількість їжі, яка моделюється величиною $(1 - x_n)$, не однакова з року в рік, а випадково змінюється поблизу деякої сталої величини. Тоді ми приходимо до відображення вигляду

$$x_{n+1} = rx_n(1 - \varepsilon \xi_n - x_n), \quad (4.23)$$

де ε – амплітуда шуму, ξ_n – випадкова послідовність чисел.

На рис. 4.17 побудовано фрагмент біфуркаційної діаграми логістичного відображення за відсутності (рис. 4.17, а) й наявності шуму (рис. 4.17, б). Використано послідовність незалежних випадкових чисел, кожне з яких мало рівномірну щільність імовірності на інтервалі $0,8 \dots 1$.

Можна бачити, що шум "розмиває" гілки дерева. Причому вплив шуму тим сильніший, чим більший період циклу. Отже, яким малим не є шум, він обов'язково зруйнує картину подвоєння періоду поблизу точки біфуркації. Це означає, що в реальних системах завжди спостерігається скінченна кількість подвоєнь періоду (їхня кількість залежить від системи і характеру шуму).

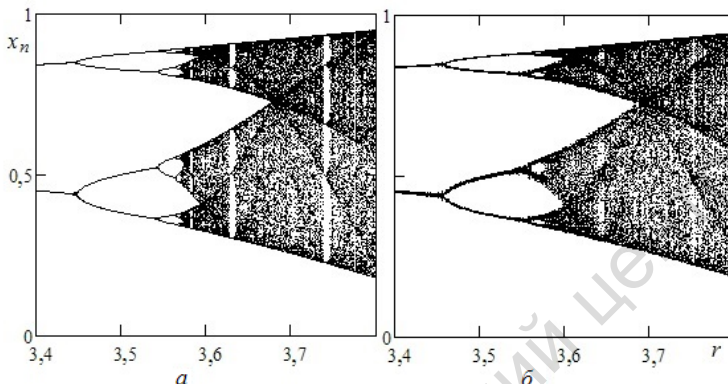


Рис. 4.17. Вплив шуму на біфуркаційне дерево логістичного відображення: *a* – якщо $\varepsilon=0$, *б* – якщо $\varepsilon=3 \cdot 10^{-3}$, $\xi_n=0,8\dots 1$

4.7. Перехід до хаосу через перемежування

Відомо кілька сценаріїв переходу до хаосу. Напевно, найвідоміший із них – це перехід до хаосу через субгармонічний каскад, про який ми вже говорили. Його можна спостерігати в багатьох реальних системах. У цьому підрозділі охарактеризуємо інший шлях переходу до хаотичного режиму.

Як приклад наведемо явище, яке описано у гідродинаміці. Якщо спостерігати за течією рідини досить довго, не змінюючи її параметри, то можна побачити, що у впорядкованому ламінарному потоці раптом з'являються вихори, поведінка яких здається випадковою. Потім картина течії знову стає регулярною до появи наступних вихорів [4, 23]. Це явище отримало назву *перемежування*. Регулярний режим перемежується з "острівцями" хаосу.

Описане явище можна досліджувати на прикладі одновимірного відображення відрізка на себе, наприклад, відображення (4.10).

Але спочатку звернемося до одновимірного відображення

$$x_{n+1} = f(x_n, r) = 1 - \frac{\sqrt{|x_n - r|}}{1 + (x_n - r)^2}. \quad (4.24)$$

Хоча зовнішній вигляд відображення (4.24) складніший, ніж відображення (4.10), аналіз переходу до хаосу тут наочніший.

На рис. 4.18 показано дослідження ітераційного процесу динамічної системи (4.24) для параметра $r = 0,78$. Як видно, характерною рисою функції (2.24) є наявність гострої вершини. Відповідно до рис. 4.18 відображення $f(x)$ має точки перетину з функцією $y = x$. Неважко зрозуміти, що точка M є стійкою, а точки N і L – нестійкими (проаналізуйте це самостійно). Оскільки в основній своїй частині відображення є розтягальним, перехідні процеси в системі можуть бути досить складними. Однак при $t \rightarrow \infty$ всі траєкторії прямують до єдиного атрактора – стійкого періодичного руху, образом якого є стійка нерухома точка (рис. 4.18, точка M).

Далі зменшуватимемо параметр r , щоб ділянка кривої $f(x)$ із точками M і N піднялася над лінією $y = x$. Таку ситуацію зображено на рис. 4.19, де $r = 0,769$. Бачимо, що стійка та нестійка нерухомі точки зближуються, потім зливаються і зникають – стійкий періодичний рух припиняється.

Тут виникає цікава ситуація: безпосередньо за злиттям і зникненням нерухомих точок у фазовому просторі системи формується область, яку можна назвати "коридором", в якому траєкторія перебуває досить довго, характеризуючи регулярний рух у динамічній системі, (рис. 4.19). Це так звана *ламінарна стадія* руху системи. Після проходження цієї області система рухається хаотично, доки знову не потрапить у коридор і т. д. Звернімо увагу на рис. 4.19, де кількість ітерацій становить 1000. Бачимо, як довгі ділянки ламінарної стадії перериваються нетривалим хаотичним рухом.

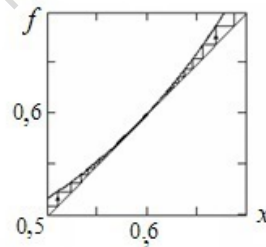
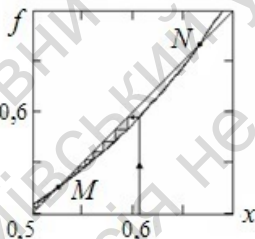
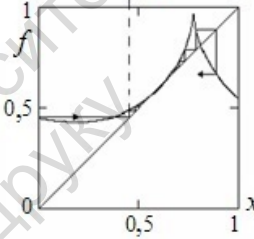
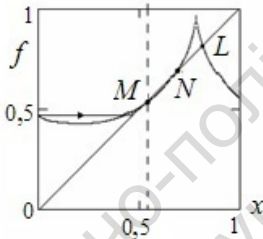
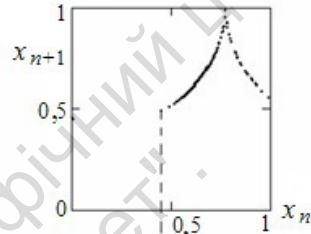
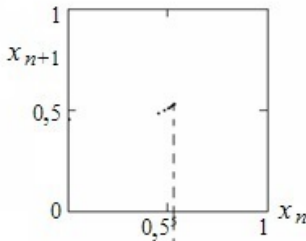
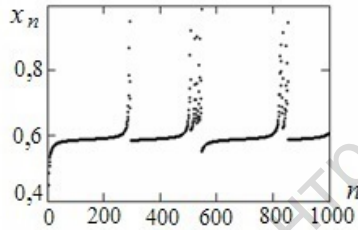
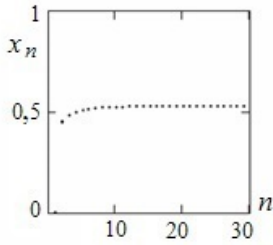


Рис. 4.18. Графіки відображення (4.24) при $r = 0,78$; $x_1 = 0,01$

Рис. 4.19. Графіки відображення (4.24) при $r = 0,769$; $x_1 = 0,001$.
Перемежування

Отже, у нашій простій моделі існує перемежування. Характерним для хаотичного руху є відображення, показане на рис. 4.19:

тут точки щільно лягають на ділянку кривої $f(x)$; подібний характер спостерігаємо на рис. 4.11, де відбувається перехід до хаосу через субгармонічний каскад.

Перехід до хаосу, що пов'язаний із перемежуванням, спостерігається в багатьох системах і ймовірно характерний для багатьох нелінійних середовищ. Слід зазначити, що у деяких фізичних системах за різних значень параметра можна спостерігати різні сценарії початку хаотичного режиму. Прекрасною ілюстрацією є знову ж таки ітераційний процес квадратичного відображення (4.10). Повернемося до найбільшого "вікна періодичності" на біфуркаційній діаграмі (див. рис. 4.12). Тут стійкі коливання періоду 3 виникають при $\tilde{r} \approx 3,8285\dots$. Ми виходили з указанного вікна, рухаючись у бік збільшення параметра $r > \tilde{r}$, отримуючи у цьому разі каскад біфуркацій подвоєння періоду на базі початкового циклу $P^3 \rightarrow P^6 \rightarrow P^{12} \rightarrow \dots$. Вихід із вікна стійкості у бік зменшення параметра, як виявляється, супроводжується виникненням хаосу через перемежування.

Повернемося назад і розглянемо фрагмент на рис. 4.14, *в*. Коли значення параметра r стає меншим за значення \tilde{r} , то виникає ситуація, подібна дослідженій вище під час аналізу системи (4.24), тобто утворюється коридор, у якому рух траєкторії вказує ламінарну стадію динаміки системи (4.10). Це означає, що система тривалий час поводить себе так, ніби в ній був наявний цикл P^3 , оскільки послідовні точки триразових ітерацій відображення $f^{(3)}$ за певну кількість кроків практично не змінюють свого положення. Проте із часом ітерації все ж таки зміщуються і, зрештою, виходять з "коридору" – у системі виникають хаотичні коливання. Однак через якийсь час система знову потрапляє в окіл описаного вище квазірегулярного режиму. Потім ситуація повторюється. Цей процес ми можемо спостерігати на рис. 4.20. Як бачимо, з віддаленням від значення $r = \tilde{r}$ (рис. 4.20, *а*) середня тривалість ламінарних стадій зменшується (рис. 4.20, *б*). Рекомендуємо читачеві самостійно, змінюючи параметр r на невеликому проміжку поблизу зазначених значень, дослідити ланцюжок перетворень в ітераційному процесі: хаос, перемежування хаосу із циклом періоду 3 та стійкий цикл періоду 3.

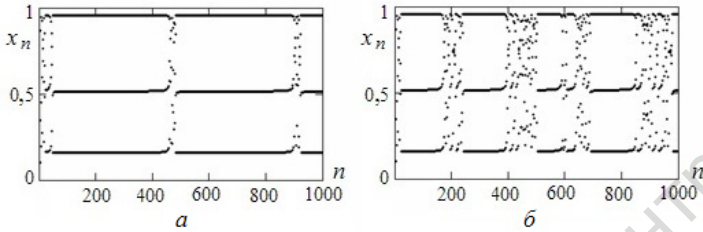


Рис. 4.20. Перемежування в динамічній системі (4.10):
 a – якщо $r = 3,82842$; b – якщо $r = 3,82838$

Звичайно, відкриття сценаріїв переходу від порядку до хаосу стало блискучим успіхом науки. Не важливо, якими рівняннями описується система – у світі є лише кілька універсальних сценаріїв! Вони не залежать від того, яким чином ми спостерігаємо за процесом: чи ми відкриваємо кран, дивлячися, як плавний упорядкований потік перетворюється на хаотичний, турбулентний, або доливаємо розчин у пробірку, де йде хаотична хімічна реакція, що дозволяє милуватися химерною грою кольорів. За різноманіттям виявляється внутрішня єдність нашого світу!

4.8. Хаос у ланцюжкових структурах

Знаменитий своєю акустикою театр у давньогрецькому місті Епідаврї (зберігся в руїнах) збудовано у IV ст. до н. е. Його відкопали з-під шару землі на півострові Пелопоннес 1881 р. Театр має класичну напівкруглу форму – сцена та 34 ряди з кам'яними сидіннями. Пізніше римляни додали ще 21 ряд.

Дивовижна акустика театру дозволяє глядачам в останньому ряду, розташованому на відстані 60 м від сцени, не напружуючись чути акторів. Ці чудові властивості приписували або вітрам, що дмуть від сцени у бік глядачів, або особливому мовному ритму акторів, маски яких сприяли посиленню звуку. Однак усі ці припущення не можуть пояснити, чому так добре чути сучасних акторів, що виступають на цій сцені без жодних масок і темп промови яких відрізняється від прийнятого в давньогрецькому театрі.

Як виявилось розгадка прекрасної акустики театру в Епідаврі пов'язана з його архітектурними особливостями, а саме з періодичною структурою рядів, що піднімаються, і чергуванням на них сидінь.

Слід сказати, що дослідженню процесу поширення хвиль у дискретних і неперервних середовищах різної фізичної природи, параметри яких зазнають періодичних змін, присвячено значну кількість робіт. Однак деякі моменти, пов'язані з граничним переходом від скінченної кількості ланок, які формують середовище, до їхньої нескінченної кількості, ще вимагають осмислення. Тут можливе виникнення нестандартних ситуацій [15], аналізу яких присвячено цей підрозділ.

Під дискретним середовищем розумітимемо сукупність ланок акустичного, механічного або електричного ланцюжка. Використання електроакустичної або електромеханічної системи аналогій дозволяє побудувати електричний аналог акустичної або механічної системи із зосередженими параметрами. Така процедура дуже зручна, тому що введення комплексного імпедансу¹ дозволяє звести аналіз ланцюжкової структури до операцій алгебри з комплексними амплітудами електричного струму і напруги.

Використання поняття вхідного імпедансу також дозволяє з єдиних позицій розглянути такі, здавалося б, далекі одна від одної на перший погляд задачі, як проходження звуку через шарувате середовище, поширення електромагнітної хвилі вздовж дискретно неоднорідної довгої лінії, рух електрона в середовищі зі стрибками потенціалу.

Усі ці задачі, зрештою, зводяться до аналізу ітераційного процесу, який визначає вхідний імпеданс структури залежно від кількості ланок у дискретному ланцюжку чи кількості однорідних шарів неперервного середовища.

Щодо давньогрецького театру, то розмову про гіпотезу, що проливає світло на розгадку причин його чудової акустики, відкладемо до кінця підрозділу.

¹ Комплексний електричний імпеданс (комплексний опір) Z визначають відношенням комплексної амплітуди напруги до комплексної амплітуди сили струму.

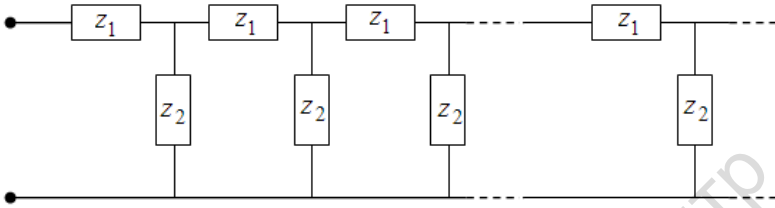


Рис. 4.21. Нескінченний LC -ланцюжок

Звернемося до добре відомої з класичного курсу загальної фізики задачі про імпеданс електричного LC -ланцюжка (по суті йдеться про електричний фільтр), рис. 4.21. На вхід ланцюжка подають гармонічну напругу частотою ω . Імпеданс Z нескінченного ланцюжка може бути визначений у ході ітераційного процесу (отримайте формулу (4.25) самостійно) як

$$Z_{n+1} = f(Z_n), \quad f(Z_n) = z_1 + \frac{Z_n z_2}{Z_n + z_2}, \quad n=1, 2, \dots, \infty, \quad (4.25)$$

де Z_n – імпеданс ланцюжка, що складається з n ланок; z_1 і z_2 – комплексні опори, які утворюють окрему ланку; отже $Z_1 = z_1 + z_2$.

За довільних z_1 і z_2 ітераційний процес (4.25) має нерухому точку \tilde{Z} , яку визначають із рівняння $\tilde{Z} = f(\tilde{Z})$:

$$\tilde{Z} = \frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + z_1 z_2}. \quad (4.26)$$

Якщо нерухома точка \tilde{Z} стійка, то імпеданс Z нескінченного ланцюжка існує і є границею $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \tilde{Z}$. В іншому випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ не існує, а це означає, що нема сенсу говорити про імпеданс нескінченного ланцюжка.

Нагадаємо, що згідно з умовою (4.6), нерухома точка \tilde{Z} ітераційного процесу стійка, якщо $\left| \frac{df(Z_n)}{dZ_n} \right|_{Z_n=\tilde{Z}} < 1$. У випадку ітераційного процесу (4.25) маємо

$$\begin{aligned} \left| \frac{df(Z_n)}{dZ_n} \right|_{Z_n=\tilde{Z}} &= \left| \frac{1}{(1 + \tilde{Z} / z_2)^2} \right| = \\ &= \frac{4}{\left| \left(2 + z_1 / z_2 \pm \sqrt{(z_1 / z_2)^2 + 4z_1 / z_2} \right)^2 \right|}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Введемо позначення $\xi = -z_1 / z_2$ і перепишемо умову стійкості ітераційного процесу у вигляді

$$F(\xi) = \frac{4}{\left| \left(2 - \xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4\xi} \right)^2 \right|} < 1. \quad (4.28)$$

У разі суто уявних величин z_1 і z_2 (ланцюжок складається з ідеальних ємностей та індуктивностей) ξ є дійсною величиною. Якщо ξ дійсне, то функція $F(\xi)$ веде себе в діапазоні $0 \leq \xi \leq 4$ дещо несподівано – не залежить від ξ і точно дорівнює 1 (рис. 4.22).

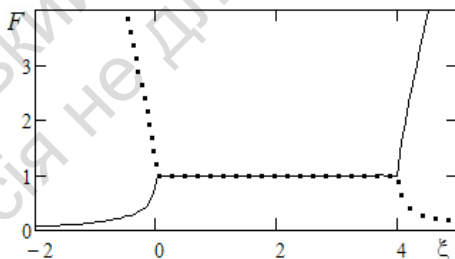


Рис. 4.22. Графік функції $F(\xi)$: суцільна лінія визначає знак плюс у формулі (4.28), точки – знак мінус

Отже, у діапазоні $0 \leq \xi \leq 4$ нерівність (4.28) не виконується, і нерухома точка є нестійкою. Зазначимо, що з появою як завгодно малої дійсної частини у величини z_1 або z_2 умова стійкості виконується завжди. Це пояснюється тим, що система з $F(\xi) = 1$ перебуває на межі стійкості, і досить малого зсуву, щоб ітераційна послідовність (4.25) придбала нерухома стійку точку.

Тому стійка точка існує при $\xi < 0$ і визначається співвідношенням

$$\tilde{Z} = \frac{1}{2} \left(z_1 + \sqrt{z_1^2 + 4z_1z_2} \right), \quad (4.29)$$

а при $\xi > 4$ відповідно маємо

$$\tilde{Z} = \frac{1}{2} \left(z_1 - \sqrt{z_1^2 + 4z_1z_2} \right). \quad (4.30)$$

Розглянемо випадок суто уявних величин z_1 і z_2 з різними знаками, а саме ідеальну індуктивність L , тоді $z_1 = -i\omega L$, та ідеальну ємність C , тоді $z_2 = i/(\omega C)$. У такому випадку величина

$$\xi = -\frac{z_1}{z_2} = \omega^2 LC = 4 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (4.31)$$

Оскільки, у цьому разі, величина ξ додатна, то згідно з формулою (4.30) маємо такий вираз для нерухомої точки:

$$\tilde{Z} = -i \left(\frac{\omega L}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega L}{2} \right)^2 - \frac{L}{C}} \right) = -i \frac{\omega L}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \right). \quad (4.32)$$

Отже при $\xi > 4$, тобто $\omega > \omega_0$, нерухома точка (4.32) стійка і визначає тим самим імпеданс нескінченного ланцюжка. Нерухома стійкої точки за частоти $\omega < \omega_0$ не існує, тому говорити про імпеданс нескінченного ланцюжка не можна.

Звернемося до числових розрахунків. На рис. 4.23 показано хід ітераційного процесу (4.25) для двох ситуацій, коли частота $\omega < \omega_0$ (рис. 4.23, а) та $\omega > \omega_0$ (рис. 4.23, б). Як бачимо, характер ітераційного процесу для двох ситуацій суттєво відрізняється. Якщо за частоти $\omega = 1,7 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1} > \omega_0$ (рис. 4.23, б) ітераційний

процес швидко збігається, що дозволяє визначити імпеданс нескінченного ланцюжка, то за $\omega = 1,02 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1} < \omega_0$ (рис. 4.23, *a*) спостерігається нерегулярний характер процесу, що говорить про відсутність збіжності (для наочності на рис. 4.23, *a* обрано логарифмічний масштаб вздовж осі ординат).

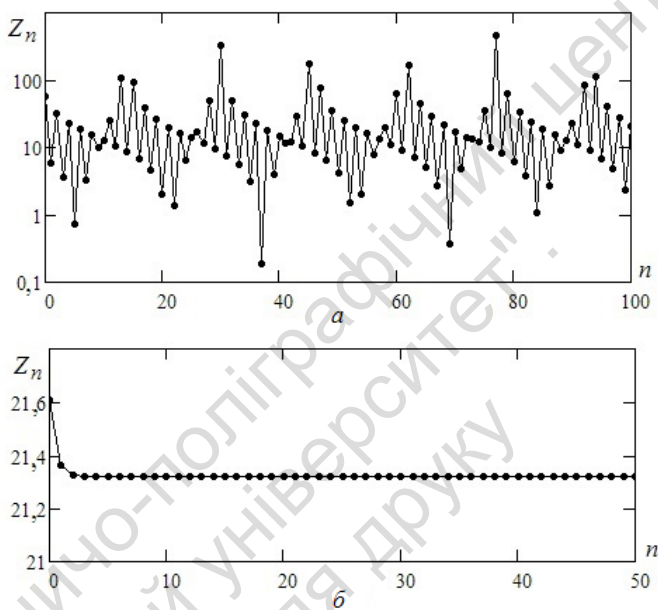


Рис. 4.23. Послідовність значень ітераційного процесу,

$$L = \sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ Гн}, \quad C = 10^{-4} \text{ Ф}, \quad \omega_0 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Гц};$$

a – якщо $\omega = 1,02 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1} < \omega_0$, *б* – якщо $\omega = 1,7 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1} > \omega_0$

Очевидно, слід очікувати, що величина імпедансу Z_n , за фіксованої кількості ітерацій n , для різних значень частоти ω з діапазону $\omega < \omega_0$ істотно відрізнятиметься. Цей висновок ілюструють графіки, зображені на рис. 4.24. Тут в інтервалі частот $\omega < \omega_0$ спостерігаємо значну нерегулярність значень імпедансу, а при $\omega > \omega_0$ маємо плавну зміну величини імпедансу.

Отже, згідно з результатами розрахунків (рис. 4.24), незначні зміни частоти ω в інтервалі $\omega < \omega_0$ призводять до суттєвої зміни ходу ітераційного процесу. Це свідчить про нестійкість траєкторії ітераційного процесу, що є однією з особливостей хаотичного режиму динамічної системи. Кількісною мірою цієї нестійкості є показник Ляпунова, який для одновимірного відображення (4.25), з урахуванням формули (4.27), можна оцінити таким співвідношенням (див. формулу (1.91)):

$$\Lambda \cong \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{df(Z_k)}{dZ_k} \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{1}{(1 + Z_k / z_2)^2} \right|, \quad (4.33)$$

причому кількість ітерацій n має бути достатньо великою.

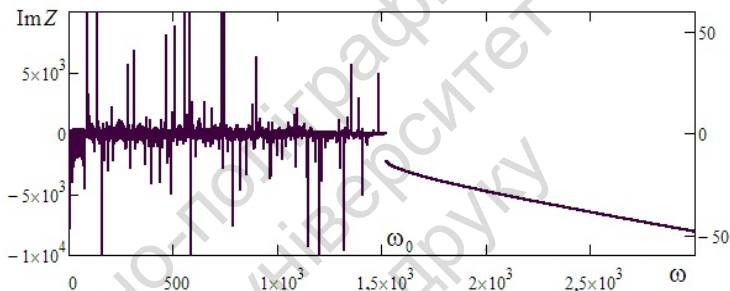


Рис. 4.24. Залежність імпедансу ланцюжка від частоти ω , кількість ланок ланцюжка $n = 300$ (ліва шкала осі ординат відповідає частотам $\omega < \omega_0$, а права – $\omega > \omega_0$, $\omega_0 = 1,5 \times 10^3$ Гц)

Відповідно до розрахунків, проведених за формулою (4.33), на рис. 4.25 показано залежність показника Ляпунова від частоти ω як параметра ітераційного процесу. За частоти $\omega > \omega_0$ показник Ляпунова $\Lambda < 0$, що свідчить про стійкість траєкторій ітераційного процесу, його збіжність, а отже, з фізичної погляду, існування імпедансу нескінченного LC -ланцюжка. В інтервалі частот $\omega < \omega_0$ показник Ляпунова може бути і $\Lambda > 0$, і $\Lambda < 0$, дорівнюючи малим за абсолютною величиною значенням. На цих частотах ітераційний процес носить хаотичний характер із наявніс-

тю циклів різних періодів. Тому немає сенсу говорити про імпеданс нескінченного LC -ланцюжка для даного інтервалу частот.

Як приклад вікна періодичності на рис. 4.26, *а* показано хід ітераційного процесу при $\omega = 760\text{с}^{-1}$ (тут величина $\Lambda = -0,031$, рис. 4.25). Як бачимо, спостерігається цикл періоду 3, наявність якого ілюструє відображення $Z_{n+1} = f(Z_n)$ на рис. 4.26, *б*. Присутність циклу періоду 3 говорить про можливість режиму хаосу (див. підрозд. 4.4).

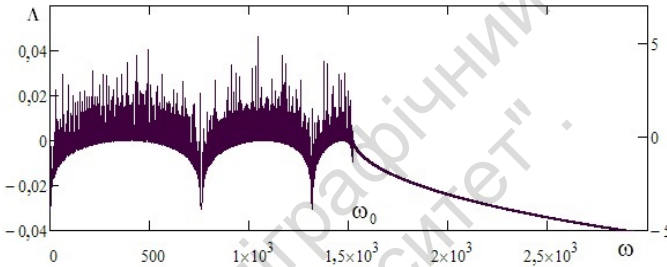


Рис. 4.25. Залежність показника Ляпунова від частоти ω , кількість ітерацій $n = 300$ (ліва шкала осі ординат відповідає частотам $\omega < \omega_0$, а права – $\omega > \omega_0$, $\omega_0 = 1,5 \times 10^3$ Гц)

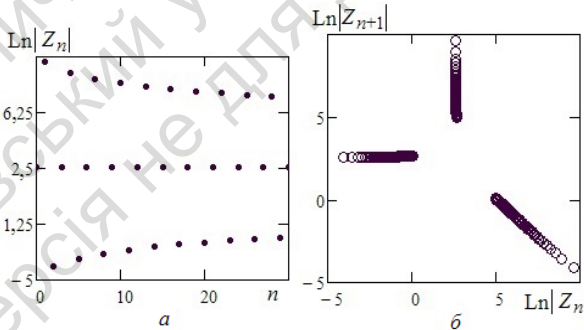


Рис. 4.26. Послідовність значень ітераційного процесу (*а*) і відображення $Z_{n+1} = f(Z_n)$ (*б*): $\omega = 760\text{с}^{-1}$, $\Lambda = -0,031$

Цікавим є таке питання: чи зміниться характер ітераційного процесу (4.25), якщо величини L і C елементів ланцюжка мають випадковий розкид? Відповідь на це питання дає графік на рис. 4.27, на якому, аналогічно рис. 4.25, наведено залежність імпедансу ланцюжка від частоти ω за наявності випадкового розкиду величин L і C в інтервалі $\pm 10\%$. Як бачимо, характер ітераційного процесу не зазнав змін, як і раніше, величина ω_0 поділяє частотний діапазон на область існування імпедансу нескінченного LC -ланцюжка ($\omega > \omega_0$) та область його відсутності ($\omega < \omega_0$).

Проведене дослідження ітераційного процесу (4.25) дозволяє сказати, що за частоти $\omega > \omega_0$ імпеданс нескінченного LC -ланцюжка існує, а на частотах $\omega < \omega_0$ говорити про його величину немає сенсу.

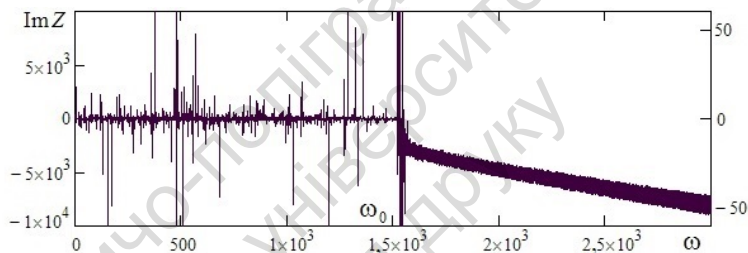


Рис. 4.27. Залежність імпедансу ланцюжка від частоти ω , тут $n = 300$, інтервал випадкового розкиду величин L і C становить $\pm 10\%$ (ліва шкала осі ординат відповідає частотам $\omega < \omega_0$, а права – $\omega > \omega_0$, $\omega_0 = 1,5 \times 10^3$ Гц)

Насправді, як відомо [28, с. 323–325], для скінченного фільтра з суто уявними елементами існують два розв'язки, що зв'язують напруги на вході $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ і на виході $U_n(t)$. Один із них справедливий для діапазону пропускання фільтра ($\omega < \omega_0$) і визначає амплітуду сигналу на виході фільтра. За частоти ($\omega \ll \omega_0$) маємо $U_n(t) \approx U_0 \cos(\omega t)$, тобто фільтр із суто реактивних елементів скінченної кількості пропускає сигнал без спо-

творень. Для інших частот із діапазону $\omega < \omega_0$ ланцюжок пропускає нерівномірно, але "запирання" не наступає.

Інший розв'язок, справедливий у діапазоні $\omega > \omega_0$, визначає амплітуду на виході фільтра, яка експоненціально зменшується зі збільшенням кількості ланок n , і за великої кількості ланок ланцюжок практично не пропускає сигнал.

Повернемося тепер до давньогрецького театру (рис. 4.28). Автори роботи [72] вважають, що ключовим фактором, який визначає прекрасну акустику театру, є конструкція у вигляді рядів, що піднімаються, і чергування на них сидінь. Ця структура є акустичним фільтром, який пригнічує низькочастотні звуки, що визначають основну складову фоновому шуму, і жодним чином не впливає на звуки високої частоти голосів акторів. Випадкова така конструкція або є результатом складних розрахунків, навряд чи вдасться дізнатися.

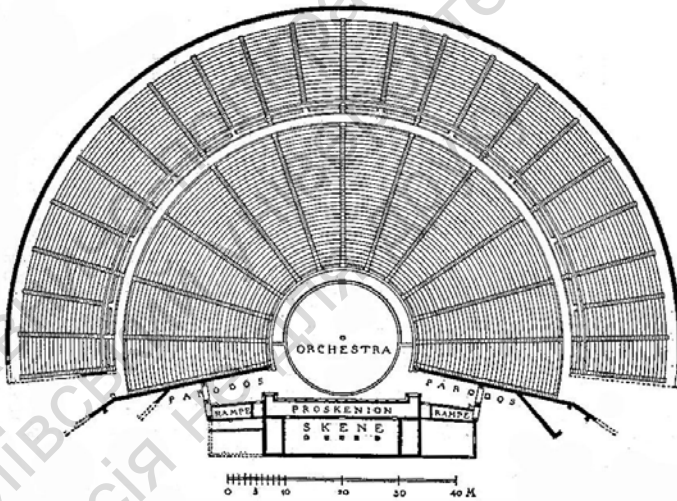


Рис. 4.28. Амфітеатр в Епідаврї.

Архітектор Поліклет Молодший (350–330 до н. е.)

Розрахунки показали, що рельєфна поверхня амфітеатру, утворена сукупністю рядів і сидінь, пригнічує звуки частотою, нижчою за 500 Гц. Більшість акустичного шуму навколо театру

належить саме до низькочастотних звуків (напр., шум листя). На цьому фоні добре виділяються голоси акторів з їхньою основною високочастотною складовою. Утім низькі частоти є у будь-якому голосі. Проте звуження смуги звукового сигналу з будь-якої з периферійних зон частотного спектра мови не перешкоджає сприйняттю інформації мовного сигналу, тобто людський мозок може відновити початковий звуковий сигнал навіть за відсутності низьких частот.

Більшість сучасних театрів і стадіонів покладаються на системи озвучування. Із цим не згодні автори описаної гіпотези – вони впевнені, що для відкритих арен слід звертати увагу на конструкцію амфітеатру, що є природним фільтром.

4.9. Явище детермінованого хаосу в самодуальних середовищах

У цьому підрозділі за допомогою одновимірних відображень розглянемо явище, що належить до електродинаміки неоднорідних середовищ, у якому виникають елементи динамічного хаосу та фрактальність. Ітиметься про двовимірні двофазні макроскопічно неоднорідні середовища [15]. Під *фазою* у цьому разі розумітимемо сукупність ділянок одного сорту, відокремлених від інших ділянок межею. Кожна фаза визначається своїм набором макроскопічних параметрів (провідністю, діелектричною проникністю тощо). Нехай одна з фаз, яку називатимемо чорною, має провідність σ_1 , а друга (біла) – σ_2 . Важливими характеристиками неоднорідних середовищ є їхні інтегральні властивості. У випадку, коли йдеться про провідні середовища, – це *ефективна провідність* σ_e .

Відповідно до визначення ефективна провідність σ_e пов'язує між собою середні за об'ємом напруженість поля $\langle E \rangle$ та густину струму $\langle j \rangle$:

$$\langle j \rangle = \sigma_e \langle E \rangle, \quad (4.34)$$

де $\langle \dots \rangle = \frac{1}{V} \int \dots dV$, V – об'єм усереднення. Причому передбачено,

що характерний розмір усереднення $L \cong (V)^{1/3}$ набагато більший за характерний розмір неоднорідності. Точніше, цей розмір має бути більшим за так званий *кореляційний радіус* ξ , тобто відстань, на якій відбувається *самоусереднення* ефективних властивостей, у нашому випадку – *ефективної провідності*. Під самоусередненням розуміють таке: обчислюючи для довільно взятої реалізації будь-яку величину, що характеризує систему загалом, не потрібно додаткового усереднення за реалізаціями. Можна показати, що у процесі вимірювання провідності зразка неоднорідного середовища досить великого розміру вимірюють саме ефективну провідність.

За значень провідності фаз σ_1 і σ_2 ефективна провідність σ_e буде різною для різного геометричного розташування фаз. Проте існує кілька досить загальних ситуацій розташування фаз, у яких σ_e не залежить від конкретних геометричних деталей і визначається лише самими значеннями провідності фаз σ_1 і σ_2 , а також концентрацією p фази з провідністю σ_1 (концентрація білої фази з провідністю σ_2 дорівнює $1 - p$). Така універсальна поведінка спостерігається поблизу і на самому *порозі протікання*.

У авторів немає можливості викласти тут навіть невеликий вступ у теорію протікання. Дамо лише деякі пояснення. Теорія протікання розглядає геометричні та фізичні властивості двофазних випадково неоднорідних середовищ поблизу особливого значення концентрації, що називається *порогом протікання* p_c . За малих значень концентрації чорної фази p у випадково неоднорідному середовищі "шматочки" чорної фази розкидані хаотично. Хоча деякі з них об'єднуються в загальний "шматочок", серед них немає такого *кластера* (англ. *cluster* – скупчення) чорної фази, по якому можна пройти через усю систему. У процесі збільшення концентрації до певного значення такий кластер виникає. Це значення концентрації і називають порогом протікання. Геометричне пояснення порога протікання можна на-

повнити фізичним змістом. Якщо чорна фаза має скінченну провідність σ_1 , а провідність білої фази практично $\sigma_2 = 0$, то у переході концентрації через поріг протікання в системі вперше виникає провідність. Отже, ефективна провідність такого неоднорідного середовища, нижча за поріг протікання, дорівнює нулю, а вища за поріг протікання збільшуватиметься зі зростанням концентрації чорної фази.

Розглянемо випадки, коли у двовимірному двофазному середовищі поріг протікання $p_c = 1/2$. У такій ситуації чорна та біла фази є "рівноправними". Це означає, що під час взаємної заміни фаз $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ (чорна міняється місцями з білою, позитивне зображення замінюється на негативне) ефективна провідність σ_e не змінюється. Такі середовища прийнято називати *самодуальними*, або інакше *D-середовищами* (дуалізм, від лат. *dualis* – двоякий). Можлива безліч реалізацій *D-середовищ*. Наприклад, середовище зі структурою шахівниці, де чорні клітини – чорна фаза, білі – біла фаза. Ще один приклад *D-середовища* показано на рис. 4.29.



Рис. 4.29. Двофазне дуальне середовище: зверху – "основне" середовище, знизу – дуальне до нього. Областям із провідністю σ_1 (σ_2) в "основному" середовищі відповідають області σ_2 (σ_1) у дуальному

Чудовою властивістю *D-середовищ* є те, що для них, незалежно від деталей геометрії розміщення фаз, ефективна провідність σ_e має одне і те саме значення:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (4.35)$$

причому (4.35) – це точний вираз, справедливий для довільного відношення σ_1 / σ_2 . Властивості D -середовищ вперше досліджено Дихне¹; 1970 р. він отримав формулу (4.35) [14].

Розглянемо один із можливих шляхів побудови D -середовища, а саме ієрархічну побудову. Таке D -середовище отримуємо у результаті послідовності проходження етапів. Нехай є два однорідні середовища з провідністю σ_1 і σ_2 . На першому етапі з них нарізають смужки і складають плоскошарувате середовище (рис. 4.30). Далі здійснюють граничний перехід, спрямувавши товщини смужок δ до нуля. У результаті неоднорідне середовище перетворюється на однорідне, але анізотропне середовище. Такий процес можна назвати *гомогенізацією* (грец. ομογενής – однорідний).

Ефективну провідність такого "монокристал" у двох взаємно перпендикулярних напрямках визначають за відомими формулами для провідності ланцюга у разі паралельного й послідовного з'єднань елементів (рис. 4.30):

$$\sigma_{\parallel}^{(1)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma_{\perp}^{(1)} = 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (4.36)$$

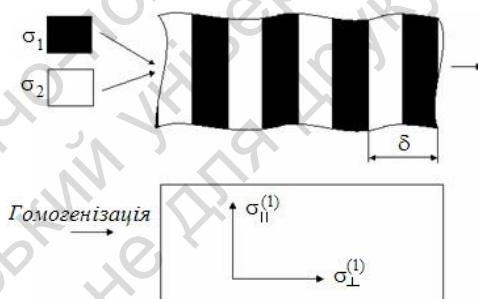


Рис. 4.30. Схема першого етапу побудови D -середовища

Назвемо отриманий на першому етапі побудови D -середовища "монокристал", "монокристалом" першого роду. На другому етапі (рис. 4.31) з "монокристал" першого роду нарізають смужки вздовж напрямків, пов'язаних із визначенням ефективної

¹ Дихне Олександр Михайлович (1933–2005) – радянський фізик.

провідності $\sigma_{\parallel}^{(1)}$ і $\sigma_{\perp}^{(1)}$. З них знову збирають нове плоскошарувате середовище, відтак проводять процедуру гомогенізації, і в результаті отримують "монокристал" другого роду (рис. 4.31).

На n -му етапі побудови для компонент тензора ефективної провідності маємо такі вирази:

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} = \frac{\sigma_{\parallel}^{(n)} + \sigma_{\perp}^{(n)}}{2}, \quad \sigma_{\perp}^{(n+1)} = 2 \frac{\sigma_{\parallel}^{(n)} \sigma_{\perp}^{(n)}}{\sigma_{\parallel}^{(n)} + \sigma_{\perp}^{(n)}}. \quad (4.37)$$

Неважко помітити, що ітераційна процедура (4.37) має інваріант (від лат. *invariants* – незмінний):

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} \sigma_{\perp}^{(n+1)} = \sigma_{\parallel}^{(n)} \sigma_{\perp}^{(n)} = \sigma_1 \sigma_2 = I. \quad (4.38)$$

Відповідно до (4.38) на кожному етапі (для кожного номера n) добуток головних компонент тензора ефективної провідності не залежить від номера n . З урахуванням (4.38) формулу (4.37) можна переписати у вигляді

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{\parallel}^{(n)} + \frac{I}{\sigma_{\parallel}^{(n)}} \right), \quad \sigma_{\perp}^{(n+1)} = \frac{I}{\sigma_{\parallel}^{(n+1)}}, \quad (4.39)$$

де значення $\sigma_{\parallel}^{(1)}$ визначено виразом (4.36).

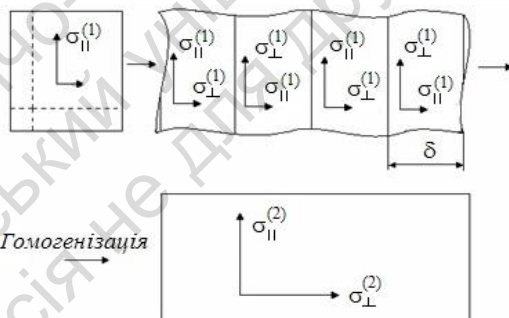


Рис. 4.31. Схема другого етапу побудови D -середовища

Ітераційний процес (4.39), який можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{I}{x_n} \right),$$

це добре відомий у математиці алгоритм зна-

ходження кореня квадратного $x = \sqrt{I}$ ($I \geq 0$) методом Ньютона. Нагадаємо цей алгоритм.

Нехай задано дійсну функцію $f(x)$, для якої відомо наближене значення її кореня x_1 (тобто розв'язку рівняння $f(x) = 0$), а також $f(x_1)$ і $f'(x_1)$. Тоді, проводячи дотичну до графіка функції $f(x)$ у точці x_1 і визначаючи її перетин з віссю Ox , отримуємо уточнене значення кореня x_2 (рис. 4.32).

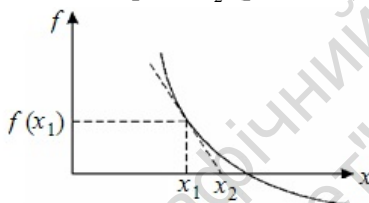


Рис. 4.32. Ілюстрація до використання методу Ньютона

Оскільки рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці x_1 має вигляд

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1), \quad (4.40)$$

то, прирівнюючи y до нуля, отримуємо, що уточнене значення кореня x_2 пов'язане з попереднім значенням x_1 співвідношенням

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (4.41)$$

Далі, беручи значення x_2 як наближене значення кореня і повторюючи цей алгоритм, знаходимо наступне значення x_3 і т. д. Цей процес швидко збігається до шуканого значення кореня.

Для пошуку кореня квадратного $x = \sqrt{I}$ ($I \geq 0$) слід визначити функцію $f(I, x) \equiv x^2 - I$, тоді похідна $f'_x(I, x) = 2x$. Згідно з формулою (4.41) маємо вираз, аналогічний ітераційному процесу (4.39):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - I}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{I}{x_n} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.42)$$

Ілюстрацією до сказаного є рис. 4.33, на якому зображено ітерації Ньютона для обчислення $\sqrt{25}$ (на рис. 4.33, *а* побудовано діаграму Ламерея, а на рис. 4.33, *б* наведено послідовність значень x_n).

Алгоритм Ньютона також ефективний і для комплексних чисел. Це означає, що, стартувавши безпосередньо близько від значення кореня рівняння $f(z) = 0$, ми, використавши ітераційний алгоритм

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad (4.43)$$

отримуємо послідовність комплексних чисел, яка швидко збігається до цього кореня.

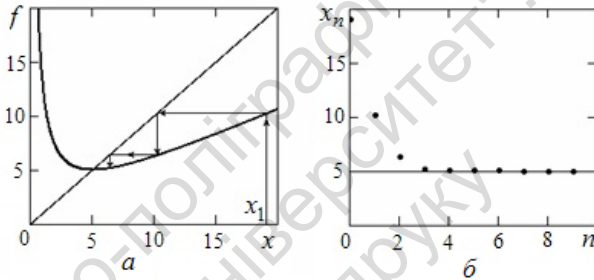


Рис. 4.33. Дослідження відображення (4.42), $I = 25$, $x_1 = 19$:

а – діаграма Ламерея, *б* – послідовність значень x_n

Спрямуємо $n \rightarrow \infty$ в ітераційному процесі (4.39). Тоді згідно з (4.39) ефективна провідність D -середовища дорівнює $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\parallel}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\perp}^{(n)} = \sigma_e = \sqrt{I}$. Значення інваріанта визначено співвідношенням (4.38), тому ефективна провідність має вигляд

$$\sigma_e \sigma_e = \sigma_1 \sigma_2, \quad \sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (4.44)$$

що відповідає формулі (4.35) для D -середовища.

Для постійного струму провідність є дійсною величиною. Для змінного струму провідність σ стає комплексною величиною. У цьому випадку знак уявної частини σ описує ємнісні або індуктивні властивості елементів електричного кола.

На практиці вдається створювати двовимірні двофазні плівки, у яких одна з фаз має додатну уявну частину провідності, а друга – від'ємну. Причому за абсолютною величиною уявної частини провідності можуть значно перевершувати відповідні дійсні частини. Прикладом такого середовища є плівка, що складається з металевих острівців, розділених діелектричними областями. Металеві частини плівки (провідність σ_1) мають індуктивність, а діелектричні області (провідність σ_2 , часто це просто повітря) – ємність. У випадку, коли метал "добрий" дійсна частина його провідності, відповідальна за дисипацію енергії, мала порівняно з уявною частиною. Виявляється, що в таких плівках можуть спостерігатися аномально високі просторові флукутації локальних електричних полів i , як наслідок, аномально високе поглинання.

Розглянемо це цікаве явище детальніше. Нехай $\sigma_1 = \text{Re}\sigma_1 - iy$, $\sigma_2 = \text{Re}\sigma_2 + ix$, ($x \geq 0, y \geq 0$). Перша фаза – метал, тут уявна частина провідності "відповідає" за індуктивність. Друга фаза – діелектрик, уявна частина характеризує діелектричну проникність. У разі ідеальних металу та діелектрика маємо $\sigma_1 = -iy$, $\sigma_2 = ix$. Метод, яким отримано вираз (4.35), дозволяє розглянути випадок комплексної провідності. Тоді значення ефективної провідності в цій ситуації таке:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{(-iy)(ix)} = \sqrt{xy}. \quad (4.45)$$

З (4.45) слідує парадоксальний висновок: провідність середовища, що складається із суто уявних елементів (кожна фаза не поглинає енергію), є дійсною, тобто, середовище енергію поглинає. Цей парадокс можна розкрити, звернувшись до ієрархічної побудови D -середовища, розглянутої вище. Позначимо

$$\sigma_{\parallel}^{(n)} = iX_n, \quad \sigma_{\perp}^{(n)} = -iY_n, \quad (4.46)$$

де ми врахували, що провідність кожної з фаз на довільному n -му етапі побудови є уявною. Тоді замість (4.39) отримаємо

$$iX_{n+1} = \frac{1}{2} \left(iX_n + \frac{I}{iX_n} \right), \quad (4.47)$$

де, як і раніше, $I = xy > 0$.

Вираз (4.47) зручніше записати у вигляді

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} \left(X_n - \frac{I}{X_n} \right). \quad (4.48)$$

Відображення (4.48) відрізняється від (4.42) "всього лише" знаком. Однак це "всього лише" повністю змінює поведінку ітераційного процесу, рис. 4.34 (порівняйте з рис. 4.33). На рис. 4.34, *а* побудовано діаграму Ламерея, а на рис. 4.34, *б* наведено послідовність значень X_n . Як видно з рис. 4.34, ітерації не збігаються.

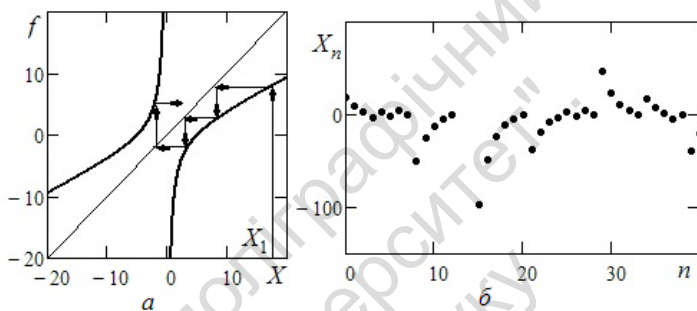


Рис. 4.34. Дослідження відображення (4.48), $I = 25$, $X_1 = 19$:
а – діаграма Ламерея, *б* – послідовність значень X_n

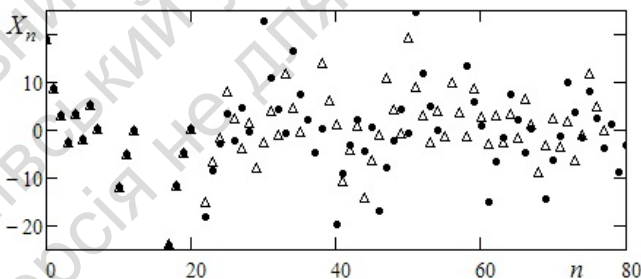


Рис. 4.35. Ітераційний процес відображення (4.48)
для двох на початку близьких точок:
 $X_1 = 19$ (точки), $X_1 = 19,000001$ (трикутники)

Додатковим до рис. 4.34 слугує рис. 4.35, на якому зображено ітераційний процес для двох на початку близьких точок. Наочно видно, що внаслідок СЗПУ (див. підрозд. 4.5) ітерації початкових точок швидко розбігаються і "ніяк не можуть вирішити, куди ж їм рухатися". Отже, у системі наявний режим динамічного хаосу.

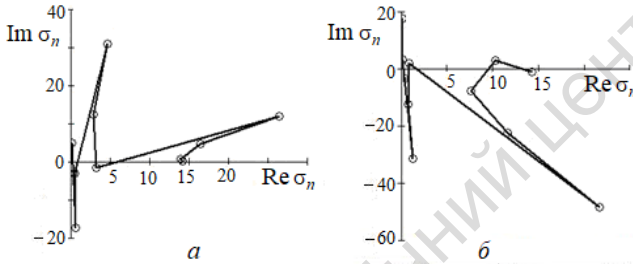


Рис. 4.36. Графіки послідовності значень σ_n відображення (4.39):

a – якщо $\sigma_1 = 0,1 - i10$, $\sigma_2 = 0,1 + i20$;

б – якщо $\sigma_1 = 0,038 - i5$, $\sigma_2 = 0,1 + i40$

Пояснимо далі, яким чином у D -середовищах при прагненні кореляційного радіуса ξ до нескінченності й $\text{Re } \sigma_{1,2} = 0$ з'являється поглинання, тобто дійсне значення ефективної провідності. Відповідь полягає у прямуванні кореляційного радіуса $\xi \rightarrow \infty$ та існуванні флуктуацій провідності, які призводять до появи малих значень дійсної частини провідності. Додавання до σ_1 або σ_2 , як завгодно малої, дійсної частини (флуктуації) робить розглянутий вище ітераційний процес (4.48) стійким. Цей ітераційний процес тепер збігається до дійсного значення

$$\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{(\text{Re } \sigma_1 + i \text{Im } \sigma_1)(\text{Re } \sigma_2 + i \text{Im } \sigma_2)} \approx \sqrt{-\text{Im } \sigma_1 \text{Im } \sigma_2},$$

в якому можна знехтувати малими дійсними величинами. Ілюстрацією сказаного є рис. 4.36, *a* і рис. 4.36, *б*. Тут показано два варіанти ітераційного процесу (4.39) при різних початкових значеннях провідності σ_1 і σ_2 з малими їхніми дійсними частинами. Причому значення σ_1 і σ_2 вибрані так, що інваріант I ви-

являється однаковим для двох варіантів значень провідності σ_1 і σ_2 , а саме $I = \sigma_1 \sigma_2 \approx -\text{Im} \sigma_1 \text{Im} \sigma_2 = 200$. Для зручності сприйняття ітераційного процесу значення σ_n (показано на площині $(\text{Re} \sigma_n, \text{Im} \sigma_n)$ кружками) з'єднані відрізками прямих ліній. Як видно, малі флуктуації дійсних частин провідності σ_1 і σ_2 виводять ітераційний процес з уявної осі $\text{Im} \sigma$, де ітерації робили хаотичні стрибки, на траєкторію, що збігається до дійсної осі в точці

$$\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \approx \sqrt{-\text{Im} \sigma_1 \text{Im} \sigma_2} = \sqrt{200} \approx 14.$$

Така поведінка ітераційного процесу забезпечується за рахунок виконання двох граничних переходів $\xi \rightarrow \infty$ і $\text{Re} \sigma_{1,2} \rightarrow 0$, причому їх не можна міняти місцями.

А якою є ситуація для середовища скінченних розмірів? Тут важко дати однозначну відповідь. Зауважимо, що для скінченних розмірів середовища відбуватиметься конкуренція між кількістю елементів (зв'язків, розмірів середовища) та значенням дійсної частини провідності. Якщо кількість елементів "програє", то в середовищі немає самоусереднення і відбувається дана, випадкова, фрактальна реалізація характеристик середовища (на порозі протікання середовища мають фрактальну структуру). У такому неоднорідному усередненому середовищі спостерігаються великі флуктуації ефективної провідності. Вони викликають аномально високі просторові флуктуації локальних електричних полів і, як наслідок, спостерігатимуться великі просторові флуктуації поглинання енергії.

РОЗДІЛ 5

ДВОВИМІРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Двовимірні відображення, як і одновимірні, задають рекурентними співвідношеннями вигляду

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{5.1}$$

де f і g , у загальному випадку, нелінійні функції. Для одновимірних відображень ми говорили про послідовність точок на прямій, які виникали в результаті ітерацій. У двовимірних відображеннях доведеться мати справу з точками на площині, тобто з парою чисел, які задаватимуть координати цих точок.

Двовимірні відображення потрапляють до розгляду різними шляхами. Деякі є результатом узагальнення одновимірних відображень, інші моделюють якесь явище, для якого характерним є дискретний час. Часто двовимірні відображення виникають як різницеві схеми, при числовому розв'язанні систем диференціальних рівнянь. Нарешті, деякі двовимірні відображення були винайдені штучно з метою демонстрації того, які складні структури можуть виникати в цих моделях.

