

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра системного аналізу та теорії прийняття рішень

**Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня магістра**

за спеціальністю 124 Системний аналіз

на тему:

**МЕРЕЖЕВЕ ПЛАНУВАННЯ З ТРИВАЛІСТЮ РОБІТ У ФОРМІ
НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ ТИПУ-2**

Виконав студент 2-го курсу магістратури
Задорожний Антон Михайлович



(підпис)

Науковий керівник:
професор, доктор фіз.-мат. наук
Мащенко Сергій Олегович


(підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає
запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань.


Студент


(підпис)

Роботу розглянуто й допущено до
захисту на засіданні кафедри
системного аналізу та теорії прийняття
рішень

« 04 » травня 2023 р.,

протокол № 11
Завідувач кафедри
О. Г. Наконечний


(підпис)

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи 42 сторінки, 8 рисунків, 6 таблиць, 14 джерел посилань.

МЕРЕЖЕВЕ ПЛАНУВАННЯ, МЕРЕЖЕВИЙ ГРАФІК, НЕЧІТКА МНОЖИНА ТИПУ-2, НЕЧІТКЕ ЧИСЛО ТИПУ-2, КРИТИЧНИЙ ШЛЯХ, ФУНКЦІЯ НАЛЕЖНОСТІ.

Об'єктом дослідження є задача мережевого планування. Предметом дослідження є мережевий графік з нечіткими тривалостями робіт типу-2.

Метою роботи є розробка підходу до розв'язання задачі мережевого планування з тривалістю робіт у формі нечітких чисел типу-2; продемонструвати, як цей підхід може бути застосований на практиці.

В роботі наведено базові поняття та визначення з теорії нечітких множин та теорії мережевого планування. Представлено підхід до розв'язання задачі мережевого планування з тривалістю робіт у формі нечітких чисел типу-2. У третьому розділі з використанням описаного підходу розв'язано дві задачі мережевого планування з тривалістю робіт у формі нечітких інтервальних та трикутно-трапецієподібних чисел типу-2 відповідно.

Результати роботи можуть бути використані як навчальний матеріал, а також для більш ґрунтовного аналізу та побудови планів виконання робіт, які постають перед керівниками проектів.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД З ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ТА МЕРЕЖЕВОГО ПЛАНУВАННЯ.....	6
1.1 Основні поняття з теорії нечітких множин.....	6
1.2 Операції над нечіткими множинами.....	8
1.3 Методи представлення нечітких множин типу-2.....	12
1.4 Основні поняття з теорії мережевого планування.....	14
РОЗДІЛ 2 МЕРЕЖЕВЕ ПЛАНУВАННЯ З НЕЧІТКОЮ ТРИВАЛІСТЮ РОБІТ.....	16
2.1 Мережеве планування з тривалістю робіт у формі нечітких трикутних чисел.....	17
2.2 Тривалість робіт у формі інтервальних нечітких чисел типу-2.....	24
2.3 Тривалість робіт у формі трикутно-трапецієподібних нечітких чисел типу-2.....	26
РОЗДІЛ 3 ПРИКЛАДИ ЗАСТОВУВАННЯ МЕРЕЖЕВОГО ПЛАНУВАННЯ.....	30
3.1 Приклад застосування у випадку тривалості робіт у формі нечітких інтервальних чисел типу-2.....	30
3.2 Приклад застосування у випадку тривалості робіт у формі нечітких трикутно-трапецієподібних чисел типу-2.....	34
ВИСНОВКИ.....	39
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	41

ВСТУП

Серед найважливіших проблем, які виникають при плануванні складного комплексу робіт, є вибір найбільш оптимальної послідовності виконання робіт, яка забезпечить реалізацію проекту в найкоротший термін. Вирішення цієї проблеми можливе на основі мережевих моделей, зокрема моделі мережевого графіка. Задачі мережевого планування в класичному формулюванні [1] не завжди вистачає для розв'язання реальних проблем, оскільки більшість даних мають нечіткий характер. У цьому дослідженні розглянуто використання механізму нечітких множин типу-2, запропонованих Заде [2] для розв'язання задачі мережевого планування, де тривалості робіт задані у формі нечітких чисел типу-2.