5.1. Відображення Ено

Як приклад двовимірного відображення розглянемо відображення Ено¹ [40]. Це відображення запропоновано Ено 1976 р. як абстрактний приклад динамічної системи. Нині відомо, що його можна використовувати для опису багатьох простих фізичних систем, наприклад, руху частинки у в'язкому середовищі під впливом імпульсних поштовхів.

З огляду на дослідження Ено [40], виконаємо такі міркування щодо конкретизації самого відображення. У підрозд. 4.5 ми вка-

¹ Ено Мішель (1931–2013) – французький математик і астроном.

зали на дві фундаментальні властивості відображення, що визначають стан хаосу в системі: розтягування і складання. Спробуємо змоделювати таку складку за допомогою трьох відображень площини на себе. Розглянемо область, витягнуту вздовж осі x (рис. 5.1, *а*). Почнемо з розтягування і складання за допомогою відображення

$$T': \quad x' = x, \quad y' = y + 1 - ax^2, \quad (5.2)$$

яке перетворює початкову область на таку, що показана на рис. 5.1, *б*. Тут a – параметр. Завершує утворення складки стискання вздовж осі Ox :

$$T'': \quad x'' = bx', \quad y'' = y', \quad (5.3)$$

у результаті отримуємо зображення, як на рис. 5.1, *в*; b – ще один параметр, який має бути меншим за одиницю. Нарешті, ми повертаємося до колишньої орієнтації вздовж осі Ox за допомогою

$$T''': \quad x''' = y'', \quad y''' = x'' \quad (5.4)$$

і отримуємо зображення, показане на рис. 5.1, *г*.

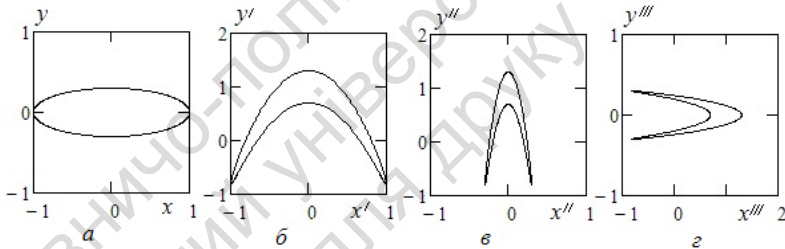


Рис. 5.1. Послідовність перетворень, які утворюють відображення Ено

Наше відображення задається композицією $T = T' \rightarrow T'' \rightarrow T'''$. Запишемо далі (x_n, y_n) замість (x, y) та (x_{n+1}, y_{n+1}) замість (x''', y''') як нагадування про те, що відображення буде ітеруватися. Отримуємо

$$T: \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Це відображення має багато унікальних властивостей. Насамперед, нас цікавитиме зменшення площ (аналогічно зменшенню об'ємів у тривимірному просторі). Для відображення (5.5) якобіан представимо у вигляді

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b. \quad (5.6)$$

Таким чином, при кожній ітерації площі множаться на коефіцієнт b . Якщо $0 < b < 1$, то маємо стиснення і площа певної ділянки зменшується у процесі ітерацій. Отже закон зміни початкової фазової площі буде таким:

$$\frac{S_{n+1}}{S_1} = \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_3}{S_2} \cdot \frac{S_4}{S_3} \cdot \dots \cdot \frac{S_{n+1}}{S_n} = b^n, \quad (5.7)$$

звідки

$$S_{n+1} = S_1 b^n = S_1 \exp(n \ln b). \quad (5.8)$$

Слід відмітити, що відображення (5.5) обернене. Обернене відображення має вигляд

$$T^{-1}: \begin{cases} x_n = \frac{y_{n+1}}{b}, \\ y_n = x_{n+1} - 1 + \frac{a}{b} y_{n+1}^2. \end{cases} \quad (5.9)$$

Таким чином, деяка точка ітераційного процесу може бути однозначно повернена в часі назад. Ця властивість є природним аналогом факту, що для тривимірного потоку через кожен точку фазового простору проходить лише одна траєкторія.

Якщо для відображення не вимагати оберненості, тобто допускати відображення декількох точок в одну, то хаос можливий навіть в одновимірному випадку. Прикладом цього є логістичне відображення.

Неважко переконатися, що відображення (5.5) має дві нерухомі точки. Справді, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x = y + 1 - ax^2, \\ y = bx, \end{cases} \quad (5.10)$$

знаходимо

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a} \left[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a} \right], \quad (5.11)$$

$$y_{1,2} = bx_{1,2}.$$

Зрозуміло, що формули (5.11) справедливі за значення підкореневого виразу $(1-b)^2 + 4a \geq 0$, тобто виконується таке співвідношення між параметрами:

$$a \geq a_0 = -\frac{(1-b)^2}{4}. \quad (5.12)$$

Задача. Проведіть аналіз стійкості двох нерухомих точок відображення Ено.

Аналіз стійкості нерухомих точок показує, що одна з точок завжди нестійка, а друга нестійка, якщо

$$a > a_1 = \frac{3}{4}(1-b)^2. \quad (5.13)$$

Оскільки для двовимірних відображень кількість параметрів, зазвичай, більше одиниці, то замість біфуркаційних діаграм наочніше виглядають так звані *карти динамічних режимів*. У відображення Ено цих параметрів два: a і b . Для такого відображення вздовж координат декартової системи відкладають значення параметрів a та b . Перебираючи числові значення параметрів, досліджують ітераційний режим системи й помічають, певним чином, його властивості на декартовій площині. Так будують карту динамічних режимів. Зрозуміло, що це досить кропітка робота. Її ми не проведитимемо, а щоб мати уявлення про динаміку системи Ено, розглянемо деякі характерні траєкторії ітераційного процесу.

Характерною рисою відображення Ено є те, що послідовність точок, які утворюються у процесі ітерації, не завжди збігається до атратора, а часом "тікає" у нескінченність. Однак за деяких значень параметрів a і b існує область притягання (складної структури), з якої початкові точки внаслідок ітерацій надзвичайно швидко збігаються до атратора.

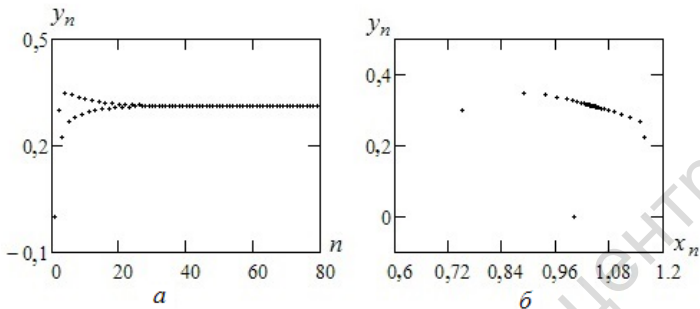


Рис. 5.2. Дослідження відображення Ено при $a = 0,25$; $b = 0,3$

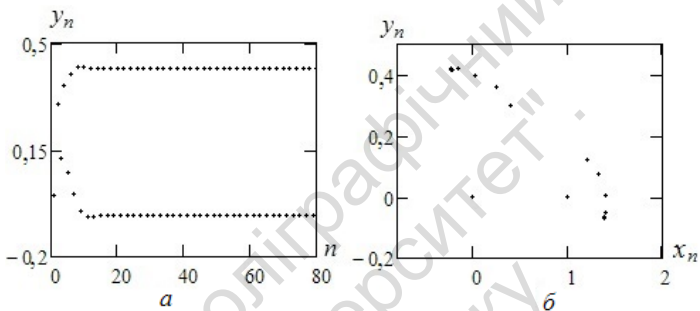


Рис. 5.3. Дослідження відображення Ено при $a = 0,6$; $b = 0,3$

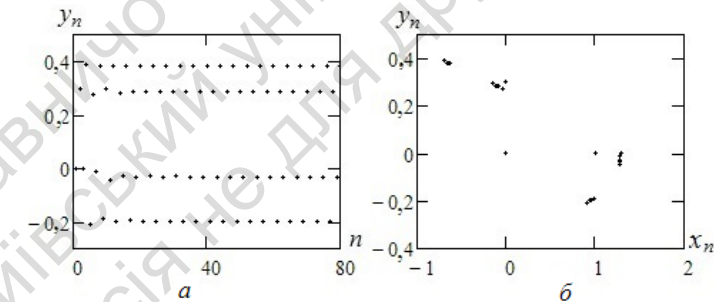


Рис. 5.4. Дослідження відображення Ено при $a = 1$; $b = 0,3$

Виберемо тепер конкретні значення параметрів a і b для числових обчислень. Параметр b має бути досить малим, щоб справді утворилася складка (див. рис. 5.1), але не дуже малим, аби можна було розглянути тонку структуру атратора. Значення $b = 0,3$, обране Ено, відповідає цим вимогам.

Виявилось, якщо $a < a_0 = -0,1225$ (формула (5.12) при $b = 0,3$) або $a > a_3 \approx 1,55$, то точки у процесі ітерацій ідуть у нескінченність. При $a_0 < a < a_3$ залежно від початкових умов точка або йде у нескінченність, або притягається до атрактора, який виявляється єдиним.

Проведемо дослідження цього атрактора. Візьмемо координати початкової точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Якщо $a_0 < a < a_1$, де згідно з (5.13) $a_1 = 0,3675$ при $b = 0,3$, то атрактором є стійка нерухома точка. Рис. 5.2 ілюструє цю ситуацію. Коли a перевищує a_1 , атрактор являє собою періодичну множину з p точок (на рис. 5.3 $p = 2$ і на рис. 5.4 $p = 4$). Значення p зростає під час збільшення a до величини $a = a_2 \approx 1,06$ (при $b = 0,3$). На рис. 5.2, a , рис. 5.3, a та рис. 5.4, a показано значення ітерацій y_n (аналогічний характер маємо для x_n), а на рис. 5.2, b , 5.3, b та 5.4, b – фазовий портрет атрактора (показано весь перехідний режим).

Якщо $a_2 < a < a_3$, то атрактор уже не простий, і поведінка точок стає нерегулярною. Нехай $a = 1,4$ (рис. 5.5). Як бачимо (рис. 5.5, b), точки в результаті ітерацій швидко наближаються до атрактора і їх неможливо виділити у вибраному масштабі рисунка. Справді, початкову точку $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ і першу ітерацію $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ добре видно; друга ітерація $x_2 = -0,4$, $y_2 = 0,3$ ледь-ледь помітна, а третя $x_3 = 1,076$, $y_3 = -0,12$ та четверта ітерації $x_4 = -0,7408864$, $y_4 = 0,3228$ зовсім утрачено в середині атрактора. Наступні точки блукають по атрактору нерегулярно; це ілюструє залежність координати y_n від номера ітерації n на рис. 5.5, a (зрозуміло, що x_n має таку саму характерну залежність).

Помірне стиснення ($b = 0,3$) дозволяє розглянути фрактальну структуру атрактора Ено (рис. 5.5, v , z). На рис. 5.5, b у рамці видно три паралельні лінії, які майже зливаються одна з одною. Після першого збільшення (рис. 5.5, v) з'ясовується, що верхня лінія насправді – це три паралельні лінії. Аналогічно після другого збільшення (рис. 5.5, z) бачимо, що верхня з трьох ліній, виявлених після першого збільшення, також виявляється потрійною і т. д. Інакше висловлюючись, структура атрактора по-

вторюється у послідовних масштабах спостереження. Таку структуру, характерну для фрактального об'єкта, можна розглядати як перетин множини, яка утворюється з нескінченної кількості листів і являє собою так званий *дивний атрактор*. Зазвичай (але не завжди) дивному атрактору відповідає режим динамічного хаосу (його ми спостерігаємо на рис. 5.5, а).

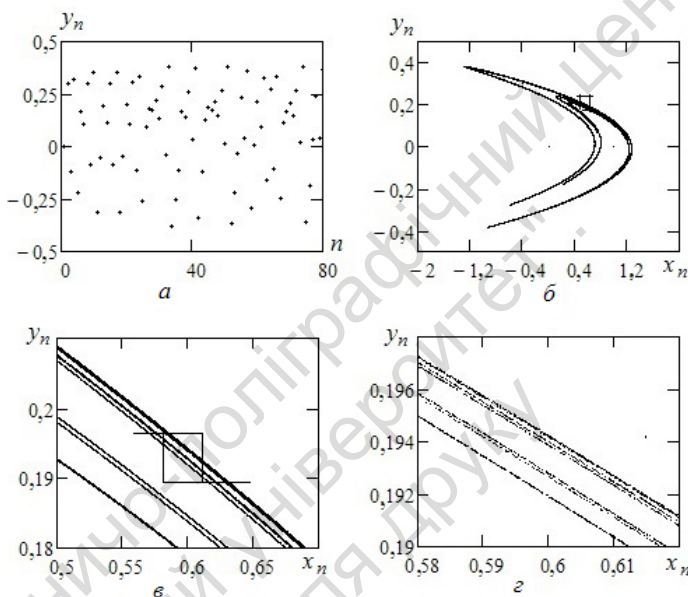


Рис. 5.5. Дослідження відображення Ено при $a = 1,4$; $b = 0,3$

5.2. Біфуркаційна діаграма відображення Ено

Доповненням до представленого опису динамічних режимів системи Ено і графіків на рис. 5.2–5.5 є рис. 5.6, на якому побудовано біфуркаційну діаграму відображення Ено за зміни параметра a : параметр $b = 0,3$ зафіксовано; координати початкової

точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$; уздовж осі ординат відкладено координати y_n ітераційних точок. Чітко видно, за яких значень параметра a у системі присутні цикли періоду 1, 2, 4, 8, а в шумовому "морі" системи бачимо наявність вікон періодичності, які ми спостерігали і у процесі дослідження логістичного відображення. Новим, порівняно з біфуркаційною діаграмою логістичного відображення, є те, що дерево діаграми іноді стрибком "розбухає" (рис. 5.6). Таке явище в нелінійній динаміці називають *кризою*.

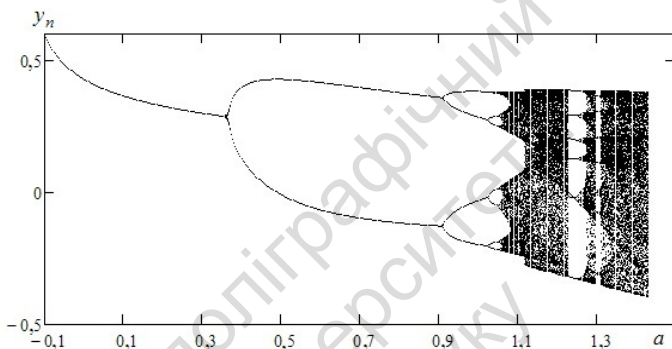


Рис. 5.6. Біфуркаційна діаграма відображення Ено за зміни параметра a : параметр $b = 0,3$ зафіксовано; координати початкової точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Як уже відмічено, за певних значень параметрів a і b та координат початкової точки (x_0, y_0) , послідовність точок, які утворено у процесі ітерації, не завжди збігається до атрактора, а часом "тікає" у нескінченність. Щоб уникнути цієї проблеми, ми для побудови біфуркаційної діаграми у програмі для ЕОМ ввели відповідну умову, яка контролювала необмежене зростання координат ітераційних точок. Мабуть, як наслідок, у шумовому "морі" системи на рис. 5.6 з'явилися тонкі вертикальні білі смуги.

5.3. Спектр показників Ляпунова відображення Ено

Фазовий простір системи Ено двовимірний, тому спектр має два показники Ляпунова. Для їхнього обчислення виконують ітерацію відображення (1.98) разом із двома комплектами рівнянь для збурень (1.99) згідно з алгоритмом, описаним у підрозд. 1.10. На рис. 5.7 показано результат числового розрахунку спектра показників Ляпунова за зміни параметра a і за сталої величини $b = 0,3$. Сума показників Ляпунова $\Lambda_1 + \Lambda_2 \approx -1,20317$. Можна показати, що сума показників Ляпунова $\Lambda_1 + \Lambda_2$ має точно дорівнювати $\ln b = -1,20397$. Отже маємо добре узгодження з результатами числового розрахунку: $\Lambda_1 + \Lambda_2 \approx -1,20317$.

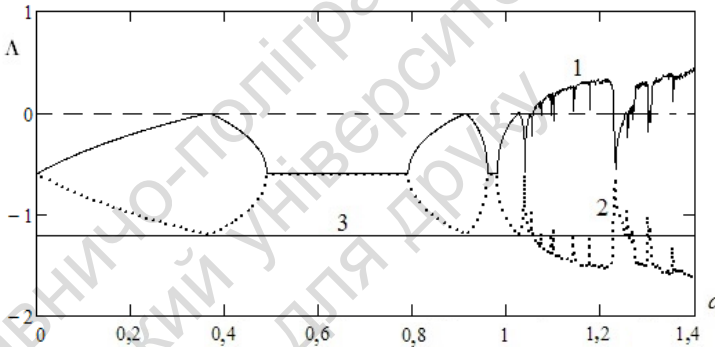


Рис. 5.7. Залежність показників Ляпунова системи Ено від параметра a : $b = 0,3$; крива 1 позначає Λ_1 , крива 2 – Λ_2 , крива 3 – $\Lambda_1 + \Lambda_2$

Розглядаючи рис. 5.6 і 5.7, можна відмітити, що точки біфуркації (подвоєння періоду циклу) відповідають ситуації, коли старший показник Ляпунова $\Lambda_1 = 0$. При $\Lambda_1 > 0$ (тут маємо значення параметра $a \geq a_2 \approx 1,06$) спостерігається явище динамічного хаосу. Як і для логістичного відображення, у зоні хаотичного режиму спостерігаються вікна регулярного режиму з певним періодом циклу.

5.4. Фрактальна розмірність атратора відображення Ено

Криві на рис. 5.5 мають складну внутрішню структуру, яка являє собою атрaktor відображення Ено і є регулярним фракталом.

Спробуємо дати оцінку фрактальній розмірності хаотичного атратора відображення Ено (рис. 5.5), обчислюючи кореляційну розмірність D_2 за алгоритмом Гроссбергера – Прокаччіа [58] (див. підрозд. 3.9). Для цього на рис. 5.8 у логарифмічних координатах побудовано залежність кореляційного інтеграла $C(\delta)$ від розміру шаблону δ . Розрахункові параметри відображення такі: $a = 1,3$ і $b = 1,4$, кількість точок (тобто кількість проведених ітерацій) $M = 4000$. Як бачимо, графік має лінійний характер у широкому діапазоні зміни параметра δ . Кутовий коефіцієнт нахилу лінійної ділянки графіка і визначає кореляційну розмірність D_2 . Отже, результат розрахунку – значення кореляційної розмірності $D_2 \approx 1,2$. Згідно з даними оригінальної роботи [58] величина $D_2 \approx 1,21$.

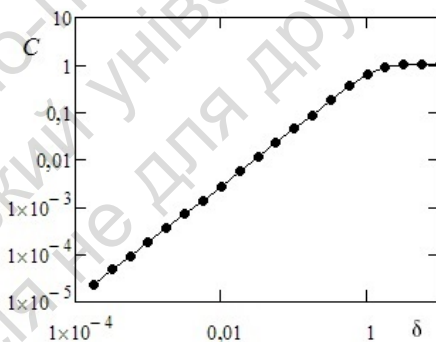


Рис. 5.8. До оцінювання кореляційної розмірності хаотичного атратора відображення Ено; $a = 1,3$; $b = 1,4$

Фрактальну розмірність атратора динамічної системи у фазовому просторі R^n можна також оцінити за спектром характе-

ристичних показників Ляпунова (див. підрозд. 3.10). Оскільки спектр відображення Ено має два ляпуновських показники, то розрахункова формула (3.55) для розмірності Ляпунова D_L

набуває вигляду $D_L = 1 + \frac{\Lambda_1}{|\Lambda_2|}$. У випадку параметрів системи

$a=1,3$; $b=1,4$, за наявності дивного атратора, маємо $\Lambda_1 \approx 0,424$ і $\Lambda_2 \approx -1,627$. Тоді результат розрахунку – значення розмірності Ляпунова $D_L \approx 1,26$. Зазвичай, унаслідок розрахунків маємо співвідношення $D_L > D_2$, та в межах можливих похибок обчислень отриманий результат є досить добрим.

5.5. Динаміка системи двох зв'язаних відображень

У цьому підрозділі, спираючись на роботу [38], розглянемо деякі особливості динаміки системи двох зв'язаних гармонічних відображень. По суті ця задача зводиться до аналізу відповідного двовимірного відображення.

Цікавою є проблематика, яка стимулювала дослідження цієї математичної моделі в роботі [38]. Зазначимо, що сучасна медицина все уважніше вивчає діагностичні й лікувальні підходи східної медицини, визнаючи високу ефективність останніх. Роблять спроби побудови фізичних і математичних моделей, адекватних основним поняттям і концепціям східної медицини. Багато моделей розглядає людський організм із позицій теорії відкритих нелінійних динамічних систем.

Особливу увагу приділяють поширеним у біофізиці моделям, які мають хаотичні режими динаміки, частково тому, що вони можуть бути дуже чутливими до слабких зовнішніх впливів. Зокрема, моделювання проводять на основі динамічних систем, утворених із взаємно пов'язаних дисипативних систем.

Аналіз динаміки таких моделей дозволяє визначати стани кожної з підсистем і, за необхідності, коригувати вплив на неї. Корекція режиму еволюції дисипативної системи може бути

здійснена як за рахунок зовнішнього впливу, так і за допомогою зміни величини керуючих параметрів і коефіцієнтів зв'язку між підсистемами. Отже, розглянемо модель системи, що утворена двома зв'язаними гармонічними дискретними відображеннями.

Для опису системи, що складається з двох зв'язаних відображень $x_{n+1} = f_1(x_n)$ і $y_{n+1} = f_2(y_n)$, необхідно встановити зв'язок між відображеннями. Задамо динамічну систему у вигляді рівнянь

$$x_{n+1} = f_1(x_n) + D[f_2(y_n) - f_1(x_n)], \quad (5.14)$$

$$y_{n+1} = f_2(y_n) + D[f_1(x_n) - f_2(y_n)]. \quad (5.15)$$

Такий зв'язок прагне вирівняти миттєві стани підсистем, тому його називають дисипативним, а коефіцієнт D – коефіцієнтом дисипативного зв'язку.

Можна записати модель системи, у якій наявний зв'язок між поточними і попередніми ітераціями. Рівняння, що описують таку динамічну систему, мають вигляд

$$x_{n+1} = f_1(x_n) + C(y_n - x_n), \quad (5.16)$$

$$y_{n+1} = f_2(y_n) + C(x_n - y_n). \quad (5.17)$$

Указаний зв'язок сприяє збереженню пам'яті про стан на попередньому етапі й називається інерційним, а коефіцієнт C – коефіцієнтом інерційного зв'язку.

Нарешті, у системі може бути комбінація двох наведених вище типів зв'язку. Рівняння, що описують таку динамічну систему, мають вигляд

$$x_{n+1} = f_1(x_n) + D[f_2(y_n) - f_1(x_n)] + C(y_n - x_n), \quad (5.18)$$

$$y_{n+1} = f_2(y_n) + D[f_1(x_n) - f_2(y_n)] + C(x_n - y_n). \quad (5.19)$$

На початку розглянемо одновимірне дискретне відображення

$$x_{n+1} = f_1(x_n) = \cos(Ax_n), \quad (5.20)$$

яке демонструє досить складну хаотичну еволюцію. Для аналізу динаміки відображення косинуса побудуємо біфуркаційну діаграму, де керуючим параметром є A (рис. 5.9). Як завжди під час побудови біфуркаційної діаграми, перехідний режим системи відкидався.

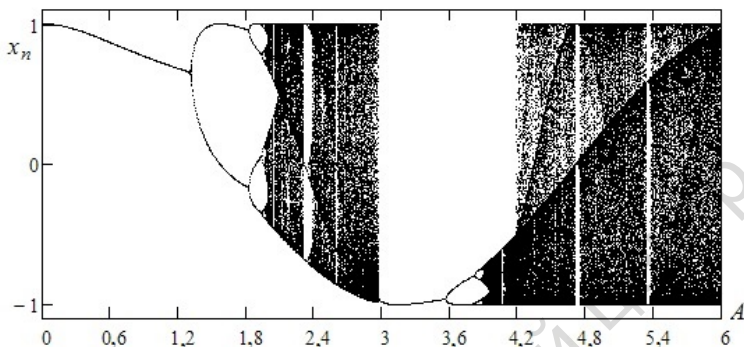


Рис. 5.9. Біфуркаційна діаграма відображення $x_{n+1} = \cos(Ax_n)$ за зміни параметра A

Як бачимо на рис. 5.9, за зміни параметра A відбувається каскад біфуркацій подвоєння періоду, який переходить у хаотичний режим. У хаотичному "морі" маємо вікна періодичності. Цікаво, що за параметра $A > 3$ хаотичний режим припиняється і формується другий каскад біфуркацій з усіма притаманними йому змінами.

Щоб визначити вплив динамічного режиму одного відображення на режим другого, розглянемо систему, що складається з двох відображень (5.18), (5.19), де функції

$$f_1(x) = \cos(Ax), \quad f_2(y) = \cos(By). \quad (5.21)$$

Розглянемо зміни, які відбуваються з біфуркаційною діаграмою відображення $x_{n+1} = \cos(Ax_n)$ у разі варіації керуючого параметра B у відображенні $y_{n+1} = f_2(y_n)$ для невеликих фіксованих величин коефіцієнтів зв'язку: $D=0,01$ і $C=0,05$. Звісно, для детальшого аналізу слід будувати карти динамічних режимів на площині керуючих параметрів A і B . Таку скрупульозну роботу ми не проводитимемо, а побудуємо декілька варіантів біфуркаційних діаграм, які ілюструють вплив динамічного режиму одного відображення на режим другого відображення.

У випадку достатньо малої величини параметра $B < 1$ у відображенні $y_{n+1} = f_2(y_n)$ присутня стійка нерухома точка, тобто маємо

цикл періоду 1 (див. рис. 5.9 для відображення (5.20), уявляючи, що по осях координат маємо змінні y_n і B). Такий режим відображення $y_{n+1} = f_2(y_n)$ не впливає на динаміку відображення $x_{n+1} = f_1(x_n)$, тому біфуркаційна діаграма відображення $x_{n+1} = f_1(x_n)$ практично збігається з діаграмою відображення (5.20) на рис. 5.9 (через це вона не зображена окремо).

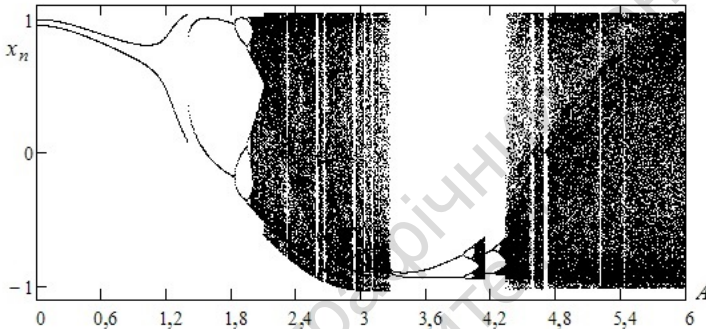


Рис. 5.10. Біфуркаційна діаграма відображення $x_{n+1} = f_1(x_n)$,
 $D = 0,01$, $C = 0,05$, $B = 1,5$ за зміни параметра A

На рис. 5.10 показано біфуркаційну діаграму відображення $x_{n+1} = f_1(x_n)$ при $B = 1,5$. У цьому випадку у відображенні $y_{n+1} = f_2(y_n)$ спостерігається цикл періоду (див. рис. 5.9). Під дією вказаного періодичного режиму режим відображення $x_{n+1} = f_1(x_n)$ також стає періодичним із періодом 2. Перша точка біфуркації подвоєння періоду зникає. Зменшується ширина періодичних вікон у хаотичній області. У лініях біфуркаційної діаграми відображення $x_{n+1} = f_1(x_n)$ з'являються розриви, що не властиві діаграмі на рис. 5.9. Крім того, зазначаємо вплив і на другий каскад біфуркацій подвоєння періоду.

Надалі збільшуватимемо величину параметра B . Нехай $B = 2,5$ (рис. 5.11, *a*). Тут у відображенні $y_{n+1} = f_2(y_n)$ спостерігається хаотичний режим (див. рис. 5.9). Відповідно у відображенні $x_{n+1} = f_1(x_n)$ бачимо хаотичну динаміку практично у всіх областях. У другому каскаді біфуркацій зникають усі періодичні режими. За подальшого збільшення параметра B в хаотичному

морі виникають вікна періодичності з різними періодами, потім знову шумовий режим і т. д. (рис. 5.11, б, в).

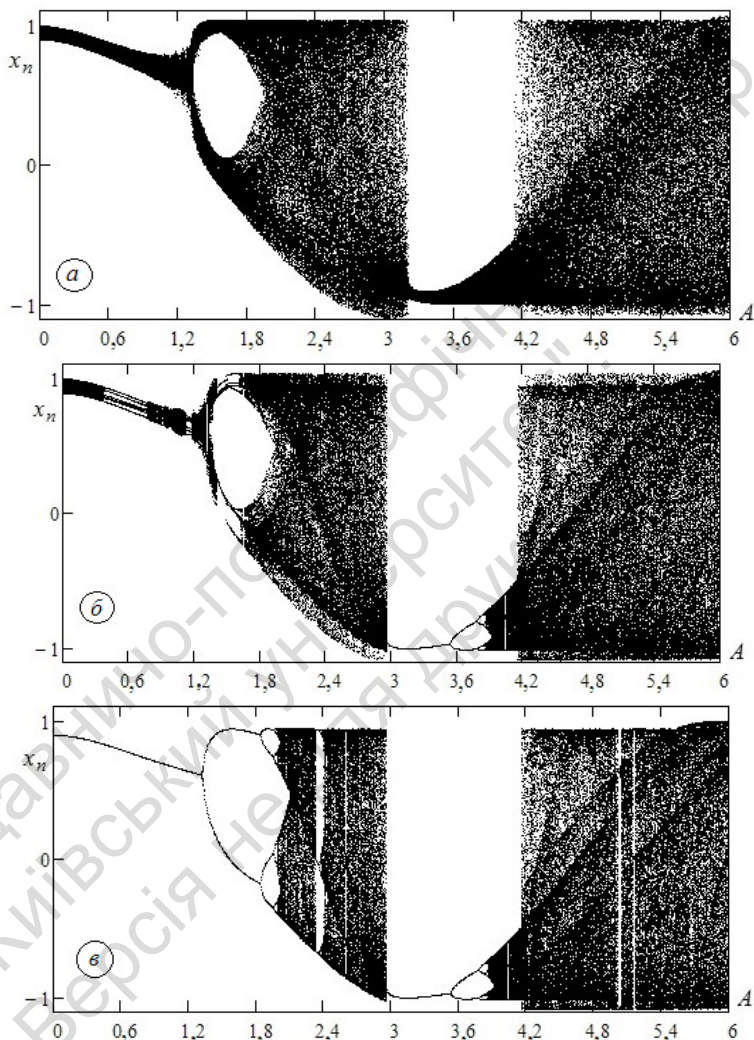


Рис. 5.11. Біфуркаційна діаграма відображення $x_{n+1} = f_1(x_n)$,

$D = 0,01$, $C = 0,05$ за зміни параметра A :

a – якщо $B = 2,5$, $б$ – якщо $B = 3,1$, $в$ – якщо $B = 3,51$

Представлені розрахунки показують, що в системі, яка складається з двох пов'язаних гармонічних відображень, зміна динаміки одного відображення значно впливає на режими динаміки іншого, які зазнають у цьому випадку суттєвих змін.

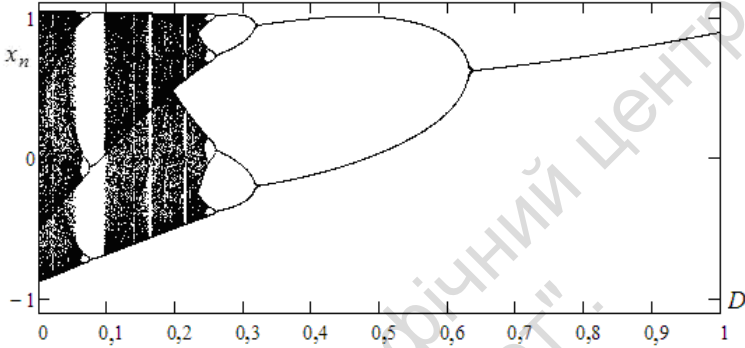


Рис. 5.12. Біфуркаційна діаграма відображення $x_{n+1} = f_1(x_n)$, $C = 0,05$, $A = 2,51$, $B = 0,51$ за зміни параметра D

Безумовно, зміна коефіцієнтів зв'язку D і C суттєво впливатиме на динамічний режим системи. Наприклад, збільшення коефіцієнта дисипативного зв'язку D веде до збільшення частки періодичних і зменшення частки неперіодичних і хаотичних режимів, що видно з рис. 5.12.

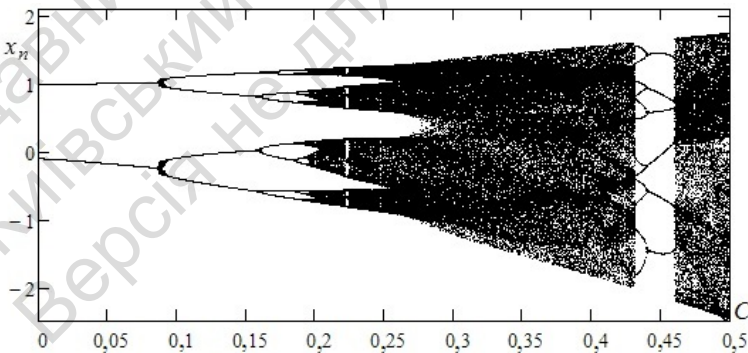


Рис. 5.13. Біфуркаційна діаграма відображення $x_{n+1} = f_1(x_n)$, $D = 0,01$, $A = 1,71$, $B = 1,31$ за зміни параметра C

Інерційний зв'язок виявляє складніший вплив на режими, що демонструються системою. Збільшення коефіцієнта інерційного зв'язку C призводить до збільшення частки неперіодичних і хаотичних режимів (рис. 5.13) та ускладнення форм областей періодичних режимів.

Представлені результати дозволяють оцінити вплив зміни параметрів на динаміку системи, а отже оцінити практичні можливості керування процесом еволюції системи.

Задача. Спробуйте, хоча б наближено, побудувати для системи двох зв'язаних гармонічних осциляторів карту динамічних режимів на площині параметрів A і B . Нехай параметри A і B змінюються в межах від -5 до $+5$.

РОЗДІЛ 6

ДИВНИЙ ХАОТИЧНИЙ АТРАКТОР У ДИСИПАТИВНІЙ НЕЛІНІЙНІЙ СИСТЕМІ

Підіб'ємо деякі підсумки наших досліджень. Отже, якщо йдеться про детермінований (*регулярний*) рух системи, то в цьому разі говорять про однозначний взаємозв'язок причини та наслідку. Якщо задано деякий початковий стан системи за значення $t = t_0$, то стан системи за значень $t > t_0$ однозначно визначається.

Якщо ми говоримо про хаос, то маємо на увазі, що зміна в часі стану системи є випадковою (його не можна однозначно передбачати) і не відтворюваною (процес не можна повторити). Детермінізм, у нашому уявленні, асоціюється з повною передбачуваністю та повторюваністю. Відповідно до цих визначень поняття "детермінізм" і "хаос" прямо протилежні за змістом. У словосполученні "детермінований хаос" об'єднано ці два поняття протилежного змісту. Осмислимо цей факт на основі отриманих знань.

Тепер ми розуміємо, що явище детермінованого хаосу спостерігається в системі, в якій є нестійкість і нелінійність. Проаналізуємо таку ситуацію. Розглянемо нестійкий режим у системі. Порушення режиму системи малим збуренням призведе до збільшення цього збурення із часом. Звичайно, в реальній системі збурення не зростатиме до нескінченості. З огляду на обмеженість енергетичних ресурсів системи це зростання має припинитися чи змінитися зменшенням амплітуди відхилення. Будь-який новий режим повинен мати скінченну амплітуду і керують указаними процесами нелінійні закони. Математично це можна проілюструвати таким прикладом: нехай залежність амплітуди відхилення $\varphi(x)$ від початкового стану визначається співвідношенням $\varphi(x) = kx - bx^3$, де k і b – додатні коефіцієнти, а $x = 0$ – точка нестійкої рівноваги. Якщо $x \ll 1$ і $bx^3 \ll kx$, то $\varphi(x) \approx kx$. В такій ситуації $\varphi(x)$ лінійно зростає зі збільшенням x . Якщо x стає порівняним з одиницею, то членом bx^3 нехтувати вже не

можна. Тут відхилення $\varphi(x)$ почне відчувати обмеження. За деяких x значення $\varphi(x)$ знову буде близьким до нуля, тобто система повернеться в малий окіл початкового стану (підійде дуже близько до стану нестійкої рівноваги) і знову (через нестійкість) почне від нього віддалятися. Цей процес триватиме нескінченно в часі!

Спостерігаючи поведінку хаотичної системи, ми розуміємо, що описати його деяким явним розв'язком неможливо. У цій ситуації фазовий простір є потужним інструментом для вивчення хаотичних систем, оскільки дає можливість уявити їхню поведінку в геометричній формі.

Ми досліджували фазові портрети динамічних систем у двовимірному фазовому просторі, тобто на фазовій площині. Якщо уявити, що мале збурення стану рівноваги в такій системі наростатиме, а потім у результаті нелінійного обмеження зменшуватиметься, то можливі такі варіанти: поява нових стійких станів рівноваги поблизу нестійкого або перехід у новий режим, що відповідає періодичним коливанням. У цьому випадку на фазовій площині виникає атрактор у вигляді або точки, або граничного циклу. Якщо уявити іншу ситуацію, коли відхилення стану рівноваги спочатку збільшується, а потім унаслідок нелінійності знову прямує до особливої точки, то виникає суперечність: фазова траєкторія буде перетинатися. Однак через теорему єдиності розв'язку це неможливо.

Ще раз обговоримо цей момент, залучаючи поняття характеристичних показників Ляпунова. Нагадаємо (див. підрозд. 1.9), що для дисипативної системи з розмірністю фазового простору N сума всіх N показників Ляпунова атрактора має бути від'ємною:

$$\sum_{k=1}^N \Lambda_k < 0. \quad (6.1)$$

Тоді за розмірності $N=1$ маємо для атрактора тільки один варіант, а саме $\Lambda_1 < 0$, що відповідає атрактору у вигляді нерухомої точки (стан рівноваги). За розмірності $N=2$ можливі дві ситуації:

- 1) $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$ – стійка нерухома точка;
- 2) $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$ – граничний цикл.

За значення $N = 2$ варіант наявності додатного ляпуновського показника неможливий, адже така ситуація виключається вимогою дисипативної системи (6.1), а ситуація $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 < 0$ – виключається умовою обов'язкової наявності нульового показника Ляпунова для атрактора, що не є нерухомою точкою. Нерухома точка при значеннях $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 < 0$ є нестійкою і не може бути атрактором.

Можливість реалізації атрактора з додатним ляпуновським показником виникає, починаючи з розмірності фазового простору $N = 3$. Тут допустимі такі варіанти:

- 1) $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$ – стійка нерухома точка;
- 2) $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$ – граничний цикл;
- 3) $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 < 0$ – двовимірний тор (такий атрактор спостерігався в системі (1.70)).
- 4) $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 < 0$ – атрактор у системі з хаотичним режимом.

Завдяки простим міркуванням, приходимо до фундаментального висновку – принципова можливість реалізації атрактора з додатним ляпуновським показником, а отже, і хаосу, виникає, починаючи з розмірності фазового простору $N = 3$.

Повторимо наші міркування, здійснивши вихід із площини у тривимірний фазовий простір. Нехай тепер траєкторія розкручується у тривимірному просторі, віддаляючись від особливої точки по спіралі. Досягнувши деяких значень і завдяки дії механізму нелінійного обмеження, траєкторія знову повернеться в окіл початкового стану. Далі через нестійкість процес повторюватиметься. Можливі два варіанти:

- траєкторія через деякий час замкнеться, демонструючи наявність складного, але періодичного процесу;
- траєкторія відтворюватиме якийсь неперіодичний процес, якщо при $t \rightarrow \infty$ замикання не відбудеться.

Другий випадок відповідає режиму детермінованого хаосу! Справді, виконується основний принцип детермінізму: майбутнє однозначно визначено початковим станом. Проте процес еволюції системи складний, неперіодичний. Суто зовні він нічим не

відрізняється від випадкового процесу! Але, на відміну від випадкового процесу, цей процес можна відтворити! Повторивши ще раз початковий стан через детермінованість ми знову відтворимо ту саму траєкторію незалежно від її складності. Отже, маємо складний, схожий на випадковий, проте детермінований процес.

Тепер спробуємо зрозуміти: який вигляд має атрактор у дисипативній системі з хаотичним рухом. Вважаємо, що до поточного моменту у читача сформовано уявлення про атрактор, тому дамо таке визначення.

Нехай у N -му фазовому просторі є деяка скінченна (або нескінченна) область G_1 , яка містить область G_0 . Области G_1 і G_0 задовольняють такі умови:

- для будь-яких початкових умов $x(t_0)$ з області G_1 при $t \rightarrow \infty$ (або $n \rightarrow \infty$ для систем із дискретним часом) усі фазові траєкторії рано чи пізно досягають області G_0 ;
- якщо фазова траєкторія належить області G_0 в момент часу $t = t_1$ ($n = n_1$), то вона належатиме G_0 завжди, тобто для будь-яких $t > t_1$, ($n > n_1$) фазова траєкторія міститиметься в області G_0 .

Якщо ці умови виконуються, то область G_0 називають *атрактором* динамічної системи. Область G_1 називають *областю* (або *басейном*) *притягання атрактора*.

Як ми знаємо, в дисипативній системі дивергенція фазового потоку від'ємна, що зумовлює прагнення до нуля деякого початкового об'єму фазового простору при $t \rightarrow \infty$. Як наслідок, розмірність атрактора D має бути меншою за розмірність фазового простору N : $D < N$. Це перша характерна риса. Друга риса – хаотичній системі притаманна суттєва залежність від початкових умов (СЗПУ), інакше кажучи, дві траєкторії з близькими початковими умовами експоненціально розходяться у процесі еволюції, тож поруч вони проходять зовсім недовго. Ця обставина якраз і визначається додатним ляпуновським показником. Отже, з одного боку, фазові траєкторії повинні притягуватися до атрактора розмірності $D < N$, а з іншого, внаслідок СЗПУ вони мають експоненціально розходитися. Як поєднати ці два фактори? Існує єдине розв'язання цієї дилеми: елемент фазового об'єму за

деякими напрямками повинен розтягуватися, а за іншими – стискатися, причому ступінь стиснення в середньому має обов'язково переважати над ступенем розширення, щоб у результаті фазовий обсяг зменшувався. У нелінійній дисипативній системі це виявляється можливим.

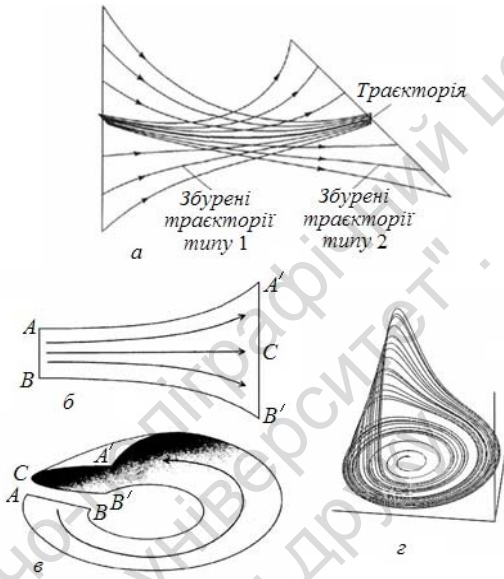


Рис. 6.1. Будова дивного хаотичного атрактора

Уявімо тривимірний потік, який розбігається в деякому напрямку і збігається у перпендикулярному напрямку. На рис. 6.1, а показано який вигляд, для цього випадку, має окіл довільної траєкторії на аттракторі [4, 23]. Тут зображено довільну траєкторію і найближчі до неї траєкторії (типу 1), які наближаються до неї, причому в середньому по експоненті, і траєкторії (типу 2), котрі віддаляються від траєкторії, теж у середньому по експоненті. Так влаштовано окіл всіх траєкторій, що належать аттрактору. Як результат такого впливу на потік, деяка початкова множина у фазовому просторі перетворюється на квазидвовимірний лист, на якому траєкторії експоненціально розходяться, як того вимагає

СЗПУ (рис. 6.1, б). Експоненціальна розбіжність є локальним явищем: у зв'язку з тим, що атрактор має скінченні розміри, дві орбіти на хаотичному атракторі не можуть завжди експоненціально розбігатися. Що означає ця ситуація? Те, що такий атрактор має утворити складки всередині себе!

Наведену процедуру можна представити так: коли ширина листа збільшується приблизно вдвічі (відстань між сусідніми траєкторіями збільшується вдвічі) $A'B' \approx 2AB$, лист складається вздовж лінії $A'CB'$ (рис. 6.1, в). Потік утворює двовимірну поверхню зі складкою $A'CB'$. Геометрія атрактора формується завдяки стисканню складки ($A' \rightarrow B'$, обидва листи складки ніби пресуються) і точки A' і B' приклеюються до точки B , а точка C приклеюється до A (рис. 6.1, в). Тут виникає зрозуміле здивування: як можна виконати склеювання, якщо з одного боку маємо два листи, а з іншого – один? Відповідь на це незвичайне питання буде також незвичайна: для їхнього гладкого з'єднання потрібна нескінченна кількість листів! Справді, процедура склеювання еквівалентна встановленню взаємно однозначної відповідності між множиною листів початкової стрічки та множиною листів стрічки, складеної вдвічі. Така відповідність може спостерігатися тільки в тому випадку, якщо обидві множини нескінченні. Зауважимо, що розтягування й утворення складок відбувається нескінченно, утворюючи складки в середині складок. Інакше кажучи, *хаотичний атрактор є фрактал* – об'єкт, у якому за збільшення цього об'єкта проявляється дедалі більше деталей. У результаті такого руху фазових траєкторій утворюється атрактор, подібний до зображеного на рис. 6.1, г.

Звичайно, такий процес утворення атрактора важко уявити наочно. Внаслідок нескінченно діючого механізму розтягування та складання, траєкторії на хаотичному атракторі переміщуються. У математиці це поняття також існує і з погляду фізичної інтерпретації виявляється близьким за змістом. Хаос переміщує траєкторії у фазовому просторі подібно до того, як пекар місить тісто для випікання хліба. Уявити, що відбувається з найближчими траєкторіями на хаотичному атракторі допоможе такий експеримент. Додамо в тісто краплю синьої харчової фарби. Вимішування тіста – це комбінація двох дій: його то розкочу-

ють, то складають. За багаторазового повторення цих процесів, синя фарба повністю переміщується з тістом. Хаос діє так само, тільки замість тіста він перемішує фазовий простір.

Отже, у нестійких режимах із СЗПУ у детермінованих нелінійних системах із перемішуванням ми можемо передбачити майбутній стан однозначно лише в разі точного задання початкових умов. Однак, якщо врахувати скільки завгодно малу похибку (тобто розглянути краплинку синьої фарби замість синьої точки), то детерміноване передбачення стає неможливим.

Наочним прикладом є рис. 4.16, б, на якому показано еволюцію відстані δ_n між двома траєкторіями логістичного відображення (4.10). Незважаючи на дуже близьке положення початкових точок $\delta_0 = 10^{-7}$ цих траєкторій, уже після тридцяти п'яти ітерацій ($n = 35$) величина δ_n досягає значення, порівнянного з довжиною відрізка $[0,1]$, в межах якого відбуваються ітерації логістичного відображення.

Ще одним прикладом є чудовий дослід, описаний у книзі [42, с. 114]. Якщо налити трохи гліцерину у проміжок між стінками двох коаксіальних циліндричних склянок близьких діаметрів (рис. 6.2), крапнути туди кілька крапель фарби і повернути внутрішню склянку приблизно на 10 обертів, то фарба та гліцерин добре перемішуються. Однак, якщо після цього ви повернете його на таку саму кількість обертів у зворотному напрямку, то фарба відокремитися від гліцерину і її розподіл буде приблизно тим самим, як і до обертання. Якщо ж фарбу та гліцерин перемішувати довше, то повернення до початкового стану неможливе.

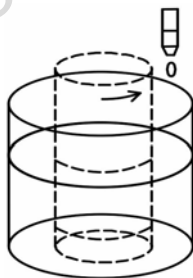


Рис. 6.2. Перемішування фарби і гліцерину

Невизначеність у заданні початкової умови – ситуація цілком реальна з погляду фізики. Справді, в силу скінченної точності реєстрації стану будь-якими приладами початкові умови безумовно визначені зі скінченною (нехай як завгодно малою) помилкою. Це означає, що необхідно аналізувати еволюцію в часі не початкової точки, а початкової області навколо цієї точки. Оскільки в нехаотичній системі близько розташовані точки фазового простору залишаються близькими у процесі еволюції, то початкова інформація, отримана у процесі вимірювання, зберігається в часі. Саме в цьому сенсі такі системи передбачувані: початкове вимірювання містить інформацію, якою можна скористатися для прогнозу майбутньої поведінки. Інакше висловлюючись, передбачувані динамічні системи не особливо чутливі до помилок вимірювання.

Витягування і складання хаотичного атрактора систематично усуває початкову інформацію та замінює її новою: за розтягування збільшуються маломасштабні невизначеності, при складанні зближуються далеко віддалені траєкторії та стирається великомасштабна інформація. Звідси зрозуміло, що для прогнозу майбутнього не може бути жодного точного рішення, жодного найкоротшого шляху. Проходить зовсім небагато часу, і невизначеність, що виникла під час початкового вимірювання, покриває весь аттрактор, позбавляючи нас можливості робити будь-які передбачення: між минулим і майбутнім немає вже жодного причинного зв'язку. Тепер ми маємо справу з процесом, який асоціюється зі справжньою випадковістю, зі справжнім хаосом. У цьому сенсі стає зрозумілим словосполучення "детермінований хаос", яке характеризує народження випадкової, непередбачуваної поведінки системи, керованої детермінованими законами.

На все в навколишньому світі діє випадковий шум – малий нерегулярний зовнішній вплив певної природи. Інтуїтивно це зрозуміло: ми описуємо явище на одному рівні, але існує вплив інших рівнів, які потрібно враховувати, вводячи в рівняння параметри чи малий шум. Хаотичний аттрактор локально діє як підсилувач шумів. Невелика флуктуація, викликана, можливо, тепловим шумом, дуже швидко призводить до сильного відхилення траєкторії. Однак за одним важливим аспектом хаотичні атрак-

тори відрізняються від простих підсилювачів шумів. Оскільки передбачається, що розтягування і складання безперервно повторюються, то найменша флуктуація зрештою набуде значної ролі в динаміці системи і її якісна поведінка не залежатиме від рівня шуму. Тому хаотичну систему не можна безпосередньо "заспокоїти", скажімо, знизивши температуру.

Зазначимо ще одну особливість хаотичного атратора. Як ми знаємо, в дисипативній системі деякий початковий об'єм у фазовому просторі в ході еволюції зменшується і тому об'єм атратора повинен дорівнювати нулю. Для тривимірного фазового простору, про який ми говоримо, це призводить до того, що розмірність атратора $D < 3$. Крім того, внаслідок СЗПУ зрозуміло, що розмірність атратора має бути більшою за два: $D > 2$. Звідси зазначимо, що розмірність хаотичного атратора у тривимірному фазовому просторі визначається нерівністю $2 < D < 3$. Зрозуміло, що цей факт впливає з фрактальної природи атратора. Внаслідок наявності цих незвичайних властивостей такі атратори отримали назву *дивні хаотичні атратори*. Отже, фракталами можуть бути атратори або інші граничні множини у фазовому просторі, розмірність яких D для потоків має бути $D > 2$, а для систем із дискретним часом (відображень) $D \geq 2$.

Іноді, коли говорять про нерегулярні атратори, розділяють поняття "дивний" і "хаотичний", як характеристики його різних властивостей. Властивість "хаотичності" означає експоненціальну нестійкість траєкторій на атраторі, в той час як властивість "дивний" належить до його нетривіальної (тобто фрактальної) геометрії [1].

Можна ввести поняття нерегулярного атратора. У цьому разі йдеться про такий атратор, який має хоча б одну із цих двох відмічених властивостей. Проте багато числових досліджень показують, що обидві ці властивості зазвичай супроводжують одна одну. Відмітимо, що справджуються деякі особливі випадки, які дозволяють говорити про дивні нехаотичні атратори або, навпаки, про хаотичні недивні атратори [1].

Нагадаємо, що фрактальна розмірність простих атраторів (точка у фазовому просторі, граничний цикл, граничний m -вимірний тор) строго збігається з їхньою метричною (топологічною)

розмірністю. Зазначені типи атракторів є асимптотично стійкими, а їхня розмірність визначається цілим числом. Це дозволяє назвати такі атрактори *регулярними*. Порушення однієї із цих умов виключає атрактор із класу регулярних.

В нелінійній динаміці важливу роль відіграє поняття гіперболічності [1, 23, 36]. Коли говорять, що атрактор деякої динамічної системи *гіперболічний*, то мають на увазі, що всі траєкторії, що належать атрактору, є *гіперболічними*, тобто їхній окіл влаштовано так, як показано на рис. 6.1, а. Візьмемо будь-яку траєкторію на атракторі й розглянемо різні близькі до неї збурені траєкторії. В лінійному наближенні серед них виділяються траєкторії типу 1, які наближаються до даної траєкторії, причому в середньому по експоненті, і траєкторії типу 2, що наближаються до початкової траєкторії у зворотному часі, також в середньому по експоненті. Крім цього для такого атрактора властива канторова поперечна структура, що формується завдяки послідовним перетворенням розтягування, складання та поперечного стиснення фазового об'єму.

Отже, *гіперболічний атрактор* – це притягувальна інваріантна множина, розташована в обмеженій області фазового простору дисипативної системи й утворена виключно з гіперболічних сідлових траєкторій, причому локально поблизу всіх цих траєкторій фазовий простір влаштований за одним типом.

Доведено, що системи, які мають властивість гіперболічності, структурно стійкі, тобто є грубими [1, 23, 36]. Якщо деяка система має гіперболічний атрактор, то це справджується і для систем, що утворені довільним достатньо малим неперервним збуренням початкової системи. З огляду на припущення про гіперболічність атрактора, можна строго довести наявність усіх інших властивостей, які притаманні динамічному хаосу системи.

Умови гіперболічності атрактора для реальних систем не виконуються, відомі лише динамічні системи, атрактори яких близькі до гіперболічних, як кажуть, майже гіперболічні атрактори. Такі атрактори є хаотичними і зберігають властивості за малих збурень. Для них характерно, що відбувається порушення структурної стійкості в окремих ситуаціях. Але така структурна нестійкість відносно мала. Майже гіперболічні атрактори називають *квазігіперболічними* [1, 23, 36].

Гіперболічні та квазігіперболічні атрактори відображають класичні властивості детермінованого хаосу та є певною мірою ідеальною моделлю хаосу. Це відображено в основних властивостях гіперболічних атракторів [1, 23, 36]:

- атрактор завжди єдиний,
- має однорідний басейн притягання,
- не змінює свою структуру за варіацій параметрів системи та початкового стану, тобто є структурно стійким (грубим),
- характеризується експоненціальною нестійкістю на ньому
- та фрактальною геометрією, тобто є дивним хаотичним атрактором.

Квазіатрактори вводять як математичний образ хаосу у негіперболічних динамічних системах [1, 23]. У системах з квазіатракторами реалізуються режими детермінованого хаосу, що характеризуються експоненціальною нестійкістю та фрактальною структурою атрактора. З огляду на ці характеристики зазначених режимів ідентичні основним характеристикам гіперболічних і квазігіперболічних атракторів. Однак є істотна відмінність, що полягає в одночасному існуванні зліченної множини різних хаотичних і регулярних множин. Цю сукупність усіх наявних граничних множин в обмеженій області G_0 фазового простору, куди притягуються всі або майже всі траєкторії з області G_1 , яка включає область G_0 , і називають квазіатрактором динамічної системи. Це призводить до того, що басейни притягання співіснуючих атракторів є надзвичайно складною структурою вкладених областей, що мають фрактальну геометрію. Таким чином, ці системи демонструють високу чутливість до зміни початкових умов і дії шуму. У випадку скінченної варіації параметрів системи реалізуються каскади різних біфуркацій як регулярних, так і хаотичних атракторів.

Отже, у динамічних системах, що є моделями реальних явищ природи, хаотичний режим супроводжується появою квазіатрактора. Такі особливості стимулювали детальні дослідження структури хаотичних атракторів і запровадження їхньої класифікації [1, 23]. Ми не заглиблюватимемося в цьому напрямі, а, розглядаючи далі динамічні системи з режимом детермінованого хаосу, зберігатимемо термін "дивний хаотичний атрактор" (іноді один із двох епітетів видаляють).

РОЗДІЛ 7

НЕПЕРЕРВНІ СИСТЕМИ

В попередніх розд. 4 і 5 ми досліджували хаотичні режими, притаманні відображенням. Тепер природно запитати, а як виникає стан хаосу в неперервних системах, що описуються диференціальними рівняннями? Поговоримо про це в цьому розділі.

7.1. Система Лоренца

Система Лоренца – динамічна система, яку зараз слід назвати знаменитою, була досліджена Лоренцом 1963 р. Вона створювалася з метою побудувати спрощену модель атмосферної конвекції для розв'язання питання, чи можливий довготерміновий прогноз погоди. Фактично до роботи Лоренца ненадійність прогнозу погоди пояснювали тим, що лабораторія має не останню, а передостанню модель комп'ютера і, до того ж, працівники лабораторії не дуже роботящі. Інакше кажучи, раніше вважали, що в детермінованій системі за наявності потужної ЕОМ ми завжди зможемо передбачити стан системи (напр., дати надійний прогноз погоди), незважаючи на малі похибки вимірювання початкового стану системи, які завжди існують на практиці. Проте, як ми тепер розуміємо, жодна ЕОМ не зможе дати точний прогноз погоди на основі математичної системи із СЗПУ.

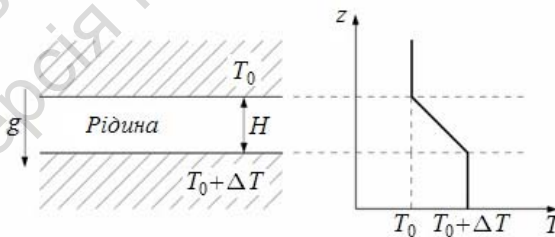


Рис. 7.1. Схема досліджу Релея – Бенара

Перш ніж досліджувати систему Лоренца, трохи поговоримо про фізику явища конвекції в рідині (під рідиною ми розумітимемо і газоподібне, і рідинне середовище). Нехай шар рідини завтовшки H , що обмежений двома горизонтальними поверхнями, розташовано у гравітаційному полі. На верхній поверхні підтримується температура T_0 , але на нижній вона становитиме $T_0 + \Delta T$, ($\Delta T > 0$), рис. 7.1. Отже, у шарі існує сталий градієнт температури, що проілюстровано графіком на рис. 7.1.

В рідині з певним коефіцієнтом теплового розширення різниця температур породжує різницю густин. Тому рідина між поверхнями буде схильна до двох протидіючих тенденцій. Холодна, з більшою густиною рідина, яка розташована у верхній частині шару, прагне опуститися, тоді як рідина в нижній частині шару, тепліша і з меншою густиною, прагне піднятися. Рух рідини, що виникає у цьому разі, називають *тепловою конвекцією*. Однак, якщо різниця температур ΔT досить мала, то конвективний рух не виникає через стабілізуючі ефекти тертя. За досягнення певної різниці температур ΔT_c стан спокою рідини втрачає стійкість і починається конвекція. Конвективний рух рідини вперше спостерігався в експериментах Бенара¹ (1901 р.) і отримав теоретичне пояснення в роботах Релея² (1916 р.). Саме тому таке явище називають конвекцією Релея – Бенара. За значень $\Delta T > \Delta T_c$ в результаті конвекції формується структура валів із паралельними горизонтальними осями (рис. 7.2), які утворені висхідними і низхідними потоками, що чергуються (розглядаємо ситуацію, коли рух рідини є однорідним уздовж осі Oy декартової системи координат). Потоки розташовані еквідистантно з просторовим періодом L . Два сусідні вали обертаються у протилежні сторони. У ідеальному експерименті Релея – Бенара обидва напрямки обертання строго рівномірні, тобто у будь-якій точці рух рідини може бути спрямований як в одну, так і в іншу сторону. Цю властивість відображено на біфуркаційній діаграмі (рис. 7.3).

¹ Бенар Анрі Клон (1874–1939) – французький фізик.

² Джон Вільям Стретт (лорд Релей) (1842–1919) – англійський фізик.

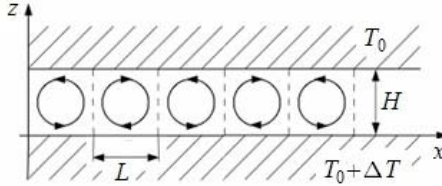


Рис. 7.2. Схема руху рідини в конвективних валах

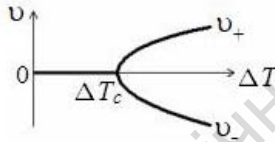


Рис. 7.3. Біфуркаційна діаграма поблизу критичного значення ΔT_c

За значень $\Delta T > \Delta T_c$ конвективні вали мають стаціонарну структуру, тобто швидкість і температура описуються функціями, які не залежать від часу. У процесі подальшого збільшення різниці ΔT структура стає складнішою, але зберігає певну регулярність. Однак у разі ще більшого зростання різниці ΔT структура повністю руйнується і на зміну впорядкованій стаціонарній структурі приходять неупорядкована конфігурація, що безперервно змінюється: рух рідини стає турбулентним.

Рух рідини описується системою рівнянь, а саме: рівняння Нав'є – Стокса, рівняння теплопровідності та рівняння нерозривності з відповідними граничними умовами. У нашій задачі граничні умови: $T(x, z = 0, t) = T_0 + \Delta T$, $T(x, z = h, t) = T_0$. Отже, початковою є система рівнянь із частинними похідними. Лоренц зробив низку припущень, що дозволили спростити початкову постановку задачі. Ми не розглядатимемо ці припущення і виведення рівнянь [4, 23]. Зазначимо лише, що в ході перетворень отримано нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Зазвичай нескінченні системи розв'язують шляхом редукції, тобто обмежуються певною кількістю рівнянь.

Лоренц розглянув гранично можливу редукцію нескінченної системи рівнянь. В результаті отримано систему з трьох звичайних диференціальних рівнянь. Щоб із нею було зручно працювати, рівняння записують у безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Рівняння (7.1) називають *рівняннями Лоренца*. Фізичний смисл безрозмірних параметрів і змінних, що входять у систему (7.1), такий:

- $\sigma = \nu / k$ – число Прандтля¹ – відношення коефіцієнта кінематичної в'язкості до коефіцієнта теплопровідності;
- $r = Ra / Ra_c$ – нормоване число Релея;
- $Ra = g\alpha H^3 \Delta T / (\nu k)$ – число Релея, g – гравітаційна стала, α – коефіцієнт теплового розширення. Релей показав, що умовою виникнення течії у вигляді валів відповідає певне значення Ra , а саме $Ra_c = \pi^4 (1 + a^2)^3 / a^2$, де $a = H / L$;
- параметр $b = 4 / (1 + a^2)$ визначається геометрією конвективної комірки;
- точка над літерами в (7.1) – похідна за безрозмірним часом $\tau = \pi(1 + a^2)kt / H^2$;
- змінна X характеризує швидкість обертання конвекційних валів;
- змінна Y визначає різницю температур між висхідними та низхідними потоками;
- змінна Z характеризує відхилення вертикального температурного профілю від лінійної залежності.

Вивчимо основні властивості потоку системи Лоренца (7.1). Візьмемо значення параметрів ті самі, що у роботі Лоренца: $b = 8/3$, $\sigma = 10$. Тоді параметр r , який пропорційний різниці температур на нижній та верхній поверхнях шару, буде керую-

¹ Прандтль Людвіг (1875–1953) – німецький механік і фізик.

чим параметром. Розглянемо, як у Лоренца, початкові умови $(X, Y, Z) = (0, 1, 0)$, що визначають мале відхилення від рівноважного стану.

1. *Симетрія.* Насамперед, відмітимо симетрію рівнянь Лоренца – їхній вигляд не зміниться, якщо одночасно замінити знак X та Y . Це означає, що будь-яке утворення у фазовому просторі або має таку саму симетрію, тобто перетворюється саме в себе у випадку заміни змінних, $X \rightarrow -X$, $Y \rightarrow -Y$, або має подібне утворення як симетричного партнера. Нижче ми переконаємося, що атрактор у системі Лоренца має вказану симетрію.

2. *Дисипативність системи Лоренца.* Обчислимо дивергенцію фазового потоку (7.1):

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(\sigma + 1 + b) = -\frac{41}{3}. \quad (7.2)$$

Потік стискає деякий об'єм фазового простору $V(t)$ згідно із співвідношенням

$$V(\tau) = V(0) \exp[-(\sigma + 1 + b)\tau] = V(0) \exp\left(-\frac{41}{3}\tau\right). \quad (7.3)$$

Отже, модель Лоренца дуже дисипативна, адже за одиницю часу об'єм стискається в $\exp(41/3) \approx 10^6$ разів і всі траєкторії, урешті, будуть обмежені деякою граничною множиною.

3. *Особливі точки потоку.* Знайдемо нерухомі точки системи рівнянь Лоренца. Це стани, що не змінюються в часі, тому похідні динамічних змінних у часі потрібно прирівнювати до нуля. Тоді згідно з (7.1) отримаємо три алгебричні рівняння для трьох невідомих:

$$\sigma(Y - X) = 0, \quad rX - Y - XZ = 0, \quad XY - bZ = 0. \quad (7.4)$$

З першого рівняння маємо $Y = X$, тоді друге переписеться у вигляді $X(r - 1 - Z) = 0$. Звідси одержимо дві можливості: $X = 0$ і $Z = r - 1$. Із третього рівняння маємо для першого випадку $Z = 0$, а для другого $X = \pm\sqrt{bZ} = \pm\sqrt{b(r-1)}$ існує лише для значення $r \geq 1$. Отже, якщо $r < 1$, то маємо один стан рівноваги в початку координат, а при $r \geq 1$ – три стани рівноваги:

$$O: X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0; \quad (7.5)$$

$$O_1: X = \sqrt{b(r-1)}, Y = \sqrt{b(r-1)}, Z = r-1; \quad (7.6)$$

$$O_2: X = -\sqrt{b(r-1)}, Y = -\sqrt{b(r-1)}, Z = r-1, \quad (7.7)$$

які надалі позначатимемо O , O_1 , O_2 . Зауважимо, що друга і третя нерухомі точки рівняння Лоренца можуть бути прикладом пари симетричних партнерів – вони переходять один в одного у випадку одночасної зміни знаків X та Y .

4. *Лінійний аналіз стійкості особливих точок.* Визначимо, за яких значень параметрів знайдені нерухомі точки є стійкими. Нехай (X_0, Y_0, Z_0) – нерухома точка. Шукатимемо розв'язок рівнянь Лоренца у вигляді

$$\begin{aligned} X(\tau) &= X_0 + \delta X(\tau), \\ Y(\tau) &= Y_0 + \delta Y(\tau), \\ Z(\tau) &= Z_0 + \delta Z(\tau), \end{aligned} \quad (7.8)$$

де $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$ визначає мале відхилення від точки (X_0, Y_0, Z_0) . Згідно з підрозд. 1.7, запишемо лінеаризовані рівняння потоку (7.1):

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (r-Z_0) & -1 & -X_0 \\ Y_0 & X_0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Як завжди в лінійному аналізі на стійкість, вважаємо, що залежність відхилення від часу експоненціальна: $\delta X, \delta Y, \delta Z \sim \exp(\lambda\tau)$. Підставляючи зазначену форму розв'язку $\delta X, \delta Y, \delta Z$ у систему (7.9), знаходимо, що умовою існування нетривіального розв'язку є рівність нулю визначника:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r + Z_0 & \lambda + 1 & X_0 \\ -Y_0 & -X_0 & \lambda + b \end{vmatrix} = 0, \quad (7.10)$$

або

$$\begin{aligned} &(\lambda + \sigma)[(\lambda + 1)(\lambda + b) + X_0^2] + \\ &+ [(\lambda + b)(Z_0 - r) + X_0 Y_0] = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Для нерухомої точки $O = (0, 0, 0)$, розміщеної в початку координат, маємо

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0, \quad (7.12)$$

звідки знаходимо три корені:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(r - 1)}. \quad (7.13)$$

Перший корінь характеристичного рівняння завжди від'ємний. Другий і третій є від'ємними разом лише при $r < 1$; якщо ж $r > 1$, то один із них стає додатним. Отже, точка O стійка у разі $r < 1$ і нестійка при $r > 1$. З погляду класифікації нерухомих точок, якщо $r < 1$, то маємо стійкий вузол, якщо $r > 1$, – сідло. Відповідно до визначення, r – це відношення числа Релея до його критичного значення, тобто $r = Ra / Ra_c$. Таким чином стаціонарний стан, що відповідає відсутності конвекційних валів, стає нестійким у разі перевищення критичного значення $r = 1$. Тим самим ми відтворили результат Релея!

Розглянемо тепер точки O_1 і O_2 , які існують, як було показано, при $r > 1$. Підставляючи в (7.11) вирази

$$X_0 = Y_0 = \pm \sqrt{b(r - 1)}, \quad Z_0 = r - 1, \quad (7.14)$$

після деяких перетворень отримуємо кубічне рівняння відносно λ :

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0. \quad (7.15)$$

Дослідження рівняння (7.15) показано у роботі [23]: коли r лише трохи перевищує одиницю, то всі три корені від'ємні. Отже, нерухомі точки O_1 і O_2 є стійкими вузлами. За збільшення r із деякого моменту вони стають стійкими фокусами, причому один корінь від'ємний, а два інші – комплексно-спряжені з від'ємною дійсною частиною. За подальшого збільшення r дійсна частина змінює знак, і це є моментом втрати стійкості особливих точок O_1 і O_2 (через симетрію це проходить одночасно). Аналіз рівняння (7.15) показує, що це відбувається за значення r [23]:

$$r_\infty = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (\sigma > b + 1); \quad (7.16)$$

якщо $\sigma = 10$ і $b = 8/3$, то значення $r_\infty = 24,74$. (7.17)

5. *Біфуркації у системі Лоренца.* Обговоримо, як змінюється динаміка системи Лоренца, якщо підтримувати значення параметрів $\sigma=10$ і $b=8/3$ сталими і збільшувати, починаючи з нуля, параметр r . Фізично це відповідає збільшенню ступеня підігріву (значення ΔT на рис. 7.1).

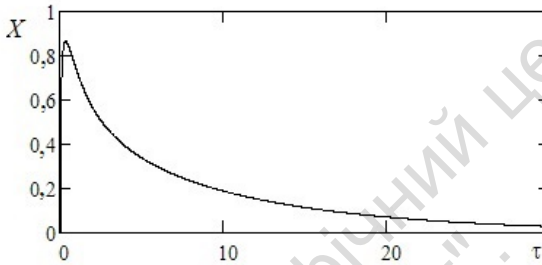


Рис. 7.4. Графік функції $X(\tau)$ при $r=0,9$

Якщо нормоване число Релея $0 < r < 1$, то потрібно досліджувати особливу точку $O=(0,0,0)$. Для неї, згідно з (7.13), усі власні значення матриці (7.10) від'ємні. Це свідчить про те, що точка $O=(0,0,0)$ є стійким вузлом і притягує до себе всі траєкторії у фазовому просторі. На рис. 7.4 показано залежність координати $X(\tau)$ при $r=0,9$. Як бачимо, початковий рух у рідині згасає, тобто конвекція відсутня, і перенесення теплоти відбувається лише за рахунок теплопровідності.

Якщо $r > 1$, то як слідує з (7.13), $\lambda_2 > 0$. Отже, особлива точка $O=(0,0,0)$ втрачає стійкість і народжується пара стійких особливих точок (7.14) O_1 і O_2 , що відповідають стаціонарній конвекції у вигляді валів із протилежним напрямком обертання. Тут маємо біфуркацію за типом вилки, коли стійка особлива точка народжує дві інші стійкі особливі точки. Цей результат визначається властивостями симетрії потоку (7.1).

На рис. 7.5, а показано, як коливна координата $X(\tau)$ прямує до деякого стаціонарного значення (аналогічний характер мають криві $Y(\tau)$ і $Z(\tau)$). Проекція фазової траєкторії на площину YZ

(рис. 7.5, б) має вигляд спіралі, що закручується навколо проєкції точки O_2 на площині YZ .

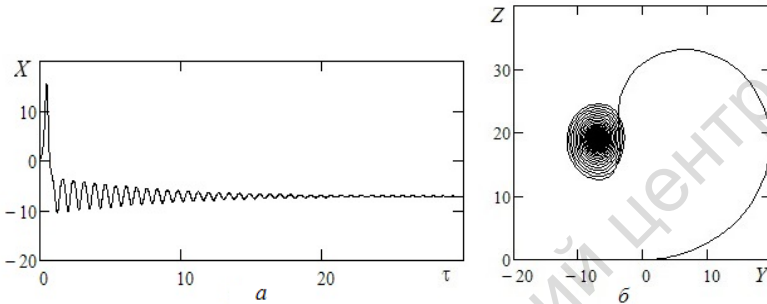


Рис. 7.5. Графіки розв'язку системи Лоренца при $r = 20$

Отже, у процесі переходу r через одиницю точка O перестає бути атрктором і атркторами стають нерухомі точки O_1 і O_2 (див. формули (7.6) та (7.7)). Ці два атрктори визначають рівномірне обертання рідини, відповідно у напрямку проти або за годинниковою стрілкою. Причому швидкість руху рідини зростає зі збільшенням параметра r : $X = \pm\sqrt{b(r-1)}$. Зазначимо, що згідно з (7.16), (7.17) такий рух буде стійким за досить значних величин параметра r .

Присутність двох атркторів означає наявність *бістабільності*, тобто залежно від початкових умов система приходить в один із двох стійких режимів. (У загальному випадку, коли кількість атркторів більше одиниці, говорять про *мультистабільність*. Це характерна властивість нелінійних динамічних систем [23].)

Нерухомі точки O_1 і O_2 є стійкими фокусами. Фазові траєкторії наближаються до нерухомої точки по спіралі (рис. 7.5), що відповідає згасаючим осциляціям. Чим більший параметр r , тим більший початковий розмах цих осциляцій. Особливі точки O_1 і O_2 залишаються стійкими до досягнення значення $r_\infty = 24,74$. Нарешті, починаючи з $r_\infty = 24,74$, нерухомі точки O_1 і O_2 втрачають стійкість і з'являється дивний хаотичний атрктор, який стає єдиною притягувальною множиною.

Відповідь на питання, до чого в цьому випадку притягуються фазові траєкторії, можна отримати в результаті числового дослідження. Обчислювальний експеримент показав, що притягувальною множиною для системи (7.1) є дивний хаотичний атрактор певного вигляду, який отримав назву *атрактор Лоренца*.

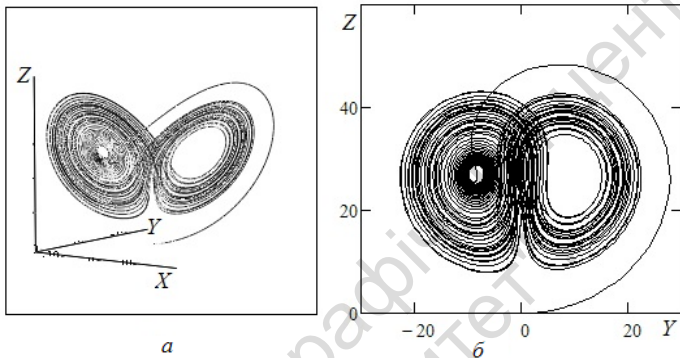


Рис. 7.6. Фазовий портрет атрактора Лоренца, $r = 28$

Характер поведінки системи за значень $r > r_{\infty}$ докорінно змінюється: рух системи стає вкрай невпорядкованим. Це є результатом того, що розв'язок, розкручуючись по спіралі в околі однієї з нерухомих точок (O_1 або O_2) протягом довільного відрізка часу, перестрибує в околі другої нерухомих точки і так само деякий час розкручується по спіралі, а потім перестрибує назад і т. д. Таке поєднання руху по спіралі та повернення породжує обговорюваний нами вище механізм розтягування і складання, що призводить до надзвичайно складної структури – дивного хаотичного атрактора певного вигляду. Типову траєкторію цього атрактора показано на рис. 7.6, а, її проекцію на площину YZ фазового простору – на рис. 7.6, б.

Горизонтальна площина, що відповідає значенню $Z = r - 1 = 27$, утримує особливі точки O_1 і O_2 . Регулярність показаної на рис. 7.6 структури оманлива – атрактор дуже складний. Цей факт ілюструє рис. 7.7, де показано залежність фазових координат від часу. Усі графіки являють собою нерегулярні коливання. Причому для $X(\tau)$ і $Y(\tau)$ маємо комбінацію коливань і стрибків, які су-

проводжуються зміною знака, що обумовлено зміною конвективного напрямку руху валів.

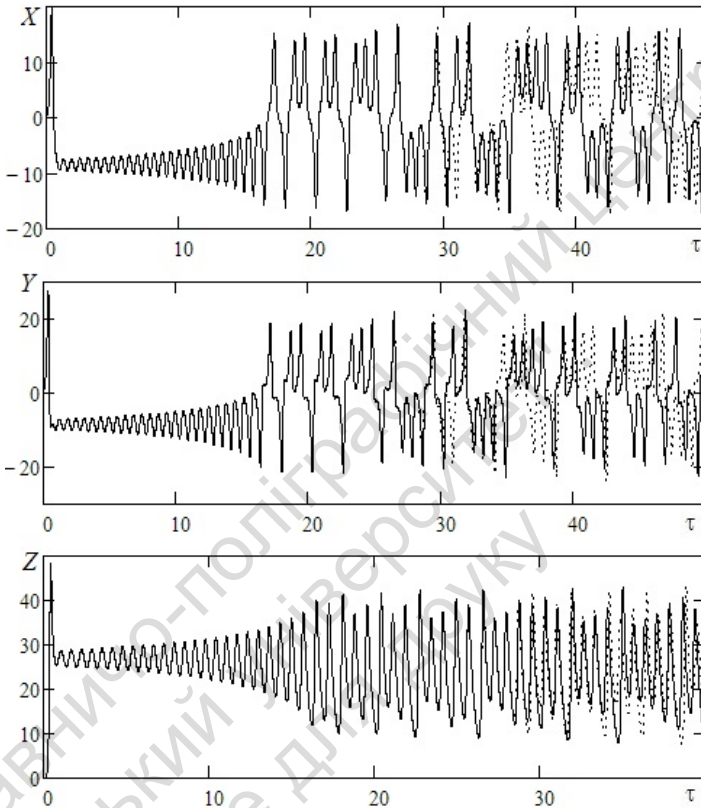


Рис. 7.7. Залежності $X(\tau)$, $Y(\tau)$, $Z(\tau)$ для $r = 28$; початкові умови: суцільна лінія $(X, Y, Z) = (0; 1; 0)$, пунктирна $(X, Y, Z) = (0; 1,00001; 0)$

На рис. 7.8 показано перетин Пуанкаре атрактора Лоренца на площині $Z = r - 1 = 27$. Атрактор Лоренца не є звичайною поверхнею, а має складну структуру, що складається з незліченної кількості щільно упакованих листів (нагадаємо, що модель Лоренца дуже дисипативна). Тому за розгляду у збільшеному ви-

гляді цих "відрізків" на рис. 7.8, безумовно, з'явиться канторова структура перетину Пуанкаре.

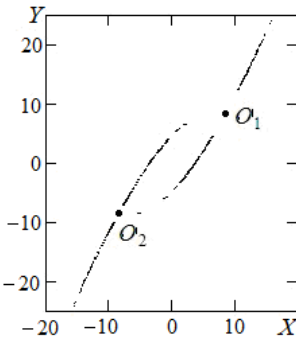


Рис. 7.8. Перетин Пуанкаре атрактора Лоренца на площині $Z = r - 1$, якщо $r = 28$

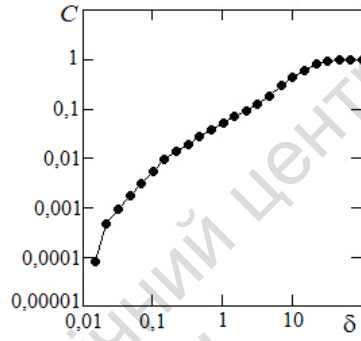


Рис. 7.9. Графік для визначення кореляційної розмірності атрактора Лоренца, $r = 28$

Отже, атрактор Лоренца має фрактальні властивості. Спробуємо обчислити кореляційну розмірність D_2 атрактора Лоренца. Для цього обчислимо кореляційну розмірність D_2^s множини в перетині Пуанкаре (рис. 7.8). Згідно з даними підрозд. 3.9 (формули (3.49), (3.50)), як і в розрахунку кореляційної розмірності атрактора Ено (підрозд. 5.4), слід побудувати в логарифмічних координатах залежність кореляційного інтеграла $C(\delta)$ від розміру шаблону покриття δ . Такий графік показано на рис. 7.9. Виділяючи лінійну ділянку графіка, обчислюємо кореляційну розмірність множини в перетині Пуанкаре $D_2^s \approx 1,079$. Тоді кореляційна розмірність атрактора Лоренца

$$D_2 = D_2^s + 1 \approx 2,079 \quad (7.18)$$

(в роботі [4] наведено значення $D_2 = 2,06$). Отримали число дуже близьке до двох, але все ж більше двох.

Те, що фрактальна розмірність дуже близька до двох, обумовлено сильним стисканням об'ємів у фазовому просторі, про який ми говорили вище (див. формулу (7.3)). Сильним стисканням об'ємів пояснюється і те, що відображення Пуанкаре на рис. 7.8

можна описати одновимірним відображенням. Потрібно віддати належне прозорливості Лоренца, який отримав таке відображення, фіксуючи залежності послідовних максимальних значень Z , тобто Z_{n+1} від попередніх Z_n . Ці значення Z_{\max} є координатами Z точок у перетині Пуанкаре поверхні $XY - bZ = 0$ ($\dot{Z} = 0$ з третього рівняння системи (7.1)).

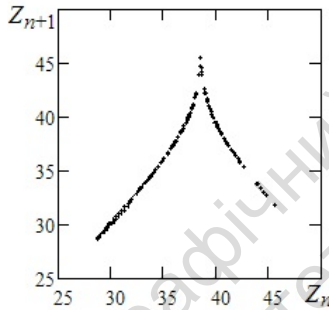


Рис. 7.10. Відображення $Z_{n+1} = f(Z_n)$, $r = 28$

Далі Лоренц побудував графік залежності значень чергового максимуму від попереднього, тобто $Z_{n+1} = f(Z_n)$. Зовсім не очевидно, що ця процедура приведе до розумного результату. Але це так! Залежність Z_{n+1} від Z_n показано на рис. 7.10. Виявилось, що точки (Z_{n+1}, Z_n) з хорошою точністю лягають на одновимірну криву з гострою вершиною. Ретельніший аналіз показує, що точки на графіку насправді не лягають на певну криву, а мають розкид, пов'язаний із притаманною аттрактору Лоренца фрактальною структурою.

Маємо чудовий результат! Адже тепер властивості самої моделі можуть бути визначені під час аналізу одновимірного відображення. Достатньо аналітично апроксимувати криву, зображену на рис. 7.10, а потім виконати ітерації $Z_{n+1} = f(Z_n)$ за допомогою процедури, описаної в розд. 4. Повертаючись до рис. 7.10, слід зазначити, що тангенс кута нахилу дотичної до графіка $Z_{n+1} = f(Z_n)$, усюди більший за одиницю. Отже, як ми це вже розуміємо, незалежно від початкових умов режим у системі буде хаотичним.

Виявляється, що і для інших моделей, різних за своєю природою, побудова одновимірного відображення на основі виділення локальних максимумів із високою точністю формують графіки, що відповідають однозначним неперервним кривим. Тому, якщо якісь експериментальні дані визначають одновимірне відображення, це слід розглядати як велику удачу!

Для ілюстрації СЗПУ атратора Лоренца за значення $r = 28$ на рис. 7.11 показано часові залежності динамічних змінних для двох траєкторій, які виходять із двох близьких початкових точок, розташованих на відстані лише $\delta_0 = 10^{-5}$ одна від одної. На рис. 7.11, б показано як еволюціонує у часі відстань $\delta(\tau)$, що розділяє ці точки. (Початкову ділянку еволюції не показано (див. рис. 7.7).) Як ми знаємо, у лінійному наближенні відстань між траєкторіями зростає із часом за експоненціальним законом $\delta(\tau) = \delta_0 \exp(\Lambda\tau)$, де Λ – старший показник Ляпунова. Тому, згідно з рис. 7.11, б, можна оцінити показник Ляпунова, визначивши середній нахил флюктуючої кривої $\ln[\delta(\tau)/\delta_0] = \Lambda\tau$.

У цьому випадку отримуємо $\Lambda \approx 0,9$, що досить добре узгоджується з результатами точніших числових розрахунків. Зрозуміло, що максимальну відстань δ обмежено розмірами атратора. Цим пояснюється насичення, яке спостерігають за великих значень τ . Для порівняння на рис. 7.11, а показано еволюцію в часі значення δ при параметрі $r = 20$, що відповідає режиму стаціонарної конвекції (див. рис. 7.5), для якого $\Lambda < 0$.

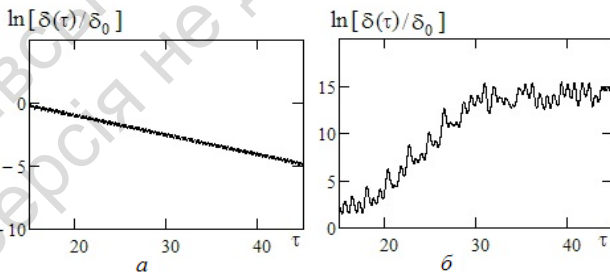


Рис. 7.11. Графіки часової еволюції відстані $\delta(\tau)$ між траєкторіями в атраторі Лоренца при $\delta_0 = 10^{-5}$: а – якщо $r = 20$, б – якщо $r = 28$

Цю характерну рису хаотичних атракторів Лоренц образно відобразив у назві однієї зі своїх статей (1979): "Передбачення: чи може помах крилець метелика у Бразилії призвести до утворення торнадо в Техасі?".

Фазовий простір системи Лоренца тривимірний, тому спектр Ляпунова має три показники. Для їхнього обчислення систему рівнянь (7.1) ітерують разом із трьома комплектами рівнянь для збурень (отримайте рівняння самостійно):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{X}}^{(j)} &= -\sigma\tilde{X}^{(j)} + \sigma\tilde{Y}^{(j)}, \\ \dot{\tilde{Y}}^{(j)} &= -\tilde{X}^{(j)}Z - X\tilde{Z}^{(j)} + r\tilde{X}^{(j)} - \tilde{Y}^{(j)}, \\ \dot{\tilde{Z}}^{(j)} &= \tilde{X}^{(j)}Y + X\tilde{Y}^{(j)} - b\tilde{Z}^{(j)}, \quad j=1,2,3.\end{aligned}$$

На початку задаємо координати (X_1, Y_1, Z_1) початкової точки на траєкторії і координати трьох ортогональних нормованих векторів збурень у початковій точці траєкторії

$$\begin{aligned}(\tilde{X}_1^{(1)}=1, \tilde{Y}_1^{(1)}=0, \tilde{Z}_1^{(1)}=0), \\ (\tilde{X}_1^{(2)}=0, \tilde{Y}_1^{(2)}=1, \tilde{Z}_1^{(2)}=0), \\ (\tilde{X}_1^{(3)}=0, \tilde{Y}_1^{(3)}=0, \tilde{Z}_1^{(3)}=1).\end{aligned}$$

Далі реалізуємо алгоритм обчислення спектра показників Ляпунова, який описано в підрозд. 1.10. У процесі обчислень проводимо ортогоналізацію векторів і нормування збурень за процедурою Грама – Шмідта. Відтак підраховуємо суми S_1, S_2, S_3 (формули (1.96)) і, згідно з формулами (1.97), отримуємо оцінку показників Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$.

На рис. 7.12 показано залежність сум S_1, S_2, S_3 від часу накопичення τ за значень сталих $\sigma=10, b=8/3, r=28$. Показники Ляпунова визначають нахил прямих, які апроксимують ці залежності: $\Lambda_1=0,906; \Lambda_2 \approx 0; \Lambda_3=-14,547$. Згідно з формулами (1.81) і (7.2), ця сума має дорівнювати сталій $-(\sigma+b+1)$, яка визначає дивергенцію фазового потоку системи Лоренца. Для даних значень параметрів отримуємо такі величини:

$$-(\sigma+b+1)=-41/3 \approx -13,666, \quad \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 \approx -13,639,$$

отже маємо добре узгодження обчислень.

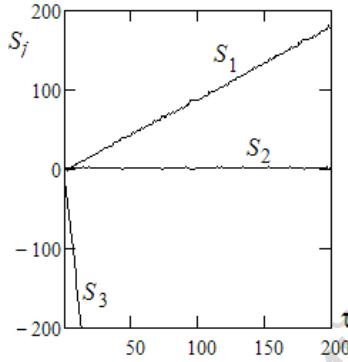


Рис. 7.12. Залежність накопичувальних сум S_1, S_2, S_3 від часу накопичення τ : $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

На рис. 7.13 показано залежність показників Ляпунова в системі Лоренца від параметра r . Наявність додатного старшого показника свідчить про хаотичну природу атратора. Границю хаотичного режиму відділяє точка r_∞ на осі параметра r . Нульовий показник показує, що атратор не є нерухомою точкою. Завдяки наявності великого за абсолютною величиною від'ємного показника сума всіх трьох показників від'ємна.

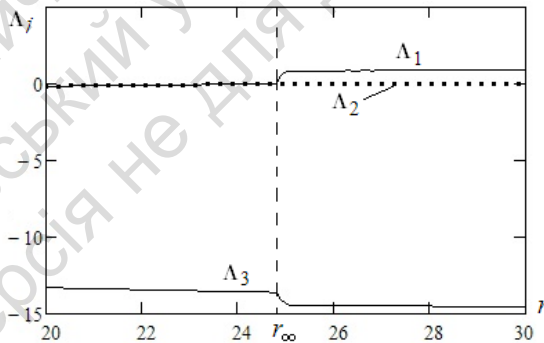


Рис. 7.13. Залежність показників Ляпунова в системі Лоренца від параметра r : $\sigma = 10$, $b = 8/3$

Знання показників Ляпунова дозволяє обчислити розмірність Ляпунова атрактора Лоренца. Згідно з формулою (3.55) маємо

$$D_L = 2 + \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{|\Lambda_3|} \approx 2,062. \quad (7.19)$$

Отримали результат, близький до обчисленої вище кореляційної розмірності D_2 .

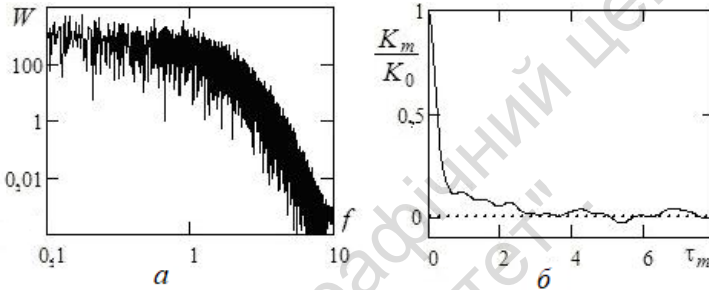


Рис. 7.14. Спектральна щільність потужності (а) й автокореляційна функція (б) змінної X атрактора Лоренца для $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$

Наслідком хаотичної динаміки є характерний вигляд спектральної щільності потужності й автокореляційної функції атрактора Лоренца (рис. 7.14, розраховано для змінної X). Зазначимо такі характерні риси спектра на рис. 7.14, а:

- 1) якщо для регулярного періодичного руху спектр має дискретний характер, то для хаотичного – стає неперервним;
- 2) в області низьких частот маємо максимальний рівень спектральної потужності за наявності, кажучи образно, широкого "п'єдесталу", який свідчить про повну неперіодичність хаотичного процесу;
- 3) лінійний характер спадання спектральної щільності потужності W при логарифмічній шкалі на рис. 7.14, а, говорить про степеневу залежність функції $W(f)$, що є індикатором наявності фрактальних властивостей динамічних змінних.

Автокореляційна функція атрактора Лоренца спадає практично монотонно за законом, близьким до експоненціальної функції (рис. 7.14, б).

Розрахункова формула для нормованої автокореляційної функції мала вигляд

$$\frac{K_m}{K_0} = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} (X_i - \langle X \rangle)(X_{i+m} - \langle X \rangle), \quad (7.20)$$

де індекси i та m визначають дискретні моменти часу $\tau_m = \Delta t \cdot m$, Δt – часовий проміжок між моментами відліку часу, в яких визначено значення змінної X , $\langle X \rangle$ – середнє значення змінної X .

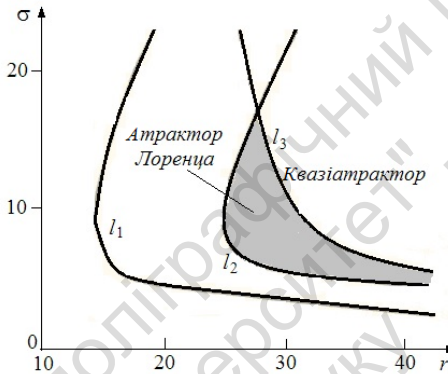


Рис. 7.15. Біфуркаційна діаграма системи Лоренца на площині параметрів r і σ для $b = 8/3$ [1, с. 152]

Атрактор Лоренца є квазігіперболічним. Зауважимо, що гіперболічний атрактор структурно стійкий, чого не можна сказати про атрактор Лоренца через особливість у початку координат O . Тут доречно відмітити, що відсутність гіперболічності в цій ситуації не суттєва, адже структурна нестійкість незначна [1].

Зазначимо, що в системі (7.1) режим квазігіперболічного хаосу реалізується у скінченній області зміни її керувальних параметрів – r , σ , b . На рис. 7.15 зображено біфуркаційну діаграму системи. Існуванню атрактора Лоренца відповідає затонована область у параметричному просторі. Поза цією областю властивості хаотичного атрактора будуть іншими: атрактор Лоренца трансформується у квазіатрактор [1].

Насамкінець підрозділу зазначимо, що одним з основних недоліків моделі Лоренца є вкрай жорсткі умови редукції почат-

кової нескінченної системи рівнянь. Пізніші дослідження показали, що насправді результати Лоренца дуже грубо описують спостережуваний у більшості гідродинамічних експериментів процес конвекції.

"Проте, можна лише дивуватися науковій сміливості Лоренца, котрий обрав найпростішу модель – систему лише трьох звичайних диференціальних рівнянь, прорахував їх на комп'ютері і зумів зрозуміти, що має справу не з помилками обчислень, а з відкриттям" [18, с. 25].

Надалі, щодо детермінованого хаосу, система Лоренца стала однією з основних моделей і об'єктом для випробування методик дослідження хаосу.

7.2. Система Ресслера

Поряд із системою Лоренца, відома автономна система диференціальних рівнянь, запропонована 1976 р. Ресслером¹. Відтоді *система Ресслера* стала одним із класичних об'єктів нелінійної динаміки. Система має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y - Z, \\ \dot{Y} &= X + aY, \\ \dot{Z} &= b - cZ + XZ, \end{aligned} \quad (7.21)$$

де a, b, c – параметри. Система Ресслера не має безпосереднього фізичного або біологічного сенсу, але є простою з математичного погляду і має своєрідну динаміку.

На відміну від рівнянь Лоренца рівняння системи Ресслера (7.21) залежно від параметрів або взагалі не мають особливих точок, або мають дві особливі точки з координатами

$$X_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - ab}, \quad Y_{1,2} = -Z_{1,2} = -\frac{X_{1,2}}{a}. \quad (7.22)$$

Звідси видно, що особливі точки існують лише, якщо $c \geq 2\sqrt{ab}$. Зазвичай параметри a і b фіксуються, а параметр c

¹ Ресслер Отто Е. (народ. 1940) – німецький дослідник, хімік і біолог.

ϵ змінним. Аналіз стійкості особливих точок показує, що перша з точок (7.22) буде завжди нестійким вузлом, а друга може бути стійкою. За деякого значення параметра c починає виконуватися умова нестійкості другої особливої точки, і в системі збуджуються автоколивання, математичним образом яких є граничний цикл. Характер автоколивань залежить від значення параметра c .

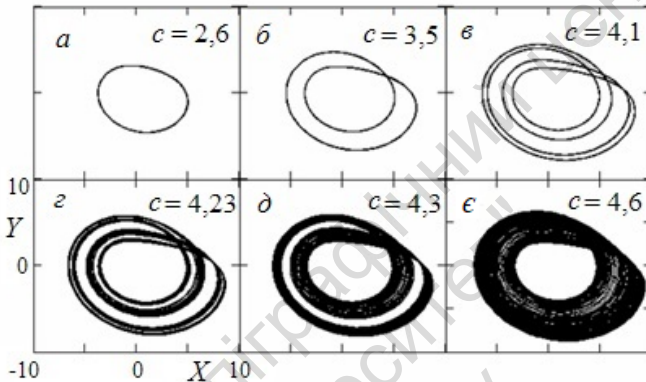


Рис. 7.16. Фазові портрети атратора Ресслера у проекції на площину (X, Y) : $a = b = 0,2$

Нехай, як у роботі Ресслера, $a = b = 0,2$. В цьому випадку умова нестійкості другої особливої точки збігається з умовою її появи. В розрахунках початкові умови мали вигляд: $X = 0$, $Y = 1$, $Z = 0$. За невеликих значень c , менших ніж $c_1 \approx 2,83$, в системі спостерігають періодичні коливання. Їм відповідає у фазовому просторі граничний цикл (рис. 7.16, а). Перехідний процес на рис. 7.16 не показано. Збільшення параметра c призводить до того, що в точці $c_1 \approx 2,83$ цей цикл втрачає стійкість, відбувається біфуркація подвоєння періоду і народжується новий цикл періоду 2 (рис. 7.16, б), який зберігає стійкість в області $c_1 < c < c_2 \approx 3,8$. Потім знову відбувається біфуркація подвоєння періоду і виникає цикл періоду 4 (рис. 7.16, в), що зберігає стійкість в області $c_2 < c < c_3 \approx 4,15$, і т. д.

Така послідовність біфуркацій подвоєння періоду призводить до хаотичного режиму в системі; причому послідовність точок біфуркації c_1, c_2, c_3, \dots збігається до критичного значення $c_\infty \approx 4,20$. Потім у фазовому просторі системи виникає хаотичний атрактор, що має шарувату структуру (рис. 7.16, з, д). Його називають *стрічковим атрактором Ресслера*. Шарувата структура цього атрактора пропадає при $c = 4,60$ (рис. 7.16, е) і утворюється дивний хаотичний атрактор у вигляді "стрічки", що складається вдвічі і замикається на собі. У перетині "стрічка" має фрактальну природу у вигляді канторової структури.

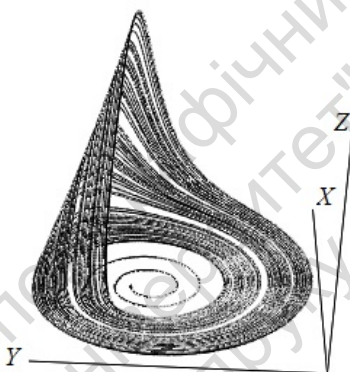


Рис. 7.17. Атрактор Ресслера при $a = b = 0,2$; $c = 4,6$

Вигляд атрактора за значення параметра $c = 4,6$ показано на рис. 7.17, де початковий перехідний процес не відкинута. Видно, як згідно з початковими умовами, траєкторія на початку розкручується на двовимірній поверхні навколо нерухомої точки, яка поводить себе як нестійкий фокус, а надалі виходить у тривимірний простір і повертається в окіл нерухомої нестійкої точки вздовж деякої кривої. Цю особливу нерухому точку називають *сідло-фокус*. Така конструкція призводить до нестійкого руху, що є основною особливістю хаотичної поведінки, і водночас формує стійку конструкцію у вигляді атрактора. Відмітимо ще раз наявність *складки* (місце замикання "стрічки" на себе), де власне і формується нестійкий рух.

Інше уявлення про наявність хаосу в системі Реслера дає відповідне одновимірне відображення, яке виникає на поверхні перетину Пуанкаре. Визначимо перетин Пуанкаре площиною $Y + Z = 0$. Вибір такої площини обумовлено тим, що згідно з першим рівнянням у системі (7.21) координати X фазових траєкторій досягають на площині $Y + Z = 0$ своїх екстремальних значень \bar{X} . Як слідує з обчислень, результати яких зображено на рис. 7.18 (параметр $c = 4,6$), отримане в цьому випадку відображення $\bar{X}_{n+1} = f(\bar{X}_n)$ можна вважати практично одновимірним, причому для функції f допустима апроксимація квадратичною кривою. Відмітимо, що положення точок на цій кривій не відповідають їхній послідовності, а розміщені хаотично. Безумовно, тут слід згадати одновимірне логістичне відображення, яке в режимі хаосу має подібний графік (див. рис. 4.11, б).

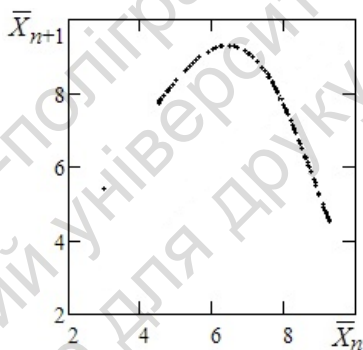


Рис. 7.18. Відображення $X_{n+1} = f(X_n)$, $a = b = 0,2$; $c = 4,6$

На рис. 7.19. для системи Реслера побудовано біфуркаційну діаграму: тут по осі абсцис відкладено значення параметра c , а по осі ординат – координати $X = \bar{X}$ точок перетину Пуанкаре на площині $Y + Z = 0$. Знову бачимо подібність з логістичним відображенням (див. рис. 4.12).

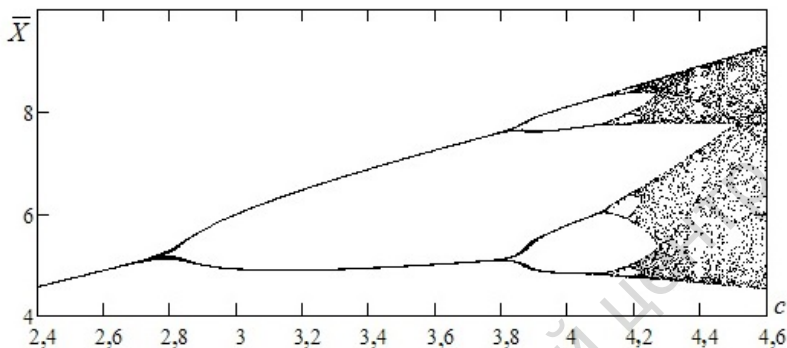


Рис. 7.19. Біфуркаційна діаграма системи Ресслера, $a = b = 0,2$

Природно, що такі зміни в динаміці системи Ресслера будуть відображені в спектрі показників Ляпунова. На рис. 7.20 показано залежність трьох ляпуновських показників від параметра c при $a = b = 0,2$. В усьому інтервалі зміни параметра c один із показників залишається нульовим, що обумовлено наявністю атратора, який не є нерухомою точкою, й один від'ємний. Інший, відмінний від нуля показник Ляпунова, за певних значень параметра c стає додатним, що відповідає наявності хаосу в системі. Критична точка відповідає значенню $c_{\infty} \approx 4,2$. У докритичній області цей показник Ляпунова від'ємний, у закритичній – додатний, крім вікон періодичності. Ця крива напрочуд схожа на криву з рис. 4.13, де показано залежність показника Ляпунова для логістичного відображення (4.10). Ця схожість не випадкова. Вона визначається тим, що і система Ресслера, і логістичне відображення демонструють перехід до хаосу через каскад біфуркацій подвоєння періоду. Отже, залежно від параметра c старший показник Ляпунова має або нульове значення, що відповідає періодичному режиму, або додатне, що пов'язане з явищем хаосу.

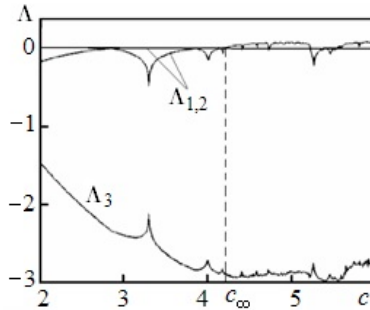


Рис. 7.20. Залежність показників Ляпунова в системі Реслера від параметра c ; $a = b = 0,2$ [23]

Порівняймо графіки для показників Ляпунова на рис. 7.13 і рис. 7.20. Наявність складної залежності показника Ляпунова від параметра в системі Реслера (рис. 7.20) – це характерна ознака складної динаміки, яка пов'язана з наявністю квазіатрактора (див. розд. 5). Для систем із гіперболічним дивним аттрактором грубість (структурна стійкість) означає нечутливість динаміки системи до варіації рівнянь динаміки; зокрема це проявляється у тому, що додатний показник Ляпунова залежить від параметрів як гладка крива. Чудовою ілюстрацією цього факту є графіки (див. рис. 7.13) для системи Лоренца, в якій присутній квазігіперболічний аттрактор.

7.3. Нелінійний осцилятор за гармонічного зовнішнього впливу

Нелінійний дисипативний осцилятор – це динамічна система, миттєвий стан якої задають двома величинами: узагальненою координатою x та швидкістю \dot{x} . Такі системи зустрічаються в механіці (маятник, кулька на пружинці тощо), акустиці (коливання бульбашок газу в рідині під дією звукового поля), електроніці (коливний контур, що містить нелінійні елементи).

Якщо припустити, що нелінійна залежність відновлювальної сили для осцилятора визначається функцією $f(x) = \alpha x + \beta x^3$,

а сила тертя пропорційна \dot{x} , то рівняння руху такого осцилятора за впливу на нього гармонічної зовнішньої сили має вигляд

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = B \cos(\omega_0 t), \quad (7.23)$$

де коефіцієнт 2δ визначає дисипативні процеси у системі, а коефіцієнти α і β – відновлювальну силу; $\omega_0 = 2\pi/T$ і B – кругова частота й амплітуда гармонічного зовнішнього впливу; T – період.