Моделі з використанням таких множин розширюють область застосування відомих задач мережевого планування, де тривалості робіт відомі точно, і дозволяють розв'язувати задачі в умовах нечіткої інформації, коли точні дані недоступні. Використання нечітких множин дозволяє глибше розуміти процес побудови оптимальної послідовності робіт в умовах нечіткої інформації. Актуальність цієї роботи обумовлена саме цими аспектами.

Мета роботи – представити підхід до розв'язання задачі мережевого планування з тривалістю робіт у формі нечітких чисел типу-2, а також продемонструвати, як цей підхід може бути застосований на практиці.

Для досягнення поставленої мети робота передбачає ознайомлення з відповідною науковою літературою та з'ясування яким чином поточні напрацювання науковців можна засовувати до поставленої проблеми; аналіз основних теоретичних підходів та методів, що були розроблені, для їх подальшого використання та застосування у практичних задачах, а також, власне, розв'язання практичних задач, з використанням описаного підходу.

Об'єктом дослідження є задача мережевого планування.

Предметом дослідження є мережевий графік з нечіткими тривалостями робіт типу-2.

Підхід, на якому ґрунтується розв'язання поставленої задачі, оснований на підході, запропонованим Заде і Беллманом [3] для задачі нечіткого математичного програмування з нечітко заданою ціллю та нечіткою множиною допустимих розв'язків. Для розрахунку можливих термінів виконання проекту було використано метод критичного шляху.

Структура роботи включає вступ, три розділи, висновок та список використаної літератури.

РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД З ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ТА МЕРЕЖЕВОГО ПЛАНУВАННЯ

1.1 Основні поняття з теорії нечітких множин

Множина (класична) – сукупність елементів, які мають спільну властивість, кожний елемент може належати або не належати множині.

Нечіткою множиною \tilde{A} [4] в універсальній множині X називається така сукупність пар $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$, де $x \in X$, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – функція належності елемента x нечіткій множині \tilde{A} . $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$. Значення функції належності показує в якій мірі елемент належить нечіткій множині.

Нечіткою множиною \tilde{A} типу-2 [4], яка визначена на універсальній множині X називається нечітка множина, функція належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ якої для будь-якого фіксованого елемента $x \in X$ приймає нечітку множину значень, тобто нечітка множина типу-2 – це множина трійок $(x, \psi_{\tilde{A}}(x, u))$, де $x \in X$; u – ступень належності елемента x нечіткій множині \tilde{A} типу-2, $u \in [0,1]$; $\psi_{\tilde{A}}: X \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ – функція належності нечіткої множини типу-2.

Якщо значення $x^* \in X$ залишається сталим, то функція належності $\psi_{\tilde{A}}(x^*, u), u \in [0,1]$, має зміст функції належності, що описує нечітку множину типу-1 значень функції належності нечіткої множини \tilde{A} типу-2. Така множина має вигляд: $\bigcup_{u \in [0,1]} (u, \psi_{\tilde{A}}(x^*, u))$ і називається зрізом нечіткої множини \tilde{A} типу-2 при фіксованому елементі x^* універсальної множини X і позначається $\tilde{A}_{(x=x^*, u)}$.

Аналогічно при фіксованому ступені належності $u^* \in [0,1]$ функція належності $\psi_{\tilde{A}}(x, u^*), x \in [0,1]$ має зміст функції належності, яка описує нечітку множину $\bigcup_{x \in X} (u, \psi_{\tilde{A}}(x, u^*))$ типу-1 значень функції належності нечіткої

множини \tilde{A} типу-2 і називається зрізом нечіткої множини \tilde{A} типу-2 при фіксованому ступені належності u^* і позначається $A_{(x,u=u^*)}$.

У випадку, коли значення функції належності неможливо визначити точно, використовують нечіткі множини з функціями належності, які мають інтервальні значення. Тоді верхнє і нижнє значення функції належності задають межі приблизної оцінки ступеня належності елемента до нечіткої множини. Рис. 1.1 ілюструє графічне представлення функції належності $\mu_{\tilde{A}}$, що має інтервальні значення $[u_i, u_j]$.