Рівняння (7.23) відоме у літературі як рівняння Дуффінга¹ [23]. Наявність зовнішнього впливу перетворює осцилятор на неавтономну систему. Перепишемо рівняння (7.23) у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього, виконавши заміну змінних: $y = \dot{x}$, $z = \omega t$, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -2\delta y - \alpha x - \beta x^3 + B \cos z, \\ \dot{z} &= \omega_0, \end{aligned} \quad (7.24)$$

яка визначає автономний потік у тривимірному фазовому просторі.

Для опису різних типів коливань системи (7.24), як і будь-якої іншої нелінійної системи, будують *карту динамічних режимів*: на площині параметрів кольором або за допомогою ліній виділяють області значень, за яких встановлюється той чи інший режим коливання. Наприклад, для системи (7.24) можна зафіксувати коефіцієнти 2δ , α , β , тоді як координатами площини параметрів будуть виступати амплітуда B і частота зовнішньої сили ω_0 . У процесі побудови таких карт привертає увагу складна картина розташування областей із різним характером руху, що є типовою ситуацією для систем із хаосом. За детальнішого дослідження ступінь складності топографії карт динамічних режимів стає таким, що їх можна назвати фрактальними пейзажами. Зазвичай, карти містять деталі, що неодноразово повторюються у разі послідовного збільшення окремих фрагментів.

Не виконуючи копітку роботи з побудови карти динамічних режимів системи (7.24), розглядаємо кілька ситуацій, що ілюструють коливальні режими нелінійного осцилятора. Зафіксуємо па-

¹ Дуффінг Георг (1861–1944) – німецький фізик.

раметри $2\delta=0,1$; $\alpha=\beta=1$; $\omega_0=1$, а змінним параметром буде амплітуда зовнішньої сили B . Покладемо $B=29$.

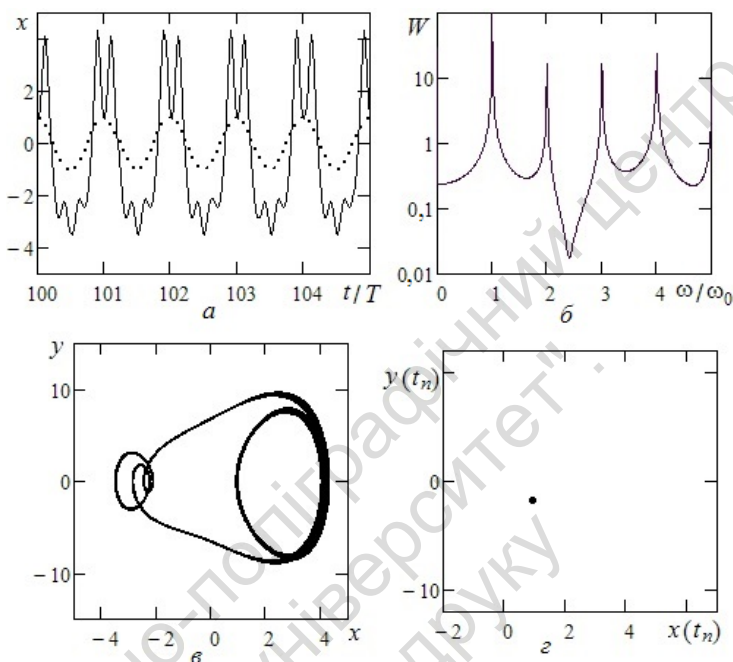


Рис. 7.21. Дослідження нелінійного осцилятора при $2\delta=0,1$, $\alpha=\beta=1$, $\omega_0=1$, $B=29$; пунктиром показано графік функції $\cos(\omega_0 t)$

На рис. 7.21, *a* показано залежність координати x від нормованого часу t/T , де T – період зовнішнього впливу. Як бачимо, в системі відбувається періодичний рух із періодом T зовнішнього впливу. Внаслідок сильної нелінійності в системі залежність $x(t)$ на рис. 7.21, *a* істотно відрізняється від синусоїдальної кривої гармонічного зовнішнього впливу (пунктирна лінія). Зазвичай, у спектрі відгуку системи (7.21, *б*) з'являється ряд гармонік, кратних частоті зовнішньої сили.

На рис. 7.21, *в* показано проєкцію фазової траєкторії на площину xu , яка являє собою замкнену криву, тобто маємо гранич-

ний цикл системи (7.24). Зазначимо, що на рис. 7.21 перехідний режим, який справджується у системі до її виходу на атрактор, не показано. Третьою координатою у фазовому просторі динамічної системи (7.24) є час ($z = \omega t$). Врахувавши періодичність процесу на рис. 7.21, а, неважко уявити траєкторію системи у фазовому просторі. Очевидно, вона є спіралеподібною кривою, розташованою вздовж осі $z = \omega_0 t$, кожна ланка якої визначається проекцією на фазову площину, що показано на рис. 7.21, в.

Як провести дослідження фазового потоку (7.24), використовуючи той факт, що ми маємо систему з гармонічним зовнішнім впливом та одна з координат фазового простору $z = \omega_0 t = 2\pi t / T$? Вочевидь, правильним буде таке рішення: слід визначити перетин Пуанкаре як відображення фазового простору на себе через період зовнішнього впливу T . Тоді на перетині Пуанкаре відображаються дві фазові змінні x і $y = \dot{x}$.

Такий перетин Пуанкаре показано на рис. 7.21, г. Як видно, точки у перетині Пуанкаре сконцентровані навколо однієї точки, яка є атрактором фазового потоку (перехідний режим системи не показано). Природа перетину Пуанкаре зрозуміла: після перехідного процесу система здійснює періодичний рух із періодом зовнішнього впливу $T = 2\pi / \omega_0$, тому атрактором у перетині Пуанкаре є одна точка.

Змінимо амплітуду зовнішнього впливу; нехай $B = 38$. Дослідження цієї ситуації показано на рис. 7.22. Період руху в системі збільшився втричі і став рівним $3T$ (рис. 7.22, а). Спектр залишився дискретним за наявності нових частотних складових (рис. 7.22, б). Проекцію фазової траєкторії на площину xu показано на рис. 7.22, в, а відповідний перетин Пуанкаре – на рис. 7.22, г. Як видно, перетин Пуанкаре містить три точки, які є "слідом" атрактора системи на перетині Пуанкаре. Отже, відбулася біфуркація потроєння періоду.

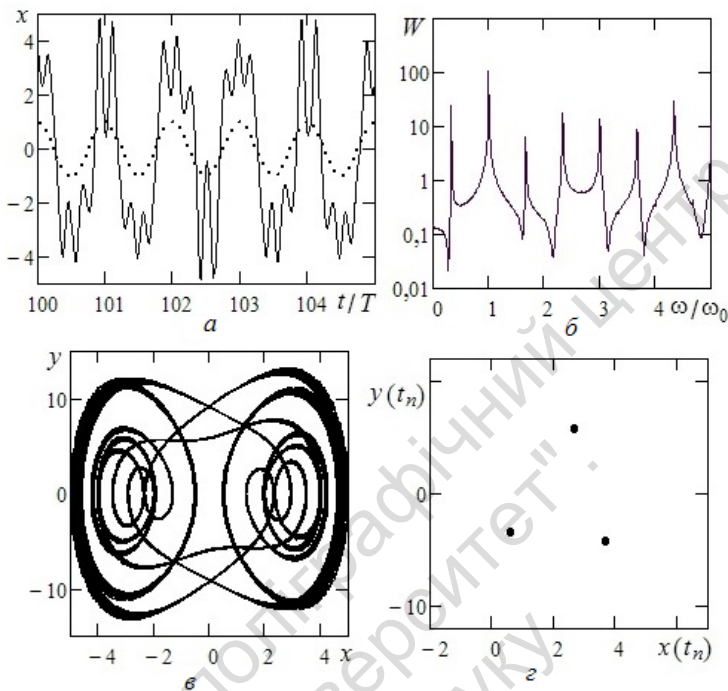


Рис. 7.22. Дослідження нелінійного осцилятора при $2\delta = 0,1$, $\alpha = \beta = 1$, $\omega_0 = 1$, $B = 38$; пунктиром показано графік функції $\cos(\omega_0 t)$

Хаотичний режим у системі спостерігається за амплітуди $B = 36$, рис. 7.23. Як бачимо, часова залежність змінної x на рис. 7.23, *a* не є регулярною. Проекція фазової траєкторії на площину змінних xu не формує характерної кривої у вигляді граничного циклу, навпаки, крива заповнює хаотично деяку область на фазовій площині (із цієї причини на рисунку не показана). Спектр коливання (рис. 7.23, *б*), поряд із дискретними складовими, які нав'язані системі зовнішнім впливом, утримує неперервну складову. А це є однією з ознак хаотичного режиму в системі. Перед нами хаотичний аттрактор, який важко описати та проаналізувати. Подивимося на перетин Пуанкаре, рис. 7.23, *в*. Виявляється, що точки перетину Пуанкаре утворюють характерний малюнок!

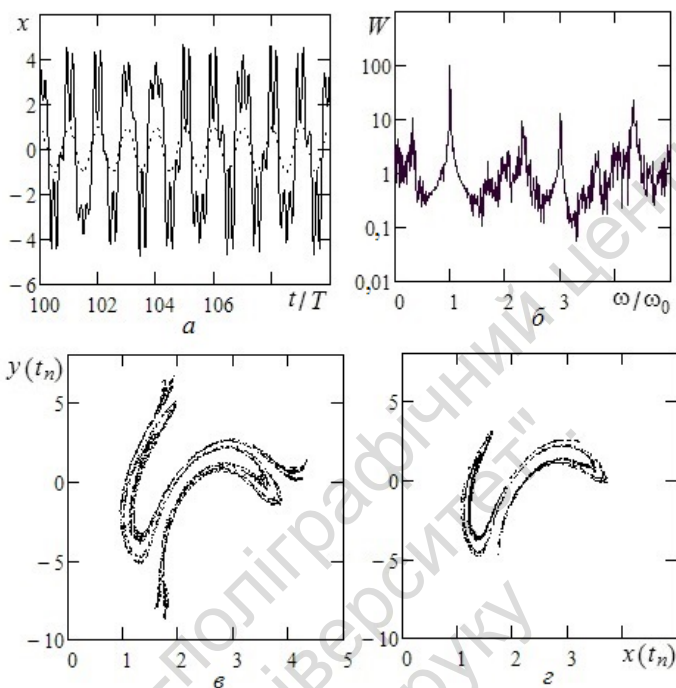


Рис. 7.23. Дослідження нелінійного осцилятора при $B = 36$: a, b, c – для випадку $2\delta = 0,1$; z – для випадку $2\delta = 0,15$

Отримано дивовижний результат! І річ тут у тому, що певний рисунок, який формують точки в перетині Пуанкаре, характерний саме для хаосу в детермінованій системі! Цей рисунок показує, що випадковість має детерміновану основу. Якби досліджувана система перебувала під дією випадкового зовнішнього впливу, то перетин Пуанкаре являв би собою деяке безформне утворення.

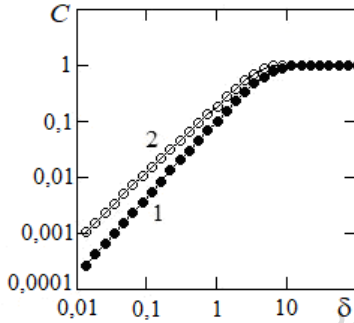


Рис. 7.24. До оцінювання кореляційної розмірності атратора в системі нелінійного дисипативного осцилятора, $\alpha = \beta = 1$; $\omega_0 = 1$; $B = 36 : 1$ – для $2\delta = 0,1$; 2 – для $2\delta = 0,15$

Збільшення коефіцієнта дисипації 2δ в системі збільшує швидкість стискання елемента фазового об'єму. Очевидно структура сукупності точок у перетині Пуанкаре ще більше наближатиметься до одновимірної структури. Це чітко видно, якщо порівняти рис. 7.23, в і рис. 7.2, з. Тоді і фрактальна розмірність структури точок у перетині Пуанкаре, при збільшенні коефіцієнта 2δ , має зменшитися.

Щоб у цьому переконатися, обчислимо кореляційну розмірність D_2^S множини в перетині Пуанкаре. Для цього побудуємо в логарифмічних координатах залежність кореляційного інтеграла $C(\delta)$ від розміру шаблону покриття δ (див. підрозд. 3.9), рис. 7.24. Виділяючи лінійні ділянки графіків на рис. 7.24, обчислюємо кореляційну розмірність множини в перетині Пуанкаре:

крива 1 – для $2\delta = 0,1$; $D_2^S \approx 1,37$;

крива 2 – для $2\delta = 0,15$; $D_2^S \approx 1,19$.

Отже, збільшення дисипації в системі чітко фіксуємо під час обчислення фрактальної розмірності множини в перетині Пуанкаре.

РОЗДІЛ 8

ФІЗИЧНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

У процесі досліджень ми дійшли висновку про можливість режиму детермінованого хаосу в нелінійних дисипативних системах. У сучасній науці цей ефект строго обґрунтовано теоретично та достовірно підтверджено експериментально. Може виникнути питання: чи не є цей феномен математичною екзотикою і таким, що його реалізація теоретично можлива, але мало ймовірна. Ні, та ще раз ні! Після відкриття детермінованого хаосу, доброго розуміння властивостей ефекту та розроблення методів його діагностики хаос було виявлено практично в усіх галузях сучасного природознавства: у фізиці, радіотехніці, хімії, біології, механіці, економіці тощо [4, 23]. Експерименти, описані в цьому розділі, читач цілком зможе провести самостійно.

8.1. Нелінійний електричний контур за гармонічного зовнішнього впливу

Нелінійний коливальний контур за зовнішнього періодичного впливу – одна з найпростіших систем, що демонструють хаотичну поведінку. Слід зазначити велику перевагу радіотехнічних пристроїв як об'єктів експериментального дослідження. Порівняно з механічними, гідродинамічними й іншими системами вони прості в реалізації, допускають нескладне та зручне керування параметрами, використання поширеної стандартної апаратури для спостереження та оброблення сигналів. Починаючи з роботи [65] (Linsay, 1981), популярною схемою є збуджуваний гармонічним сигналом контур, який складається з послідовно з'єднаних резистора, котушки індуктивності та діода (рис. 8.1), нелінійність якого обумовлена властивостями p - n -переходу. Ідеальний діод – це елемент контуру, який або проводить струм, або ні. Відомо, що така поведінка визначає значну нелінійність.

Якби ми захотіли описати динаміку процесів у нелінійному контурі за допомогою диференціального рівняння, то воно виявилось б досить складним, оскільки напівпровідниковий діод поєднує властивості нелінійної ємності та нелінійної провідності. Тут ми зупинимося лише на експерименті.

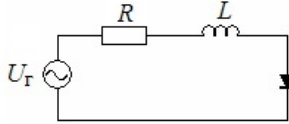


Рис. 8.1. Схема електричного нелінійного осцилятора

Пропонуємо читачеві провести експериментальне дослідження нелінійного контуру з p - n -переходом і переконатися у можливості виникнення хаосу через послідовність біфуркацій подвоєння періоду. Для цього знадобляться генератор синусоїдальних коливань та осцилограф. У наших експериментах як p - n -перехід застосовано діод Д237А, котушка мала індуктивність 63 мГн. Резистор контуру перенастроювався від нуля до 100 Ом. У наших дослідах значення резистора було близьким до нуля.

Дослідження проводили на частоті генератора приблизно $f = 30$ кГц за зміни амплітуди напруги збудження U_0 від 0,5 В до 3 В. Отже, на контур подавали електричну напругу $U_T = U_0 \sin(2\pi ft)$. На рис. 8.2 зображено осцилограми, причому ліворуч показано часові реалізації напруги на діоді U_d , а праворуч – проєкції фазових портретів на площину $U_T U_d$. Ці портрети формувалися на екрані осцилографа за подачі на вхід X і вхід Y електричної напруги відповідно U_T і U_d . Очевидно, третьою координатою фазового простору досліджуваної динамічної системи є час. Петля фазового портрета обумовлена коливаннями напруги на діоді в моменти часу, коли діод замкнений. Горизонтальна лінія на фазовому портреті відповідає відкритому стану діода, причому напруга на p - n -переході не перевищує частки вольта. Однак коливання контуру в разі відкритого діода (коливання на дифузійній ємності) суттєво визначають загальну динаміку поведінки системи. Для наочного відображення процесів, що відбуваються в контурі у разі відкритого діода, на рис. 8.2

у крайній праворуч осцилограмі наведено збільшені фрагменти фазових портретів в області малої напруги на діоді.

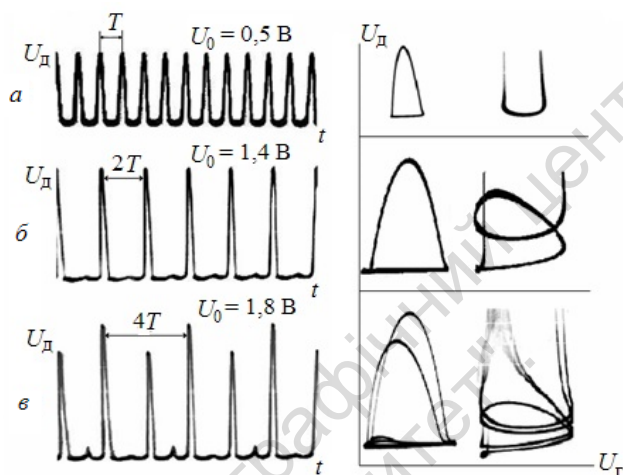


Рис. 8.2. Послідовність біфуркацій подвоєння періоду в нелінійному електричному контурі

На рис. 8.2 зображено послідовність біфуркацій подвоєння періоду зі збільшенням амплітуди напруги збудження U_0 від 0,5 В до 1,8 В. На рис. 8.2, *a* ($U_0 = 0,5$ В) часова реалізація напруги на діоді U_d має періодичний характер із періодом напруги генератора $T = 1/f$. Причому проєкція фазового портрета на площині $U_r U_d$ є замкненою кривою, яка характеризує наявність періодичного процесу в системі.

Дані на рис. 8.2, *б* відповідають амплітуді $U_0 = 1,4$ В. Як бачимо, відбулася біфуркація подвоєння періоду коливань напруги на діоді U_d . Цей факт знаходить відображення у проєкції фазового портрета на площині $U_r U_d$ – фазова траєкторія замикається, зробивши два обороти. Причому перший оборот відповідає більшим значенням напруги U_d (діод замкнений), а другий – малим значенням U_d (діод відкритий), які можна чітко спостерігати на осцилограмі рис. 8.2, *б* (праворуч).

На рис. 8.2, *в* ($U_0 = 1,8 \text{ В}$) показано наступну біфуркацію подвоєння періоду. Пропонуємо читачеві самостійно проаналізувати осцилограми на цьому рисунку. Подальше збільшення амплітуди напруги призведе до поступового "розмивання" фазових траєкторій і народження так званого *стрічкового хаосу* (рис. 8.3, *а*). При спостереженні часових реалізацій на діоді у режимі хаосу (рис. 8.3, *б*) маємо повну відсутність періодичності – пікові значення напруги U_d в моменти часу, коли діод замкнений, набувають випадкових значень у діапазоні, який визначається стрічковою природою фазового портрета.

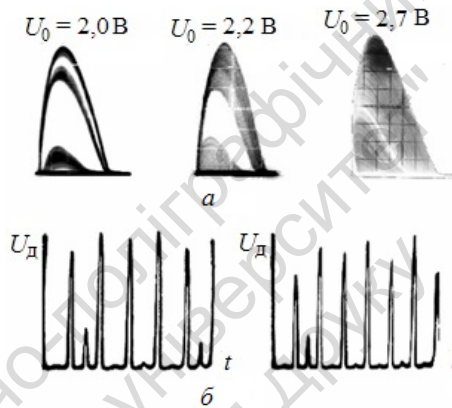


Рис. 8.3. Хаос у нелінійному електричному контурі

За подальшого збільшення напруги U_0 події розвиваються у зворотному порядку і хаотичні явища зникають. Ті, хто бажає повторити описаний експеримент, можуть використовувати інші котушки та діоди. Проте, оскільки заздалегідь неможливо вказати діапазони частот і напруги генератора збудження, у яких спостерігається хаотичний режим, то доведеться провести самостійне дослідження – перед читачем стає завдання досліджувати карту динамічних режимів нелінійної системи.

8.2. Математична модель електронного генератора Чуа

Схему Чуа¹ (рис. 8.4, а) широко використовують як навчальний приклад хаосу з таких причин [45]:

- вона є найпростішою автономною схемою, де можна спостерігати хаотичний режим коливань. Зауважимо, що електронна схема є автономною, якщо вона містить елементи, параметри яких не залежать від часу та джерела постійного струму. Схема Чуа має три елементи C_1 , C_2 , L , які спроможні накопичувати енергію. Така кількість елементів є мінімальною для того, щоб автономна система стала хаотичною. Є лише один нелінійний елемент G простого типу, а саме, резистивний двополусник із кусково-лінійною вольт-амперною характеристикою (рис. 8.4, б);

- хаотична поведінка схеми Чуа спостерігається під час моделювання на ЕОМ і підтверджується лабораторними експериментами;

- схема Чуа допускає глибокий математичний аналіз, і її хаотична поведінка має математичний доказ.

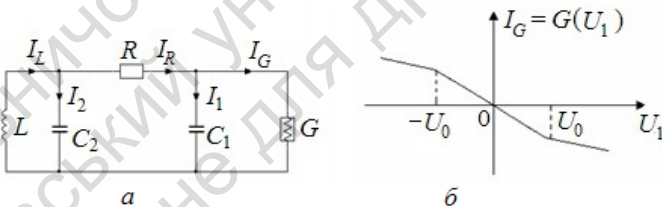


Рис. 8.4. Схема генератора Чуа (а) і вольт-амперна характеристика нелінійного резистора G (б)

Отже, система Чуа є одним із прикладів фізичної системи, хаотична поведінка якої підтверджена з використанням трьох

¹ Чуа Леон (народ. 1936) – американський фізик.

різних підходів: лабораторних експериментів, моделювання на ЕОМ і математичного аналізу.

Залежно від значень елементів схеми (рис. 8.4, а) генератор Чуа може демонструвати різні регулярні та хаотичні режими. Опишемо деякі з них, провівши спочатку обчислювальні, а потім лабораторні дослідження.

Побудуємо динамічну систему, яка характеризуватиме роботу генератора Чуа. Для цього запишемо рівняння Кірхгофа¹ для схеми Чуа (рис. 8.4, а):

$$\begin{aligned} I_R - I_1 - I_G &= 0, \\ -I_R - I_2 + I_L &= 0, \\ U_L + U_2 &= 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

де I_R, I_1, I_2, I_G, I_L – сила струму, U_L, U_1, U_2 – напруга на індуктивності L і ємностях C_1, C_2 відповідно (рис. 8.4, а).

Використовуючи зв'язок між напругою і струмом в елементах схеми, перепишемо рівняння (8.1) у вигляді

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dU_1}{dt} &= \frac{1}{R}(U_2 - U_1) - G(U_1), \\ C_2 \frac{dU_2}{dt} &= \frac{1}{R}(U_1 - U_2) + I_L, \\ L \frac{dI_L}{dt} &= -U_2. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Тут сила струму $I_G \equiv G(U_1)$ визначається вольт-амперною характеристикою нелінійного резистора (рис. 8.4, б).

Отже, рівняння (8.2) визначають динамічну систему у тривимірному фазовому просторі. Координатами фазового простору є напруги U_1, U_2 та струм I_L . Представимо систему рівнянь (8.2) у безрозмірному вигляді. Для цього введемо безрозмірні змінні:

$$x = \frac{U_1}{U_0}, \quad y = \frac{U_2}{U_0}, \quad z = \frac{I_L R}{U_0}, \quad \tau = \frac{t}{RC_2}. \quad (8.3)$$

¹ Кірхгоф Густав Роберт (1824–1887) – німецький фізик.

(Напругу U_0 визначено на рис. 8.4, б.) Тоді система (8.2) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{C_2} \frac{dx}{d\tau} &= y - x - g(x), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{RC_2} \frac{dz}{d\tau} &= -y, \end{aligned} \quad (8.4)$$

де безрозмірна функція $g(x) = \frac{R}{U_0} G(U_1)$. Визначимо безрозмірні параметри

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{R^2 C_2}{L}; \quad (8.5)$$

тоді отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - h(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (8.6)$$

де $h(x) = x + g(x)$. Функцію $h(x)$ задамо у вигляді [23, 45]:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{7}, & x \leq -1; \\ -\frac{x}{7}, & |x| < 1; \\ \frac{2x-3}{7}, & x \geq 1. \end{cases} \quad (8.7)$$

Графік функції $h(x)$ показано на рис. 8.5.

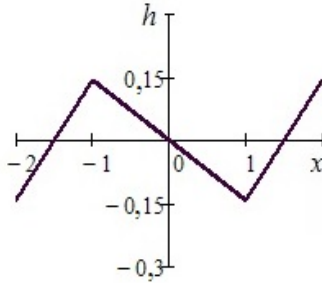


Рис. 8.5. Графік функції $h(x)$

8.3. Теоретичний аналіз математичної моделі генератора Чуа

Насамперед, відмітимо симетрію рівнянь (8.6) щодо початку координат. Внаслідок такої симетрії їхній вигляд не змінюється, якщо одночасно змінити знак у змінних x, y, z : $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. Це означає, що будь-яке утворення у фазовому просторі має ту саму симетрію, або має те саме утворення у вигляді симетричного партнера. Подібні властивості, як ми вже знаємо, має система Лоренца.

Визначимо дивергенцію фазового потоку (8.6):

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \begin{cases} +\frac{1}{7}\alpha - 1, & |x| < 1, \\ -\frac{2}{7}\alpha - 1, & |x| \geq 1. \end{cases} \quad (8.8)$$

Очевидно, фазовий простір системи (8.6) можна розділити на три області:

$$\begin{aligned} \Omega^- &= \{(x, y, z) : x \leq -1\}, \\ \Omega^0 &= \{(x, y, z) : |x| < 1\}, \\ \Omega^+ &= \{(x, y, z) : x \geq 1\}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Згідно з (8.8) в областях Ω^- і Ω^+ дивергенція від'ємна (параметр $\alpha > 0$). Це свідчить про те, що з плином часу в областях Ω^- і Ω^+ відбувається стиснення деякого об'єму фазового простору $V(\tau)$ відповідно до співвідношення

$$V(\tau) = V(0) \exp \left[- \left(\frac{2}{7} \alpha + 1 \right) \tau \right]. \quad (8.10)$$

Дивергенція фазового потоку в області Ω^0 може бути як додатною, так і від'ємною, що визначається значенням параметра α .

Знайдемо особливі точки досліджуваної системи. Згідно з (8.6) запишемо такі алгебричні рівняння:

$$h(x) = 0, \quad x + z = 0, \quad y = 0. \quad (8.11)$$

Підставивши (8.7) у (8.11), визначаємо, що система (8.6) має єдиний стан рівноваги в кожній з областей Ω^- , Ω^0 , Ω^+ ; координати особливих точок такі:

$$\begin{aligned} \Omega^- : O^- &= \left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2} \right), \\ \Omega^0 : O &= (0, 0, 0), \\ \Omega^+ : O^+ &= \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Виконаємо аналіз стійкості особливих точок (8.12). Нехай (x_0, y_0, z_0) — одна з нерухомих точок (8.12). Шукатимемо розв'язок рівнянь (8.6) у вигляді $x(\tau) = x_0 + \delta x(\tau)$, $y(\tau) = y_0 + \delta y(\tau)$, $z(\tau) = z_0 + \delta z(\tau)$, де значення $(\delta x, \delta y, \delta z)$ визначають мале відхилення від точки (x_0, y_0, z_0) . Оскільки рівняння (8.6) є лінійними в кожній з областей Ω^- , Ω^0 , Ω^+ , то, підставляючи цей розв'язок у систему (8.6), отримуємо рівняння фазового потоку для відхилення $(\delta x, \delta y, \delta z)$: в області Ω^0

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad (8.13)$$

в областях Ω^- і Ω^+

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

Далі запишемо відповідні характеристичні рівняння і знаходимо їхні корені λ_1 , λ_2 і λ_3 (запишіть самостійно характеристичні рівняння). Аналіз розв'язку системи (8.6) проведемо за фіксованого значення параметра β та змінного параметра α (див. формули (8.5)). Нехай $\beta = 10$.

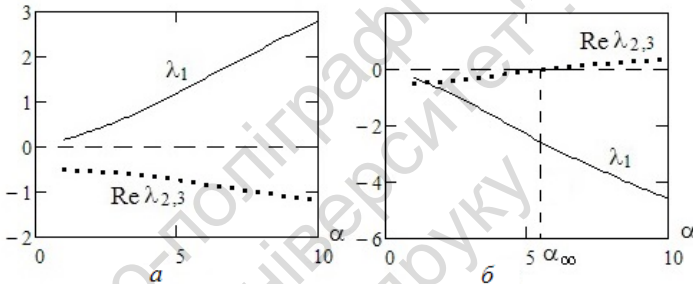


Рис. 8.6. Залежність коренів характеристичного рівняння ($\lambda_3 = \lambda_2^*$) від параметра α при $\beta = 10$: a – для положення рівноваги O , b – для положення рівноваги O^- і O^+

Характеристичні рівняння систем (8.13) і (8.14) є кубічними, тому вони мають по три корені. Перший корінь λ_1 виявляється дійсним, а два інші λ_2 і λ_3 – комплексно-спряженими числами. На рис. 8.6 зображено розв'язки характеристичних рівнянь систем (8.13) і (8.14) відповідно за зміни параметра α на інтервалі $1 < \alpha < 10$. Отже, згідно з рис. 8.6, a , положення рівноваги $O = (0, 0, 0)$ в області Ω^0 завжди є нестійким, оскільки в усьому діапазоні зміни параметра α маємо $\lambda_1 > 0$, $\text{Re}\lambda_2 < 0$, $\text{Re}\lambda_3 < 0$. Для положень рівноваги O^- (область Ω^-) і O^+ (область Ω^+)

значення кореня λ_1 завжди від'ємне. Проте дійсні частини коренів λ_2 і λ_3 (рис. 8.6, б) змінюють свій знак, якщо значення параметра $\alpha = \alpha_\infty \approx 5,465$. У разі перевищення параметром α значення $\alpha_\infty \approx 5,465$ стійкі положення рівноваги O^- і O^+ стають нестійкими. У силу симетрії системи (8.6) втрата стійкості положення рівноваги O^- і O^+ відбувається одночасно.

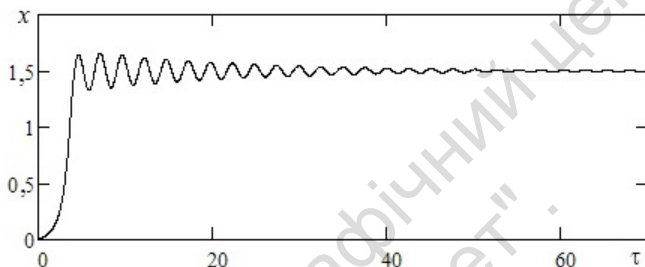


Рис. 8.7. Часова залежність змінної $x(\tau)$; $\alpha = 5$, $\beta = 10$

Для схеми Чуа можна спостерігати велику різноманітність біфуркацій. Простежимо за деякими біфуркаціями, змінюючи параметр α ; $\beta = 10$. За значення $\alpha < \alpha_\infty \approx 5,465$ після завершення перехідного режиму динамічні змінні x, y, z набувають сталих значень, що відповідає одному зі стійких положень рівноваги. Як приклад на рис. 8.7 для $\alpha = 5$ показано часову залежність змінної x , яка із часом τ прагне до значення 1,5. У випадку збільшення τ змінна $y \rightarrow 0$, а змінна $z \rightarrow -1,5$. Вказана ситуація відповідає положенню рівноваги $O^+ = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$, яке є атрактором для такого розв'язку системи (8.6). Зазначимо, що для всіх розрахунків початкові умови покладали такими: $x(0) = 0,01$; $y(0) = 0$; $z(0) = 0$, що відповідає малому збуренню динамічної системи.

За переходу параметра α через значення $\alpha_\infty \approx 5,465$ зліва направо стійкі положення рівноваги O^- і O^+ стають нестійки-

ми, і від них відокремлюються замкнені траєкторії. Відбулася біфуркація народження циклу, це показано на рис. 8.8, де $\alpha = 6$; на рис. 8.8, *a* зображено часову залежність змінної x . Видно, як із часом установлюється режим стійкої генерації коливань. На рис. 8.8, *б* показано проєкцію фазового портрета на площину yz (перехідний процес не показано). Атрактором системи є граничний цикл, який сформувався навколо нерухомої точки $O^+ = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$. Схема Чуа генерує періодичний сигнал певної частоти.

Якщо $\alpha = 6,5$, то можна спостерігати біфуркацію подвоєння періоду (рис. 8.9). Порівнюючи рис. 8.8 і рис. 8.9, читач може дійти такого висновку самостійно.

На рис. 8.10, *a* наведено атрактор системи Чуа при $\alpha = 6,7$. Звідси видно, що атрактор уже не виглядає як періодичний. Його структура подібна до стрічкового атрактора Ресслера, який сформувався навколо нерухомої точки O^+ .

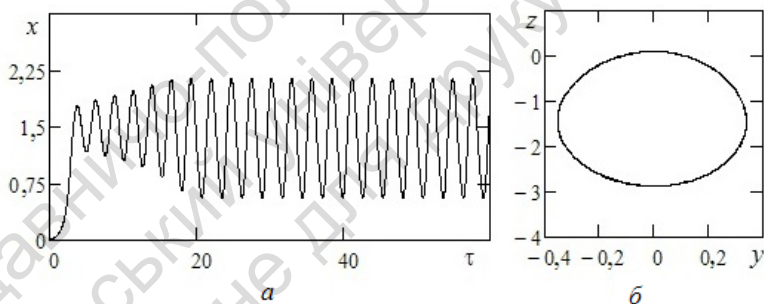


Рис. 8.8. Розв'язок системи рівнянь (8.6) при $\alpha = 6$, $\beta = 10$:

a – часова залежність змінної $x(\tau)$,

б – проєкція фазового портрета на площину yz

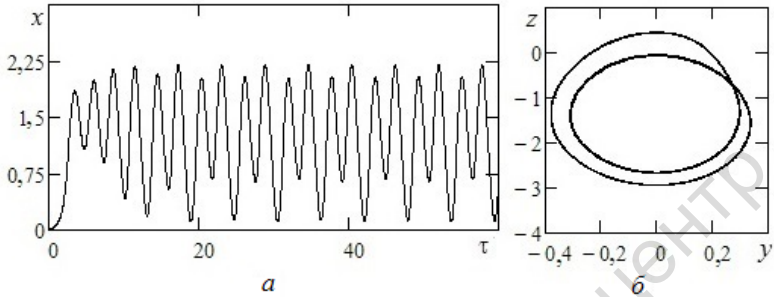


Рис. 8.9. Розв'язок системи рівнянь (8.6) при $\alpha = 6,5$, $\beta = 10$:
 a – часова залежність змінної $x(\tau)$,
 b – проєкція фазового портрета на площину yz

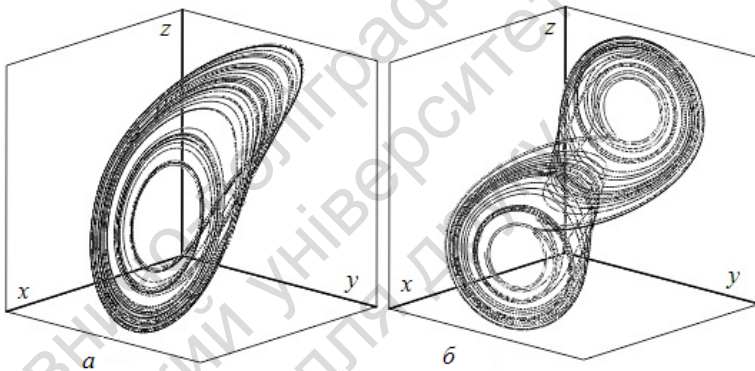


Рис. 8.10. Атрактор системи Чуа, $\beta = 10$:
 a – якщо $\alpha = 6,7$ (атрактор типу Ресслера),
 b – якщо $\alpha = 6,9$ (атрактор типу Лоренца)

Завдяки симетрії, властивій характеристиці нелінійного елемента (рис. 8.4, рис. 8.5), атрактор системи Чуа може бути симетричним подібно до атрактора Лоренца. Прикладом є атрактор на рис. 8.10, b , побудований за значення параметра $\alpha = 6,9$. Як видно, траєкторія, розкручуючись по спіралі навколо однієї з нерухомих точок O^- або O^+ протягом довільного відрізка часу,

перестрибує в окіл іншої нерухомої точки і також деякий час розкручується по спіралі, потім перестрибує назад і т. д. Як результат, в областях фазового простору Ω^- і Ω^+ навколо нерухомих точок O^- і O^+ внаслідок стиснення потоком фазового простору формуються два листоподібні об'єкти, які в області Ω^0 звиваються разом, утворюючи так званий *подвійний завиток* [45]. Регулярність, що спостерігається, оманлива. Цей факт ілюструє рис. 8.11, де показано часові залежності фазових координат $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$.

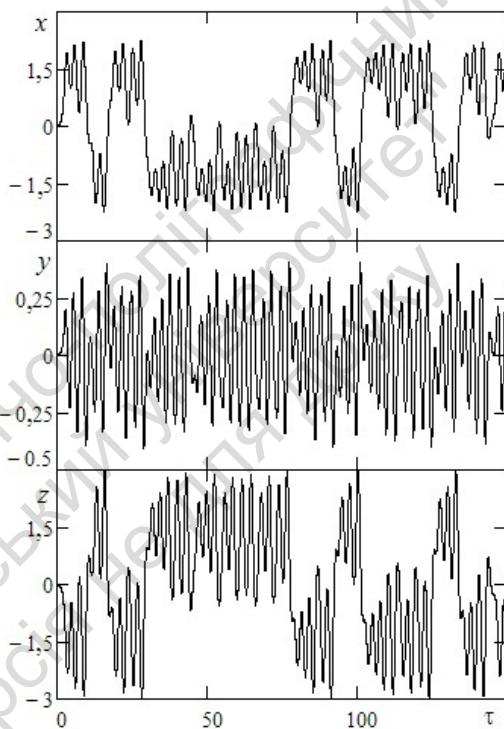


Рис. 8.11. Часові залежності фазових змінних,
 $\alpha = 6,9$; $\beta = 10$

На рис. 8.12 зображено перетин Пуанкаре на площині $y = 0$. Внаслідок сильної дисипації в системі, листоподібна структура атратора залишає "слід" у вигляді сукупності точок, які формують ниткоподібну структуру. Маємо суттєву відмінність множин у перетині Пуанкаре для атрaktorів на рис. 8.10. Добре видно "слід", який залишає подвійний завиток у перетині Пуанкаре (рис. 8.12, б).

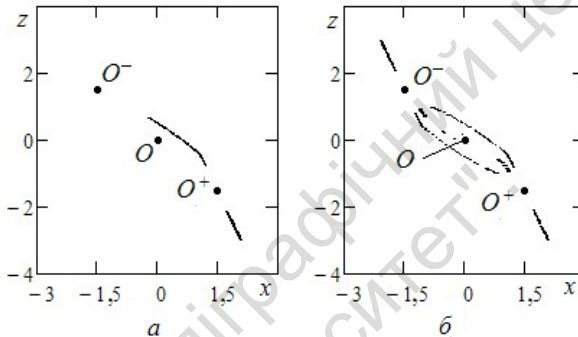


Рис. 8.12. Перетин Пуанкаре ($y = 0$) атратора системи Чуа, $\beta = 10$:
 a – якщо $\alpha = 6,7$; b – якщо $\alpha = 6,9$

8.4. Фізичний експеримент із генератором Чуа

Перейдемо до опису фізичного експерименту. Можливі декілька варіантів створення нелінійного резистора з характеристикою, показаною на рис. 8.4, б. В наших експериментах реалізовано схему (рис. 8.13), що описана в роботі [45], зі внесенням у схему підстроювального резистора R_g .

Зауважимо, що можна змоделювати схему Чуа (рис. 8.13) на основі програми PSPICE, яка використовує моделі транзисторів, операційних підсилювачів, діодів та інших радіотехнічних елементів.

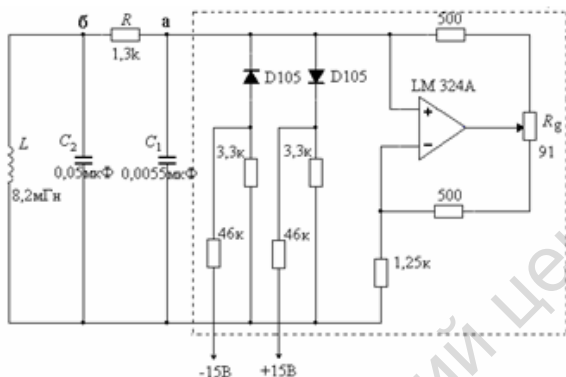


Рис. 8.13. Принципова схема генератора

Проте, звичайно, особливий інтерес становить фізичний експеримент. Наш досвід роботи зі схемою Чуа (рис. 8.13) показав, що вона досить чутлива до зміни параметрів її елементів. Умови стійкої генерації сигналу досягали завдяки підстроювальному резистору R_g . Налаштування генератора Чуа на певний режим роботи проводили переміщенням феритового сердечника котушки L . У ході експериментів спостерігалися всі режими, представлені на рис. 8.7–8.11. Сигнали з генератора Чуа в точках a і b (напруги $U_1(t)$ і $U_2(t)$) подавалися на лінійний вхід звукової карти ЕОМ та оброблялися програмою МАТЛАБ. Параметри оброблення були такі: частота дискретизації сигналу $F_s = 44100$ Гц, параметр швидкого перетворення Фур'є $Nfft = 256$.

Як приклад на рис. 8.14 показано осцилограми, що характеризують хаотичний режим роботи генератора. На рис. 8.14, a , b наведено часові залежності напруги $U_1(t)$ і $U_2(t)$ відповідно, а на рис. 8.14, $в$ представлено проєкцію фазового портрета генератора Чуа на площину U_1U_2 . Як видно, перед нами атрактор із подвійним завитком. На рис. 8.14, $г$ зображено оцінку спектра потужності сигналу $U_1(t)$ у вигляді періодограми з прямокутним вікном. Спектр є неперервним і широкосмуговим, що характерно для хаотичних коливань.

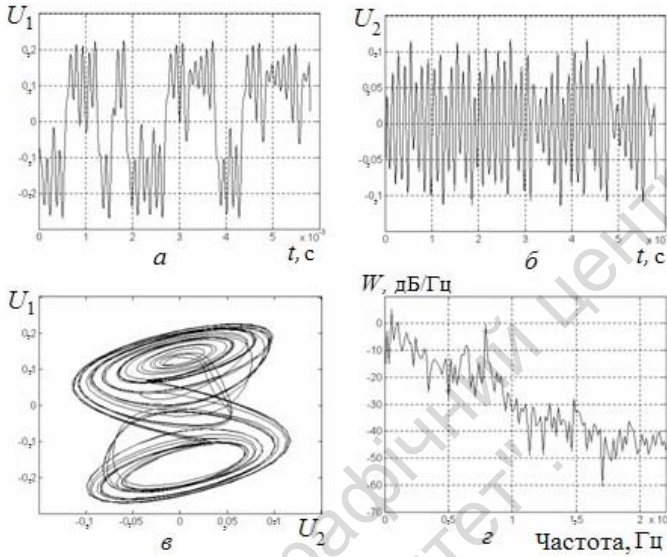


Рис. 8.14. Осцилограми хаотичного режиму коливаль:
a – сигнал $U_1(t)$, *б* – сигнал $U_2(t)$,
в – проєкція фазового портрета на площину U_1U_2 ,
г – оцінка спектра потужності сигналу $U_1(t)$

У процесі переміщення сердечника котушки L можна спостерігати, як хаотичний режим коливаль перетворюється на періодичний, а за подальшої зміни індуктивності L знову виникає хаотичний режим. Приклад складного періодичного режиму генератора Чуа показано на рис. 8.15. Слід зазначити наявність замкненої орбіти на фазовому портреті та присутність яскраво виражених дискретних складових у спектрі сигналу. Це свідчить про генерацію періодичного сигналу схемою Чуа.

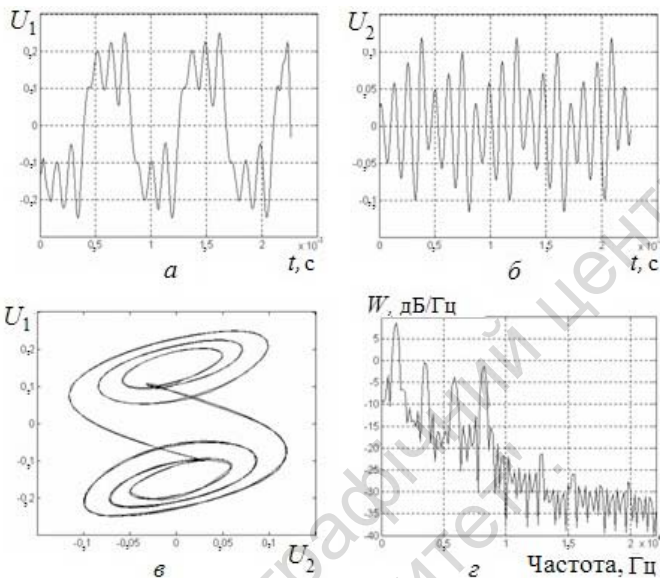


Рис. 8.15. Осцилограми періодичного режиму коливань:
а – сигнал $U_1(t)$, *б* – сигнал $U_2(t)$,
в – проекція фазового портрета на площину U_1U_2 ,
г – оцінка спектра потужності сигналу $U_1(t)$

Спектри сигналів на рис. 8.14, *г* і рис. 8.15, *г* показують, що більшість частотних складових потрапляє в область звукових частот. Тому під час виконання експерименту читач може досліджувані сигнали прослухати.

РОЗДІЛ 9

РЕКОНСТРУКЦІЯ АТРАКТОРА ПО СПОСТЕРЕЖУВАНІЙ

Найважливішим методом дослідження еволюції процесів у природознавстві є побудова математичних моделей явищ, які вивчаються, та їхній аналіз. Наявність математичної моделі певного явища суттєво розширює можливості його вивчення, дозволяє розв'язувати задачі передбачення поведінки системи у часі й залежності режимів її функціонування від параметрів.

Однак дуже часто стикаємося зі складнішою ситуацією, коли детальні відомості про реальну систему або відсутні зовсім, або їх явно недостатньо. Єдина інформація про властивості системи наявна в експериментальній залежності однієї з координат стану системи у часі. Таку залежність $a(t)$, виміряну упродовж скінченного часу t_0 , називають *спостережуваною* (або *реалізацією*) системи, а у дискретизації з кроком Δt : $a(i\Delta t) = a_i$, $i = 1, \dots, M$, $M = [t_0 / \Delta t]$, її називають *одновимірним часовим рядом*.

Задачею максимум *реконструкції* динамічної системи (*глобальна реконструкція*) є побудова математичної моделі динамічної системи, аналіз якої з певним ступенем точності відтворить одновимірну спостережувану на заданому інтервалі часу t_0 і визначить динаміку системи для $t > t_0$. В цьому розділі ми поговоримо про одну із складових глобальної реконструкції, а саме *реконструкцію атрактора* системи [1, 23, 31].

Варто зазначити, що часовий ряд $a(i\Delta t) = a_i$ вважають детерміновано визначеним, тобто таким, що відображає еволюційний процес реальної динамічної системи, яка керується детермінованими динамічними законами. Якщо часовий ряд є наслідком випадкового процесу, то говорити про реконструкцію немає смислу.

9.1. Теорема про вкладення

Математичною основою для опису процедури реконструкції атратора служить так звана *теорема про вкладення* [23]. Щоб ознайомитися з її змістом, спочатку уточнимо, що розуміють під терміном *вкладення*.

Нехай A є компактною підмножиною n -вимірному простору X . Визначити вкладення множини A в m -вимірний простір Y означає задати відображення X в Y таке, що збіг образів двох векторів, які належать множині A , можливий тільки за рівності цих векторів.

Твердження, доведене Мане [68], полягає у тому, що практично будь-яке гладке відображення X в Y задаватиме вкладення множини A в простір Y за умови, що

$$m \geq 2D + 1, \quad (9.1)$$

де D – фрактальна розмірність (ємність) множини A .

Надалі, інтерпретуватимемо X як фазовий простір динамічної системи, множини A як її атратор, а Y – як *реконструйований фазовий простір* (інакше кажучи – *простір вкладення*), в якому будемо реконструкцію A_R початкового атратора A .

Пояснимо смисл теореми Мане на такому простому прикладі [23, с. 208]. Розглянемо атратор у вигляді замкненої орбіти, тобто маємо граничний цикл. Якщо ми спробуємо спроектувати його на площину, то, кажучи взагалі, образ атратора може виявитися кривою з самоперетинами, одним чи кількома. Кожна точка самоперетину є образом двох різних точок початкового атратора, так що умова вкладення порушується. Особливо суттєвим тут є таке: ці самоперетини не ліквідуються завдяки "малому ворушінню" конфігурації, зокрема, у разі малої зміни напрямку проєктування. Це говорить про те, що двох вимірів у загальному випадку недостатньо, щоб реалізувати вкладення. Тепер представимо собі цю замкнену криву у тривимірному просторі. Хоч у неї можуть бути точки самоперетину, але вони з очевидністю ліквідуються завдяки "малому ворушінню". Тому при $m = 3$ в типовому випадку матимемо вкладення. Розмірність граничного циклу $D = 1$, тому з формули (9.1) отримуємо $m = 3$, що повністю відповідає наведеним міркуванням.

9.2. Метод затримки Такенса

Раніше вважали, що для вивчення динаміки системи в термінах фазового простору необхідно знати всі координати, які визначають її стан. Проте 1981 р. була опублікована робота [80], в якій показано, що фазовий портрет динамічної системи може бути відновлений за скалярним часовим рядом a_i , якщо як змінні, яких не вистачає, використовувати той самий ряд a_i , взятий із певним запізненням. Такий підхід отримав назву *методу затримки*. В цій роботі була доведена теорема, згідно з якою, за одновимірною реалізацією $a(t)$ динамічної системи, яка має атрактор A , розмірність якого D , методом затримки можна визначити реконструкцію A_R початкового атрактора A у просторі R_m при $m \geq 2D + 1$ (*теорема Такенса*¹).

Отже, згідно з теоремою Такенса, маючи залежність спостережуваної від часу $a(t)$, задаємо деякий часовий крок τ і ціле число m , та будемо m -вимірний вектор, координатами якого є значення $a(t)$ в моменти часу $t, t + \tau, t + 2\tau, \dots, t + (m - 1)\tau$, тобто

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_m(t)\}, \quad (9.2)$$

де

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a(t), \\ x_2(t) &= a(t + \tau), \\ x_3(t) &= a(t + 2\tau), \\ &\dots \\ x_m(t) &= a(t + (m - 1)\tau). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Вектор $\mathbf{x}(t)$ задає точку в m -вимірному просторі, яка з плином часу t переміщується вздовж деякої траєкторії.

Оскільки на ЕОМ аналізується ряд значень змінної $a(t)$ в дискретні моменти часу $i\Delta t$, то i реконструйовані координати теж будуть дискретні, а величина τ матиме вигляд $\tau = k\Delta t$, де k – ціле число, наприклад 1, 2, 3, Тому формулу (9.2)

¹ Такенс Флоріс (1940–2010) – нідерландський математик.

перепишемо як

$$\mathbf{x}_i = \{x_i, x_{i+k}, x_{i+2k}, \dots, x_{i+(m-1)k}\}, \quad (9.4)$$

де нижній індекс i відповідає дискретному моменту часу $i\Delta t$, а координати $x_i = a(i\Delta t) = a_i$, індекс k визначає затримку $\tau = k\Delta t$. У разі перебирання по i отримуємо дискретний набір точок в m -вимірному просторі.

Зазначимо, що можна побудувати реконструйований фазовий портрет у просторі у випадку невеликої величини m , а саме, $m = 2$ або $m = 3$, і зробити певні якісні висновки. Якщо зображення виглядає як безструктурна множина точок, то це означає, що розмірність системи велика порівняно з m , або даний часовий ряд має природу випадкового процесу. Якщо ж сигнал генерується динамічною системою з невисокою розмірністю фазового простору, то отримуємо картинку з характерною внутрішньою структурою.

Звісно бажано мати кількісну оцінку реконструйованого атрактора. Тут можна використовувати кореляційну розмірність D_2 , адаптуючи відповідним чином алгоритм Гроссбергера – Прокаччіа (див. підрозд. 3.9). Отже, розглядаючи множину точок \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, M$, в m -вимірному просторі як реконструйований фазовий портрет атрактора, оцінімо його розмірність згідно з алгоритмом Гроссбергера – Прокаччіа, тобто обчислюємо для різних величин δ кореляційний інтеграл $C(\delta)$ (формула (3.49)):

$$C(\delta) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M \theta(\delta - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad (9.5)$$

де $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – функція Гевісайда.

Зазвичай це завдання виконують за таким алгоритмом. Вибирають довільне мале значення розмірності простору вкладення m і обчислюють D_2 за нахилом лінійної ділянки графіка $\log C(\delta)$ від $\log \delta$. Далі збільшують m на одиницю і знову обчислюють D_2 . Таким чином аналізують залежність результатів розрахунку кореляційної розмірності від вибору простору вкладення. Вказана процедура дозволяє зробити висновок про існування мало-вимірної динаміки ($D_2 < 4$) [1]: за її наявності залежність $D_2(m)$

швидко досягає насичення і за подальшого збільшення m не змінюється в межах точності обчислень. Цю величину D_2 беремо за оцінку кореляційної розмірності атрактора динамічної системи.

Якщо маловимірна динаміка відсутня, то D_2 збільшується зі зростанням m . В такому випадку за достатньо великих m можливе насичення, яке обумовлене фундаментальними обмеженнями на значення кореляційної розмірності. Ці обмеження пов'язані зі скінченною довжиною часового ряду [1]:

$$D_{\max} = \frac{2 \log M}{\log(1/r)}, \quad r = \frac{\delta}{\delta_{\max}}. \quad (9.6)$$

Формула (9.6) означає, що алгоритм розрахунку розмірності не може дати значення, більше ніж D_{\max} для заданої кількості точок M . Наприклад, якщо $r = 0,1$ і $M = 1000$, то $D_{\max} \leq 6$, якщо $M = 100000$, то $D_{\max} \leq 10$. Наявність фундаментальних обмежень створює серйозні проблеми у дослідженні систем із великою кількістю степенів вільності. У дослідженні динаміки маловимірних систем такі проблеми не виникають.

Отже, згідно з теоремою Такенса, розмірність простору вкладення, необхідна для реконструкції атрактора даної динамічної системи, становить $m \geq 2D_2 + 1$. Іноді можна обмежитися меншим значенням $D_2 < m < 2D_2 + 1$, отримавши у цьому разі добру реконструкцію (але зменшення величини m не повинно приводити до самоперетину фазової траєкторії).

Варто зазначити, що графік $C(\delta)$, побудований у логарифмічних координатах, відхиляється від прямої лінії в області великих значень δ , порівнянних із розмірами атрактора, і дуже малих δ , коли кількості пар точок стає мало для надійної статистичної оцінки. Інтервал лінійності буде тим ширшим, чим більша кількість точок M враховуватиметься.

У розрахунку D_2 можна виокремити три важливі характеристики масиву даних: повний час спостереження t_0 , кількість точок M і часовий крок між ними Δt . Вони пов'язані співвідношенням $t_0 = M\Delta t$ і їх слід розглядати разом, оскільки однієї характеристики недостатньо: велике t_0 при малій кількості M може привести до неякісних результатів розрахунку, так само, як і мале t_0 при великій кількості M . Для даного t_0 існує деяка оптимальна

кількість точок M , необхідна для того, щоб забезпечити розрізнення на масштабі δ_{\min} . Зазвичай рекомендують вважати, що $M \approx N$, де N – кількість елементів покриття (кубиків) атрактора з розміром δ_{\min} [1, 23].

Зрозуміло, що точність розрахунку кореляційної розмірності визначається довжиною лінійної ділянки, тобто величиною $p = \delta_{\max} / \delta_{\min}$. Вважають, що для надійного визначення D_2 необхідно, щоб $p_{\min} \approx 10$ [1, 23].

Отже, маємо одновимірний часовий ряд зі скінченною кількістю точок M . Із чого почати? Передусім треба визначитися з оптимальним кроком вибірки, в наших позначеннях це $\tau = k\Delta t$, де k – ціле число. Теоретично τ може бути довільним, але лише за умови, що $M \rightarrow \infty$. Є кілька критеріїв вибору оптимальної величини затримки τ , та всі вони не дають помітно кращих результатів, аніж вибір τ на око. Для цього будують реконструйований портрет атрактора при $m = 2$ і різних τ . За дуже малих τ i -та та $(i + 1)$ -ша координати точок фазової траєкторії практично не будуть відрізнятися одна від одної. Реконструйований атрактор займатиме вузьку смугу поблизу діагоналі простору вкладення. А цього допустити не можна, в силу визначення: координати стану є незалежні змінні, які однозначно визначають стан системи. За дуже великих τ , координати стають некорельованими, і реконструйований атрактор не характеризує істинну динаміку системи. Для практичних цілей τ часто вибирають на око, з огляду на геометрію реконструйованої множини, щоб атрактор не був занадто витягнутим у жодному з напрямків.

Як приклад, на рис. 9.1, *a* показано портрет атрактора Лоренца на площині XU і реконструйовані портрети атрактора Лоренца по одній координаті Y за розмірності простору вкладення $m = 2$ для різних величин затримки k : *b* – якщо $k = 1$, *в* – якщо $k = 7$, *г* – якщо $k = 50$. Кількість розрахункових точок становила $M = 10000$ на інтервалі часової змінної t від 0 до $t_0 = 100$ (у разі побудови фазового портрета перші 1000 точок відкидали).

На рис. 9.1, *б* атрактор займає вузьку смугу біля діагоналі, отже затримка $k = 1$ є занадто малою. На рис. 9.1, *г* структура атрактора деформована, отже затримка $k = 50$ занадто велика.

Порівнюючи рис. 9.1, *a* і рис. 9.1, *в*, можна сказати, що мабуть затримка $k = 7$ близька до оптимальної за вибраних характеристик масиву даних.

Метод затримки є найпопулярнішим, але не єдиним методом реконструкції атратора. Існують й інші підходи, наприклад, метод послідовного диференціювання координат [1, 23]. Проте за розрахунку розмірності зазвичай обмежуються методом затримки, інші варіанти відновлення траєкторії у фазовому просторі застосовують у складніших задачах, наприклад, у розв'язанні проблеми глобальної реконструкції, тобто побудови рівнянь руху за часовим рядом.

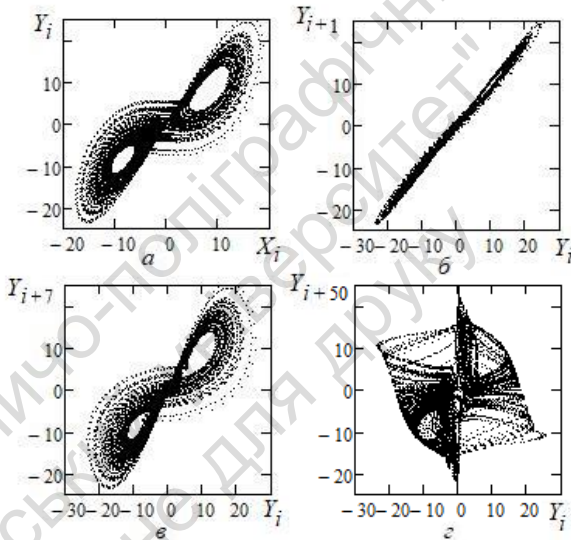


Рис. 9.1. Портрет атратора Лоренца на площині XY (*a*) і реконструйовані портрети атратора Лоренца по одній координаті Y за розмірності простору вкладення $m = 2$ для різних величин затримки k : *б* – якщо $k = 1$, *в* – якщо $k = 7$, *г* – якщо $k = 50$

9.3. Реконструкція атратора Ено

Менше проблем виникає у дослідженні дискретних відображень, оскільки в цьому випадку зменшується кількість параметрів, від яких залежить точність визначення кореляційної розмірності (відсутнє Δt , величину часової затримки зазвичай беруть рівною одиниці), водночас сама програма розрахунку розмірності не змінюється. Тому у разі числової реалізації реконструкції атратора динамічної системи візьмемо саме дискретні відображення.

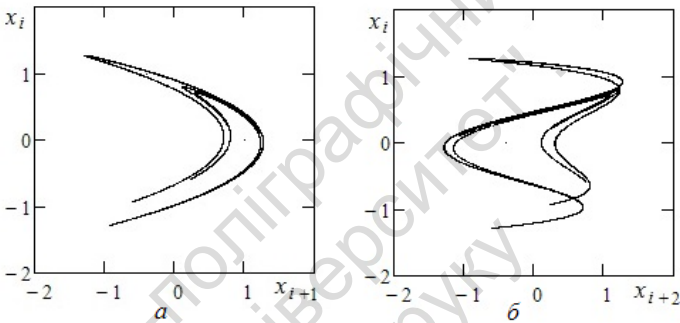


Рис. 9.2. Реконструйований за координатою x_i портрет атратора відображення Ено ($a = 1,4$; $b = 0,3$) у фазовому просторі розмірності $m = 2$: a – затримка $k = 1$, b – затримка $k = 2$

Як прилад, розглянемо двовимірне дискретне відображення Ено (див. підрозд. 5.1). За спостережувану візьмемо координату x_i точок ітераційного процесу (5.5). На рис. 9.2 показано портрет атратора відображення Ено ($a = 1,4$; $b = 0,3$) в реконструйованому фазовому просторі розмірності $m = 2$ за затримки $k = 1$ (рис. 9.2, *a*) і $k = 2$ (рис. 9.2, *b*). Порівнюючи рис. 5.5, *b* і рис. 9.2, *a*, можна говорити про дуже добру узгодженість цих фазових портретів. У випадку збільшення затримки k всього на одиницю (рис. 9.2, *b*) характерна структура атратора втрачається.

Тепер, маючи масив векторів \mathbf{x}_i можна перейти до обчислення кореляційного інтеграла. На рис. 9.3 в подвійному логариф-

мічному масштабі зображено графіки залежності кореляційного інтеграла C від розміру елемента покриття δ , розмірність простору вкладення $m = 1, 2, 3, 4$. Маємо довгу лінійну ділянку графіків на рис. 9.3. Як бачимо, дуже швидко, починаючи з $m = 2$, настає насичення, що дає можливість оцінити кореляційну розмірність атратора Ено. Отже маємо величину $D_2 \approx 1,21$. Ця оцінка, яку отримано по одній координаті x_i точок ітераційного процесу (5.5), добре збігається з розрахунками, наведеними в підрозд. 5.4. Згідно з даними оригінальної роботи [58] величина $D_2 \approx 1,21$.

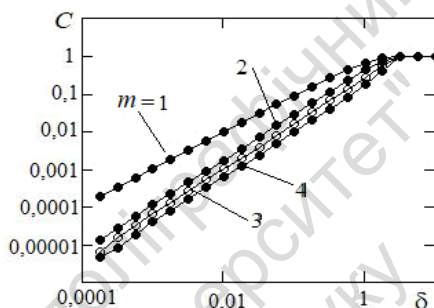


Рис. 9.3. Оцінювання розмірності атратора Ено ($a = 1,4$; $b = 0,3$); розмірність простору вкладення $m = 1, 2, 3, 4$

Задача. Визначте кореляційну розмірність хаотичного атратора у двовимірному відображенні Лозі за двома координатами і за однією координатою:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - 1,5x_n^2, \\ y_{n+1} &= 0,3x_n. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Побудуйте фазовий портрет атратора Лозі і його реконструйований портрет за однією координатою.

РОЗДІЛ 10

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Нині фрактали широко використовують для опису властивості самоподібності, яка спостерігається в різноманітних явищах. Фрактальні властивості мають геометричні об'єкти – лінії, поверхні, просторові тіла. Усі вони мають дуже нерегулярну форму і демонструють самоподібність у деякому діапазоні масштабів. Самоподібність може бути повною (в цьому випадку говорять про регулярні фрактали) або може спостерігатися елемент випадковості (такі фрактали називають випадковими).

Однак фрактальні об'єкти зустрічаються у природі ще й у вигляді випадкових процесів, які являють собою часові залежності вимірюваних величин. Нині під час вивчення властивостей складних систем, зокрема і в експериментальних дослідженнях, широко використовують підхід, заснований на аналізі сигналів, вироблених системою. Це дуже актуально тоді, коли математично описати процес, що вивчається, практично неможливо, але в нашому розпорядженні є деяка характерна величина, яку ми реєструємо. Наприклад, у кардіології як такий сигнал використовують електрокардіограму, в сейсмології – запис коливань земної кори, у метеорології – дані метеоспостережень, тощо.

Отже, дуже часто стикаємося із ситуацією, коли детальні відомості про реальну систему або відсутні зовсім, або їх явно недостатньо. Єдина інформація про властивості системи присутня в експериментальній залежності однієї з координат стану системи в часі, яку називають спостережуваною системою, а при дискретизації сигналу – одновимірним часовим рядом (у загальному випадку кажуть про динамічний ряд, адже змінним параметром може бути не лише час).

В розд. 9 ми розглянули проблему реконструкції атрактора динамічної системи, маючи наявну спостережувану. В останніх трьох розділах продовжимо наші дослідження, спираючись на

припущення про те, що спостережувана породжується динамічною системою скінченної розмірності з хаотичними властивостями. В розд. 10 і 11 йдеться про інструменти дослідження фрактальних властивостей часових рядів, а в розд. 12 продемонстровано їхнє застосування для реальних часових рядів, а саме, кардіоінтервалограми серцевого ритму людини і шуму дихання людини.

Отже, динамічні ряди – це клас процесів, які широко використовують для опису і моделювання різноманітних природних явищ. Оскільки дослідження структури таких процесів є важливим завданням, розроблено різні методи аналізу сигналів. Деякі з них стали вже класичними, наприклад, кореляційний і спектральний аналіз. Застосування методів нелінійної динаміки і визначення фрактальних властивостей сигналу є однією зі складових загальної характеристики досліджуваного процесу.

Важливо розуміти, що крім визначення спектра сингулярностей сигналу, необхідно його порівнювати зі спектрами сингулярностей "еталонних" процесів, які отримані тим самим методом. Саме таке порівняння дасть об'єктивну інформацію стосовно досліджуваного процесу.

Значимо, що побудова випадкових процесів з відомими фрактальними властивостями, тобто "еталонних" сигналів, є важливою складовою в аналізі випадкових природних сигналів. Створення таких модельних сигналів не зводиться до випадкових збурень детермінованих процесів. Навпаки, випадковий характер притаманний їм спочатку, що пов'язано з природою реальних сигналів, які мають вивчатися.

Серед моделей таких процесів, для наших досліджень, найважливішою є модель броунівського руху. Початок досліджень броунівського руху пов'язаний з ім'ям Брауна¹ (1827 р.). Браун виявив, що маленькі частинки, зважені в рідині, перебувають у неупорядкованому неперервному русі. Ейнштейн² 1905 р. пояснив цей рух хаотичними зіткненнями з молекулами навколишнього середовища.

¹ Браун Роберт (1773–1858) – англійський ботанік.

² Ейнштейн Альберт (1879–1955) – німецький фізик.

Отже, броунівський рух – це нерегулярний рух мікроскопічної частинки в рідині, що відбувається за рахунок взаємодії частинки з молекулами середовища, які перебувають у хаотичному тепловому русі. Реєструючи будь-яку координату положення броунівської частинки в часі, отримуємо криву, яку називають *броунівським сигналом* або *броунівським процесом*.

Броунівський рух – одне з найпоширеніших явищ у природі. У броунівському русі перебувають молекули рідини, газу, іони в плазмі, завдяки йому відбувається дифузія однієї речовини в іншу, внаслідок дифузії іде процес живлення клітин в організмі й виведення з клітин продуктів життєдіяльності, відбуваються хімічні реакції, загалом можливе життя [39].

10.1. Проста модель броунівського руху

Найпростішою дискретною моделлю броунівського руху є випадковий одновимірний рух частинки [16, 39]. Нехай у момент часу $t = 0$ частинка розташована в точці $x = 0$. Далі частинка здійснює послідовні дискретні переміщення вздовж осі x .

Для кожного моменту часу t функція $x(t)$ є випадковою величиною, а отже, по суті, $x(t)$ є випадковим процесом, що має такі властивості.

Властивість 1. Якщо $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, то випадкові величини переміщення частинки незалежні,

$$x(t_1) - x(0), x(t_2) - x(t_1), \dots, x(t_n) - x(t_{n-1}), \quad (10.1)$$

тобто кожний наступний крок випадкового блукання частинки відбувається незалежно від попередніх.

Властивість 2. Щільність розподілу випадкової величини $x(t + \tau) - x(t)$ не залежить від часу t , оскільки вважаємо, що середовище, в якому рухається частинка, однорідне у просторі й часі, тобто його властивості не змінюються у часі, і в будь-якій точці середовища вони однакові.

Властивість 3. $x(t)$ – неперервна функція, адже рух частинки описує неперервну траєкторію, тобто частинка не може миттєво перескочити з однієї точки простору в іншу.

Наша мета – отримати щільність розподілу ймовірності $f(x,t)$ випадкової функції $x(t)$. Функція $f(x,t)$ визначатиме ймовірність знаходження частинки в точці x через час t , якщо в початковий момент часу $t = 0$ вона містилася в точці $x = 0$.

Нехай до моменту часу t частинка виконала $n = t / \tau$ переміщень (τ – час одного переміщення), причому $t \gg \tau$. Із властивості 2 випливає, що щільність розподілу переміщення частинки $x(t + \tau) - x(t)$ збігається зі щільністю розподілу переміщення $x(\tau) - x(0)$. Згідно з теоремою про математичне сподівання [8], математичне сподівання суми переміщень частинки дорівнює сумі математичних сподівань окремих переміщень:

$$M[x(n\tau) - x(0)] = nM[x(\tau) - x(0)]. \quad (10.2)$$

Якщо б математичне сподівання $a = M[x(\tau) - x(0)] \neq 0$, то існувала б течія, яка несе частинку вздовж координатної осі, що не притаманно нашій математичній моделі. Тому математичне сподівання переміщень частинки покладемо рівним нулю:

$$a = M[x(\tau) - x(0)] = 0. \quad (10.3)$$

Із властивості 1, згідно з теоремою про дисперсію суми незалежних величин [8], дисперсія суми переміщень частинки дорівнює сумі дисперсій окремих переміщень:

$$\sigma_x^2 \equiv D[x(n\tau)] = nD[x(\tau)] = \sigma^2 n. \quad (10.4)$$

За час $t \gg \tau$ частинка виконує $n = t / \tau$ незалежних переміщень. Відповідно до властивості 3 можна зробити граничний перехід, а отже записати такий вираз для дисперсії суми переміщень частинки за час t :

$$\sigma_x^2 \equiv D[x(t)] = \sigma^2 t. \quad (10.5)$$

Як бачимо, дисперсія функції $x(t)$ є лінійна функція часу t . Смісл величини σ^2 як для дискретної картини броунівського руху (формула (10.4)), так і для неперервної (формула (10.5)) залишається тим самим, а саме, σ^2 – це дисперсія (середній квадрат) переміщення частинки за одиницю часу.

Далі отримаємо допоміжний результат [16]. В теорії імовірностей показано [8], що за додавання двох незалежних випадкових величин зі щільністю розподілу $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ отримуємо випадкову величину зі щільністю розподілу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-y)\varphi_2(y)dy. \quad (10.6)$$

Вираз (10.6) називають *згорткою* функцій $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$.

Покажемо, що спектральна щільність згортки функцій дорівнює добутку їхніх спектральних щільностей. Для цього визначимо перетворення Фур'є (див. підрозд. 2.6) від функції (10.6) (використовуємо заміну змінних $x-y=x_1$):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-y)\varphi_2(y)dy = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx)\varphi_1(x-y)dx = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iky)\varphi_2(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx_1)\varphi_1(x_1)dx_1, \end{aligned}$$

що і треба було довести.

Ця властивість безпосередньо поширюється на суму будь-якої кількості незалежних випадкових величин. Тоді, позначаючи через $F(k)$ спектральну щільність величини $x(t)-x(0)$, а через $\Phi(k)$ – спектральну щільність окремого переміщення частинки (10.1), можна записати таке співвідношення:

$$F(k) = [\Phi(k)]^n. \quad (10.7)$$

Позначимо через $\varphi(x)$ щільність розподілу окремого переміщення частинки (10.1) і визначимо її спектр з урахуванням формул (10.3)–(10.5):

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - ikx + \frac{(ikx)^2}{2} + \dots \right] \varphi(x)dx = \\ &= 1 - \frac{k^2}{2}\sigma^2 + \dots = 1 - \frac{k^2}{2n}\sigma_x^2 + \dots \end{aligned} \quad (10.8)$$

Підставляючи (10.8) у (10.7), отримаємо

$$F(k) = \left[1 - \frac{k^2}{2n} \sigma_x^2 + \dots \right]^n = \exp \left[n \ln \left(1 - \frac{k^2}{2n} \sigma_x^2 + \dots \right) \right]. \quad (10.9)$$

Для великих n логарифм можна розкласти в ряд Тейлора і обмежитися першим доданком ($\ln(1 + \alpha) \approx \alpha$). Тому з формули (10.9), при великих n , маємо

$$F(k) = \exp \left[-\frac{k^2}{2} \sigma_x^2 \right]. \quad (10.10)$$

Використовуючи обернене перетворення Фур'є, знаходимо шукану щільність розподілу випадкової величини $x(t) - x(0)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} k^2 \sigma_x^2 + ikx \right) dk. \quad (10.11)$$

Інтеграл (10.11) обчислюємо аналітично [16, с. 259–260]; отже

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right). \quad (10.12)$$

Як бачимо, щільність розподілу (10.12) випадкової величини $x(t) - x(0)$ є нормальним законом розподілу з нульовим середнім значенням і дисперсією σ_x^2 . Таким чином, сума великої кількості незалежних випадкових величин зі скінченними значеннями дисперсії, розподілених за однаковим законом (за будь-яким законом!), дає величину, розподілену за законом Гаусса.

Отриманий результат являє собою *центральну граничну теорему* теорії імовірностей [8]. Більше того, закон Гаусса справджується й у випадку, коли доданки розподілені за різними законами, аби не було так, що в цій сумі один або кілька доданків домінують над іншими (тоді отримаємо не суму великої кількості доданків, а суму декількох доданків із невеликою поправкою). Зазначимо, що припущення незалежності або хоча б слабкої залежності є дуже суттєвим, оскільки, якщо воно не виконується, то насамкінець можна отримати будь-який результат [16, с. 265–266]. Важливо усвідомити, що багато явищ випадкового характеру, які зустрічаються на практиці, являють собою результат накладання окремих подій.

Згідно з формулами (10.3)–(10.5) математичне сподівання $a = 0$, а дисперсія $\sigma_x^2 = \sigma^2 t$. Отже, якщо покласти, що $x(0) = 0$, то щільність розподілу ймовірності функції $x(t)$ буде

$$f(x, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right). \quad (10.13)$$

Коефіцієнт σ^2 називають *коефіцієнтом дифузії*, він характеризує середній квадрат зміщення частинки за одиницю часу і залежить від температури і густини середовища.

Якщо $t \approx 0$, то графік функції $f(x, t)$ має вигляд високого і тонкого піка. Назвемо його *дифузною хмаркою*. Із часом хмарка розпливається згідно з формулою (10.13), у цьому разі дисперсія кривої Гауса впродовж часу зростає за лінійним законом $\sigma_x^2 = \sigma^2 t$. Нагадаємо, що площа, обмежена графіком функції (10.13), для всіх t дорівнює одиниці [8].

Виникає питання, як далеко піде блукаюча частинка від початкової точки $x(0) = 0$ за час t ? Середнє віддалення (математичне сподівання x) дорівнює нулю, оскільки можливі рухи частинки ліворуч і праворуч урівноважують один одного. Тому варто підрахувати середній абсолютний приріст координати за часом (математичне сподівання $|x|$). Згідно з визначенням математичного сподівання, знаходимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, t) dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right) dx = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} t.$$

Як бачимо, середній абсолютний приріст координати частинки і середньоквадратичне відхилення σ_x щільності розподілу, яке по суті визначає характерний розмір дифузної хмарки, пропорційні \sqrt{t} .

Здавалося б, що середнім абсолютним приростом координати частинки за одиницю часу, як досить наочним поняттям, можна було б користуватися як характеристикою швидкості дифузії. Проте, як показано в теорії імовірності, характеристика $|\overline{x - \bar{x}}|$ розкиду випадкової величини x навколо її середнього значення \bar{x} виявляється значно менш зручною для використання, ніж дис-

персія $\sigma_x^2 = \overline{(x - \bar{x})^2}$ і пов'язане з нею середньоквадратичне відхилення $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$. Величину $\overline{|x - \bar{x}|}$ часто важко обчислити, і вона не має тих загальних властивостей, які притаманні дисперсії. Тому у дослідженні процесів дифузії основною характеристикою швидкості процесу є середній квадрат приросту координати за одиницю часу, тобто дисперсія [16, с. 262–263].

10.2. Фрактальна розмірність траєкторії броунівської частинки

Нехай броунівська частинка рухається у площині. Її траєкторія є прикладом випадкового фрактала. На рис. 10.1, *a* маємо повну траєкторію частинки, яка виконала 10^5 переміщень (проекції кожного випадкового переміщення на осі декартової системи координат x та y визначали як випадкові величини з нормальним законом розподілу, математичним сподіванням, рівним нулю, і дисперсією, рівною одиниці), а на рис. 10.1, *б* – збільшений фрагмент траєкторії, який на рис. 10.1, *a* показано прямокутником.

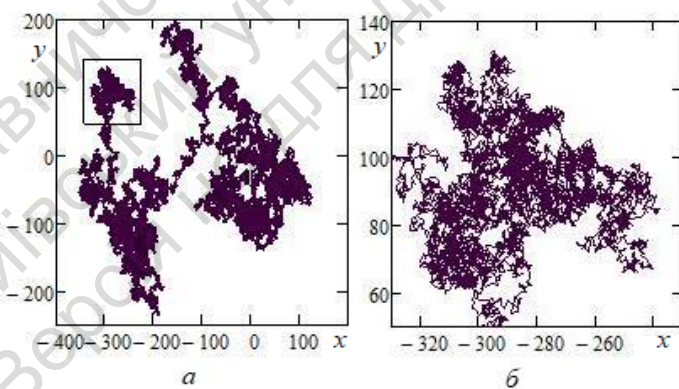


Рис. 10.1. Траєкторія броунівської частинки

Основна відмінність випадкових фракталів від регулярних фракталів полягає у тому, що властивість самоподібності справедлива лише після відповідного усереднення за всіма статистично незалежними реалізаціями об'єкта. Причому збільшена частина фрактала не точно ідентична початковому фрагменту, проте їхні статистичні характеристики збігаються (рис. 10.1). Відмітимо, що у броунівському русі діапазон зміни масштабів, у межах якого зберігається статистична самоподібність, дуже великий.

Хоча траєкторія на рис. 10.1 має дуже складний звивистий характер, визначити її фрактальну розмірність дуже просто. Для цього зауважимо (див. формулу (10.4)), що коли, у процесі дифузії, частинка віддалилась на відстань R , то середня кількість "кроків", які вона зробила, буде така:

$$N \approx \frac{R^2}{\delta^2}.$$

де δ – характерна довжина одного кроку.

Покриємо траєкторію частинки шаблонами розміром δ і, використовуючи формулу (3.4), знаходимо значення розмірності

$$D = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln \delta} = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln R^2}{\ln \delta} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \delta^2}{\ln \delta} = 2,$$

оскільки перша границя прямує до нуля внаслідок скінченності величини R .

Отриманий результат свідчить, що характерний розмір дифузійної траєкторії на певній площині пропорційний розміру цієї площини, тут траєкторія на площині є достатньо густою (див. рис. 10.1). Причиною цього є безліч самоперетинів дифузійної кривої (див. рис. 10.1). Можна показати, що для двовимірного броунівського руху ймовірність повертання в будь-який, як завгодно малий окіл довільно вибраної точки, дорівнює одиниці.

У випадку дифузії у тривимірному просторі траєкторія руху броунівської частинки є, навпаки, дуже розрідженою (її фрактальна розмірність залишається рівною 2) і не заповнює весь об'єм, в якому вона зосереджена. У цьому випадку ймовірність повертання виявляється меншою одиниці. Можливо через таку

важливу причину багато хімічних реакцій, які необхідні для підтримання життя у природі, відбуваються не у тривимірному просторі, а на всіляких поверхнях.

10.3. Класичний броунівський сигнал

Формалізуємо наші уявлення про броунівський рух у вигляді так званої моделі *класичного броунівського сигналу* [22, 43]. Ця модель описує процес, усі властивості якого виводять із двох тверджень:

1) випадкова функція $X(t)$, яка описує сигнал, має гауссовий закон розподілу. Вважаємо, що $X(0) = 0$;

2) прирости функції $X(t'_1) - X(t_1)$ та $X(t'_2) - X(t_2)$ на інтервалах, які не перетинаються, є незалежними випадковими величинами. Прирости броунівського сигналу $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$ також мають гауссовий розподіл із математичним сподіванням, рівним нулю, і дисперсією $\sigma^2(t_2 - t_1)$, де σ^2 – додатна стала, тобто

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right) du. \quad (10.14)$$

Дамо опис властивостей класичного броунівського руху.

1. Оскільки дисперсія $\sigma^2(t_2 - t_1)$ приростів залежить лише від різниці моментів часу t_1 і t_2 , то прирости стаціонарні.

2. Математичне сподівання модуля приростів

$$|X(t_2) - X(t_1)| = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}(t_2 - t_1)}, \quad (10.15)$$

отже пропорційно $\sqrt{t_2 - t_1}$ (переконайтеся у цьому самостійно).

3. Прирости реалізації броунівського сигналу мають властивість статистичної самоподібності, тобто

$$X(t + \Delta t) - X(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{r}} [X(t + r\Delta t) - X(t)] \quad (10.16)$$

для будь-якої величини r . Символ \triangleq означає, що дві випадкові величини мають однакову щільність розподілу, зокрема й однакові математичне сподівання і дисперсію.

Щоб переконатися у справедливості співвідношення (10.16), треба довести, що

$$\begin{aligned} P(X(t + \Delta t) - X(t) \leq x) &= \\ &= P(X(t + r\Delta t) - X(t) \leq \sqrt{r}x). \end{aligned} \quad (10.17)$$

Ліва частина (10.17) дорівнює

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) du,$$

а права частина дорівнює

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r\sigma^2\Delta t}} \int_{-\infty}^{\sqrt{r}x} \exp\left(-\frac{u^2}{2r\sigma^2\Delta t}\right) du.$$

Заміна змінних $u = \sqrt{r}y$ в останньому інтегралі зводить його до попереднього. Отже, статистичної ідентичності досягають різним масштабуванням сигналу: по осі абсцис (час) в r раз, а по осі ординат (координата) в \sqrt{r} разів.

Значимо цю характерну рису часових рядів: осі системи координат, в якій будується графік сигналу, зазвичай відповідають різним фізичним величинам (напр., залежність швидкості вітру від часу). Статистичної ідентичності кривих за зміни масштабу досягають різним масштабуванням сигналу по осі абсцис і по осі ординат. У такому випадку говорять, що криві *самоафінні*, а не самоподібні. Однак, надаючи поняттю самоподібності ширшого змісту, будемо як і раніше говорити про самоподібність. Крім того, ці криві є однозначними, тобто одному значенню аргументу відповідає одне значення функції.

4. Наявність самоподібності в характері приростів на різних інтервалах дозволяє оцінити фрактальну розмірність броунівської кривої. Зробимо це так. Нехай $[0,1]$ – інтервал, на якому представлено графік сигналу. Розділимо цей інтервал на n рівних відрізків однакової довжини $\Delta t = 1/n$, і вісь ординат також розділимо на відрізки завдовжки Δt . Отже графік сигналу по-

кріється сіткою квадратиків зі стороною Δt . Величина $|\Delta X|/|\Delta t|$ є оцінкою числа квадратів розміру Δt , необхідних для покриття частини графіка $y = X(t)$, яка розміщена над одним відрізком Δt на осі абсцис. Оскільки математичне сподівання величини $|\Delta X|$ пропорційно $\sqrt{\Delta t}$, то кількість квадратів пропорційна $\sqrt{|\Delta t|}/|\Delta t|$. Всього маємо $1/\Delta t$ таких відрізків уздовж осі абсцис, тому загальна кількість квадратів пропорційна $N(\Delta t) \sim \Delta t^{-3/2}$. Відповідно до формули (3.2), фрактальна розмірність класичного броунівського сигналу

$$D = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\log N(\Delta t)}{\log \Delta t} = 1,5. \quad (10.18)$$

Цікаво зазначити, що траєкторія руху броунівської частинки густо заповнює однорідну двовимірну область і, як результат, має розмірність 2 (див. підрозд. 10.2).

5. Класичний броунівський сигнал є недиференційованим.

Отже, класичний броунівський сигнал визначає самоподібний процес і має скінченну дисперсію (і взагалі усі статистичні моменти приростів сигналу). Розподіл величин дифузних приростів сигналу є гауссовим. Говорять, що такий процес описує *нормальну* (інакше, *класичну*) *дифузію Гаусса*.

10.4. Узагальнений броунівський сигнал

Характерною рисою, розглянутої вище моделі класичного броунівського руху, є незалежність випадкових приростів частинки. У тих випадках, коли потрібно описати випадкові сигнали, що мають деяку "пам'ять", застосовують модель *узагальненого* (інакше, *фрактального*) *броунівського сигналу* [22, 43].

В моделі узагальненого броунівського сигналу прирости $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$, $t_2 > t_1$ мають гауссовий розподіл із пара-

метром H , $0 < H < 1$, математичним сподіванням рівним нулю і дисперсією

$$\overline{(X(t_2) - X(t_1))^2} = \sigma^2 (t_2 - t_1)^{2H}, \quad (10.19)$$

тобто

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(t_2 - t_1)^{2H}}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)^{2H}}\right) du. \quad (10.20)$$

Якщо $H = 1/2$, то узагальнений броунівський сигнал є класичним броунівським сигналом. Вважаємо, що $X(0) = 0$.

Варто зауважити, що задовго до появи фракталів, процеси, в яких середній квадрат приростів $\overline{(X(t_2) - X(t_1))^2}$ пропорційний $(t_2 - t_1)^{2H}$, виявив Херст¹ під час вивчення річних змін стоків річок [43]. Він установив, що для різних річок указаний показник однаковий і дорівнює приблизно 0,73. Показник H називають *показником Херста*.

Прирости класичного броунівського сигналу є незалежними, а узагальнений броунівський сигнал із параметром $H \neq 1/2$ не має цієї властивості. Покажемо, що це справді так.

Дисперсія приростів узагальненого броунівського сигналу визначається формулою (10.19). Інакше можна записати

$$\overline{(X(t_2) - X(t_1))^2} = \overline{(X(t_2))^2} + \overline{(X(t_1))^2} - 2\overline{(X(t_2)X(t_1))},$$

або, беручи до уваги, що $X(0) = 0$, маємо

$$\overline{(X(t_2) - X(t_1))^2} = \overline{(X(t_2) - X(0))^2} + \overline{(X(t_1) - X(0))^2} - 2\overline{(X(t_2)X(t_1))},$$

звідки, з урахуванням (10.19), отримаємо кореляційну функцію

$$K(X(t_2), X(t_1)) \equiv \overline{(X(t_2)X(t_1))} = \frac{\sigma^2}{2} (t_2^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H} + t_1^{2H}). \quad (10.21)$$

¹ Херст Гарольд Едвін (1880–1978) – англійський фізик. Усе життя Херст займався вивченням Нілу і розв'язанням завдань, пов'язаних із накопиченням водних ресурсів. Дослідження Херста виявилися настільки важливими, що до нього звергалися зі словами Абу-Ніл ("батько Нілу").

Тепер визначимо кореляційну функцію приростів для двох неперетинних інтервалів часу (t_1, t_2) і (t_3, t_4) . Її можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & K(X(t_4) - X(t_3), X(t_2) - X(t_1)) = \\ & = K(X(t_4), X(t_2)) - K(X(t_4), X(t_1)) - \\ & - K(X(t_3), X(t_2)) + K(X(t_3), X(t_1)). \end{aligned}$$

Тоді, з урахуванням (10.21), отримаємо шуканий результат (зробіть це самостійно):

$$\begin{aligned} & K(X(t_4) - X(t_3), X(t_2) - X(t_1)) = \\ & = \frac{\sigma^2}{2} \left[-(t_4 - t_2)^{2H} + (t_4 - t_1)^{2H} + (t_3 - t_2)^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H} \right]. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Наведений вираз дорівнює нулю лише за умови $H = 1/2$, що відповідає класичному броунівському сигналу, прирости якого незалежні. Якщо $0 < H < 1/2$, то вираз (10.22) від'ємний, а при $1/2 < H < 1$ – додатний. Це говорить про кореляцію приростів указанного процесу.

В дискретному випадку нормовану кореляційну функцію (коефіцієнт кореляції) послідовності приростів отримуємо, замінюючи t_1, t_2, t_3 і t_4 у виразі (10.22) на $n, n+1, n+k$ і $n+k+1$ відповідно і діленням його на σ^2 :

$$r(k) = \frac{1}{2} \left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right]. \quad (10.23)$$

Наведемо властивості узагальненого броунівського сигналу.

1. Прирости сигналу стаціонарні.
2. Математичне сподівання модуля приростів визначають як

$$\overline{|X(t_2) - X(t_1)|} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi} (t_2 - t_1)^{2H}}. \quad (10.24)$$

3. Статистичну самоподібність обчислюють за формулою

$$X(t + \Delta t) - X(t) \triangleq \frac{1}{r^H} [X(t + r\Delta t) - X(t)] \quad (10.25)$$

для будь-якого r . Як наслідок, типові реалізації самоподібного процесу візуально схожі незалежно від масштабу часу, на якому

вони розглядаються, адже статистичні характеристики при масштабуванні не змінюються.

4. Фрактальну розмірність узагальненого броунівського сигналу обчислюють так само, як і для класичного броунівського сигналу. Основна відмінність полягає в тому, що оцінка кількості квадратів для класичного броунівського сигналу $N(\Delta t) \sim \Delta t^{-3/2}$ замінюється новою оцінкою $N(\Delta t) \sim \Delta t^{-(2-H)}$, звідси маємо (зробить самостійно)

$$D = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\log N(\Delta t)}{\log(\Delta t)} = 2 - H. \quad (10.26)$$

Отже, зміна показника Херста $0 < H < 1$ приводить до значень фрактальної розмірності сигналу $1 < D < 2$.

5. Узагальнений броунівський сигнал є недиференційованим.

У моделі узагальненого броунівського сигналу залежність від часу ширини дифузійної хмарки істотно відрізняється від класичного броунівського сигналу (дисперсія зростає із часом не за лінійним законом). Оскільки сама хмарка зберігає у цьому випадку гауссову форму, такий тип дифузії називають *аномальною дифузією Гаусса*.

10.5. Генерація узагальненого броунівського сигналу методом Фур'є-фільтрації

Метод Фур'є-фільтрації можна використовувати для моделювання узагальненого броунівського сигналу в усьому діапазоні зміни параметра H , $0 < H < 1$ [22]. В основі цього методу – відоме представлення функції у вигляді ряду Фур'є за гармоніками

$$x(t) = \sum_{\nu=v_{\min}}^{v_{\max}} A(\nu) \sin(2\pi\nu t + \psi(\nu)), \quad (10.27)$$

де ν – частота, $A(\nu)$ і $\psi(\nu)$ – амплітуда і фаза гармонік, які утворюють амплітудний і фазовий спектри сигналу.

Амплітудний спектр сигналу визначає *теорема про степеневий характер спектральної щільності потужності* [22, с. 288]: нехай функція $X(t)$ описує узагальнений броунівський сигнал із параметром H , $0 < H < 1$. Тоді для спектральної щільності потужності процесу маємо

$$W(\nu) \sim \frac{1}{\nu^\beta}, \quad \beta = 2H + 1. \quad (10.28)$$

Для генерації фрактальної кривої методом Фур'є-фільтрації варто вибрати набір частот, які входять у розклад Фур'є (10.27). Нехай T – інтервал часу, на якому будують фрактальний сигнал, а N визначає кількість кроків розбиття інтервалу T , тоді $\Delta t = T / N$, $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, де Δt – часовий крок. Величину $1 / \Delta t$ називають частотою дискретизації. Мінімальна частота спектра сигналу буде обернено пропорційна величині інтервалу T , а максимальна дорівнює половині частоти дискретизації (це фундаментальний результат у теорії процесів з обмеженим спектром; див. підрозд. 2.11):

$$\nu_{\min} = \frac{1}{T}, \quad \nu_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2T}. \quad (10.29)$$

Крок зміни за частотою у спектрі сигналу $\Delta\nu = \nu_{\min} = 1 / T$.

Оскільки ми моделюємо не неперервний сигнал, а його дискретний аналог, то значення реалізації сигналу буде визначено дискретно, тобто $x_j = x(t_j)$.

Ідея побудови сигналу така. Спочатку формуємо комплексний спектр майбутнього узагальненого броунівського процесу. У цьому процесі фазу кожної гармоніки вибирають випадковим чином із рівномірним розподілом імовірності з діапазону від 0 до 2π , а амплітуди мають задовольняти властивості спектральної щільності потужності (10.28). Нагадаємо, що спектр потужності визначають через квадрат модуля спектра амплітуд (див. підрозд. 2.9). Потім за допомогою оберненого дискретного перетворення Фур'є (ОДПФ, див. підрозд. 2.13) отримуємо реалізацію шуканого сигналу.

10.6. Довготривала і короткотривала залежність

На рис. 10.2 зображено криві, отримані методом Фур'є-фільтрації за різних значень показника Херста H . Для зручності порівняння всі три криві побудовано з використанням одного генератора випадкових чисел. Параметри побудови: тривалість процесу $T = 2$ с, кількість відліків $N = 2^{16} = 65536$. Тоді часовий крок $\Delta t = T / N \approx 3 \cdot 10^{-5}$ с, а частота дискретизації $1 / \Delta t = 32770$ Гц. Отже, отримані процеси характеризуються обмеженим спектром із мінімальною частотою $\nu_{\min} = 0,5$ Гц, а максимальною – $\nu_{\max} = 16380$ Гц.

Як видно, параметр H (відповідно розмірність $D = 2 - H$) характеризує стійкість статистичного явища. Якщо $H = 1/2$, прирости процесу незалежні, тобто кореляція між приростами відсутня.

Ситуація $1/2 < H < 1$ відповідає додатній кореляції. Якщо прирости були додатні деякий час у минулому, то і надалі в середньому ця тенденція зберігатиметься. Чим ближче значення H до одиниці, тим із більшою імовірністю буде зберігатися ця тенденція поведінки ряду впродовж того самого відрізка часу в майбутньому. Характеризуючи вказану ситуацію, говорять про наявність у процесу *довготривалої залежності*, або кажуть *сильної залежності*.

Якщо $0 < H < 1/2$, то між приростами спостерігають від'ємну кореляцію. Якщо протягом минулого відрізка часу процес характеризувався зростанням, то чим ближче показник Херста до нуля, тим із більшою імовірністю на наступному відрізку часу почнеться спад. Процес стає більш змінним, ніж при $H = 1/2$, оскільки складається із частих реверсів спад-підйом. Тут кажуть про *короткотривалу залежність*, інакше, *слабку залежність*.

Отже показник Херста не тільки являє собою індикатор самоподібності, але й, за значень параметра $0,5 < H < 1$, характеризує ступінь довготривалої залежності стаціонарного самоподібного випадкового процесу. Якщо це так, то показник Херста H

також визначатиме характер поведінки автокореляційної функції процесу [70]. Переконаємося у цьому.

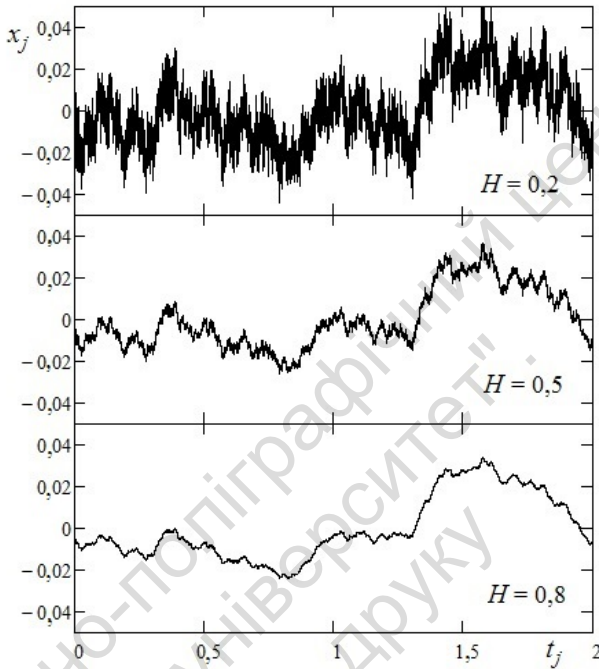


Рис. 10.2. Фрактальні криві, отримані методом Фур'є-фільтрації (всі три криві побудовано з використанням одного генератора випадкових чисел)

Коефіцієнт кореляції приростів функції $H(t)$ визначають за формулою (10.23): $r(k) = \frac{1}{2} \left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right]$. Введе-

мо нову змінну $m = \frac{1}{k}$; при $k \rightarrow \infty$ нова змінна $m \rightarrow 0$. Тоді вираз для $r(k)$ матиме вигляд

$$r(m) = \frac{(1+m)^{2H} - 2 + (1-m)^{2H}}{m^{2H}}. \quad (10.30)$$

Розкладемо функцію $r(m)$ у ряд Тейлора в околі $m_0 = 0$.
Нижче наведено необхідні формули:

$$\begin{aligned} (1 \pm m)^{2H} \Big|_{m_0=0} &= 1 \pm 2Hm + \frac{2H(2H-1)}{2!} m^2 \pm \\ &\pm \frac{2H(2H-1)(2H-2)}{3!} m^3 + \\ &+ \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{4!} m^4 \pm \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[(1+m)^{2H} - 2 + (1-m)^{2H} \right] \Big|_{m_0=0} &= 2H(2H-1)m^2 + \\ &+ 2 \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{4!} m^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(m) \Big|_{m_0=0} &= \left[\frac{(1+m)^{2H} - 2 + (1-m)^{2H}}{m^{2H}} \right] \Big|_{m_0=0} = \\ &= 2H(2H-1)m^{2-2H} + \\ &+ 2 \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{4!} m^{4-2H} + \dots \end{aligned}$$

Отже, якщо $m \rightarrow 0$, то маємо

$$r(m) \sim 2H(2H-1)m^{2-2H} = 2H(2H-1)m^{-(2H-2)}. \quad (10.31)$$

Повертаючись до змінної k , отримуємо шуканий вираз для асимптотики коефіцієнта кореляції при $k \rightarrow \infty$:

$$r(k) \sim 2H(2H-1)k^{2H-2} = 2H(2H-1)k^{-(2-2H)}. \quad (10.32)$$

Ряди із членів послідовності (10.32) для двох діапазонів зміни параметра H ведуть себе по-різному, а саме:

– якщо $0 < H < 1/2$ (тут $r(k) < 0$, $1 < (2-2H) < 2$), то маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |r(k)| < \infty; \quad (10.33)$$

– якщо $1/2 < H < 1$ (тут $r_k > 0$, $0 < (2 - 2H) < 1$), то ряд, утворений послідовними значеннями коефіцієнта кореляції, розходиться:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r(k) = \infty. \quad (10.34)$$

Від кореляційної функції $r(k)$ за допомогою перетворення Фур'є можна перейти до спектральної щільності потужності (спектр потужності) приростів узагальненого броунівського сигналу $S(\omega) = \sum_k r(k) \exp(ik\omega)$. Для цього скористаємося відомими співвідношеннями, які пов'язують асимптотику функції з асимптотикою її перетворення Фур'є. Згідно з формулами з [32, с. 48], асимптотика спектральної щільності, коли частота $\omega \rightarrow 0$, має вигляд

$$S(\omega) \sim \omega^{-(2H-1)}, \quad \omega \rightarrow 0. \quad (10.35)$$

Якщо $0 < H < 1/2$ ($-1 < (2H - 1) < 0$), то $S(\omega) < \infty$, $\omega \rightarrow 0$;

якщо $1/2 < H < 1$ ($0 < (2H - 1) < 1$), то $S(\omega) = \infty$, $\omega \rightarrow 0$.

Отже, з позиції спектрального аналізу довготривала залежність має таку властивість: $S(0) = \sum_{k=1}^{\infty} r(k) = \infty$, тобто спектральна щільність прагне до $+\infty$, коли частота $\omega \rightarrow 0$ (таке явище називають $1/f$ -шум). І навпаки, процеси з короткотривалою залежністю характеризуються спектральною щільністю потужності, яка має додатне і скінченне значення, коли $\omega \rightarrow 0$.

Наведемо деякі висновки. Якщо автокореляційна функція $K(\tau)$ демонструє степеневу залежність для значень часового аргументу $\tau > \tau_1$

$$K(\tau) \sim \tau^{-\gamma}, \quad (10.36)$$

то для спектральної щільності потужності в частотному діапазоні $\omega < 2\pi/\tau_1$ справджується такий вираз:

$$S(\omega) \sim \omega^{-\chi}. \quad (10.37)$$

Величини γ і χ називають *скейлінговими показниками*. Згідно з формулами (10.32) і (10.35) вони зв'язані з показником Херста:

$$\gamma = 2 - 2H \quad \text{і} \quad \chi = 2H - 1. \quad (10.38)$$

Отже, якщо скейлінговий показник γ при великих τ набуває значення в діапазоні $0 < \gamma < 1$, то γ і χ пов'язані простим співвідношенням

$$\chi = 1 - \gamma. \quad (10.39)$$

Якщо автокореляційна функція спадає швидше ніж τ^{-1} , то при $\omega \rightarrow 0$ спектральна щільність потужності наблизатиметься до сталого значення. Причому на великих частотах спектральна щільність потужності може поводити себе відповідно до залежності (10.37).

10.7. Кольорові шуми

Часто використовують термінологію, яка надає сигналам зі степеневим законом спектральної щільності потужності (10.28) назви забарвлених шумів. Прикладом вживання таких назв є рис. 10.3, на якому показано часові ряди білого, рожевого та коричневого шумів (шум генерувався програмою Cool Edit Pro, для наочності окремі відліки часового ряду з'єднано відрізками прямих).

Класичний броунівський процес, для якого $\beta = 2$ ($H = 1/2$, нагадаємо, що $\beta = 2H + 1$; див. формулу (10.28)), називають *коричневим шумом* (рис. 10.3). Основною властивістю цього процесу є відсутність пам'яті: наступні прирости процесу не залежать від попередніх приростів.

Процес, в якому $\beta = 1$ ($H = 0$), називають *рожевим шумом* (рис. 10.3). Часто, кажучи про рожевий шум, мають на увазі випадок, коли $1 < \beta < 2$ ($0 < H < 1/2$). У таких процесах наявна "від'ємна" пам'ять.

Процес, в якому $\beta = 3$ ($H = 1$), називають *чорним шумом*. Часто, якщо йдеться про чорний шум, мають на увазі випадок із $2 < \beta < 3$ ($1/2 < H < 1$). У таких процесах наявна "додатна" пам'ять.

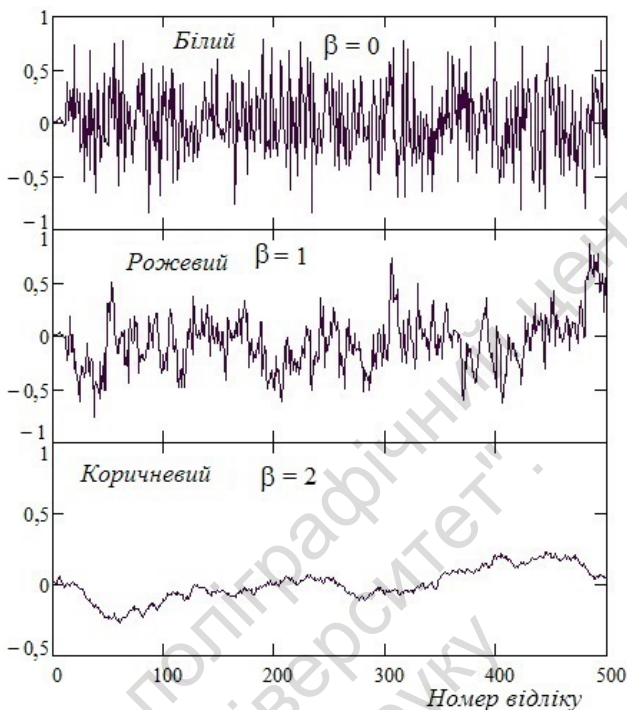


Рис. 10.3. Кольорові шуми (білий, рожевий і коричневий шуми генеровано програмою Cool Edit Pro, для наочності окремі відліки часового ряду з'єднані відрізками прямих)

Окремо виділимо так званий *білий шум* (рис. 10.3). Це стаціонарний у широкому сенсі випадковий процес, значення якого в різні моменти часу некорельовані, тобто його автокореляційна функція має вигляд $K(\tau) = \text{const} \cdot \delta(\tau)$, де $\delta(\tau)$ – дельта-функція. Фактично маємо послідовність незалежних випадкових величин із нульовим математичним сподіванням.

Такий сигнал називають "білим" ($\beta = 0$), тому що спектр потужності процесу являє собою константу $W(\omega) = W_0 = \text{const}$, тобто в ньому рівномірно представлено всі частоти. Тут проведено аналогію з білим світлом, в якому представлено всі частоти

(всі "кольори") видимої частини спектра. Дисперсія білого шуму нескінченна: $\sigma^2 = K(0) = \infty$.

Поширеною моделлю вказаного сигналу є *нормальний білий шум*. Це стаціонарний процес, що має одновимірний нормальний закон розподілу й автокореляційну функцію $K(\tau) = \text{const} \cdot \delta(\tau)$, що дорівнює нулю всюди, крім точки $\tau = 0$. Строго кажучи, це поєднання властивостей суперечливе, оскільки білий шум має нескінченну дисперсію, а нормальний випадковий процес – скінченну. Тим не менш, дещо суперечливе поняття нормально-білого шуму корисне у практичних дослідженнях. Тому вважають, що нормальний білий шум – це процес, який має велику дисперсію, а інтервал часу, на якому його кореляційна функція спадає майже до нуля, дуже малий порівняно з характерними масштабами задачі.

Зазвичай у природі й техніці суто білих шумів нема, оскільки діапазон частот завжди обмежений. Цікаво, що шум біля водоспаду є добрим прикладом природного білого шуму.