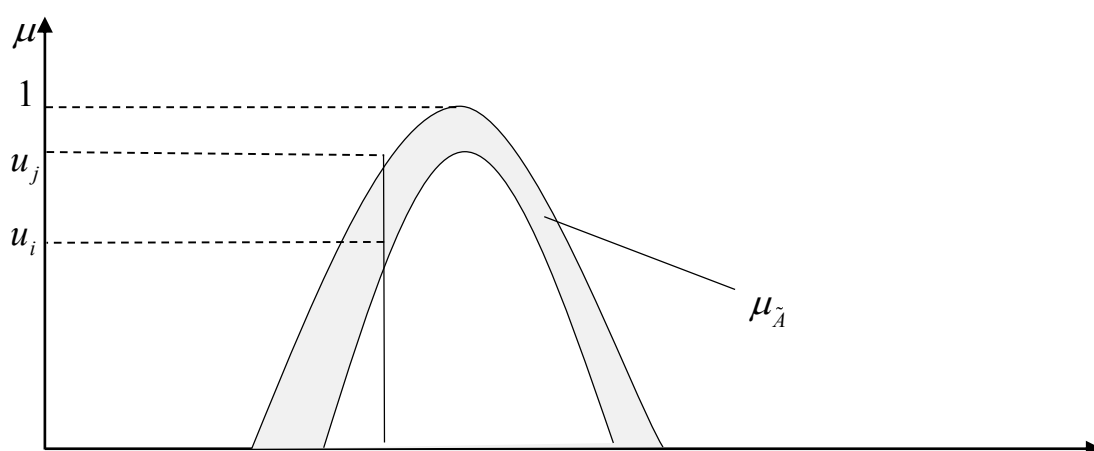


Рисунок 1.1 - Функція належності з інтервальними значеннями

Якщо потрібно оцінити конкретні значення інтервалу $[u_i, u_j]$, то використовують поняття нечітких множин типу-2. Рис. 1.2 [5] ілюструє приклад графічного представлення елементів нечіткої функції належності типу-2.

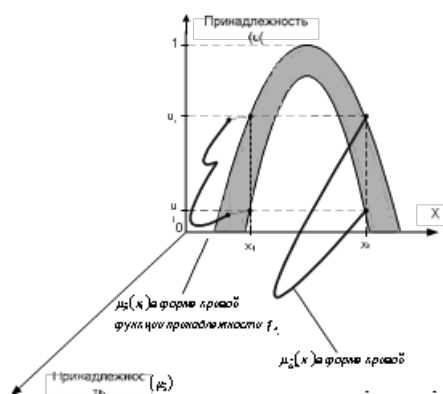


Рисунок 1.2 - Приклад НМТ-2

Можливість виникнення невизначеності є загальним явищем, яке не залежить від методів її оцінки та перевірки. Невизначеність може мати різні типи, серед них нечіткість, яка виникає в результаті невизначеності меж нечітких множин; неточність, що пов'язана з розміром відповідних наборів альтернатив та неточність, яка виникає внаслідок використання різних наборів альтернатив.

Однією з причин використання нечітких множин типу-2 є потреба вирішувати неоднозначності, які породжені природною мовою. Крім того, використання таких множин дозволяє узгоджувати інформацію, яку отримують від експертів, у випадку якщо думки експертів є розбіжними. Нарешті, зайві, неточні значення в отриманій інформації також можуть вносити невизначеність і буде виникати необхідність використання НМТ-2 для її врегулювання.

Множиною рівня α [4], $\alpha \in [0,1]$, нечіткої множини $\tilde{A} \subseteq X$ називається множина в звичайному розумінні, яка складається з елементів $x \in X$, ступені належності яких нечіткій множині \tilde{A} не менше числа α .
 $\tilde{A}_\alpha = \{x \mid x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$.