Аналог білого шуму у випадку дискретного часу – це послідовність *незалежних однаково розподілених* випадкових величин. Цей процес також часто називають білим шумом. Зазвичай розглядають нормальний одновимірний розподіл, хоча можливий і інший. У випадку дискретного часу дисперсія процесу скінченна, тому він є стаціонарним у широкому сенсі.

Білий шум – це "найбільш непередбачуваний" процес, оскільки відсутня залежність між його послідовними значеннями. Інтегрування білого шуму представляє процес, що являє собою класичний броунівський сигнал. Справді, для сигналу, заданого у вигляді скінченної вибірки часового ряду $x(k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, процедура інтегрування зводиться до побудови накопичувальної

функції $y(i) = \sum_{k=1}^i x(k)$. Тут величини $x(k)$ визначають окремі

прирости процесу (інакше, окремі переміщення частинки, якщо казати про броунівський рух), а $y(i)$ – значення процесу в момент часу $t = i$ (інакше, координату положення частинки у броунівському русі).

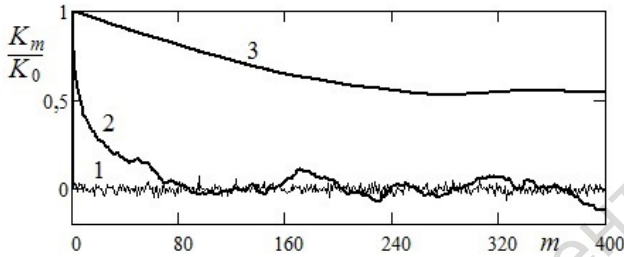


Рис. 10.4. Нормовані автокореляційні функції: 1 – білий шум ($\beta = 0$), 2 – рожевий шум ($\beta = 1$), 3 – коричневий шум ($\beta = 2$)

Кореляційні властивості білого, рожевого і коричневого шумів зображено рис. 10.4 у вигляді графіків нормованої автокореляційної функції часових рядів із рис. 10.3. Розрахунки проводили згідно з формулою

$$\frac{K_m}{K_0} = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} (x(i) - \langle X \rangle)(x(i+m) - \langle X \rangle), \quad (10.40)$$

де N – кількість дискретних відліків у часовому ряді; $m = 0, 1, 2, \dots, M$ – кількість кроків дискретизації, яка характеризує зсув у часі між значеннями випадкового процесу (зазвичай вибирають $M \ll N$). Для показаних на рис. 10.4 розрахунків $N = 3000$, $M = 400$.

Як бачимо з рис. 10.4, відліки в часовому ряді білого шуму (крива 1) зовсім некорельовані. Рожевому шуму (крива 2) притаманна кореляція, причому її знак може змінюватися. Коричневому шуму (крива 3), на вибраному проміжку зміни часового зсуву m , притаманна стабільна додатна кореляція, тобто процес прагне зберігати тенденцію свого розвитку. Рожевий шум можна інтерпретувати як компроміс між повністю некорельованим білим шумом та більш "гладким" коричневим шумом. В цьому випадку про ступінь "гладкості" можна казати лише в лапках, характеризуючи зовнішній вигляд сигналу, адже коричневий шум не є диференційованим процесом. Характерною особливістю процесів, спектри яких близькі до коричневих або чорних шумів, є така: якщо щось трапилося одного разу, то в найближчому майбутньому не слід очікувати якісної зміни ситуації.

Для багатьох часових рядів, які спостерігаються у природі й техніці, значення показника β входить у зазначений діапазон різнокольорових шумів. Описані вище процеси, спектр потужності яких визначається степеневим законом (10.28), є ідеальними зразками статистично самоподібних процесів.

10.8. Аномальна дифузія

Нормальний розподіл (розподіл Гаусса) завжди відігравав центральну роль в теорії імовірностей, оскільки виникає дуже часто як результат впливу множини факторів, внесок будь-якого одного з яких незначний. Центральну граничну теорему застосовують практично в усіх прикладних науках, що робить апарат статистики універсальним.

Центральну граничну теорему можна сформулювати так: якщо випадкові величини незалежні, однаково розподілені і мають скінченну дисперсію, відмінну від нуля, то суми (центровані й нормовані) цих величин збігаються до нормального закону. Теорему використовують у багатьох сферах, в яких ще працювали видатні математики XIX ст., а саме: теорія помилок спостережень, статистична фізика, демографічні дослідження тощо.

Однак існує клас явищ, обумовлених випадковими процесами, в яких порушуються деякі умови застосування центральної граничної теореми. Процеси випадкового перенесення, що не підкоряються класичним законам дифузії (їх називають *аномальною дифузією*), почали активно досліджувати лише в останній чверті минулого століття [25]. Зазначимо, що донині виявлено багато фізичних прикладів аномальної дифузії, тому порушення центральної граничної теореми можна спостерігати не лише "на папері".

Одним із прикладів аномальної дифузії випадкових блукань виявився опис процесів міграції тварин. До недавнього часу вважали, що тварини поведуться подібно класичним броунівським частинкам. Однак пошук їжі завдяки рівномірному дослідженню області проживання навряд чи можна назвати раціональною стратегією виживання. Численні дані останніх років під-

тверджують, що більшість "розумних" тварин використовують стратегію пошуку, згідно з якою процес дифузії з характерною локалізацією пошуку, чергується з рідкими довгими стрибками. Саме так рухаються акули і бджоли в пошуках їжі. Вказані дані говорять про те, що подібний рух тварин обумовлено раціональним пошуком їжі під час дослідження території з невідомим розподіленням ресурсу.

Броунівський рух описує випадковий рух частинок у рідинах, проте ця модель працює тільки тоді, коли рідина статична або перебуває в рівновазі. В реальних умовах рідини часто містять частинки, які рухаються самі по собі, наприклад крихітні плаваючі мікроорганізми. Ці самохідні плавці можуть викликати рух або перемішування рідини, що виводить її з рівноваги.

Експерименти показали, що нерухомі "пасивні" частинки можуть проявляти дивні петлеподібні рухи у процесі взаємодії з "активними" рідинами, що містять плавців. Такі рухи не узгоджуються зі звичайною поведінкою частинок, що описується броунівським рухом.

Відомо багато інших прикладів, зокрема й дифузія в середовищі з розвинутою турбулентністю, поширення випромінювання в розрідженій плазмі, перенесення космічних променів тощо.

Детальний опис явища аномальної дифузії виходить за межі нашого посібника. Надамо лише деякі загальні відомості про явище аномальної дифузії.

Основна властивість броунівського руху в однорідному середовищі – це гауссова форма дифузної хмарки і зростання її характерного розміру згідно із законом $t^{1/2}$. 1926 р. Річардсоном¹ [78] виявлено, що в умовах турбулентного середовища дифузона хмарка розпливається за законом $t^{3/2} = t\sqrt{t}$, тобто значно швидше, ніж за класичної дифузії. Пізніше відхилення від класичних законів міграції були виявлені й у інших системах. Цей клас явищ, як уже зазначалося, названо аномальною дифузією.

У статті [25] описано яскраву тематичну замальовку, яку представимо далі по тексту. Наша інтуїція "налаштована" на існування певних масштабів у навколишньому світі. Фізіо-

¹ Річардсон Льюїс Фрай (1881–1951) – англійський математик і фізик.

логи, психологи, антрополози стверджують, що фізичні, інтелектуальні й інші характеристики людей прекрасно описуються кривою Гаусса

$$f(x) \sim \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (10.41)$$

Нехай $f(x)$ – щільність розподілу якої-небудь ознаки в популяції (наприклад, зросту), a – середнє значення, σ^2 – дисперсія. Життєва мудрість, що відображається виразом (10.41), стверджує: "Чудес не буває".

Оскільки зріст розподілено за законом Гаусса (10.41), то функція $f(x)$ спадає дуже швидко (за 3σ виходить не більше 0,3 % випадків), і ми з легкістю можемо нехтувати ймовірністю зустрічі як із 2,5-метровим гігантом, так і з 30-сантиметровим карликом. Очевидно, тут враховано характерний розмір об'єкта a і характерну міру середнього відхилення від нього σ .

Проте так буває далеко не завжди. Виявилось, що в багатьох випадках у нелінійних системах відбуваються масштабно-інваріантні процеси, які не мають власних характерних величин. Їхнім статистичним виразом є степеневі розподіли ймовірності. Саме такі закономірності типові і для фракталів (див. розд. 3).

Знову звернемося до випадкових блукань частинки. Нехай ймовірність стрибка частинки на відстань x визначається щільністю розподілу з повільно спадним при $x \rightarrow \infty$ степеневим "хвостом". Як приклад розглянемо розподіл

$$f(x) = \frac{\gamma}{x^{\gamma+1}} \quad (x \geq 1, \quad 0 < \gamma \leq 2). \quad (10.42)$$

Головною особливістю розподілу вигляду (10.42) є розбіжність середнього квадрата зміщення (тобто дисперсії)

$$\overline{X^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_1^L x^2 f(x) dx = \infty \quad \text{при} \quad 0 < \gamma \leq 2 \quad (10.43)$$

і навіть нескінченність середнього значення (тобто математичного сподівання)

$$\overline{X} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_1^L x f(x) dx = \infty \quad \text{при} \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (10.44)$$

Нагадаємо, що $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ збігається, якщо $p > 1$, і прагне до нескінченності, якщо $p \leq 1$. Експонента на нескінченності прямує до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію; $\int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx < \infty$.

Як бачимо, наявність степеневих хвостів у законі щільності розподілу переміщення частинок (10.42) приводить до кардинальної відмінності від класичної дифузії, для якої хвіст розподілу швидко спадає за експоненціальним законом. Тільки при $\gamma > 2$ дисперсія переміщення частинки скінченна, і ми повертаємося до класичної дифузії. З огляду на це, хвости степеневого розподілу називають "*важкими хвостами*".

Однак такі нескінченності не є перешкодою для реалізації подібних розподілів на практиці (потрібно, щоб збігався інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ при $\gamma > 0$).

Як ми розуміємо, наявність степеневих хвостів у законі приводить до структури з фрактальними властивостями. У цьому разі масштабно-інваріантні системи поведуться антиінтуїтивним, парадоксальним чином. Така поведінка є набагато ближчою не до нашої звичної реальності, а до красивого і страшного світу, описаного в казках "1001 ніч". Імовірність чудес у цьому світі достатньо велика, тому її варто взяти до уваги. Не можна нехтувати ймовірністю зустрічі з джином, девом або іфритом, зріст яких може перевищувати десятки, а то й сотні метрів. І одна така зустріч може повністю змінити життя героїв [25].

Виявилось, що в області природних і техногенних катастроф статистика у великому інтервалі масштабів описується степеневими залежностями. Характерні вони і для багатьох соціальних систем. Серед прикладів згадаємо про землетруси, повені, лісові пожежі, біржові крахи, збитки від аварій на атомних електростанціях.

Із чим пов'язані такі степеневі розподіли й антиінтуїтивна поведінка подібних об'єктів? Справді, звичний нам розподіл Гаусса виникає в центральній граничній теоремі. Згідно з нею

розподіл однаково розподілених незалежних випадкових величин зі скінченними математичним сподіванням і дисперсією після відповідного нормування прямує до гауссової кривої. Проте, якщо деяку умову в центральній граничній теоремі усунути, то можуть виникнути випадкові величини з іншими законами розподілу. Виявляється, що такі розподіли випадкових величин існують і носять назву *стійких розподілів*.

10.9. Стійкі процеси Леві

Основну теорему для *стійких розподілів* доведено 1936 р. за спільних зусиль П. Леві¹ й О. Хінчина [62]. Центральну граничну теорему було узагальнено, з неї усунено умову існування дисперсії. На відміну від нормального закону, щільність розподілу стійких випадкових величин не має явного виразу (за рідкісним винятком). Усе що відомо про вказані величини, це *характеристична функція* випадкової величини X , тобто математичне сподівання комплексної величини $\exp(ikX)$, або іншими словами, перетворення Фур'є від щільності розподілу:

$$\psi_X(k) = M[\exp(ikX)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) f(x) dx. \quad (10.45)$$

Наведемо теорему. *Якщо випадкові величини незалежні, однаково розподілені, то суми цих величин збігаються до стійкого закону*. Іншими словами, стійкі розподіли це ті й тільки ті, які можуть виникати як граничні для сум незалежних однаково розподілених величин.

Випадкова величина X буде стійкою тоді й тільки тоді, коли логарифм її характеристичної функції можна представити так [24, 62]:

$$\ln \psi_X(k) = \sigma \left(i\mu k - |k|^\alpha + ik\nu(k, \alpha, \beta) \right), \quad (10.46)$$

¹ Леві Поль П'єр (1886–1971) – французький математик.

$$\text{де } v(k, \alpha, \beta) = \begin{cases} |k|^{\alpha-1} \beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2), & \alpha \neq 1, \\ -2\beta \ln|k|/\pi, & \alpha = 1, \end{cases}$$

$$0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < \infty.$$

Щільність розподілу стійкої випадкової величини X зазвичай позначають у вигляді $S(x|\alpha, \beta, \sigma, \mu)$. Як бачимо, клас стійких розподілів – це 4-параметрична сім'я з параметрами: α – характеристичним показником, β – параметром асиметрії, σ – параметром масштабу, μ – параметром положення.

Параметр α характеризує швидкість спадання функції щільності розподілу стійкого закону $f(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Це пов'язано з тим, що випадкова величина X має моменти лише порядку p , де $0 < p < \alpha < 2$, а при $\alpha = 2$ випадкова величина є нормально розподіленою випадковою величиною зі скінченною дисперсією. Параметр α називають також *індексом стійкості*, він визначає, наскільки виражена важкість хвоста розподілу. Чим менше α , тим важчим буде хвіст.

Щоб підкреслити роль і значення параметра α , поряд із терміном "стійкий" часто використовують термін " α -стійкий".

Параметр β характеризує ступінь асиметрії розподілу. Якщо $\beta = 0$, то розподіл симетричний. Коли $\beta > 0$ ($\beta < 0$), розподіл зміщено ліворуч (праворуч), він стає асиметричнішим, коли $|\beta| \rightarrow 1$.

Масштаб розподілення визначається параметром σ , по суті, це міра дисперсії розподілу. Параметр μ – це параметр місцеположення (локалізація, зсув), у деяких конкретних випадках він збігається з математичним сподіванням.

Отже, при $\alpha = 2$ маємо розподіл Гаусса і тільки в цьому випадку наявні моменти великих порядків. У випадку $\alpha < 2$ дисперсія не визначена, а при $\alpha < 1$ не визначено і математичне сподівання.

У ХХ ст. розроблено ґрунтовну теорію стійких величин і процесів, що отримала загальну назву *процесів Леві* (або *аномальна дифузія Леві*). Характерною властивістю розподілу $f(x)$ цих процесів є "важкість (товщина, ширина) хвоста", яка виражається в повільному степеневому спаданні $f(x) \sim |x|^{-(1+\alpha)}$ при $|x| \rightarrow \infty$ ($0 < \alpha < 2$) порівняно зі швидким (експоненціальним)

спаданням щільності розподілу Гаусса $f(x) \sim \exp\left(-x^2 / (2\sigma^2)\right)$.

Тобто ймовірність великих флуктуацій (відхилень значення x від середнього значення) для стійких розподілів не є такою, якою можна нехтувати, як це відбувається для розподілів $f(x)$ зі скінченною дисперсією.

Стійкі закони (10.46) не є єдиними, що мають "важкі хвости", наприклад, до таких належать гіперболічні закони. Проте особлива роль стійких розподілів полягає у тому, що ці й лише ці закони можуть бути границею розподілу сум незалежних однаково розподілених випадкових величин.

Отже, основна властивість випадкової величини з "важким хвостом" полягає в тому, що вона проявляє сильну змінність: вибірка з такої випадкової величини являє собою переважно відносно невеликі значення, проте вона також утримує і достатню кількість дуже великих значень.

Випадковий процес, який відповідає співвідношенню (10.46), називають α -стійким процесом з незалежними приростами (інакше, α -стійкий процес Леві). Він є самоподібним із показником Херста $H = 1/\alpha$, тобто виконується рівність [27, 50]:

$$X(t) \triangleq b^{-1/\alpha} X(bt), \quad b > 0, \quad t > 0. \quad (10.47)$$

Формула (10.47) визначає важливу властивість масштабної інваріантності процесу або, іншими словами, випадковий процес $X(t)$ – самоподібний із параметром $H = 1/\alpha$, тобто процес $b^{-1/\alpha} X(bt)$ визначається тими самими скінченновимірними законами розподілу, що і процес $X(t)$. Класичний броунівський процес є окремим випадком α -стійкого процесу, якщо $\alpha = 2$.

10.10. Класифікація самоподібних процесів

α -стійкий процес із незалежними приростами є узагальненням класичного броунівського процесу. У даному випадку закон Гаусса розподілу приростів узагальнюється таким чином,

що дозволяє доповнити властивість самоподібності іншою важливою властивістю – "важкими хвостами" розподілів.

Іншим узагальненням класичного броунівського процесу, як ми вже знаємо, є фрактальний броунівський процес (див. підрозд. 10.2). У цьому випадку знімається вимога незалежності приростів процесу.

Розглянуті моделі класичного броунівського процесу, фрактального броунівського процесу й α -стійкого процесу Леві є окремими випадками процесу, що має назву *фрактальний процес Леві*. Фрактальний процес Леві характеризується всіма трьома властивостями: самоподібністю, "важкими хвостами" та довготерміновою залежністю. Більше того, для нього прирости процесу не лише самоподібні, але й залежать один від одного, маючи одночасно "важкі хвости". Роль, яку відіграє фрактальний процес Леві серед стійких процесів, подібна до ролі, яку відіграє фрактальний броунівський процес серед гауссівських процесів.

Для наочності описану класифікацію самоподібних процесів представлено у вигляді таблиці.

Таблиця

Наявність залежності приростів	Гауссові прирости, відсутні "важкі хвости"	α-стійкі прирости, наявні "важкі хвости"
Відсутні залежності приростів	Класичний броунівський процес	α -стійкий процес Леві
Наявні залежності приростів	Фрактальний броунівський процес	Фрактальний процес Леві

Числовими мірами властивостей (самоподібність, важкі хвости, довготривала залежність) розглянутих процесів є індекс стійкості α , показник Херста H і автокореляційна функція $K(\tau)$. Для моделі класичного броунівського процесу маємо

$$\alpha = 2, \quad H = 1/2, \quad K(\tau) = 0; \quad (10.48)$$

для моделі узагальненого (фрактального) броунівського процесу
 $\alpha = 2$, $0 < H < 1$, $K(\tau) \sim \tau^{-(2-2H)}$; (10.49)

для α -стійкого процесу Леві

$$0 < \alpha \leq 2, H = 1/\alpha, K(\tau) = 0. \quad (10.50)$$

Очевидно, що параметри H , α , $K(\tau)$ для фрактального процесу Леві взаємно пов'язані між собою. Визначення цієї залежності між зазначеними параметрами обговорено в роботі [50].

10.11. Генерація α -стійких випадкових величин

Як уже зазначалося, складність практичного застосування α -стійких випадкових величин полягає в тому, що вони не мають явного виразу для щільності розподілу, за винятком розподілів:

Гаусса – $S(x|2,0,1,0)$, Коші – $S(x|1,0,1,0)$ і

Леві – $S(x|1/2,1,1,0)$.

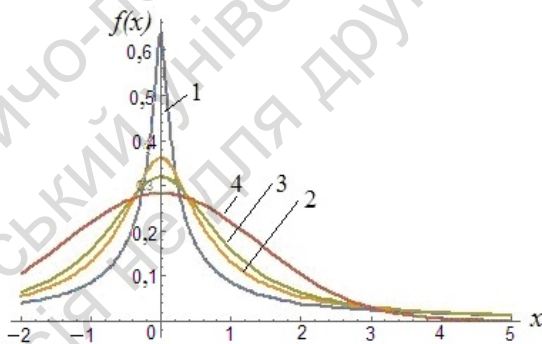


Рис. 10.5. Графіки щільностей стійких розподілів для різних значень параметра α : $S(x|\alpha,0,1,0)$ для $\alpha = 0,5, 0,8, 1, 2$ (відповідно криві 1, 2, 3, 4)

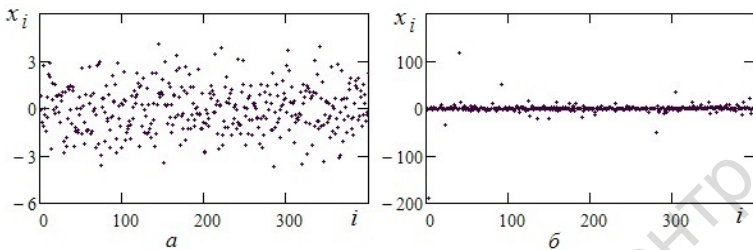


Рис. 10.6. Приклади стійких випадкових величин, $\beta = \mu = 0$, $\sigma = 1$: a – якщо $\alpha = 2$, b – якщо $\alpha = 1$

Однак, Дж. Нолану [73, 41] вдалося створити модуль `StableDistribution` у системі `Mathematica`, який дозволяє обчислювати значення щільності розподілу й генерувати стійкі випадкові величини. На рис. 10.5 зображено приклади графіків щільності стійких розподілів для різних значень параметра α , а на рис. 10.6 приклади стійких випадкових величин із параметрами: $\beta = \mu = 0$, $\sigma = 1$, $\alpha = 2$ (рис. 10.6, a) і $\alpha = 1$ (рис. 10.6, b). Зверніть увагу на шкалу величин уздовж осі ординат на рис. 10.6, a (розподіл Гаусса) і рис. 10.6, b . На рис. 10.6, b відмітимо наявність достатньо великих відхилень випадкової величини x від середнього значення.

Маючи вибірки стійких випадкових величин, можна чисельно моделювати процеси дифузії. Для цього, розглядаючи такі вибірки, як набори проєкцій окремих переміщень частинки на осі декартової системи координат, обчислюємо накопичувальну суму, яка являтиме собою траєкторію руху частинки (або її проєкцію на відповідну вісь системи координат).

На рис. 10.7, a , b показано x -координати випадкових блукань частинки, що, по суті, є прикладами випадкових процесів (рис. 10.7, a – процес Гаусса, рис. 10.7, b – процес Леві). На рис. 10.7, $в$, $г$ показано двовимірні траєкторії цих випадкових блукань. Кількість переміщень частинки становила 4000.

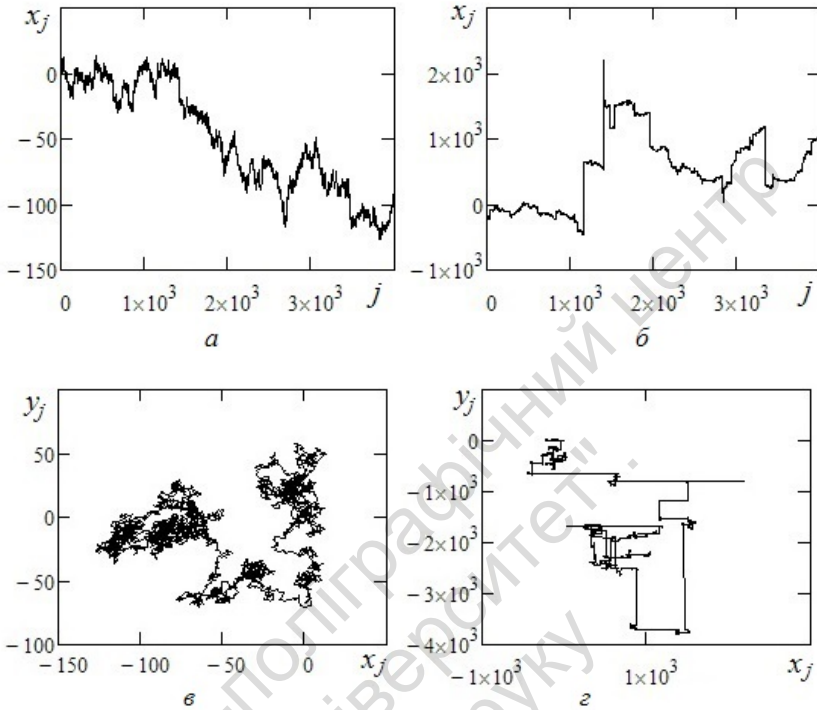


Рис. 10.7. Числове моделювання процесів дифузії:

a, b – x -координати випадкових блукань;

v, z – траєкторії випадкових блукань;

a, v – класична дифузія, $S(x|2,0,1,0)$;

b, z – аномальна дифузія, $S(x|1,0,1,0)$

Як бачимо, траєкторія процесу Леві не є неперервною, на відміну від траєкторії процесу Гаусса. Траєкторія частинок, що виконують рухи Леві, характеризується розривами першого роду¹, які називають *польотами Леві*. Амплітуда стрибків (розривів)

¹ Якщо в деякій точці обидві односторонні границі існують і скінченні, то таку точку називають *точкою розриву першого роду*. До точок розриву першого роду належать усунні розриви і стрибки. Якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або не є скінченною величиною, то таку точку називають *точкою розриву другого роду*.

залежить від параметра α : чим меншим є α , тим більші розриви. В режимі аномальної дифузії стрибок частинки відбувається теоретично на "нескінченну" відстань, тому дифузія проходить швидше за класичний броунівський рух. Зважаємо на те, що дисперсія просторового розподілу теоретично нескінченна і тому не може бути характерним розміром дифузної хмарки.

За аномальної дифузії траєкторія руху частинки суттєво відрізняється від класичної броунівської траєкторії, яка прагне заповнити двовимірну область (рис. 10.7, в). Частинка не прагне "замалювати" всю площину (рис. 10.7, з), а "потупцювавши" якийсь час на місці, зрідка здійснює стрибки на досить великі відстані, виконуючи польоти Леві. У результаті рисунок блукання складається із щільно заштрихованих *кластерів*, пов'язаних далекими стрибками. Причому кожен із кластерів складається із сукупності кластерів так, що утворюється ієрархічна структура із самоподібних кластерів. Як виявляється, значення α визначає фрактальну розмірність множини кластерів. Нагадаємо, що фрактальна розмірність траєкторії класичного броунівського руху дорівнює 2 (див. підрозд. 10.2).

Зменшення параметра α призводить до збільшення розріджених областей фрактальної множини, які обумовлені стрибками частинки у процесі польотів Леві. Ілюстрацією таких стрибків є рис. 10.8, де зображено траєкторії випадкових блукань для двох значень параметра α , а саме: верхній ряд – для $\alpha = 1,7$, нижній – для $\alpha = 0,8$. Рисунки ліворуч – повна траєкторія, кількість переміщень частинки дорівнює 10^5 ; рисунки праворуч – фрагмент траєкторії. Як бачимо, траєкторії випадкових блукань для різних значень параметра α мають суттєву відмінність (зверніть увагу на діапазон зміни величин на осях абсцис і ординат).

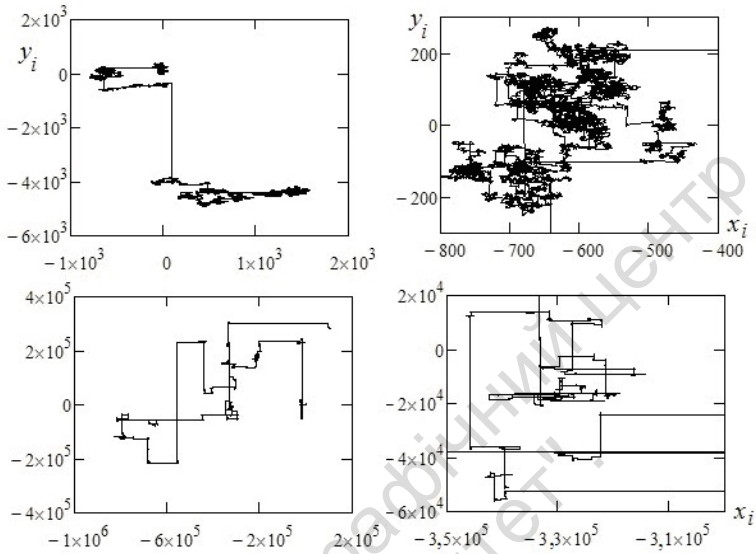


Рис. 10.8. Траєкторії випадкових блукань:
 верхній ряд – для $\alpha = 1,7$, нижній ряд – для $\alpha = 0,8$;
 на рисунках ліворуч – повна траєкторія;
 на рисунках праворуч – фрагмент траєкторії

РОЗДІЛ 11

МОНОФРАКТАЛЬНИЙ І МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Традиційний підхід до вивчення випадкових процесів полягав у виділенні низькочастотного "сигналу" і високочастотного "шуму". Вже в самій термінології ідеться про те, що "шум" – це щось зайве, а ось згладжену, низькочастотну складову слід вивчати, оскільки це і є "сигнал". Аналіз гладких, інакше кажуть трендових¹, складових сигналів безумовно важливий. Проте, як виявилось, саме структура "шуму" дала принципово нову і неочевидну (приховану) інформацію, пов'язану зі складною масштабною природою процесу.

Укажемо на особливості, що супроводжують аналіз шумової складової сигналу.

1) Шумова складова сигналу може бути замаскована сильними зовнішніми трендами, що істотно ускладнює фрактальний аналіз сигналу.

2) Для випадкових процесів досить типовими є степеневі залежності в поведінці автокореляційної функції або спектральної щільності потужності. Характеристика закономірностей втрати кореляцій важлива під час проведення аналізу різних систем, оскільки дозволяє зробити висновки про наявність та особливості "довготривалої пам'яті" в динаміці системи. Наприклад, такий аналіз є математичною основою в задачах діагностики функціональних порушень в структурі серцевого ритму. Але на практиці проведення відповідних досліджень ускладнюється через дві причини: перша – розрахунок автокореляційної функції на великих відрізках часу може супроводжуватися суттєвими похибками, друга – сигнал, що реєструється в експерименті, може мати коротку тривалість.

¹ Трендом (або тенденцією) називають невідповідну складову часового ряду, яка повільно змінюється і на яку можуть накладатися випадкові коливання.

3) Природні випадкові процеси мають вигляд дуже нерегулярних функцій. Оскільки характер сингулярності випадкового сигналу в різні моменти часу може відрізнятись, то його опис не можна виконати за допомогою лише одного параметра. Тому бажано використовувати апарат мультифрактального аналізу як інструмент дослідження структури таких сигналів. Необхідно тільки адаптувати цей інструмент для випадкових процесів.

Спочатку звернемося до перших досліджень фрактальних властивостей часових рядів, які пов'язані з іменем Херста (про нього йшлося в підрозд. 10.3). По суті, Херст відкрив новий статистичний метод, який зараз називають *методом нормованого розмаху* або *методом R/S-аналізу*.

11.1. Статистичний феномен самоподібності Херста

Херст прожив більше 60 років в Єгипті, де брав участь у гідрологічних проєктах, пов'язаних з Нілом. 1951 р. він опублікував роботу [59], в якій описав (виявлений ним експериментально) неочікуваний ефект у поведінці флуктуацій річної водності Нілу й деяких інших річок. Суть ефекту була така.

Нехай x_i , $i = 1, 2, \dots, N$, величини річного рівня (скажімо, Нілу в якійсь його частині) за N послідовних років. У вказаному ряді послідовно виділяємо відрізки цього ряду x_1, x_2, \dots, x_n , де індекс n набуває значення від деякої величини n_{\min} до N . Величина n_{\min} визначає найменшу довжину відрізка, тобто найменшу кількість виділених дискретних значень ряду.

Для кожного відрізка ряду обчислюємо середню величину

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11.1)$$

і середньоквадратичне відхилення

$$S(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}(n))^2} . \quad (11.2)$$

У формулах (11.1), (11.2) величина n із набору $n = n_{\min}, \dots, N$ вказує на конкретний відрізок ряду.

Для кожного відрізка ряду будемо нову величину, яка, по суті, є *накопиченим відхиленням* величини x_i від середнього $\bar{x}(n)$:

$$y_p(n) = \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x}(n)), \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (11.3)$$

Розмахом $R(n)$ для залежності $y_p(n)$ називають величину максимальної зміни $y_p(n)$ за інтервал часу, який визначається величиною n :

$$R(n) = \max_{1 \leq p \leq n} y_p(n) - \min_{1 \leq p \leq n} y_p(n). \quad (11.4)$$

Ця характеристика відрізняється від розмаху часової послідовності x_p , що дорівнює

$$\max_{1 \leq p \leq n} x_p - \min_{1 \leq p \leq n} x_p. \quad (11.5)$$

Замість неї вибрана величина, яка враховує накопичення $y_p(n)$, $p = 1, 2, \dots, n$, і характеризує *змінність* величини x відносно середнього значення. Для опису змінності зручнішою є нормована безрозмірна характеристика

$$\begin{aligned} \frac{R(n)}{S(n)} &= \frac{\max_{1 \leq p \leq n} y_p(n) - \min_{1 \leq p \leq n} y_p(n)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}(n))^2}} = \\ &= \frac{\max(0, y_1, y_2, \dots, y_n) - \min(0, y_1, y_2, \dots, y_n)}{S(n)}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Херст назвав це відношення *нормованим розмахом*. Спираючись на великий фактичний матеріал спостережень за стоками Нілу [59] у період 622–1469 рр. (тобто за 847 років), Херст установив емпіричний закон:

$$\frac{R(n)}{S(n)} = \left(\frac{n}{2} \right)^H. \quad (11.7)$$

Параметр H , який нині називають *показник Херста*, виявився рівним приблизно 0,7. Аналогічний результат Херст отримав і для інших річок. Цей результат був оцінений Херстом як не-

сподіваний, оскільки очікуване ним значення H мало б становити $1/2$ (згадайте модель броунівського руху, див. підрозд. 10.1 і 10.2).

Чому ж виник такий результат? Як ми тепер розуміємо залежність (11.7) з $H \neq 1/2$ може виникнути навіть у випадку нормально розподілених величин x_1, x_2, \dots , але *залежних!* (див. підрозд. 10.4).

Спостереження Херста стали відправними для Мандельброта. Як виявилось, самоподібність типу (11.7) властива різноманітним системам із нелінійною динамікою, які зустрічаються в природі (фізичні, геофізичні, біологічні, економічні тощо). Саме ця властивість самоподібності відіграє центральну роль у фрактальній геометрії, а її засновник Мандельброт назвав свою книгу "Фрактальна геометрія природи" [27], підкреслюючи тим самим універсальність самоподібності у природі.

Розглянемо два приклади обчислення показника Херста методом нормованого розмаху. За перший приклад візьмемо функцію Веєрштрасса – Мандельброта (3.13) з параметрами $d = 1,5$, $b = 1,5$. Нагадаємо, що параметр d відповідає фрактальній розмірності D графіка функції. Тому розрахунковий показник Херста повинен бути близьким до значення $H = 2 - D = 0,5$. Щоб відтворити цей результат, як ряд x_1, x_2, \dots варто взяти ряд пристівів функції Веєрштрасса – Мандельброта.

Для другого прикладу використовуємо реальні статистичні дані довжини кроків людини за нормальної ходи, які визначать ряд x_1, x_2, \dots . На рис. 11.1 ординати точок відповідають довжині кроку людини (в метрах) для перших 200 кроків. Середнє значення довжини кроку дорівнює 1,108 м, середньоквадратичне відхилення 0,017 м. У першому і другому прикладах кількість даних становила 3250.

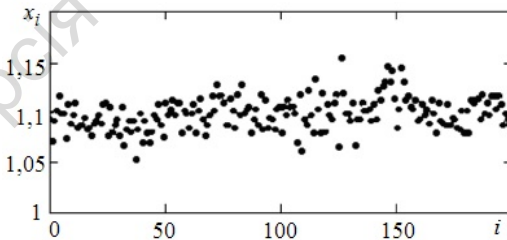


Рис. 11.1. Дані про довжину кроків людини за нормальної ходи

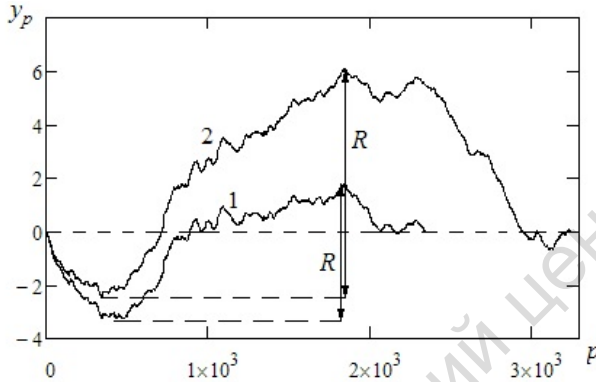


Рис. 11.2. Накопичене відхилення довжини кроків людини за нормальної ходи x_i від середнього $\bar{x}(n)$ за $n = 2340$ кроків (крива 1) і $n = 3237$ кроків (крива 2)

Як приклад, на рис. 11.2 показано накопичене відхилення довжини кроків людини за нормальної ходи x_i від середнього $\bar{x}(n)$ за $n = 2340$ кроків (крива 1) і $n = 3237$ кроків (крива 2). Для кожної кривої визначено розмах R .

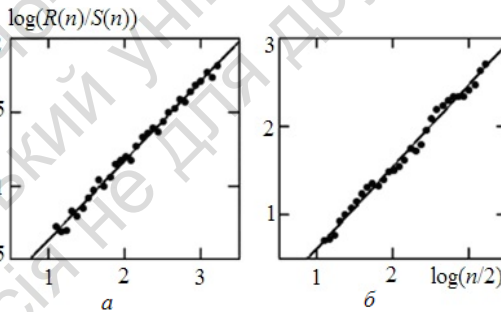


Рис.11.3. Залежність $\log(R(n)/S(n))$ від $\log(n/2)$ та графік лінійної регресії:
 a – функція Веєрштрасса – Мандельброта, $d = 1,5$, $b = 1,5$;
 \bar{b} – дані довжини кроку людини за нормальної ходи

На рис. 11.3 показано залежність $\log(R(n)/S(n))$ від $\log(n/2)$ та відповідний графік лінійної регресії для функції Веєрштрасса – Мандельброта (рис. 11.3, а), а також для даних про довжину кроку людини за нормальної ходи (рис. 11.3, б). Маємо чудову ілюстрацію лінійної залежності в логарифмічних координатах розрахункових даних, тобто степеневий закон (11.7) справді наявний у розглянутих двох прикладах.

Згідно з графіками лінійної регресії отримуємо такі розрахункові значення показника Херста:

- 1) для функції Веєрштрасса – Мандельброта $H = 0,540$,
- 2) для даних про ходу людини $H = 0,931$.

Як видно, розрахункове значення показника Херста для функції Веєрштрасса – Мандельброта є дещо завищеним. Імовірно, це зауваження справедливе і для даних про ходу людини. Проте все ж, часовий ряд даних про довжину кроку людини можна характеризувати як ряд із довготривалою залежністю даних. Тобто за нормальної ходи у людини є тенденція до збереження довжини кроку.

11.2. Метод безтрендового флуктуаційного аналізу

Подальшим розвитком R/S -аналізу став *метод безтрендового флуктуаційного аналізу* (БФА), інакше, *метод аналізу флуктуацій після видалення масштабно-залежних трендів* [76].

Основна ідея флуктуаційного аналізу полягає в тому, щоб перетворити спадну автокореляційну функцію на деяку зростаючу функцію, що буде менш чутливою до статистичних похибок. Вказаний аналіз застосовують саме з метою виявлення ефектів *довготривалих кореляцій* у досліджуваному процесі.

Алгоритм методу БФА зводиться до таких кроків [76].

1. Нехай сигнал, який вивчається, представлено у вигляді скінченної вибірки випадкового процесу, тобто у вигляді часового ряду $x(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Тут цілочислові відліки відповідають певним моментам часу, в яких фіксувалися значення сигналу, розділені однаковими інтервалами часу. З цього ряду форму-

ється так званий *флуктуаційний профіль*, який являє собою накопичувальну суму

$$y(i) = \sum_{k=1}^i (x(k) - a), \quad (11.8)$$

де a – математичне сподівання. По суті використовують ідеологію *одновимірнього випадкового блукання*, яке є основою побудови моделі руху броунівської частинки. Якщо початковий ряд уже являє собою накопичувальну суму, то вказаний крок пропускають.

2. Отриманий ряд $y(i)$ розділяють на неперетинні інтервали $y(j, i)$, що містять однакову кількість точок. Значення j вказує на конкретний інтервал ряду. Кількість таких інтервалів дорівнює цілій величині $N_s = [N/s]$, тобто $j=1, 2, \dots, N_s$. Оскільки довжина ряду не завжди кратна обраній величині s , то в загальному випадку остання ділянка містить кількість точок, меншу ніж s . Для обліку цього залишку варто повторити процедуру поділу на інтервали, починаючи з протилежного кінця ряду. В результаті повна кількість інтервалів, що мають довжину s , складе $2N_s$.

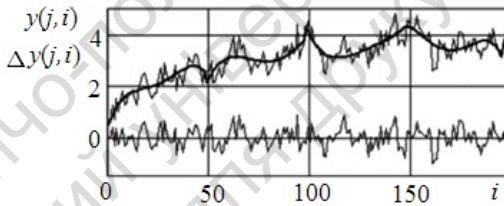


Рис. 11.4. Ілюстрація до формули (11.9) для функції Веєрштрасса – Мандельброта; довжина інтервалу $s = 49$

3. Для кожного з інтервалів потрібно знайти локальний тренд $\tilde{y}(j, i)$. Тут найпростіше використовувати метод найменших квадратів, представляючи тренд $\tilde{y}(j, i)$ поліномом певного степеня. Визначаємо відхилення функції $y(j, i)$ від локального тренда, тобто, інакше кажучи, флуктуації функції $y(j, i)$ відносно локального тренда $\tilde{y}(j, i)$:

$$\Delta y(j, i) = y(j, i) - \tilde{y}(j, i). \quad (11.9)$$

Як приклад на рис. 11.4 показано вказану процедуру в застосуванні до функції Веерштрасса – Мандельброта, $d=1,8$, $b=1,5$. Тут початковий ряд $x(k)$, $k=1,2,\dots,N$, є рядом приростів функції, оскільки флуктуаційний профіль являє собою саму функцію Веерштрасса – Мандельброта. На рис. 11.4 показано графіки флуктуаційного профілю (тонка лінія), лінії локальних трендів (жирна лінія) у вигляді поліномів четвертого порядку і графік відхилення флуктуаційного профілю від локальних трендів (нижня крива); довжина інтервалу $s=49$.

4. Далі визначимо величину, яка буде представляти собою міру флуктуацій $\Delta y(j,i)$ на виділеному інтервалі (j,s) . Позначимо її через $\mu(j,s)$, параметр j визначає конкретний інтервал, величина s – його довжину. Визначимо міру $\mu(j,s)$ як дисперсію вибірки $\Delta y(j,i)$ для кожного з інтервалів:

$$\mu(j,s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (\Delta y(j,i))^2. \quad (11.10)$$

5. Усреднюючи значення цих мір для інтервалів даної довжини s , отримуємо *флуктуаційну функцію*

$$F(s) = \sqrt{\frac{1}{2N_s} \sum_{j=1}^{2N_s} \mu(j,s)}. \quad (11.11)$$

Флуктуаційна функція є аналогом величини розмаху $R(n)$ в методі R/S -аналізу.

6. Якщо досліджуваний ряд зводиться до самоподібної множини, то флуктуаційна функція представляється степеневою залежністю

$$F(s) \sim s^H. \quad (11.12)$$

Будуємо залежність $F(s)$ у подвійних логарифмічних координатах. Нахил лінії регресії визначає показник H .

Згідно з формулою (10.19), середньоквадратичне відхилення приростів узагальненого броунівського сигналу пропорційне $(t_2 - t_1)^H$, де стали H називають показником Херста. А тепер, звернувшись до формул (11.10), (11.11), констатуємо, що флуктуаційна функція $F(s)$ визначає середньоквадратичне відхилення міри флуктуацій $\Delta y(j,i)$ функції $y(j,i)$ для інтервалів

даної довжини s . Доходимо висновку, що стала H у формулі (11.12), по суті, є показником Херста для даного ряду.

Значимо що, флуктуаційна функція втрачає статистичну інформативність для величин $s > N / 4$, оскільки кількість інтервалів стає дуже малою. Також варто виключити малі інтервали $s < 10$. Досліджуючи залежність флуктуаційної функції $F(s)$ від величини s , виділяємо діапазон зміни довжини інтервалу, в якому проявляється скейлінг (11.12). Якщо цей діапазон масштабів досить великий, то опис фрактальних властивостей часового ряду є виправданим.

Знову звернемося до розрахунку показника Херста функції Веерштрасса – Мандельброта та часового ряду даних про ходу людини (див. підрозд. 11.1). Лінії трендів формувалися поліномами четвертого порядку. Кількість інтервалів розбиття дорівнювала 30. Довжина мінімального інтервалу відліків становила 25, а максимального – 812 за кількості даних – 3250.

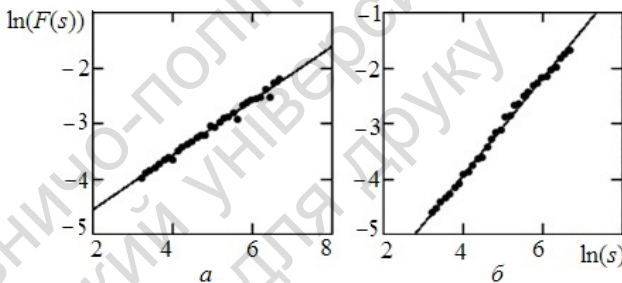


Рис. 11.5. Залежність $\ln(F(s))$ від $\ln(s)$ та графік лінійної регресії:

a – функція Веерштрасса – Мандельброта, $d = 1,5$, $b = 1,5$;

b – дані довжини кроку людини за нормальної ходи

На рис. 11.5 показано залежність $\ln(F(s))$ від $\ln(s)$ та відповідний графік лінійної регресії для функції Веерштрасса – Мандельброта (рис. 11.5, a), а також для даних про довжину кроку людини за нормальної ходи (рис. 11.5, b). Відповідно до графіків лінійної регресії отримуємо такі розрахункові значення показника Херста:

- 1) для функції Веерштрасса – Мандельброта $H = 0,493$,
- 2) для даних про нормальну ходу людини $H = 0,871$.

З огляду на обчислення показника Херста для функції Веєр-штрасса – Мандельброта, метод БФА дає точніший розрахунок, ніж метод нормованого розмаху (див. підрозд. 11.1).

11.3. Мультифрактальний аналіз сигналів

Для кількісного опису фракталів достатньо однієї величини – фрактальної розмірності або показника скейлінгу. Кожна з них описує збереженість геометрії або статистичних характеристик у разі зміни масштабу. Проте у фізиці, хімії, біології, економіці й інших науках зустрічаємо багато явищ, які потребують розширення поняття фрактала на складні структури з більше ніж з одним показником скейлінгу.

В розд. 3 ми познайомилися з концепцією мультифрактала у застосуванні до опису та кількісної оцінки складного розподілу міри на множині, яка є носієм цієї міри. Однак фрактальні об'єкти зустрічаються у природі також у вигляді різноманітних сингулярних, тобто дуже нерегулярних функцій. Це дозволяє використовувати апарат мультифрактального аналізу як інструмент дослідження сигналів складної структури. Необхідно лише адаптувати цей інструмент до випадкових процесів.

Обчислення однієї величини для аналізу складного сигналу дозволяє охарактеризувати його за умови, що сигнал є однорідною фрактальною функцією, тобто демонструє лише один тип сингулярної поведінки, який є незмінним у часі. Така ситуація є ідеалізацією реальних процесів, що спостерігаються у природі. Оскільки характер сингулярності сигналу в різні моменти часу може відрізнятися, його описати не можна за допомогою лише одного параметра. Тому мультифрактальний аналіз, який дозволяє провести локальний аналіз складного сигналу, є інформативнішим підходом. Фактично, мультифрактальний підхід означає, що складний процес якимсь чином можна розділити на частини, кожна з яких має свої властивості самоподібності.

Як інструмент мультифрактального аналізу сигналів використовуватимемо *метод мультифрактального аналізу флуктуацій після видалення масштабно-залежних трендів* (МФ-БФА) [60]. Метод МФ-БФА є розвитком та узагальненням методу БФА.

В основі вказаного підходу, як і в методі БФА, лежить ідея перетворення спадної автокореляційної функції на деяку зростаючу функцію, нахил якої дозволяє характеризувати властивості випадкових процесів з урахуванням трьох, зазначених у вступі до цього розділу, особливостей.

Алгоритм методу МФ-БФА зводиться до таких кроків [60].

1. Нехай сигнал, що вивчається, представлено у вигляді скінченної вибірки випадкового процесу, тобто у вигляді часового ряду $x(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Тут цілочислові відліки відповідають певним моментам часу (якщо йдеться про часовий ряд), в яких фіксувалися значення сигналу, розділені однаковими інтервалами часу. З даного ряду формується *флуктуаційний профіль*, який являє собою накопичувальну суму

$$y(i) = \sum_{k=1}^i (x(k) - a), \quad (11.13)$$

де a – математичне сподівання. По суті використовується ідеологія *одновимірного випадкового блукання*, яке є основою побудови моделі руху броунівської частинки, де зміна стану частинки в момент часу з номером k відбувається на величину $x(k)$. Далі аналізуватимемо різні характеристики, що базуються на побудованій таким чином функції $y(i)$.

Якщо початковий ряд уже являє собою накопичувальну суму, то вказаний крок пропускають.

2. Отриманий ряд $y(i)$ розділяють на неперетинні інтервали $y(j, i)$, що містять однакову кількість точок. Значення j вказує на конкретний інтервал ряду. Кількість таких інтервалів дорівнює цілій величині $N_s = \lfloor N/s \rfloor$, тобто $j = 1, 2, \dots, N_s$. Оскільки довжина ряду не завжди кратна обраній величині s , то в загальному випадку остання ділянка містить кількість точок, меншу ніж s . Для обліку цього залишку варто повторити процедуру поділу на інтервали, починаючи з протилежного кінця ряду. В результаті повна кількість інтервалів завдовжки s , становитиме $2N_s$.

3. Для кожного з інтервалів потрібно знайти локальний тренд $\tilde{y}(j, i)$. Причому найпростіше використовувати метод найменших квадратів, представляючи тренд $\tilde{y}(j, i)$ поліномом певного степеня. Визначаємо відхилення від локального тренда

$$\Delta y(j, i) = y(j, i) - \tilde{y}(j, i). \quad (11.14)$$

4. Далі визначимо величину, яка представлятиме собою міру флуктуацій $\Delta y(j, i)$ на виділеному інтервалі (j, s) . Позначимо її через $\mu(j, s)$, параметр j виокремлює конкретний інтервал, величина s – його довжину. Визначимо міру $\mu(j, s)$ як дисперсію вибірки $\Delta y(j, i)$ для кожного з інтервалів:

$$\mu(j, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (\Delta y(j, i))^2. \quad (11.15)$$

5. Усереднюючи значення цих мір степеня q , отримуємо *флуктуаційну функцію*

$$F(q, s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{j=1}^{2N_s} [\mu(j, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad (11.16)$$

для якої при $q = 0$ потрібно визначити граничний вираз (зробіть це самостійно)

$$F(0, s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{j=1}^{2N_s} \ln [\mu(j, s)] \right\}. \quad (11.17)$$

6. Якщо досліджуваний ряд зводиться до самоподібної множини, то флуктуаційну функцію представляють степеневою залежністю

$$F(q, s) \sim s^{h(q)}. \quad (11.18)$$

Для процесів із фрактальними властивостями зі зростанням s функція $F(q, s)$ також зростає, і лінійна залежність $\log F(q, s)$ від $\log s$, для даної величини q , свідчить про наявність масштабної інваріантності. Обчислюємо показник $h(q)$ для різних значень s . Тут маємо перехід від спадної кореляційної функції до зростаючої флуктуаційної функції.

Зазначимо, що флуктуаційна функція втрачає статистичну інформативність для величин $s > N / 4$, оскільки кількість інтер-

валів стає дуже малою. Також слід виключити малі інтервали $s < 10$. Досліджуючи поведінку флуктуаційної функції $F(q, s)$ від величини s , виділяємо діапазон зміни довжини інтервалу, в якому проявляється скейлінг (11.18). Якщо цей діапазон масштабів досить великий, то опис властивостей часового ряду в термінах теорії мультифракталів є виправданим.

Величина $h(q)$ при $q = 2$ відповідає розрахунку за методом БФА, тобто $h(2) = H$ визначає показник Херста, який був введений під час визначення узагальненого броунівського сигналу. Тому функцію $h(q)$ можна назвати *узагальненим показником Херста*. У разі монофрактальних часових рядів, для яких характерна наявність одного типу сингулярності, $h(q)$ не залежить від q . Це пояснюється тим, що дисперсія вибірки окремого інтервалу не залежить від довжини інтервалу s і його номера j , тому процедура усереднення у формулі (11.16) буде давати однаковий результат для всіх значень s і q .

Для мультифрактальних рядів із додатними q основний внесок у функцію $F(q, s)$ дають інтервали, що проявляють великі значення $\mu(j, s)$, а при від'ємних q домінують інтервали з малими значеннями $\mu(j, s)$. В результаті можна зробити висновок, що за від'ємних значень q показник $h(q)$ описує інтервали, що проявляють малі флуктуації. Якщо q додатні, то залежність $h(q)$ описує поведінку інтервалів із великими флуктуаціями. Зазвичай для мультифрактальних рядів великі флуктуації характеризуються малими значеннями показника $h(q)$, а малі флуктуації – великими $h(q)$.

Узагальнений показник Херста $h(q)$ пов'язаний із мультифрактальними характеристиками, які були розглянуті в розд. 3. Справді, величина $\mu(j, s)$ являє собою міру флуктуацій на виділеному інтервалі (j, s) . Тоді сума у формулі (11.16) являє собою функцію Реньї (див. формулу (3.17)) для міри сигналу, тобто

$$Z(q, s) = \sum_{j=1}^{2N_s} [\mu(j, s)]^{\frac{q}{2}}. \quad (11.19)$$

За наявності скейлінгу

$$Z(q, s) \sim s^{\tau(q)}, \quad (11.20)$$

де $\tau(q)$ – показник скейлінгу, або масовий показник. Тоді для флуктуаційної функції (11.16), з урахуванням формул (11.19), (11.20), і беручи до уваги, що $N_s = N/s$, можна записати таку асимптотичну степеневу залежність (отримаєте самостійно):

$$F(q, s) \sim s^{\frac{1}{q}(\tau(q)+1)}. \quad (11.21)$$

З огляду на формули (11.18) і (11.21), одержуємо вираз, який пов'язує масовий показник і узагальнений показник Херста:

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (11.22)$$

Згідно з формулами (3.28), (3.29) маємо зв'язок функції спектра сингулярностей $f(\alpha)$ з масовим показником $\tau(q)$:

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} = h(q) + q \frac{dh(q)}{dq}, \quad (11.23)$$

$$f(\alpha) = q\alpha(q) - \tau(q). \quad (11.24)$$

Нагадаємо основні властивості функцій $\tau(q)$ і $f(\alpha)$. Якщо $|q| \gg 1$, то залежність $\tau(q)$ має лінійно зростаючий вигляд, поблизу $q=0$ спостерігаємо криволінійну ділянку. Спектральна функція $f(\alpha)$ визначає фрактальну розмірність підмножини S_α , яка складається з точок, в околі яких показник сингулярності має те саме значення α . Вся сукупність таких підмножин формує початкову множину даних сигналу. Для окремої підмножини S_α маємо співвідношення між розміром шаблону покриття δ і їхньою кількістю, а саме $N(\alpha) \sim \delta^{-f(\alpha)}$. Множини S_α існують не для всіх значень α , тобто існує деяке мінімальне α_{\min} і максимальне α_{\max} такі, що лише для $\alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max}$ множини S_α не порожні. Для кожного значення α в інтервалі $\alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max}$ множина складається з точок, досить химерно розкиданих по часовій осі. Розмірність часової осі (яку в даному випадку можна назвати множиною, що вміщає в себе множини S_α) дорівнює 1,

але розмірність множин $S_\alpha \leq 1$ і вони фрактальні. Зрозуміло, що за своїм змістом $f(\alpha) > 0$.

Стале значення $h(q) = \text{const}$, лінійне зростання $\tau(q)$ і дельта-подібна залежність $f(\alpha)$ відповідають монофрактальному часовому ряду. Навпаки, спад функції $h(q)$, нелінійне зростання $\tau(q)$, розмивання спектра $f(\alpha)$ означають перехід до мультифрактального сигналу.

Інтегральну оцінку спектра сингулярностей дають два його параметри, які визначають положення і ширину спектра $f(\alpha)$. Положення визначається значенням показника $\alpha^* = \alpha(q=0)$, за якого функція $f(\alpha)$ досягає максимуму: $f(\alpha^*) = \max f(\alpha)$. Ширина спектра $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$, для нього справджується співвідношення

$$\Delta\alpha = \alpha(-\infty) - \alpha(+\infty) \approx \Delta h = h(-\infty) - h(+\infty), \quad (11.25)$$

і загалом, для будь-якого діапазону зміни величини $q = [q_1, q_2]$, $q_1 < q_2$, маємо $h(q_1) - h(q_2) \leq \alpha(q_1) - \alpha(q_2)$.

Для монофрактального сигналу, теоретично, значення $\Delta\alpha$ має дорівнювати нулю, а $\alpha^* = H$, але на практиці, внаслідок скінченної вибірки, такі умови не виконуються.

Зазвичай $f(\alpha^*) = 1$, тобто значення α^* відповідає найтипівішому показнику сингулярності, який зустрічається настільки часто, що розмірність відповідної підмножини S_{α^*} просто збігається з розмірністю носія міри – одновимірною віссю часу – і дорівнює 1.

Форма мультифрактального спектра визначається двома причинами [60, 33]:

- некорельованим розкидом випадкової змінної, розподіл якої характеризується наявністю розбіжних моментів;
- корельованою послідовністю чергувань членів часового ряду, яка характеризується скінченними моментами.

Випадкове перемішування часового ряду усуває другу причину, а на першу не впливає. Якщо обидві властивості притаманні часовому ряду процесу, то випадкове перемішування призведе до ослаблення мультифрактальних властивостей. За-

звичай, у цьому випадку спектр звужується і зміщується в бік малих фрактальних розмірностей.

Підсумовуючи, можна сказати, що описаний метод добре підходить для розв'язування різних задач, оскільки оперує характеристиками, які інтуїтивно зрозумілі дослідникам. Спектр сингулярностей утримує інформацію, з одного боку, про кореляційні властивості процесу (які належать до базових характеристик у теорії випадкових процесів), а з іншого боку, про ступінь неоднорідності процесу, кількісною мірою якого є ширина спектра сингулярностей $f(\alpha)$.

11.4. Тестування методу МФ-БФА

Проведемо тестування методу МФ-БФА на прикладі мультиплікативного процесу (див. підрозд. 3.5). На n -му кроці побудови мультиплікативний процес складається з $N = 2^n$ відрізків, на яких певним чином, згідно з алгоритмом побудови процесу, розподіляється нормалізована міра. Спочатку ця міра розподілена рівномірно на одиничному відрізку. Значення мір μ_k , $k = 0, 2, \dots, N - 1$, які мають відрізки, утворюють ряд, спектр сингулярностей якого надасть інформацію про структуру побудованого мультифрактала.

Аналітичні вирази для масового показника, показника сингулярності й узагальнених розмірностей мультиплікативного процесу дають формули (3.40)–(3.42).

Покладемо в розрахунках $n = 12$, тоді загальна кількість членів ряду $N = 2^{12} = 4096$. Кількість членів ряду в інтервалі s змінювалося в межах $25 \leq s \leq 830$, усього було задано 26 інтервалів. Їхні довжини визначалися степеневим законом

$$s_l = 25 \cdot 1,15^l, \quad l = 0, 1, \dots, 25.$$

Таке визначення довжин інтервалів s приводить до рівномірного розміщення положення координат розрахункових точок уздовж осі абсцис на рис. 11.6, а. Локальні тренди побудовано поліномами четвертого степеня.

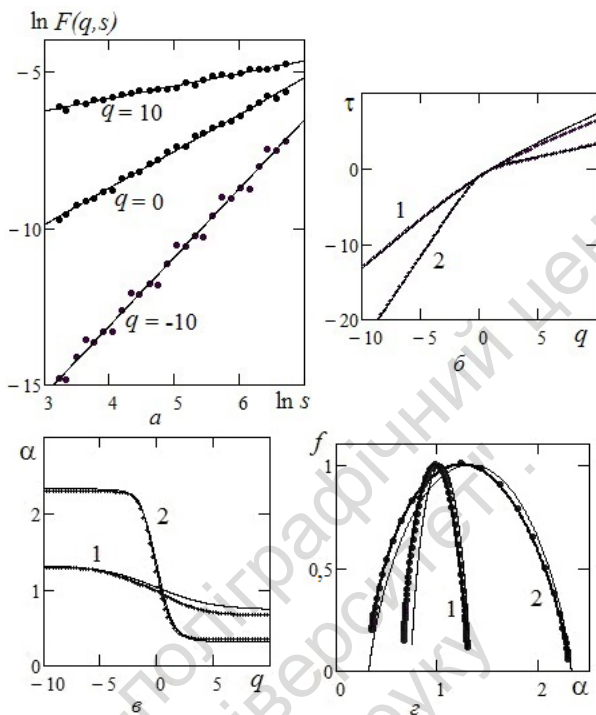


Рис. 11.6. Мультиплікативний процес:

a – функція $F(q, s)$ у подвійних логарифмічних координатах, $p = 0,8$;

b – залежність $\tau(q)$, c – залежність $\alpha(q)$, d – залежність $f(\alpha)$;
 крива 1 – якщо $p = 0,6$, крива 2 – якщо $p = 0,8$;

(точки знайдено за методом МФ-БФА, тонкі суцільні лінії – за теоретичними розрахунками)

Як приклад, на рис. 11.6, a показано графіки залежностей $\ln F(q, s)$ від $\ln s$ при $q = -10, 0, 10$ для мультиплікативного процесу з параметром $p = 0,8$. Як бачимо, точки розташовані в околі прямих ліній регресії, що говорить про наявність скейлінгу в діапазоні зміни довжини інтервалу s .

На рис. 11.6, b , c , d показані результати розрахунків масового показника $\tau(q)$, показника сингулярності $\alpha(q)$ і спектра сингу-

лярностей $f(\alpha)$. Порівняння числових даних, отриманих методом МФ-БФА (точки) з аналітичними обчисленнями (тонкі суцільні лінії) за формулами з розд. 3, вказує на їхню добру відповідність, незважаючи на відносно невелику кількість членів ряду $N = 4096$. Зауважимо, що похідну $\alpha(q) = d\tau(q)/dq$ знаходили чисельно по дискретних значеннях $\tau(q)$ в інтервалі зміни величини $q = [-10, 10]$.

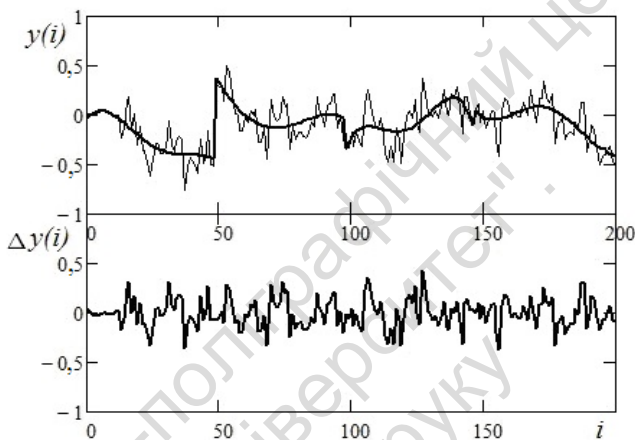


Рис. 11.7. Відхилення флуктуаційного профілю від лінії локального тренда для рожевого шуму, $s = 49$

Як другий тестовий приклад розглянемо кольорові шуми: білий, рожевий і коричневий. Спочатку подивимося на рис. 11.7, який ілюструє процедуру отримання відхилень $\Delta y(i) = y(i) - \tilde{y}(i)$ флуктуаційного профілю $y(i)$ від лінії локального тренда $\tilde{y}(i)$. На рис. 11.7 вгорі показано відрізок рожевого шуму (тонка лінія) і лінії локальних трендів (жирна лінія) для інтервалу розбиття $s = 49$. Для відрізка ряду у 200 відліків маємо чотири інтервали розбиття. Внизу на рис. 11.7 показано графік відхилень $\Delta y(i)$.

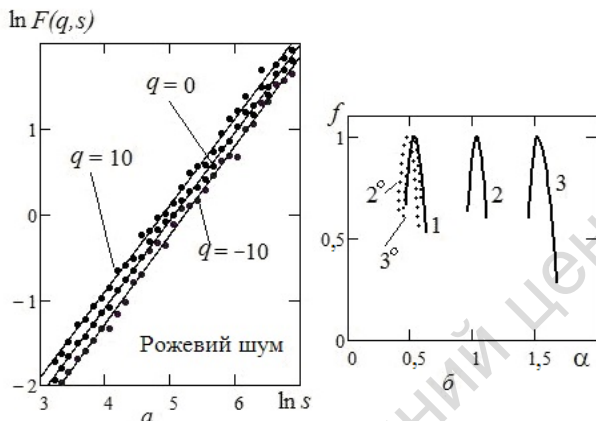


Рис. 11.8. Графік функції $F(q, s)$ у подвійних логарифмічних координатах (а), б – графіки функції $f(\alpha)$:

1 – білий шум, 2 – рожевий шум, 3 – коричневий шум,
 2° , 3° – випадково перемішані ряди рожевого і коричневого шуму
 (білий, рожевий і коричневий шум генеровано програмою Cool Edit Pro)

На рис. 11.8, а показано графіки залежностей $\ln F(q, s)$ від $\ln s$ при $q = -10, 0, 10$ для рожевого шуму. Як видно, точки розташовано в околі прямих ліній регресії, що говорить про наявність скейлінгу в діапазоні зміни довжини інтервалу s , причому нахил кривих є дуже схожим для всіх значень параметра q (похибка пов'язана з відносно невеликою кількістю відліків часового ряду, а саме $N = 3000$). Тоді, згідно з (11.18), вважатимемо, що $h(q)$ практично не залежить від параметра q , а отже похідна $h'(q) \approx 0$. Звідси, відповідно до (11.23), для монофрактальних сигналів, якими є білий, рожевий і коричневий шум, можна покласти $\alpha(q) \approx h(q)$.

На рис. 11.8, б показано спектри сингулярностей зазначених кольорових шумів. Теоретично спектр сингулярності білого, рожевого і коричневого шуму складається з однієї точки $(\alpha, f(\alpha))$, а саме $(0,5;1)$, $(1;1)$ і $(1,5;1)$, відповідно. Наявність малої ширини спектра $\Delta\alpha$ обумовлена скінченною тривалістю реалізації шумового процесу.

Варто зазначити, що показник $h(q)$ порівняно з показником Херста H для кольорових шумів (див. розд. 10) збільшився на одиницю. Це правильно, адже побудова флуктуаційного профілю (11.13) по суті є процедурою інтегрування даного часового ряду, яка і приводить до збільшення узагальненого показника Херста на одиницю (без цієї процедури визначення показника H для білого і рожевого шуму супроводжувалося б суттєвою похибкою).

На рис. 11.8, б також показано спектри сингулярностей випадково перемішаних рожевого і коричневого шуму. Як бачимо ці графіки практично збігаються з кривою для білого шуму. Це свідчить про те, що фрактальні властивості рожевого і коричневого шуму, які обумовлені наявністю корельованої послідовності чергування членів часового ряду, були зруйновані у процесі перемішування.

11.5. Обмеження методу мультифрактального аналізу

Зрозуміло, метод МФ-БФА, як і будь-який інший метод дослідження, має певні обмеження. Одним з обмежень мультифрактального аналізу є те, що він оцінює верхню обвідну істинного мультифрактального спектра [20, 35]. Цей факт може призводити до помилкової інтерпретації результатів числового аналізу.

З такою ситуацією ми стикнулися під час розрахунку спектрів сингулярності кольорових шумів (див. рис. 11.8, б). Теоретично спектр сингулярності такого шуму складається з однієї точки. Наявність малої ширини спектра $\Delta\alpha$ обумовлена скінченною тривалістю реалізації шумового процесу. Тому у випадку рядів невеликої довжини виникає необхідність проведення додаткових досліджень для підтвердження наявності мультифрактальних властивостей.

Якщо істинний спектр сингулярностей $f(\alpha)$ є дискретним, тобто α набуває лише дискретних значень, то обвідна буде включати "хібні" точки, являючи собою інтерполяцію дискрет-

ного спектра $f(\alpha)$. Також обвідна не дозволить визначити "внутрішні" точки (якщо вони існують), які не належать верхній обвідній спектра $f(\alpha)$.

Як приклад, розглянемо α -стійкий процес із незалежними приростами. Такий процес є самоподібним і біфрактальним [71, 20], тобто його мультифрактальний спектр являє собою дві точки на площині $\{\alpha, f(\alpha)\}$. Відповідні характеристики процесу мають вигляд:

$$h(q) = \begin{cases} 1/\alpha_L, & q \leq \alpha_L, \\ 1/q, & q > \alpha_L, \end{cases} \quad \tau(q) = \begin{cases} q/\alpha_L - 1, & q \leq \alpha_L, \\ 0, & q > \alpha_L, \end{cases} \quad (11.26)$$

$$\begin{cases} \alpha(q) = \begin{cases} 1/\alpha_L, & q \leq \alpha_L, \\ 0, & q > \alpha_L, \end{cases} \\ f(\alpha) = \begin{cases} 1, & q \leq \alpha_L, \\ 0, & q > \alpha_L, \end{cases} \end{cases} \quad (11.27)$$

де величина α_L в цьому випадку означає індекс стійкості.

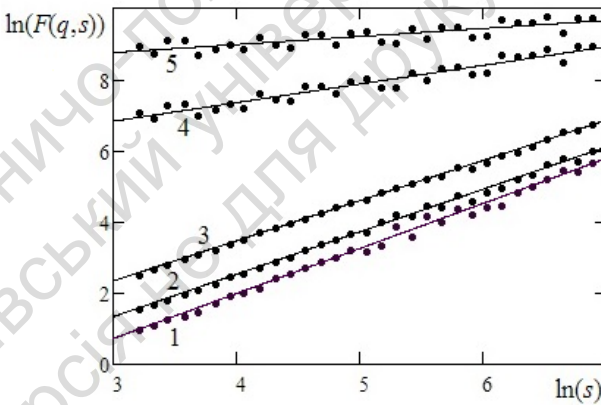


Рис. 11.9. Графік функції $F(q, s)$ у подвійних логарифмічних координатах, $\alpha_L = 0,8$, $S(x|\alpha_L, 0, 1, 0)$: $q = -5, -2, 0, 2, 5$ (криві 1, 2, 3, 4, 5, відповідно)

Покладемо в розрахунках $\alpha_L = 0,8$ і закон розподілу з такими параметрами: $S(x|\alpha_L, 0, 1, 0)$. Загальна кількість членів ряду досить велика, а саме $N = 15000$. Кількість членів ряду в інтервалі s змінювалася в межах $25 \leq s \leq 980$, усього було задано 30 інтервалів. Як бачимо, на рис. 11.9 точки розташовані в околі прямих ліній регресії, що свідчить про наявність скейлінгу в діапазоні зміни довжини інтервалу s .

На рис. 11.10 зображено мультифрактальні характеристики $h(q)$, $\tau(q)$, $\alpha(q)$, $f(\alpha)$ процесу $S(x|0,8;0;1;0)$. Реалізації такого процесу мають теоретично нескінченні дисперсії і математичне сподівання і є самоподібними з показником Херста

$$H = \frac{1}{\alpha_L} = \frac{1}{0,8} = 1,25.$$

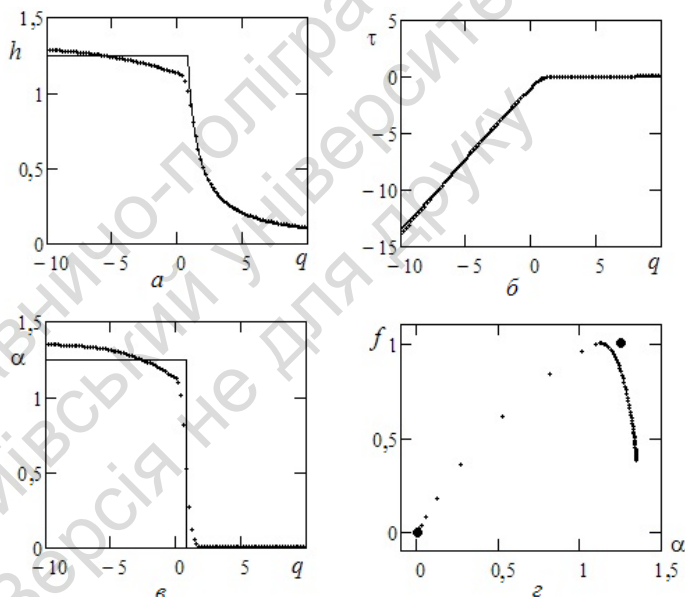


Рис. 11.10. Мультифрактальні характеристики стійкого процесу із законом розподілу $S(x|0,8;0;1;0)$: $a-h(q)$, $b-\tau(q)$, $v-\alpha(q)$, $z-f(\alpha)$ (точки знайдено за методом МФ-БФА, тонкі суцільні лінії – за теоретичними розрахунками)

Суцільними лініями на графіках рис. 11.10, *a*, *б*, *в* показано теоретичні значення. Біфрактальний спектр на рис. 11.10, *г* являє собою дві точки на площині $\{\alpha, f(\alpha)\}$: $(0,0)$ і $(1,25;1)$. Як бачимо, внаслідок побудови верхньої обвідної, характерною властивістю мультифрактального спектра $f(\alpha)$ є наявність хибних точок, що може призвести до неправильних висновків про мультифрактальні властивості процесу.

11.6. Аналіз кореляційних властивостей випадкових процесів за реалізаціями малої тривалості

Кореляційний аналіз є одним із стандартних методів дослідження структури випадкових процесів і використовується в багатьох практичних задачах. Поряд зі спектром потужності й законом розподілу ймовірностей, автокореляційна функція належить до базових характеристик, на основі розрахунку яких можна зробити висновок про властивості сигналу.

Оскільки кореляційні властивості процесу мають важливе діагностичне значення, то поговоримо детальніше про одну особливість у дослідженні автокореляційної функції.

У дослідженні сигналів, які реєструють в експериментах, дослідники часто стикаються з необхідністю оцінювання по відносно коротких відрізках часу, що призводить до труднощів, пов'язаних із можливою невідповідністю розрахунку автокореляційної функції за вибіркою малої тривалості і теоретично очікуваним результатом для нескінченної реалізації.

Одним із підходів, який дозволяє досліджувати ефекти довготривалих кореляцій, є метод МФ-БФА. В цьому методі закладено підхід, заснований на ідеї одновимірного випадкового блукання. В основі цього підходу лежить ідея перетворення спадної автокореляційної функції на деяку зростаючу функцію, нахил якої дозволяє характеризувати кореляційні властивості випадкових процесів, зокрема і нестационарних. Знання функції $h(q)$

дозволяє визначити спектр сингулярностей $f(\alpha)$ і тим самим оцінити відповідність даного сигналу процесам із відомими статистичними властивостями. Більше того, за сигналами відносно невеликої тривалості ці оцінювання можуть бути проведені надійніше порівняно з розрахунками автокореляційної функції.

Ілюстрацією сказаного є графіки (рис. 11.11). На рис. 11.11, *a* показано нормовану автокореляційну функцію класичного броунівського процесу (коричневий шум) для трьох відрізків часового ряду. Розрахунки проводили згідно з формулою (10.40), де кількість дискретних відліків відрізка часового ряду становила $N = 2000$, а $m = 0, 1, 2, \dots, M$, $M = 400$ – кількість кроків дискретизації, яка характеризує зсув у часі між значеннями часового ряду (зазвичай вибирають $M \ll N$). Як бачимо, швидкість спаду автокореляційної функції для різних відрізків часового ряду може дуже суттєво відрізнятись. Метод МФ-БФА визначає наявність класичного броунівського процесу по тих самих вибірках значно надійніше (рис. 11.11, *б*). Відмінність значень узагальнених показників Херста від теоретично очікуваної величини $h(q) = 1,5$ становить не більше кількох процентів.

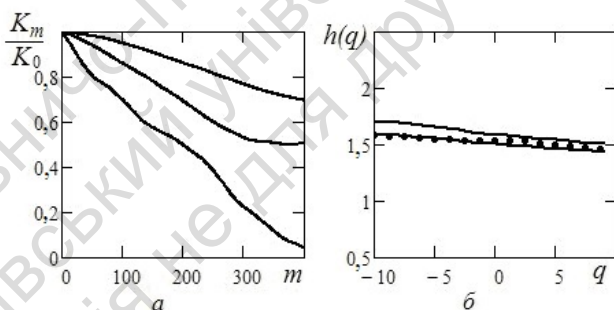


Рис. 11.11. Класичний броунівський процес:

a – нормована автокореляційна функція для трьох відрізків тривалістю 2000 відліків кожний;

б – узагальнені показники Херста, обчислені по тих самих відрізках

Отже, метод мультифрактального аналізу можна розглядати як інструмент дослідження кореляційних властивостей у випадках,

коли мала тривалість експериментальних даних обмежує надійність оцінювання на основі стандартного кореляційного аналізу.

Підведемо певні підсумки. Процеси, що мають фрактальні властивості, можна розділити на дві групи: самоподібні (монофрактальні) і мультифрактальні. Монофрактальні процеси є однорідними в тому сенсі, що їхні скейлінгові характеристики залишаються незмінними в будь-якому діапазоні масштабів і мають один показник скейлінгу. Мультифрактальні процеси допускають розкладення на ділянки з різними локальними масштабними властивостями і характеризуються спектром скейлінгових показників (тобто спектром сингулярності).

Можна сказати, що метод МФ-БФА варто розглядати як апарат числового аналізу, який дозволяє [35]:

- оцінювати діапазон зміни показника сингулярності і тим самим оцінювати кількісну міру однорідності випадкового процесу;
- характеризувати наявність кореляцій різного типу в нестационарних випадкових процесах;
- здійснювати кореляційний аналіз нестационарних сигналів досить малої тривалості.

РОЗДІЛ 12

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ СИГНАЛІВ МЕДИКО- БІОЛОГІЧНОГО ПОХОДЖЕННЯ

Цей розділ присвячено аналізу сигналів медико-біологічного походження, які обумовлені шумом дихання людини і серцевим ритмом. Варто зазначити, що фрактальний аналіз можна застосувати до різних пов'язаних із сигналом геометричних об'єктів. Як фрактал в багатьох випадках можна розглядати графік сигналу. Фрактальною може бути, наприклад, множина точок перетину сигналу на певному рівні. Квадрат амплітуди сигналу можна розглядати як сукупність точок на часовій осі, яка має фрактальну структуру.

12.1. Будова респіраторної системи людини

Людський організм у процесі життєдіяльності генерує різні звуки, зокрема і звуки, що виникають під час дихання. Починаючи з французького клініциста Рене Лаеннека¹, який винайшов стетоскоп і сформулював більшість вербальних² моделей шуму дихання в нормі та в патології, прийнято вважати, що у здорової людини прослуховуються два види шуму – *трахейний шум* і *везикулярний шум*.

Спочатку, дуже коротко, опишемо будову респіраторної системи людини і руху по ній повітря, починаючи з гортані. За рахунок збільшення об'єму грудної клітки, викликаного підняттям ребер і опусканням діафрагми, починається фаза вдиху; і повітря, пройшовши через порожнини носа і рота, надходить до

¹ Лаеннек Рене Теофіль Гіацинт (1781–1826) – французький лікар.

² Словесно описані моделі шуму.

гортані. У першому наближенні гортань можна представити у вигляді труби, що звужується в напрямку до голосових зв'язок.

Далі потік повітря проходить через голосову щілину, форма якої значною мірою залежить від конкретної людини. Найчастіше зустрічається голосова щілина, форма якої близька до рівнобедреного трикутника. Відношення площі поперечного перерізу початку гортані до площі голосової щілини у фазі вдиху в середньому становить близько 5–6. З аерогідромеханіки добре відомо, що в такому каналі потік прискорюватиме свій рух також у 5–6 разів. Після проходження голосової щілини потік потрапляє у нижню порожнину гортані, яка в першому наближенні являє собою трубу, що розширюється. Вона з'єднує голосову щілину і трахею. Отже, на цій ділянці потік повітря уповільнює свою швидкість приблизно в 3–5 разів. Далі потік рухається по трахеї, яка за формою схожа на циліндричну трубу, і потрапляє у бронхи.

Зупинимося докладніше на будові бронхіального дерева. Бронхіальне дерево починається зі стовбура, тобто трахеї. Трахея, у свою чергу, розгалужується на два головних бронхи, лівий і правий, кожен з яких входить відповідно в ліву і праву легені. Головні бронхи розгалужуються на два бронхи, які теж розгалужуються ще на два бронхи, і т. д. Розгалуження повітряних шляхів (зверху вниз) прийнято називати поколіннями і позначати буквою z . Для трахеї $z = 0$, для головних бронхів $z = 1$ і т. д. Бронхіальне дерево має (разом із трахеєю) 24 покоління, а кількість повітряних шляхів (кількість гілок) у кожному поколінні дорівнює приблизно 2^z . Отже, бронхіальне дерево з позицій аерогідромеханіки є добре відомий у фізиці й техніці тип повітропроводу із численними розгалуженнями. Важливо зазначити, що сумарна площа поперечного перерізу повітряних шляхів у кожному наступному поколінні швидко зростає.

Від покоління до покоління розміри бронхів зменшуються і на периферії дерева формуються так звані бронхіоли, альвеолярні ходи й альвеоли. Альвеоли мають діаметр близько 0,3 мм, їхня загальна кількість в обох легенях у дорослої людини близько 600 млн.

Зауважимо, що, починаючи з 17-го покоління стінки дихальних шляхів (респіраторних бронхіол) уже не суцільні, а мають

отвори (перфорації). Через ці отвори внутрішній об'єм дихальних шляхів пов'язаний із внутрішніми порожнинами альвеол, в найтонших стінках яких є кровоносні капілярні судини, де і відбувається газообмін в акті дихання. Величина перфорації для бронхіол 17-го, 18-го і 19-го поколінь відповідно дорівнює 12, 25 і 50 %. Починаючи з 20-го покоління, стінки вже є тонкою сіткою з еластичного колагену й одиничних м'язових волокон. Для них перфорація наближається до 100 %. Нарешті, бронхіоли 23-го покоління (альвеолярні мішечки) у структурному відношенні ідентичні альвеолярним ходам, але вже не розгалужуються, а замикаються з торця групою альвеол. Альвеоли й альвеолярні ходи є основою біотканини легенів – *паренхіми*. Їхня загальна площа на видиху становить приблизно 30 м², а на глибокому вдиху – 100 м². Густина паренхіми 300 кг/м³, а швидкість поширення в ній звуку 30–50 м/с. Паренхіма значною мірою поглинає звукову енергію, і ця її здатність збільшується зі зростанням частоти.

Обговоримо фізичні причини виникнення шуму під час акту дихання людини. Почнемо з *трахейного шуму*, який особливо добре прослуховується над шийною частиною трахеї (шум, що прослуховується над грудною частиною трахеї, часто називають *бронхіальним шумом*).

З проведеного вище опису респіраторної системи людини стає очевидним, що найвужчим місцем усього бронхіального дерева є голосова щілина, площа якої в середньому в 5 разів менша за площу поперечного перерізу трахеї. Із цього однозначно випливає, що найвища швидкість потоку повітря в акті дихання спостерігатиметься в голосовій щілині. Якщо взяти до уваги, що за середньої інтенсивності дихання величина витрат повітря становить близько 0,5–1,0 л/с, то швидкість потоку в голосовій щілині може досягати 10–20 м/с. Тому саме в околі голосової щілини в акті дихання потік повітря стає нестаціонарним і, як наслідок, у ньому виникають вихрові структури різного масштабу, які за взаємодії зі стінкою трахеї, породжують на ній пульсації тиску. Пульсації тиску викликають коливання пружних стінок трахеї, які у свою чергу збуджують звукові хвилі в біологічних тканинах, що оточують трахею, і повітряному середовищі всередині трахеї.

Ці хвилі, поширюючись, викликають коливання поверхні шії і поверхні верхніх відділів грудної клітки й реєструються (прослуховуються) як трахейний і бронхіальний шум. Мірою просування потоку повітря до периферії бронхіального дерева швидкість його дуже швидко зменшується, оскільки сумарна площа поперечного перерізу повітряних шляхів у кожному наступному поколінні швидко зростає. Тому в периферійних повітряних шляхах швидкості потоку повітря невеликі й ефективність перетворення енергії потоку на звукову енергію тут прямує до нуля. Такі основні риси фізичних причин виникнення трахейного шуму в акті дихання, які нині не викликають сумнівів.

Тепер розглянемо фізичні причини появи *везикулярного шуму*. На жаль, на відміну від трахейного шуму, природа виникнення везикулярного шуму продовжує дискутуватися. Не виконуючи аналізу літературних джерел, лише зазначимо, що є дослідники, які припускають, що паренхіма легенів здорової людини не створює шуму, а везикулярний шум – це трахейний шум, що проникає через біологічні тканини грудної клітки і через повітря у бронхіальному дереві до поверхні грудної клітки. Інші вважають, що везикулярний шум виникає в легенях безпосередньо в альвеолах. Сам Р. Лаеннек, який увів цей термін, вважав, що везикулярний шум виникає через тертя повітря об стінки альвеол. Деякі дослідники прямо стверджують, що ні місцезнаходження, ні механізм виникнення везикулярного шуму невідомі. Нам імпонує гіпотеза, згідно з якою везикулярний шум породжується в самих альвеолах за рахунок коливань стінок альвеол. Коливання виникають унаслідок пружного напруження стінок альвеол під час їхнього розтягування на вдиху й ослаблення напруження на видиху. Однак не можна виключити, що насправді везикулярний шум – це суміш шумів, що виникає як за рахунок коливань стінок альвеол, так і за рахунок певної частки трахейного шуму, яка досягла поверхні грудної клітки.

Спробуємо, на основі описаних нижче досліджень [6], висловити свою думку про природу везикулярного шуму: везикулярний шум – це трахейний шум, що проник через біологічні тканини грудної клітки і через повітря в бронхіальному дереві до поверхні грудної клітки, або природа везикулярного шуму і природа трахейного шуму зовсім різні.

12.2. Методика реєстрування шуму дихання

Дано короткий опис експериментів, які проводилися в Київському Інституті гідромеханіки НАН України [6]. Схему пристрою для реєстрації шуму дихання людини показано на рис. 12.1. Як сенсори використовували п'єзокерамічні акселерометри діаметром 25 мм з убудованими підсилювачами. До поверхні тіла їх кріпили двостороннім скотчем, їхнє місце розташування показано на рис. 12.1. Верхній акселерометр кріпили на шії трохи нижче гортані, а нижній акселерометр на грудній клітці під правою ключицею. Сигнали, що реєструвалися акселерометрами, подавали на вхід двоканального аналогового підсилювача з фільтрами і, після нього, – на аудіовхід ЕОМ. Оброблення отриманих сигналів виконували в діапазоні частот від 70 до 1600 Гц. Реєстрацію шумів проводили на волонтерах чоловічої статі віком від 40 до 70 років зі здоровою респіраторною системою. Інтенсивність дихання була сумірною з витратою повітря близько 0,7 л/с.

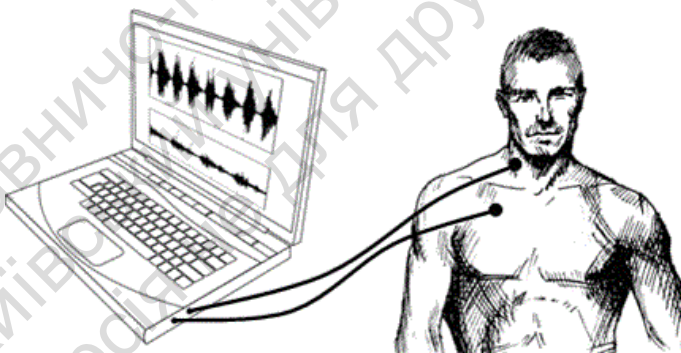


Рис. 12.1. Схеми установки для синхронної реєстрації трахеального і везикулярного шуму з верхнім акселерометром для реєстрації трахеального шуму та нижнім акселерометром для реєстрації везикулярного шуму

12.3. Часові та спектральні характеристики шуму дихання

На рис. 12.2 представлені типові осцилограми трахейного і везикулярного шуму, зареєстровані за допомогою установки, зображеної на рис. 12.1.

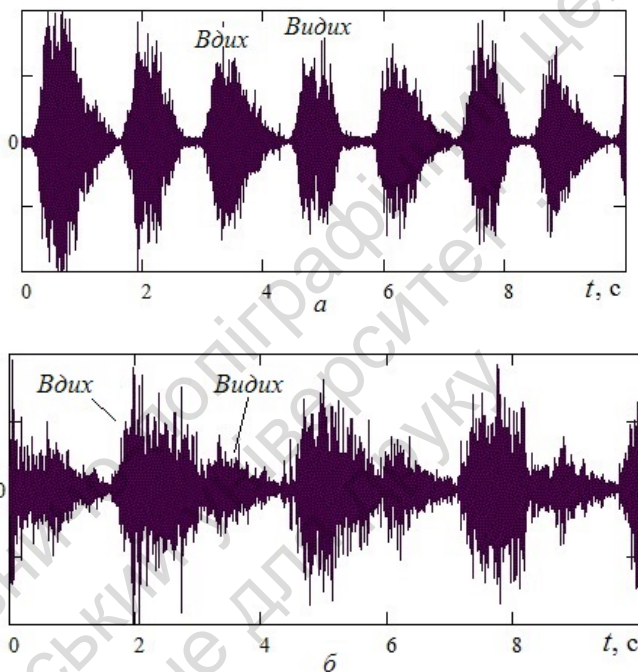


Рис. 12.2. Осцилограми шуму дихання:
 a – трахейний шум, b – везикулярний шум

Трахейний шум є послідовністю характерних звукових імпульсів, що виникають на вдиху і видиху, рис. 12.2, a . Причому важливо зазначити, що імпульси на вдиху й видиху мало відрізняються один від одного. На противагу цьому, для везикулярного шуму найхарактернішою особливістю є саме те, що імпульси, на вдиху й видиху, зовсім різні, рис. 12.2, b . Тут, по-перше, рівень

імпульсу на вдиху значно більший, ніж рівень імпульсу на видиху, по-друге, їхня форма помітно відрізняється одна від одної.

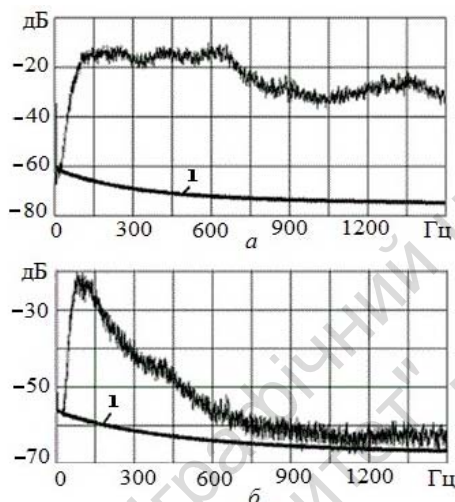


Рис. 12.3. Спектри потужності шуму дихання: *а* – трахейний шум, *б* – везикулярний шум, крива 1 – власний шум установки

Подивимося, чим відрізняються спектри потужності трахейного й везикулярного шуму, рис. 12.3. Як бачимо, спектр трахейного шуму (рис. 12.3, *а*) порівняно рівномірний, хоча в діапазоні частот від 70 Гц до 700 Гц рівень спектра приблизно на 8–10 дБ вищий, ніж у діапазоні 700 Гц–1500 Гц. На відміну від цього, рівень спектра везикулярного шуму (рис. 12.3, *б*) в діапазоні частот від 70 Гц до 700 Гц дуже швидко спадає (зі швидкістю приблизно 10–15 дБ на октаву), а вище 700 Гц він практично стає таким самим як і рівень власного шуму вимірювальної установки (крива 1).

Цілком очевидно, що цих характеристик шумів замало, щоб відповісти на питання: везикулярний шум – це трахейний шум, який проник через бронхіальне дерево, ослабнув, змінив свій спектр і, нарешті, досяг поверхні грудної клітки, або трахейний і везикулярний шум – це принципово різні шуми й фізичні причини їхньої появи різні?

Щоб відповісти на поставлене запитання, потрібно виконати особливий експеримент *in vivo*, в якому в акті дихання був би відсутній трахейний шум, а везикулярний шум, навпаки, був наявний. На перший погляд ідея такого експерименту виглядає абсурдною, оскільки дихальний шум виникає саме у процесі дихання. Проте, якщо взяти як робочу гіпотезу те, що везикулярний шум виникає лише за рахунок стиснення-розтягування паренхіми, то реалізувати експеримент цілком реально [6]. Справді, якщо закрити рот і ніс, щоб повітря не проникало у бронхіальне дерево, і за рахунок зусиль грудних м'язів розширювати і звужувати грудну клітку (так само, як при акті дихання), то паренхіма легенів буде змушена розтягуватися і стискатися. Якщо наша гіпотеза правильна, то ми повинні реєструвати шум, подібний до везикулярного. У цьому разі трахейний шум не буде реєструватися, оскільки потік повітря в гортані та бронхіальному дереві відсутній.

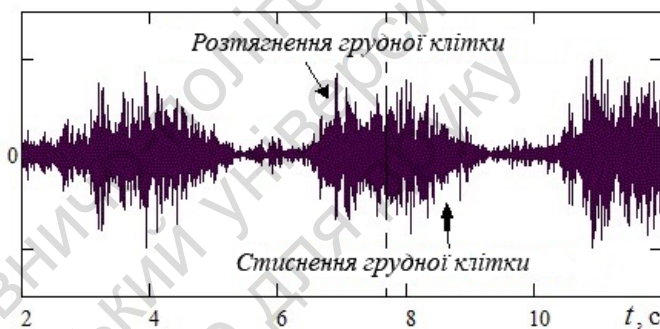


Рис. 12.4. Осцилограма шумового сигналу під час розтягнення-стиснення паренхіми за відсутності потоку повітря в гортані та бронхіальному дереві (акселерометр закріплено під ключицею)

За вказаним сценарієм проведено експерименти і зареєстровано шумові сигнали в тих самих точках, в яких раніше реєстрували дихальний шум (див. рис. 12.1).

Як і очікували, сигнал з акселерометра, закріпленого на шиї, був практично відсутній. А ось сигнал з акселерометра, закріпленого під ключицею (рис. 12.4), існує і має яскраво виражений

імпульсний характер, на якому добре проглядаються ділянки наростання і спадання, які відповідають розтягуванню (збільшення об'єму) і звуженню (зменшення об'єму) грудної клітки.

На рис. 12.5 наведено також спектр цього сигналу. Як бачимо, в діапазоні частот від 70 Гц до 600 Гц рівень спектра потужності швидко падає, а вище 600 Гц він практично стає таким самим як і рівень власного шуму установки (крива 1).

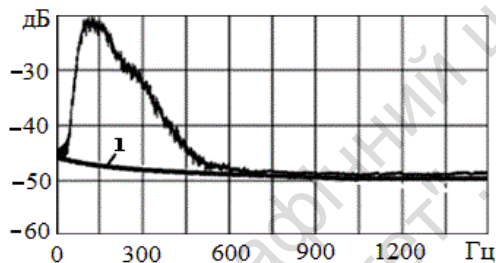


Рис. 12.5. Спектр потужності шумового сигналу, який зображено на рис. 12.4; крива 1 – власний шум установки

Просте порівняння осцилограм на рис. 12.4 і рис. 12.2, б, а також спектрів на рис. 12.3, б і рис. 12.5, дозволяє переконатися в тому, що часові та спектральні характеристики везикулярного шуму і шуму, спричиненого лише деформацією розтягування-стиснення паренхіми легенів (за відсутності потоку повітря в бронхіальному дереві), дуже схожі. І вказаний факт досить переконливо показує, що везикулярний шум – це окремий самостійний вид шуму, що виникає в паренхімі легенів за рахунок перетворення частини енергії деформації паренхіми на звукову енергію.

12.4. Мультифрактальний аналіз шуму дихання людини

У проведеному вище дослідженні подано аналіз загальних інтегральних характеристик шумових сигналів. Вважаємо важ-

ливим порівняти більш тонку (локальну) структуру цих сигналів. Як відомо, головне призначення паренхіми полягає в забезпеченні переходу кисню з повітря у кров, а вуглекислого газу у зворотному напрямку. Нагадаємо, що цей процес відбувається в альвеолах, кількість яких в обох легенях дорослої людини досягає приблизно 600 млн. Форма альвеол нагадує неправильний многогранник довільної орієнтації. Середній поперечний розмір альвеол становить близько 250–300 мкм. Будь-які статистичні дані про кількість граней (стінок альвеол), їхні розміри й форму нині відсутні. Товщина стінок альвеол дорівнює близько 2–8 мкм. Їхня загальна площа на видиху становить приблизно 30 м², а на глибокому вдиху – 100 м². Отже, очевидно, що паренхіма легенів представляє собою біологічний матеріал пористої структури, в якому форма осередків (альвеол) і їхня орієнтація у просторі неупорядковані. Матеріал із такими характеристиками цілком можна віднести до фрактальних матеріалів.

Якщо прийняти гіпотезу, що шум паренхіми, який генерується під час її деформацій розтягнення-стиснення, викликаний коливаннями величезної кількості різноманітних за формою і розмірами стінок альвеол, то фрактальна структура паренхіми має проявлятися і у структурі шуму, що генерується нею. З огляду на висловлені міркування, спробуємо виявити мультифрактальні властивості дихальних шумів, що може дати якусь інформацію про їхнє походження.

Нагадаємо, що мультифрактальний аналіз можна застосовувати до різних, пов'язаних із сигналом, об'єктів. У цьому випадку досліджуватимемо модулі дискретного набору значень часового ряду.

Перейдемо до побудови спектра сингулярностей шуму дихання людини. Тривалість запису сигналу становила 17,162 с, частота дискретизації 3496 Гц. Це відповідало побудові дискретного часового ряду з 60 000 відліками. Зауважимо, що на один цикл "вдих-видих" припадало приблизно 8500 відліків.

Перш за все, варто переконатися в наявності скейлінгу у флуктуаційної функції $F(q, s)$. На рис. 12.6 показано залежність $\ln[F(q, s)]$ від $\ln(s)$ для різних значень параметра q для шуму дихання в області трахеї (рис. 12.6, а) і під ключицею

(рис. 12.6, б). Кількість відліків часу в інтервалі s змінювалася від 25 до 1986. Як бачимо, точки на графіках рис. 12.6 розміщуються вздовж відповідних прямих ліній, що свідчить про наявність у структурі сигналів скейлінгу і, отже, правомірності побудови спектра сингулярностей.

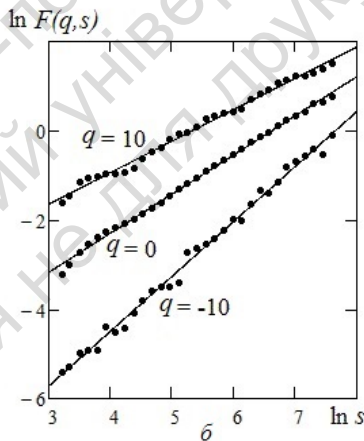
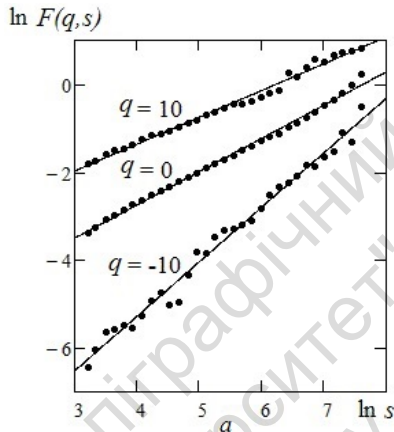


Рис. 12.6. Графіки залежностей $\ln(F(q, s))$ від $\ln(s)$:
 a – шум дихання в області трахеї,
 $б$ – шум дихання під ключицею

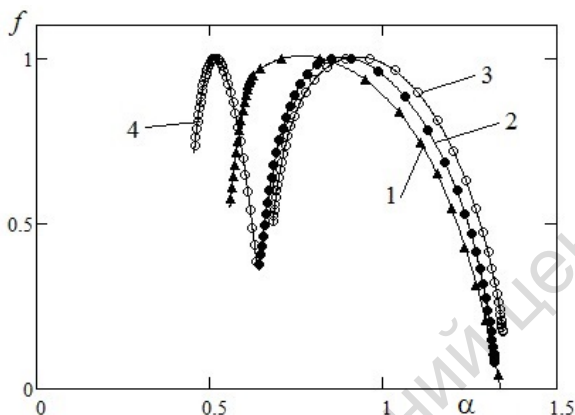


Рис. 12.7. Спектри сингулярностей:

- 1 – шуму дихання на трахеї; 2 – шуму дихання під ключицею;
 3 – шуму під ключицею, що виникає за рахунок розтягування-стиснення паренхіми; 4 – шуму дихання під ключицею, який випадковим чином перемішаний

На рис. 12.7 зображено спектри сингулярностей шуму дихання. Як видно, спектри везикулярного шуму (крива 2) і шуму, що виникає за рахунок розтягування-стиснення паренхіми за відсутності дихання (крива 3), практично збігаються. Дуже схожі і їхні інтегральні характеристики: для кривої 2 маємо $\alpha^* = 0,856$, $\Delta\alpha = 0,636$, а для кривої 3 – $\alpha^* = 0,890$, $\Delta\alpha = 0,669$. На відміну від цих спектрів, спектр шуму на трахеї (крива 1) суттєво розширений, для нього $\alpha^* = 0,660$, $\Delta\alpha = 0,882$. Збільшення ширини спектра проявилось в області малих значень показника сингулярності α (для додатних значень параметра q). Нагадаємо, що малі значення показника сингулярності виділяють властивість самоподібності великих флуктуацій у часовому ряді. Зсув ліворуч кривої 1 (тобто зменшення величини α^*), щодо кривих 2 і 3, говорить про відмінність кореляційних властивостей у трахейного і везикулярного шумів.

На рис. 12.7 наявний ще один спектр сингулярностей (крива 4), який отримано після випадкового перемішування членів

ряду, що описує сигнал везикулярного шуму дихання під ключицею. Процедура перемішування є тестом, який покликаний підтвердити наявність або відсутність кореляцій серед відліків часового ряду. Як видно з рис. 12.7, перемішування суттєво знизило мультифрактальні властивості, перетворюючи початковий ряд на сигнал, що близький за властивостями до білого шуму ($\alpha^* \approx 0,5$). Це говорить про істотний вплив на формування мультифрактальних властивостей часового ряду далекодійних кореляцій.

На підставі отриманих результатів можна стверджувати, що фізичні причини виникнення везикулярного шуму і трахейного шуму абсолютно різні. Везикулярний шум виникає саме за рахунок деформації розтягування-стиснення паренхіми легенів у процесі акту дихання. В наступному підрозділі спробуємо побудувати математичну модель, завдяки якій можна теоретично показати, що описаний вище механізм виникнення везикулярного дихання в легенях цілком правдоподібний [7].

12.5. Моделювання механізму генерації везикулярного шуму дихання

12.5.1. Теоретична модель

Нагадаємо деякі фізичні та геометричні характеристики паренхіми. Паренхіма – це біологічна тканина легенів, що має в основному комірчасту структуру (у першому наближенні нагадує піну). Саме ці заповнені повітрям осередки – довільно орієнтовані неправильні багатогранники з максимальним розміром порядку 0,3 мм – і називають альвеолами. Кількість альвеол легенів людини становить близько 600 млн. Стінки альвеол дуже тонкі й містять дрібні кровоносні судини (капіляри). Густина біологічної тканини стінок альвеол близька до густини води. Поверхня стінок альвеол змочена найтоншим шаром рідини, яка

за рахунок поверхневого натягу прагне сплющити альвеолу. Однак шар біологічних клітин, що вистилають поверхню стінок, виділяє особливу речовину – сурфактант, яка значно знижує поверхневий натяг рідини і тим самим забезпечує стабільність форми альвеол. Отже, стінки альвеол без дихання мають деякий попередній натяг, який однак не викликає порушення їхньої форми. У процесі вдиху паренхіма збільшується в об'ємі за рахунок роботи міжреберних м'язів і м'язів діафрагми, які збільшують об'єм грудної клітки. Зазвичай, зростають і розміри альвеол за рахунок розтягування їхніх стінок. Під час видиху все відбувається з точністю до навпаки. Саме у процесі дихання періодичне розтягування стінок альвеол трансформується в їхні поперечні коливання, які і збуджують звук, що реєструється на поверхні грудної клітки як везикулярний шум.

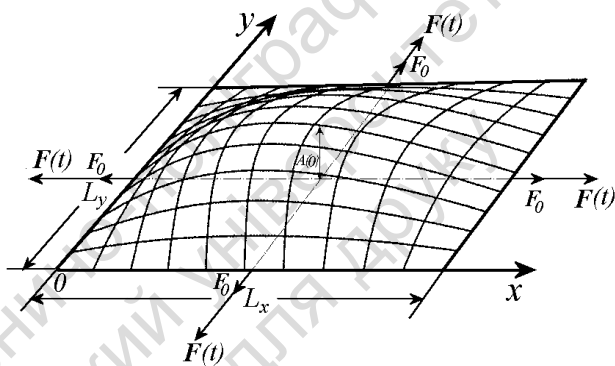


Рис. 12.8. Видяк закріпленої по контуру мембрани в момент часу $t = 0$

Покажемо, що описаний механізм трансформації періодичних деформацій розтягування стінок альвеол у їхні поперечні коливання можливий. Для цього розглянемо найпростішу двовимірну фізичну модель. Як найпростішу модель стінки альвеоли цілком допустимо взяти прямокутну мембрану, закріплену по контуру (рис. 12.8). Нехай є деякий сталий (незалежний від часу) натяг мембрани F_0 і деяке невелике, порівняно з розмірами

мембрани, початкове поперечне відхилення центра мембрани $A(0)$ в момент часу $t = 0$. Тепер почнемо впливати на мембрану періодичним натягом $F(t)$ (який імітуватиме натяг, що призводить до періодичного розтягування стінки альвеоли під час дихання) і подивимося, чи виникнуть у цьому разі поперечні коливання мембрани.

Щоб розв'язати це завдання, скористаємося відомим диференціальним рівнянням коливань мембрани [9]:

$$\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = c^2(t) \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right], \quad (12.1)$$

де $w(x, y, t)$ – поперечне відхилення мембрани від положення рівноваги; $c^2(t) = [F_0 + F(t)] / \bar{\rho}$ – швидкість поширення збурення в мембрані, $\bar{\rho} = \rho h$; ρ – густина матеріалу мембрани, h – її товщина.

Обмежимося розглядом випадку, коли мембрана коливається лише на своїй першій моді і на її поверхні відсутні протифазні ділянки, які характерні для вищих мод. Таке обмеження виправдано, оскільки наявність указаних ділянок суттєво знижує ефективність випромінювання звуку мембраною. Тоді з урахуванням граничних умов на контурі мембрани можна записати

$$w(x, y, t) = A(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right). \quad (12.2)$$

Підставимо вираз (12.2) в рівняння (12.1) і покладемо для простоти $L_x = L_y = L$. В результаті отримуємо рівняння для амплітуди коливань $A(t)$:

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + 2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{F_0 + F(t)}{\bar{\rho}} A(t) = 0. \quad (12.3)$$

Задамо такі початкові умови: $A(0) = 0, 1L$, $dA(0)/dt = 0$. Тут величину початкового відхилення вибрано з урахуванням виконання нерівності $A(0) \ll L$.

Тепер необхідно задати величину сталого натягу мембрани F_0 . На жаль, якихось конкретних відомостей про величину натягу нам не відомо. Тому, з метою хоча б приблизної оцінки F_0 , ми скористалися виразом, що пов'язує першу власну частоту квадратної мембрани з її геометричними та механічними характеристиками [9]:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}L} \sqrt{\frac{F_0}{\bar{\rho}}}, \text{ звідки } F_0 = 2f_1^2 L^2 \bar{\rho}. \quad (12.4)$$

Основну енергетику везикулярного шуму зосереджено приблизно в діапазоні від 50 Гц до 250 Гц. Вважаючи, наприклад, середню частоту рівною 100 Гц і використовуючи наведені вище характеристики стінок альвеол і формулу (12.4), неважко показати, що величина натягу F_0 може бути порядку $2 \cdot 10^{-5}$ Н/м.

Далі необхідно задати змінний натяг мембрани $F(t)$. Для простоти оберемо періодичну функцію

$$F(t) = \frac{\bar{F}}{2} \left(1 + \sin \left(2\pi \tilde{f} t - \pi / 2 + \varphi \right) \right), \quad (12.5)$$

тут частота $\tilde{f} = 0,345$ Гц (період 2,9 с) приблизно відповідає частоті дихання, тобто реальній тривалості одного циклу вдих-видих; \bar{F} – амплітуда; φ – початкова фаза. Зауважимо, що в будь-який момент часу t у функції $F(t)$ немає від'ємних значень.

Тепер потрібно встановити конкретні значення параметрів $F_0, \bar{\rho}, L$ і φ . Очевидно, якщо ми надамо цим параметрам значень деяких конкретних чисел, то зможемо моделювати механізм збудження коливань лише однієї альвеоли на одній частоті. Насправді одночасно коливаються стінки множини альвеол, які мають різну форму, розміри, початковий натяг і, отже, різні власні частоти коливань. Крім цього, стінки всіх альвеол у паренхімі, очевидно, не можуть коливатися синхронно з тією самою фазою, та й довжина шляхів від різних стінок до точки, де проводиться реєстрація шуму, різна, що зумовлює різну фазову затримку. Саме за рахунок складання цієї множини коливань із

різними частотами і фазами породжується шумовий сигнал, характерний для везикулярного дихання.

Щоб хоч малою мірою врахувати вказану обставину, зробимо таке. Вважатимемо, що у нас є деякий досить представницький ансамбль мембран, і їхня кількість M становить 250. У кожному числовому розв'язку рівняння (12.3) параметри вибиратимемо випадково в межах таких інтервалів:

$$3 \cdot 10^{-6} \leq F_0 \leq 60 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}, \quad 4 \cdot 10^{-3} \leq \bar{\rho} \leq 16 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^2, \\ 2,5 \cdot 10^{-4} \leq L \leq 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Величину \bar{F} виберемо рівною $6 \cdot 10^{-6}$ Н/м. У результаті отримаємо 250 різних значень амплітуд відхилення центра мембран, які усереднимо і далі вважатимемо, що звуковий тиск, який поширюється в навколишньому середовищі (тобто в паренхімі), в кожний момент часу t_j пропорційний цій усередненій амплітуді.

Числовий розв'язок диференціального рівняння (12.3) отримали на часовому інтервалі спостереження тривалістю 32 с. За частоти дискретизації $f_a = 2048$ Гц кількість точок розбиття інтервалу спостереження становила $N = 59440$. Відповідно набір величин $t_j = j / f_a$ ($j = 1, 2, \dots, N$) визначав поточну дискретну точку часового інтервалу спостереження. Отже, рівняння (12.3) для кожного t_j розв'язувалося 250 разів. Після цього у кожній точці часового інтервалу спостереження визначали середню амплітуду відхилення центра мембрани:

$$\tilde{A}(t_j) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M A_m(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (12.6)$$

Вкажемо ще одну дуже важливу обставину. Паренхіма легенів має властивість значною мірою поглинати звукові коливання. Причому зі зростанням частоти звукових коливань поглинання збільшується. Орієнтовно можна вважати, що наявність поглинання призводить до зниження рівня звукових коливань зі зростанням частоти пропорційно величині $1/f^2$. Щоб урахувати цю властивість паренхіми, отриманий у результаті розрахунків сигнал пропускали через низькочастотний фільтр із частотою зрізу близько 50 Гц і крутістю спадання близько 12 дБ на октаву.

Отже, в межах прийнятої моделі у формі часового ряду, отримано модельний сигнал, який певною мірою імітує везикулярний шум дихання, що реєструється на поверхні грудної клітки. Причому джерелом звуку є мембрани, поперечні коливання яких викликані лише періодичною зміною їхнього натягу.

12.5.2. Аналіз числових результатів

Насамперед, подивимося, в якому діапазоні частот лежать власні частоти мембран. На рис. 12.9, як приклад, зображено значення частоти f_1 , отримані в результаті однієї реалізації випадкового вибору параметрів мембран у межах зазначених вище інтервалів. Як видно з графіка, значення частот лежать у смузі від 40 до 270 Гц, що приблизно відповідає діапазону, в якому зосереджено основну частку енергії везикулярних шумів.

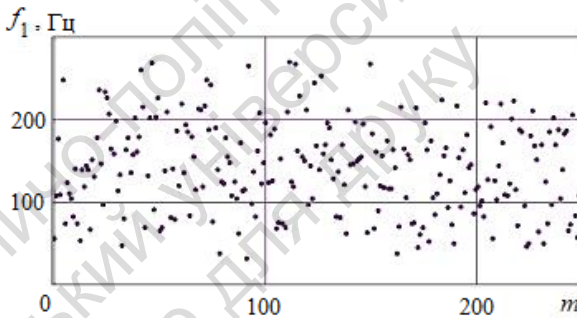


Рис. 12.9. Одна з реалізацій випадкового вибору власних частот мембрани

Далі розглянемо отриманий у результаті розрахунків модельний сигнал $\tilde{A}(t, f)$, який імітує везикулярний шум дихання, і порівняємо його з реальним сигналом $R(t)$ везикулярного шуму (рис. 12.10). Як і слід було очікувати, загальна форма модельного сигналу дещо відрізняється від форми реального сигналу везикулярного шуму. В модельному сигналі відсутній яскраво

виражений поділ сигналу на фази наростання та спадання сили натягу, що відповідають фазам вдиху та видиху. У реальному сигналі вони виражені чіткіше. Тим не менш, добре проглядається характерна амплітудна модуляція модельного сигналу, викликана періодичним розтягуванням мембрани. Ця властивість модуляції модельного сигналу добре корелює з періодичною зміною амплітуди реального сигналу, викликаного циклічністю процесу дихання.

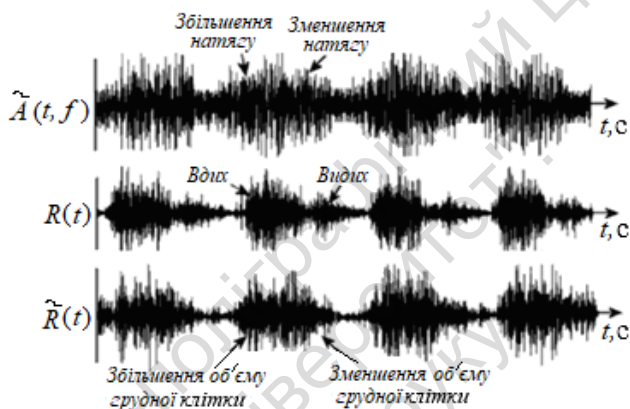


Рис. 12.10. Часові реалізації: $\tilde{A}(t, f)$ – модельний сигнал;

$R(t)$ – реальний сигнал везикулярного шуму дихання;

$\tilde{R}(t)$ – реальний сигнал, що виникає за рахунок періодичного збільшення об'єму грудної клітки за відсутності потоку повітря у бронхіальному дереві

Ще цікавіше порівняти модельний сигнал із сигналом $\tilde{R}(t)$, що виникає за рахунок періодичного збільшення та зменшення об'єму грудної клітки за відсутності потоку повітря в бронхіальному дереві, рис. 12.10. Порівнюючи сигнали $\tilde{A}(t, f)$ і $\tilde{R}(t)$ неважко переконатися, що вони дуже схожі.

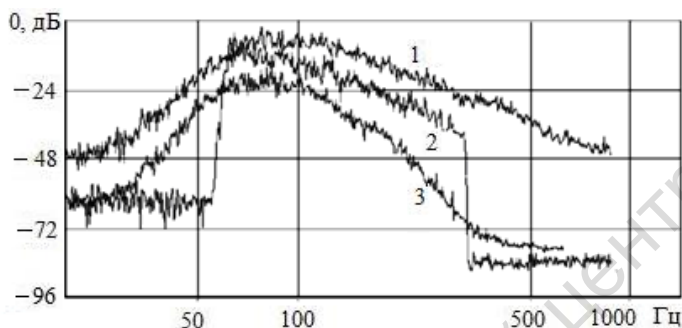


Рис. 12.11. Спектри шумових сигналів:
 1 – $R(t)$, 2 – $\tilde{A}(t, f)$, 3 – $\tilde{R}(t)$

Порівняємо спектри згаданих сигналів, для цього звернемося до рис. 12.11. Як видно, характер усіх трьох спектрів практично однаковий, принаймні, у смузі частот приблизно від 60 до 300 Гц. Поза цим діапазоном частот модельний сигнал просто не існує, оскільки значення власних частот мембран обмежені прийнятими вище інтервалами фізичних параметрів стінок альвеол (див. рис. 12.9). Це вказує на те, що реальний розкид геометричних і механічних параметрів стінок альвеол набагато ширший, ніж прийнятий для розрахунків. Можливо також, що у процесі дихання коливаються не лише стінки альвеол, а і стінки альвеолярних мішечків, а також стінки дрібних бронхіол.

Ми порівняли отриманий модельний сигнал і реальний сигнал везикулярного шуму, використовуючи такі досить загальні їхні характеристики, як форма сигналу і спектри. Тепер видається важливим дослідити й порівняти тоншу структуру цих сигналів, а саме наявність і характер кореляційної послідовності чергування членів їхніх часових рядів. Найдоцільніше це зробити проведенням аналізу фрактальних властивостей таких сигналів.

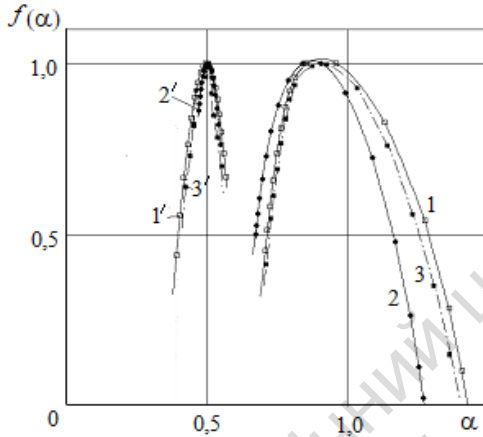


Рис. 12.12. Спектри сингулярностей:

- 1 – сигналу везикулярного шуму; 2 – модельного сигналу;
- 3 – сигналу, що виникає за рахунок періодичного збільшення об'єму грудної клітки за відсутності потоку повітря в бронхіальному дереві;
- 1'–3' – члени відповідних рядів, що описують ці сигнали, які випадковим чином перемішані

Звернемося до рис. 12.12, на якому зображено спектри сингулярностей усіх розглянутих нами сигналів. Як видно, всі спектри сингулярностей дуже близькі один до одного. Такий результат дозволяє дійти висновку, що достатньо представницький ансамбль найпростіших мембран, поперечні коливання яких виникають унаслідок їхнього періодичного розтягування, може генерувати мультифрактальний шумоподібний сигнал, що досить близький до сигналу везикулярного шуму.

На рис. 12.12 показано ще три спектри сингулярностей (криві 1', 2', 3'), які отримані після випадкового перемішування членів рядів, котрі описують сигнали (криві 1, 2, 3), що аналізуються. Процедура перемішування є стандартним тестом, який покликаний підтвердити наявність або відсутність далекодіяних кореляцій у часовому ряду. Як безпосередньо впливає з рис. 12.12, перемішування призвело до того, що мультифрактальні властивості сигналів зникли, і вказані ряди практично перетворилися

на монофрактальні сигнали, які близькі за властивостями до білого шуму. Нагадаємо, що білий шум є однорідним сигналом із величиною показника сингулярності 0,5. Це говорить про суттєвий вплив на формування мультифрактальних властивостей таких рядів далекодійних кореляцій.

На основі представлених результатів можна допустити, що виникнення везикулярного шуму дихання справді відбувається внаслідок коливань стінок альвеол у процесі їхнього періодичного розтягування під час дихання.

Описані дослідження дозволяють сподіватися, що мультифрактальний аналіз відкриє нові інформаційні характеристики для шуму дихання людини, які, з одного боку, допоможуть глибше зрозуміти природу дихальної системи людини, а, з іншого, будуть інформаційними параметрами в діагностиці стану здоров'я дихальної системи людини.

12.6. Інтервалограма серцевого ритму людини

Людське серце є джерелом основного біологічного сигналу – серцевого пульсу. Запис шкірних потенціалів серця (електрокардіограма (ЕКГ)), дає інформацію про електричну активність передсердь і шлуночків. Оскільки електрична активність людського серця схильна до впливу багатьох фізіологічних механізмів, електрокардіографія стала незамінним інструментом для діагностики патології серцево-судинної системи.

На рис. 12.13 показано стандартний вигляд фрагмента ЕКГ. Елементи хвильової картини ЕКГ позначають буквами *P-QRS-T*. Серед різних властивостей ЕКГ, мабуть найважливішу роль відіграє часовий розподіл послідовності, так званих *R-R інтервалів*. Інтервал *R-R*, який відповідає відстані між вершинами сусідніх зубців *R*, дорівнює тривалості одного серцевого циклу. Згідно з аналізом послідовності тривалості цих інтервалів можна говорити про можливість наявності деяких серцево-судинних захворювань. Тривалість *R-R* інтервалів легко виміряти, запи-

суючи послідовності R піків, що відчуваються людиною як удари пульсу. Отже, отримуємо *ряд кардіоінтервалів*, або, інакше, *кардіоінтервалограму* (для скорочення, казатимемо – *інтервалограма*). Змінність тривалості R - R інтервалів між послідовними циклами серцевих скорочень називають *варіабельністю серцевого ритму* (BCP).

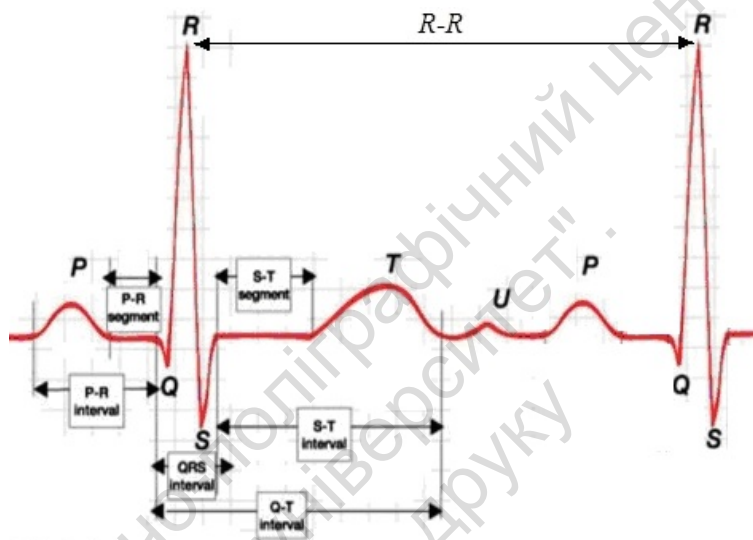


Рис. 12.13. Стандартний вигляд фрагмента ЕКГ [2]

Протягом довгого часу вважали, що серцевий ритм має бути сталим, аби забезпечити стабільне функціонування всього організму. Саме тому думали, що коли людина хворіє чи старіє, то її організму важче підтримувати сталий серцевий ритм і ступінь його варіації зростає.

Проте сучасні дослідження змінили давні уявлення лікарів. Аналіз серцевого ритму показав, що його варіабельність (високий ступінь змінності) притаманна молодим і здоровим організмам, адже саме така хаотична динаміка дозволяє нашому організму пристосовуватись до різких змін у навколишньому середовищі, а от зниження варіації серцевого ритму навпаки прита-

манне людям старшого віку чи людям з певними змінами здоров'я. Аналіз зміни тривалості в послідовності інтервалів між ударами пульсу виявився дуже важливим з погляду оцінювання наявності або можливості виникнення серцево-судинних захворювань.

Мабуть інтервалограма людини була серед перших біологічних сигналів, які досліджували з погляду теорії хаосу і фрактального аналізу [76]. Надалі ці дослідження суттєво розширилися й отримали велику бібліографію, див. наприклад [57, 66].

12.7. Мультифрактальні властивості серцевого ритму

Перейдемо до мультифрактального аналізу інтервалограми людини. На рис. 12.14, *a* показано інтервалограму здорової людини, тобто динамічний ряд послідовності $R-R$ інтервалів. Маємо 90 000 відліків. Це приблизно 22 години спостережень. Уздовж осі абсцис відкладено номер відліку, уздовж осі ординат – тривалість $R-R$ інтервалів у секундах. Як бачимо, пульс здорової людини від відліку до відліку має певні варіації.

Важливо проводити аналіз серцевого ритму на відносно малих проміжках часу, так званих *часових вікнах* (див. підрозд. 11.6). Аналіз такої динаміки дозволить попередити можливість виникнення порушень у роботі серця. Нехай тривалість вікна відповідає 2000 відліків. Це в середньому становить 24 хв. На рис. 12.14, *б* зображено спектри сингулярності для чотирьох вікон. Положення вікон показано на рис. 12.14, *a* вертикальними лініями з відповідними номерами.

Спектри сингулярностей будували за допомогою методу МФ-БФА з такими параметрами: вікно тривалістю 2000 відліків розділяли на інтервали від мінімального, що становив 32 відліки, до максимального – 500 відліків. Усього, в зазначених межах зміни довжини інтервалів, було 32 варіанти розбиття вікна тривалістю у 2000 відліків.

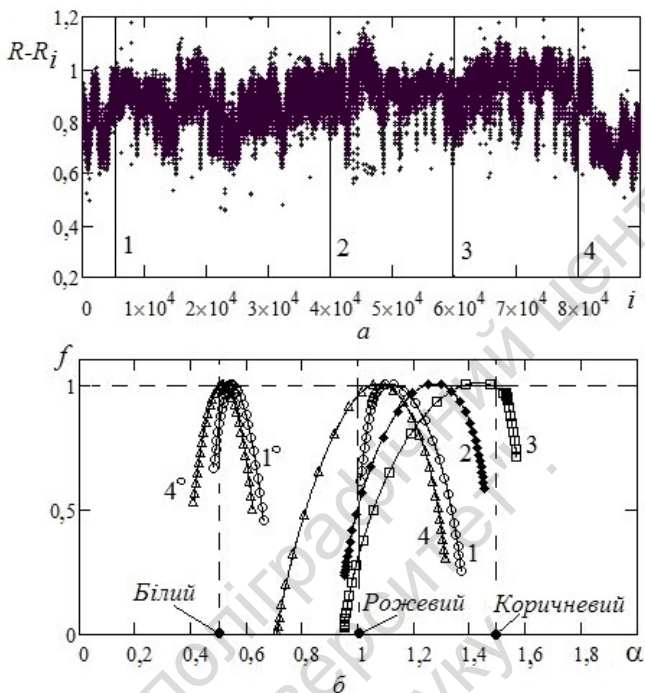


Рис. 12.14. Інтервалограма (а) і спектри сингулярності (б) здорової людини: спектри сингулярностей побудовано для чотирьох вікон; положення вікон показано на пульсограмі вертикальними лініями з відповідними номерами; криві 1° і 4° побудовано для вікон 1 і 4 з попередньо перемішаними випадковим чином відліками

Також на осі абсцис жирними точками показано положення показника сингулярності монофрактальних сигналів, а саме: білого, рожевого і коричневого шуму. Зазначені шуми виступають як "еталонні" сигнали, фрактальні властивості яких добре відомі. Нагадаємо їх (див. підрозд. 10.6): білий шум – це "найнепередбачуваніший" процес, оскільки повністю відсутня кореляція між його послідовними значеннями. В результаті інтегрування білого шуму (для дискретного ряду це побудова накопичувальної суми) отримуємо коричневий шум. Його основною властивістю є те, що прирости в часовому ряді є незалежні. Рожевий

шум можна інтерпретувати як компроміс між повністю некорельованим білим шумом та більш "гладким" коричневим шумом (див. рис. 10.2 і рис. 10.3).

Отже, з рис. 12.14, б бачимо, що положення кривих спектрів сингулярностей (положення їхніх максимумів) для здорової людини скупчується між рожевим і коричневим шумом.

Криві 1° і 4° побудовано для вікон 1 і 4 з попередньо перемішаними випадковим чином відліками. Як бачимо, характер спектра різко змінився: по-перше, положення спектра (його максимум) розташовано в околі білого шуму, а по-друге, звужилася ширина спектра. Можна стверджувати, що довготермінові кореляції, що притаманні серцевому пульсу здорової людини, були, в результаті перемішування відліків, зруйновані.

Тепер звернемося до інтервалограми на рис. 12.15, а. Тут на певному відрізку часу у людини був напад тахікардії (*тахікардія* – збільшення частоти серцевого ритму до більш аніж 90 ударів за хвилину). Цей факт отримав своє відображення на рис. 12.15, б, де побудовано спектри сингулярностей. Як бачимо, криві 3 і 4, що відповідають ділянці з тахікардією на пульсограмі (рис. 12.15, а), розміщені в околі білого шуму. Це говорить про відсутність будь-яких кореляцій між відліками серцевого ритму за наявності тахікардії.

Звісно, важливу інформацію містять дані про динаміку зміни характеру спектра сингулярностей упродовж тривалого часу спостереження за серцевим ритмом людини. На рис. 12.16 показано зміну показника сингулярності α_0 , який фіксує положення максимуму кривої спектра сингулярностей, коли вікно визначеної тривалості, рухається вздовж часового ряду даних. Для часових рядів на рис. 12.14, а і рис. 12.15, а кількість відліків становила 90 000, ширина вікна – 2000, коефіцієнт перекриття вікон становив 0,05, тобто 100 відліків у вікнах перекривалися.

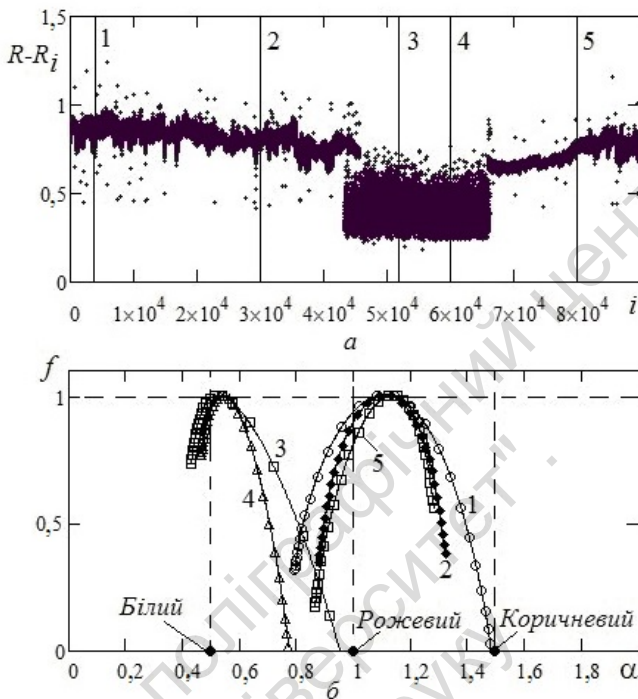


Рис. 12.15. Інтервалограма (а) і спектри сингулярності (б) людини за наявності тахікардії: побудовано спектри сингулярностей для п'яти вікон; положення вікон показано на пульсограмі вертикальними лініями з відповідними номерами

Як бачимо, у здорової людини (чорні кружки на рис. 12.16) практично всі значення α_0 перебувають у межах, що визначаються рожевим і коричневим шумом, тобто від 1 до 1,5. Білі кружки відповідають інтервалограмі людини, в якій на певному проміжку часу, спостерігається тахікардія. На ділянці часу, де тахікардія відсутня, білі кружки скупчені поряд із чорними, а на ділянці тахікардії – величина α_0 зменшується до значення, яке відповідає білому шуму.

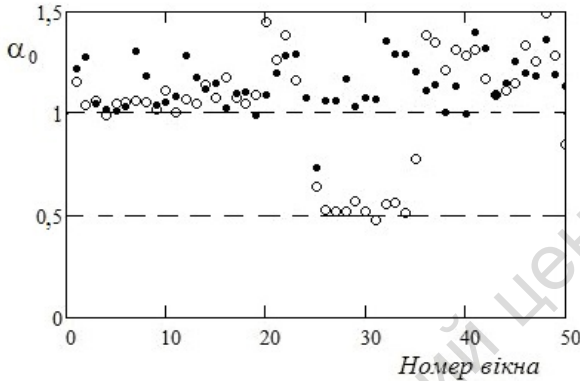


Рис. 12.16. Залежність показника α_0 від номера вікна:
чорні кружки – пульс здорової людини (рис. 12.14, *a*),
білі кружки – пульс людини з тахікардією (рис. 12.15, *a*)

Отже, мабуть можна сподіватися, що мультифрактальний аналіз експериментальних даних сигналів медико-біологічного походження відкриє нові інформаційні характеристики, які, з одного боку, допоможуть глибше зрозуміти природу людського організму, а, з другого, стануть інформаційними параметрами в діагностиці стану здоров'я людини.

12.8. Реконструкція атрактора серцевого ритму

Хоча складність досліджуваної нами системи очевидна, спробуємо виконати реконструкцію атрактора по спостережуваній, використовуючи метод, описаний у розд. 9. За спостережувану візьмемо інтервалограму людини.

На рис. 12.17 зображено проєкції атрактора серцевого ритму у тривимірному просторі вкладення: рис. 12.17, *a* – здорова людина (вікно 2 на рис. 12.14), рис. 12.17, *б* – людина за наявності тахікардії (вікно 2 на рис. 12.15), рис. 12.18, *в* – людина за наявності тахікардії (вікно 4 на рис. 12.15). Можемо спостерігати суттєву

зміну вигляду атрактора. Для здорової людини (рис. 12.17, *a*) атрактор має вигляд своєрідного веретена. У людини із серцевими проблемами за відсутності тахікардії (рис. 12.17, *б*) атрактор також має вигляд веретена, але займає у фазовому просторі значно менший об'єм, що пов'язано зі зменшенням варіабельності серцевого ритму. Візуально ми це спостерігаємо на рис. 12.14, *a* і рис. 12.15, *a*. За наявності тахікардії (рис. 12.17, *в*) атрактор різко змінив свою форму і має вигляд кулеподібного скупчення. Така форма відповідає спектру сингулярностей на рис. 12.15 (криві 3 і 4). Все говорить про наявність суто випадкового процесу, близького за властивостями до білого шуму.

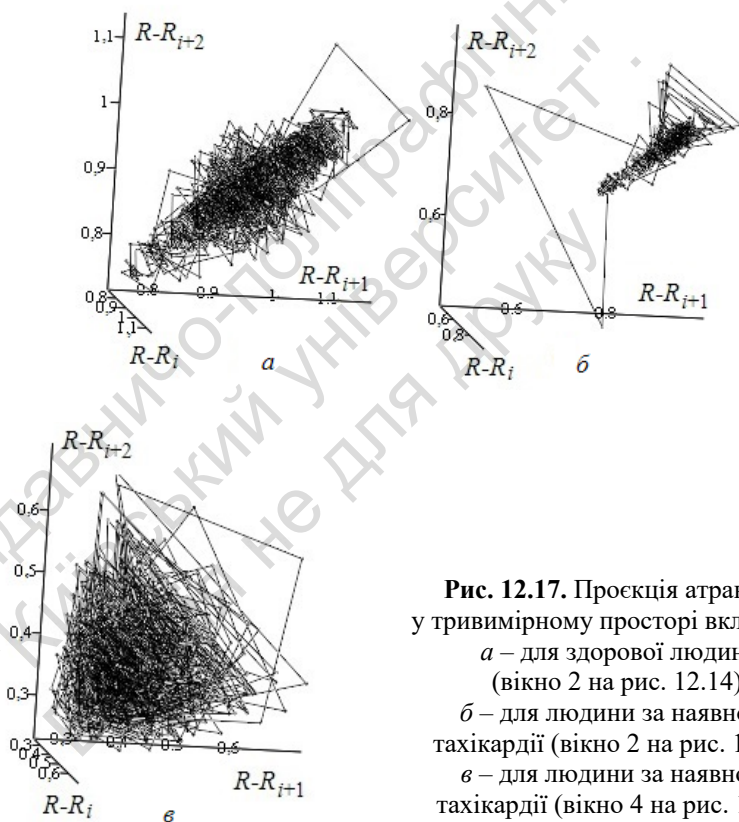


Рис. 12.17. Проекція атрактора у тривимірному просторі вкладення:
a – для здорової людини (вікно 2 на рис. 12.14),
б – для людини за наявності тахікардії (вікно 2 на рис. 12.15),
в – для людини за наявності тахікардії (вікно 4 на рис. 12.15)

Рис. 12.18 ілюструє спробу оцінювання кореляційної розмірності атратора по спостережуваній (інтервалограма людини), розмірність простору вкладення послідовно покладали $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Розглянуті ті самі три ситуації, що й на рис. 12.17. Як приклад, на рис. 12.18, *а* показано залежність кореляційного інтеграла $C(\delta)$ від розміру елемента покриття для здорової людини (вікно 2 на рис. 12.14) у разі зміни розмірності простору вкладення m ; у двох інших випадках характер кривих подібний. На рис. 12.18, *б* дано залежність розрахункової оцінки кореляційної розмірності $D_2(m)$ від розмірності простору вкладення m . Дані на рис. 12.18 свідчать про відсутність насичення значення кореляційної розмірності D_2 у разі збільшення розмірності простору вкладення m . Це говорить про те, що досліджувану нами систему мабуть не можна вважати системою з малою розмірністю.

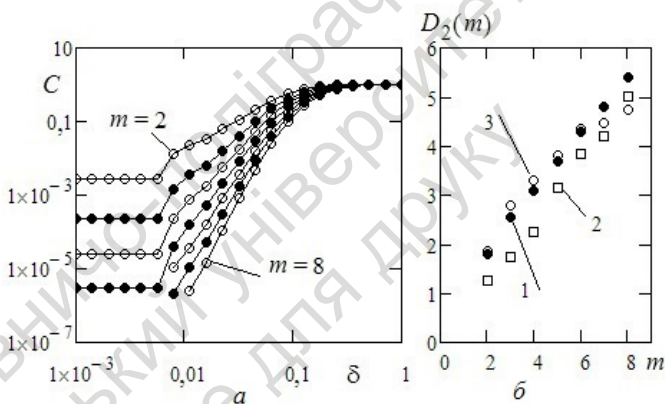


Рис. 12.18. Визначення розмірності атратора серцевого ритму по спостережуваній (інтервалограма людини), розмірність простору вкладення $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$:
а – залежність кореляційного інтеграла $C(\delta)$ від розміру елемента покриття, для здорової людини (вікно 2 на рис. 12.14);
б – розрахункова оцінка кореляційної розмірності $D_2(m)$:
 1 – для здорової людини (вікно 2 на рис. 12.14),
 2 – для людини за наявності тахікардії (вікно 2 на рис. 12.15),
 3 – для людини за наявності тахікардії (вікно 4 на рис. 12.15)

На закінчення розділу, наведемо міркування авторів монографії [2]. Зрозуміло, що не всі природні системи можуть бути повністю осмислені на основі результатів аналізу часового ряду. Підходи, направлені на отримання характеристик, подібних до кореляційної розмірності, показників Ляпунова й інших, із ряду причин можуть бути неефективними, хоча б тому, що небагато реальних систем можна вважати динамічними і малорозмірними.

Водночас багато явищ можна вивчати за допомогою процедур нелінійної динаміки, обмежуючись порівняльними характеристиками. Головне тут – розпізнавати різноманітні типи поведінки системи, а не приписувати їм абсолютні показники. Класифікація станів також може давати цінні відомості й розширювати наші знання з досліджуваної проблеми. Крім того, класифікація сама по собі часто дуже важлива.

Завдяки постійному розширенню сфери застосування, не дивлячись на пов'язані із цим питання обґрунтованості використання, теорія динамічних систем може стати, по суті, парадигмою аналізу часових рядів. Не остання роль у цьому належить концепції, згідно з якою якість результату – єдиний важливий аргумент на користь застосування методу. Такий підхід особливо характерний для кардіологічної практики, дуже багато дослідників справді вважають, що серцева тканина – це нелінійна динамічна система.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Анищенко В. С.* Лекции по нелинейной динамике / В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова. – М.–Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. – 516 с.
2. *Ардашев А. В.* Практические аспекты современных методов анализа variability сердечного ритма / А. В. Ардашев, А. Ю. Лоскутов. – М. : ИД "МЕДПРАКТИКА-М", 2010. – 127 с.
3. *Арнольд В. И.* О преподавании математики / В. И. Арнольд // Успехи матем. наук. – 1998. – 53. – Вып. 1. – С. 228–234.
4. *Берже П.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М. : Мир, 1991. – 367 с.
5. *Борн М.* Возможно ли предсказание в классической механике / М. Борн // УФН. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 173–187.
6. *Вовк И. В.* Природа шумов дыхания и их мультифрактальные свойства / И. В. Вовк, В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура // Акустический журнал. – 2013. – 59. – № 5. – С. 636–647.
7. *Вовк И. В.* Моделирование механизма генерации везикулярных шумов дыхания / И. В. Вовк, В. Т. Мацыпура // Доповіді НАН України. – 2015. – № 8. – С. 28–33.
8. *Гнеденко Б. В.* Курс теорії імовірностей : підручник / Б. В. Гнеденко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. – 464 с.
9. *Грінченко В. Т.* Основи акустики : навч. посіб. / В. Т. Грінченко, І. В. Вовк, В. Т. Мацыпура. – К. : Наук. думка, 2007. – 640 с.
10. *Гринченко В. Т.* Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – К. : Наук. думка, 2005. – 263 с.

11. *Гринченко В. Т.* Фракталы: от удивления к рабочему инструменту : учеб. пособие / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – К. : Наук. думка, 2013. – 270 с.
12. *Гринченко В. Т.* Мультифрактальні властивості випадкових процесів і випадкові хвильові поля : навч. посіб. / В. Т. Гринченко, О. Б. Курилко, В. Т. Мацыпура. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2021. – 248 с.
13. *Данилов Ю. А.* Что такое синергетика? / Ю. А. Данилов, Б. Б. Кадомцев // В кн. : Нелинейные волны: Самоорганизация. – М. : Наука, 1983. – 264 с.
14. *Дыхне А. М.* Проводимость двумерной двухфазной среды / А. М. Дыхне // ЖЭТФ. – 1970. – 59. – С. 110–115.
15. *Дыхне А. М.* Устойчивость и хаос в двумерных случайно-неоднородных средах и LC цепочках / А. М. Дыхне, А. А. Снарский, А. М. Женировский // УФН. – 2004. – 174. – № 8. – С. 887–894.
16. *Зельдович Я. Б.* Элементы математической физики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1973. – 351 с.
17. *Зражевський О. Г.* Statistical methods for determine long-range dependent time series / О. Г. Зражевський // XI Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука. – К. – 2006. – С. 731.
18. *Капица С. П.* Синергетика и прогнозы будущего / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.
19. *Капустян О. В.* Теорія динамічних систем : навч. посіб. / О. В. Капустян, В. В. Пічкур, В. В. Собчук – Луцьк : Вежа-Друк, 2020. – 348 с.
20. *Кириченко Л. О.* Исследование выборочных характеристик, полученных методом мультифрактального флуктуационного анализа / Л. О. Кириченко // Вісник НТУУ "КПІ". Серія "Інформатика, управління та обчислювальна техніка". – 2011. – № 54. – С. 101–110.

21. *Кравцов О. В.* Основы нелинейного анализа. Курс лекций / О. В. Кравцов, Г. О. Южакова. – К. : НТТУ "КПИ ім. Ігоря Сікорського", 2022. – 156 с.
22. *Кронвер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кронвер. – М. : Постмаркет, 2000. – 350 с.
23. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос / С. П. Кузнецов. – М. : Физматлит, 2001. – 295 с.
24. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение / П. Леви. – М. : Наука, 1972. – 375 с.
25. *Малинецкий Г. Г.* Теория самоорганизации. На пороге IV парадигмы / Г. Г. Малинецкий // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – 5, № 3. – С. 315–366.
26. *Малинецкий Г. Г.* Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. – М. : Эдиториал УРСС, 2002. – 300 с.
27. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М. : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
28. *Мандельштам Л. И.* Полное собрание трудов. В 5 т. Т. 4. – М. : Изд-во АН СССР, 1955. – 512 с.
29. Випадкові процеси. Теорія, статистика, застосування : підручник / Ю. С. Мішура, К. В. Ральченко, Л. М. Сахно, Г. М. Шевченко. – ВПЦ "Київський університет", 2018. – 479 с.
30. *Неймарк Ю. И.* Математические модели как наука и искусство / Ю. И. Неймарк. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского ун-та, 2010. – 420 с.
31. *Николис Г.* Познание сложного. Введение / Г. Николис, И. Пригожин. – М. : Мир, 1990. – 334 с.
32. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. – М. : ИЛ, 1962. – 279 с.

33. *Олемской А. И.* Мультифрактальный анализ временных рядов / А. И. Олемской, В. Н. Борисюк, И. А. Шуда // Вісник СумДУ. Серія "Фізика, математика, механіка". – 2008. – № 2. – С. 70–81.
34. *Оседец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем / В. И. Оселедец // Тр. Московского математического общества. – 1968. – 19. – С. 197–231.
35. *Павлов А. Н.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов / А. Н. Павлов, В. С. Анищенко // УФН. – 2007. – 177, № 8. – С. 859–876.
36. *Парасюк І. О.* Динамічні системи (Dynamical systems) : навч. посіб. / І. О. Парасюк. – К. – 2022. – 209 с. http://www.diffeq.univ.kiev.ua/download/dynamical_systems-textbook.pdf
37. *Пуанкаре Анри.* О науке / Анри Пуанкаре. – М. : Наука, 1983. – 560 с.
38. *Рабинович Е. В.* Особенности динамики системы двух связанных гармонических отображений / Е. В. Рабинович // Математические структуры и моделирование. – 2016. – № 1 (37). – С. 5–17.
39. *Скорород А. В.* Вероятность вокруг нас / А. В. Скорород. – К. : Наук. думка, 1980. – 196 с.
40. Странные аттракторы : сборник статей / под ред. Я. П. Синая и Л. П. Шильникова. – М. : Мир, 1981. – 253 с.
41. *Труш Н. Н.* Использование устойчивых распределений в учебном процессе / Н. Н. Труш, Т. В. Соболева // Материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию Белорусского гос. ун-та. – Минск, БГУ. – 2006. – С. 468–471.
42. *Уокер Дж.* Физический фейерверк / Дж. Уокер. – М. : Мир, 1989. – 298 с.

43. *Федер Е.* Фракталы / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 260 с.
44. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем / М. Фейгенбаум // УНФ. – 1983. – 141, № 2. – С. 343–374.
45. Хаотические системы // Тематический выпуск журнала ТИИЭР. – 1987. – 75, № 8. – 175 с.
46. *Хусаинов Д. Я.* Основи нелінійної динаміки : навч. посіб. / Д. Я. Хусаинов, А. В. Шатирко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2017. – 159 с.
47. *Черногор Л. Ф.* О нелинейности в природе и науке / Л. Ф. Черногор. – Х. : – ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2008. – 528 с.
48. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя / А. Н. Шарковский // Украинский математический журнал. – 1964. – № 1. – С. 61–71.
49. *Швець О. Ю.* Детермінований хаос : навч. посіб. / О. Ю. Швець. – К. : НТУУ "КПІ", 2010. – 93 с.
50. *Шергин В. Л.* Связь между параметрами самоподобия, устойчивости и долгосрочной зависимости приращений фрактального движения Леви / В. Л. Шергин // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2016. – № 3. – С. 23–29.
51. *Ферми Энрико.* Научные труды / Энрико Ферми. В 2 т. Т. 2. – М. : Наука, 1972. – С. 645–656.
52. *Юкио Сато.* Без паники! Цифровая обработка сигналов / Сато Юкио. – М. : ИД "Додэка-XXI", 2010. – 176 с.
53. *Benettin G.* Kolmogorov entropy and numerical experiments / G. Benettin, L. Galgani, J.-M. Strelcyn // Physical Review. – 1976. – Vol. A14. – P. 2338–2345.
54. *Beran J.* Statistics for Long-Memory Processes / J. Beran. – New York : Chapman & Hall, 1994.
55. *Dauxois T.* Fermi, Pasta, Ulam, and a mysterious lady / T. Dauxois. – Physics Today. – 2008. – 61(1): 55.

56. *Filippov A. T.* The Versatile Soliton / A. T. Filippov. – Boston : Birkhauser, 2000. – 261 p.
57. *Goldberger A. L.* Nonlinear dynamics, fractals, and chaos theory: Implications for neuroautonomic heart rate control in health and disease / A. L. Goldberger ; C. Bolis C., J. Licinnio (eds.) // The Autonomic Nervous System. – Geneva : World Health Organization. – 1999.
58. *Grassberger P.* Measuring the Strangeness of Strange Attractors / P. Grassberger, I. Procaccia / *Physica D* 9. – 1983. – P. 189–208.
59. *Hurst H.* Long-term storage capacity of reservoirs / H. Hurst // *Transaction of American Society of Civil Engineers.* – 1951. – Vol. 116. – P. 770–808.
60. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series / J. W. Kantelhardt , S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Brude et al. // *Physica A.* – 2002. – Vol. 316. – P. 87–114.
61. *Kaplan J. L.* A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations / J. L. Kaplan, J. A. Yorke ; H.-O. Peitgen, H.-O. Walther (eds.) // *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics.* – Berlin : Springer ; N. Y. : Springer. – 730. – 1979. – P. 204–227.
62. *Khintchine A. Ya.* Sur le lois stables / A. Ya. Khintchine, P. Lévy // *Comptes Rendus Acad. Sci., Paris,* – 1936. – Vol. 202. – P. 274.
63. *Li T.-Y.* Period Three Implies Chaos / T.-Y. Li, J. Yorke // *American Mathematical Monthly.* – 1975. – Vol. 82. – P. 985–992.
64. *Lighthill J.* The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics / J. Lighthill // *Proceeding of the Royal Society.* – 1986. – P. 35–50.
65. *Linsay P. S.* Period Doubling and Chaotic Behavior in Driver Anharmonic Oscillator / P. S. Linsay // *Physical Review Letters.* – 1981. – Vol. 47 – P. 1349–1352.

66. Multifractal estimates of monofractality in RR-heart series in power spectrum ranges / D. Makowiec, A. Dudkowska, R. Gałaska, A. Rynkiewicz // *Physica A.* – 2009. – Vol. 388, September. – P. 3486–3502.
67. Buchowiecka Reading multifractal spectra : Aging by multifractal analysis of heart rate / D. Makowiec, A. Rynkiewicz, R. Gałaska et al. // *EPL.* – 2011, June. – Vol. 94 : 68005–p1-p6.
68. *Mane R.* On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps / R. Mane ; D. Rang, L. S. Young (eds.) // *Lecture Notes in Mathematics* – Berlin : Springer. – 1981. – 898. – P. 230–242.
69. Fermi, Pasta, Ulam and the Birth of Experimental Mathematics / Mason A. Porter, Norman J. Zabusky, Bambi Hu and David K. Campbel // *American Scientist.* – Vol. 97. – 2009. – Sigma Xi, The Scientific Research Society. – P. 214–221.
70. *Moklyachuk Mikhail P.* Long-range dependence of time series for MSFT data of the prices of shares and returns / Mikhail P. Moklyachuk, Aleksey G. Zrazhevsky // *Random Oper. and Stoch. Equ.* – 2006. – Vol. 14. – № 2. – P. 101–113.
71. *Nakao H.* Multi-scaling properties of truncated Levy flights / H. Nakao // *Phys. Lett. A.* – 2000. – Vol. 266. – P. 282–289.
72. *Nico F. Declercq.* Acoustic diffraction effects at the Hellenistic amphitheater of Epidaurus: seat rows responsible for the marvelous acoustics / F. Declercq Nico, S. A. Dekeyser Cindy // *Journal of the Acoustical Society of America.* – 2007. – 121(4). – P. 2011–2022.
73. *Nolan J.* Stable distributions. 11 Models for Heavy Tailed Data / J. Nolan // *Math. Stat Department Am. Univer-* sity. – 2002. – P. 1–23.
74. *Geometry from a Time Series* / N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw // *Physical Review Letters.* – 1980. – Vol. 45. – P. 712.

75. *Parisi G.* In: Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics / G. Parisi, U. Frisch ; M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi (eds.) // Proc. Intern. School of Physics 'E. Fermi,' 1983, Verenna, Italy. – Amsterdam: North-Holland, 1985. – P. 84–87.
76. *Peng C.-K.* Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series / C.-K. Peng, S. Havlin, A. L. Goldberger // Chaos. – 1995. – Vol. 5. – № 1. – P. 82–87.
77. *Sprott J. C.* Some simple chaotic flows / J. C. Sprott // Physical Review. – 1994. – Vol. E50. – № 2. – P. 647–650.
78. *Richardson L. F.* Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbor graph // Proceeding of the Royal Society A. – 1926. – Vol. 110. – P. 709.
79. Identification of coupling direction: application to cardiorespiratory interaction / M. G. Rosenblum, L. Cimponeriu, A. Bezerianos et al. // Physical review E. – Vol. 65, 041909. – 2002. – P. 1–11.
80. *Takens F.* Detecting strange attractor in turbulence / F. Takens ; D. Rang, L. S. Young (eds.) // Lecture Notes in Mathematics. – Berlin : Springer. – 1981. – 898. – P. 366–381.

З М І С Т

Вступне слово	3
Передмова	5
Вступ	9

РОЗДІЛ 1

ДИНАМІЧНА СИСТЕМА Й ІНСТРУМЕНТИ

ІІ ДОСЛІДЖЕННЯ	16
1.1. Математична модель	16
1.2. Лінійні і нелінійні математичні моделі	19
1.3. Що таке динамічна система?	23
1.4. Фазовий простір динамічної системи	27
1.5. Фазовий портрет коливальної системи з одним ступенем вільності	31
1.6. Зміна фазового об'єму	42
1.7. Лінійний аналіз стійкості особливих точок на фазовій площині	46
1.8. Граничні цикли	55
1.9. Характеристичні показники Ляпунова	60
1.10. Стійкість фазових траєкторій у системах із дискретним часом	68
1.11. Алгоритм числового обчислення показників Ляпунова	71
1.12. Структурна стійкість і біфуркації динамічних систем	76
1.13. Перетин Пуанкаре	85

РОЗДІЛ 2

ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ

ФУНКЦІЙ І СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ	91
2.1. Поняття випадкової функції	91
2.2. Характеристики випадкових функцій	93
2.3. Стаціонарність і ергодичність випадкових процесів	96
2.4. Властивості кореляційної функції	99

2.5. Взаємна кореляційна функція	101
2.6. Перетворення Фур'є не випадкових функцій.....	102
2.7. Спектрально-кореляційний аналіз невипадкових функцій	107
2.8. Фур'є-аналіз неінтегрованих функцій	109
2.9. Спектр потужності випадкової функції	113
2.10. Час кореляції і ефективна ширина спектра.....	117
2.11. Теорема Котельникова.....	118
2.12. Застосування теореми Котельникова до процесу скінченної тривалості.....	124
2.13. Дискретне перетворення Фур'є	127

РОЗДІЛ 3

ФРАКТАЛИ В НЕЛІНІЙНІЙ ДИНАМІЦІ.....	133
3.1. Поняття фрактала	133
3.2. Розмірності множини.....	138
3.3. Гельдерова регулярність функції.....	147
3.4. Приклади фрактальних функцій	149
3.5. Що таке мультифрактал?.....	151
3.6. Мультифрактальний спектр міри.....	154
3.7. Мультифрактальний формалізм.....	156
3.8. Властивості функції спектра сингулярностей	158
3.9. Кореляційна розмірність.....	164
3.10. Розмірність Ляпунова	167

РОЗДІЛ 4

ОДНОВИМІРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ	171
4.1 Властивості одновимірних відображень	172
4.2. Логістичне відображення	178
4.3. Біфуркаційна діаграма логістичного відображення.....	186
4.4. Порядок Шарковського	192
4.5. Дві фундаментальні властивості відображення, які визначають стан хаосу в системі.....	193
4.6. Шум і біфуркаційне дерево	197
4.7. Перехід до хаосу через перемежування	198

4.8. Хаос у ланцюжкових структурах.....	202
4.9. Явище детермінованого хаосу в самодуальних середовищах	212

РОЗДІЛ 5

ДВОВИМІРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ	223
5.1. Відображення Ено	223
5.2. Біфуркаційна діаграма відображення Ено	229
5.3. Спектр показників Ляпунова відображення Ено.....	231
5.4. Фрактальна розмірність атрактора відображення Ено	232
5.5. Динаміка системи двох зв'язаних відображень	233

РОЗДІЛ 6

ДИВНИЙ ХАОТИЧНИЙ АТРАКТОР У ДИСИПАТИВНІЙ НЕЛІНІЙНІЙ СИСТЕМІ	240
--	-----

РОЗДІЛ 7

НЕПЕРЕРВНІ СИСТЕМИ	251
7.1. Система Лоренца	251
7.2. Система Ресслера	269
7.3. Нелінійний осцилятор за гармонічного зовнішнього впливу	274

РОЗДІЛ 8

ФІЗИЧНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ	281
8.1. Нелінійний електричний контур за гармонічного зовнішнього впливу.....	281
8.2. Математична модель електронного генератора Чуа.....	285
8.3. Теоретичний аналіз математичної моделі генератора Чуа	288
8.4. Фізичний експеримент із генератором Чуа	295

РОЗДІЛ 9

РЕКОНСТРУКЦІЯ АТРАКТОРА

ПО СПОСТЕРЕЖУВАНІЙ	299
9.1. Теорема про вкладення	300
9.2. Метод затримки Такенса	301
9.3. Реконструкція атрактора Ено	306

РОЗДІЛ 10

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

ІЗ ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ	308
10.1. Проста модель броунівського руху	310
10.2. Фрактальна розмірність траєкторії броунівської частинки	315
10.3. Класичний броунівський сигнал.....	317
10.4. Узагальнений броунівський сигнал.....	319
10.5. Генерація узагальненого броунівського сигналу методом Фур'є-фільтрації	322
10.6. Довготривала і короткотривала залежність	324
10.7. Кольорові шуми.....	328
10.8. Аномальна дифузія.....	332
10.9. Стійкі процеси Леві.....	336
10.10. Класифікація самоподібних процесів.....	338
10.11. Генерація α -стійких випадкових величин	340

РОЗДІЛ 11

МОНОФРАКТАЛЬНИЙ І МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ

АНАЛІЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ	345
11.1. Статистичний феномен самоподібності Херста	346
11.2. Метод безтрендового флуктуаційного аналізу.....	350
11.3. Мультифрактальний аналіз сигналів.....	354
11.4. Тестування методу МФ-БФА	360
11.5. Обмеження методу мультифрактального аналізу	364
11.6. Аналіз кореляційних властивостей випадкових процесів за реалізаціями малої тривалості.....	367

РОЗДІЛ 12

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ СИГНАЛІВ

МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОГО ПОХОДЖЕННЯ.....	370
12.1. Будова респіраторної системи людини	370
12.2. Методика реєстрування шуму дихання.....	374
12.3. Часові та спектральні характеристики шуму дихання.....	375
12.4. Мультифрактальний аналіз шуму дихання людини	378
12.5. Моделювання механізму генерації везикулярного шуму дихання.....	382
12.5.1. Теоретична модель.....	382
12.5.2. Аналіз числових результатів.....	387
12.6. Інтервалограма серцевого ритму людини.....	391
12.7. Мультифрактальні властивості серцевого ритму.....	393
12.8. Реконструкція атратора серцевого ритму	397
Список літератури.....	401

Навчальне видання

Грінченко Віктор Тимофійович
Маципура Володимир Тимофійович
Снарський Андрій Олександрович

КРОК ДО ТАЄМНИЦЬ НЕЛІНІЙНОГО СВІТУ ХАОС І ФРАКТАЛИ

Навчальний посібник

Редактор *Л. В. Магда*
Технічний редактор *Ю. О. Куценко*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"



Формат 60x84^{1/16}. Ум. друк. арк. 24,18. Наклад 100. Зам. № 224-11066.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М9.
Підписано до друку 04.10.24

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"

Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 58; (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@knu.ua; vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.knu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02