1.2 Операції над нечіткими множинами

Щоб означити операції над НМТ-2 в [4] спочатку було узагальнено відповідні означення операцій для нечітких множин типу-1 на нечіткі множини з інтервальними функціями належності, а далі - Заде [2] використовував принцип узагальнення, за яким образ нечіткої множини \tilde{A} , яка є нечіткою множиною універсальної множини X , при відображенні $\delta: X \rightarrow Y$, визначається як нечітка множина \tilde{B} :

$$\tilde{B} = \phi(\tilde{A}) = \phi\left(\bigcup_{x \in X} (x, \mu_{\tilde{A}}(x))\right) = \bigcup_{x \in X} (\phi(x), \mu_{\tilde{A}}(x)) = \bigcup_{i=1} (y, \mu_{\tilde{B}}(y)), \quad \tilde{B} \subset Y.$$

Щоб означити операції над НМТ-2 зручно використовувати принцип узагальнення в дещо іншому вигляді, розкладаючи \tilde{A} на множини рівня α :

$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\tilde{A}_\alpha, \alpha)$. Отже, було отримано інструмент узагальнення в формі

множин рівня: $\delta(\tilde{A}) = \delta(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\tilde{A}_\alpha, \alpha)) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\delta(\tilde{A}_\alpha, \alpha))$. Такий підхід дозволяє

перейти від роботи з інтервалами до роботи з нечіткими множинами. Використання множин рівня також застосовується для розв'язку задачі графічного представлення НМТ-2.

Розглянемо більш детально наведений вище підхід. Нехай A і B – НМТ-1, з функціями належності μ_A та μ_B відповідно, тоді перетин $A \cap B$ задається функцією належності $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X$. Якщо $\mu_A(x) = [a_1(x), a_2(x)]$, $\mu_B(x) = [b_1(x), b_2(x)]$, то, застосовуючи принцип узагальнення до функції $\min\{\dots\}$, отримаємо:

$$\min\{[a_1(x), a_2(x)], [b_1(x), b_2(x)]\} = [\min\{a_1(x), b_1(x)\}, \min\{a_2(x), b_2(x)\}].$$

Далі детальніше розглянемо використання принципу узагальнення в формі множин рівня для означення операції перетину двох нечітких множин, в яких для кожного $x \in X$, значення функції належності є нечіткою множиною з універсальної множини $[0;1]$.

Нехай \tilde{A} і \tilde{B} – НМТ-2 універсальної множини X , такі що для будь-якого $x \in X$ множина значень їх нечітких функцій належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ та $\mu_{\tilde{B}}(x)$ - опуклі нечіткі множини типу-1 універсальної множини $[0;1]$. Для кожного $\gamma \in [0;1]$ множини γ -рівня значень нечітких функцій належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ та $\mu_{\tilde{B}}(x)$ описуються функціями належності $\mu_{\tilde{A}}^\gamma$ та $\mu_{\tilde{B}}^\gamma$, значення яких – інтервали. Позначимо множину γ -рівня нечіткої функції належності перетину \tilde{A} і \tilde{B} через $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}^\gamma$, причому множини γ -рівня $\mu_{\tilde{A}}^\gamma$ та $\mu_{\tilde{B}}^\gamma$ визначимо для кожного $x \in X$ так: $\mu_{\tilde{A}}^\gamma = \{v \in [0;1] \mid \eta_{\tilde{A}}(v) \geq \gamma\}$, $\mu_{\tilde{B}}^\gamma = \{v \in [0;1] \mid \eta_{\tilde{B}}(v) \geq \gamma\}$, де $\eta_{\tilde{A}}(v)$ ($\eta_{\tilde{B}}(w)$) – ступінь належності точки $v \in [0;1]$ ($w \in [0;1]$) нечіткій множині значень функції належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ($\mu_{\tilde{B}}(x)$). Тоді для будь-якого $x \in X$

$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}^\gamma = \min \{ \mu_{\tilde{A}}^\gamma, \mu_{\tilde{B}}^\gamma \}$. Іншими словами, множину γ -рівня нечіткої функції належності перетину множин \tilde{A} і \tilde{B} можна отримати шляхом взяття мінімуму множин γ -рівня нечітких функцій належності множин \tilde{A} і \tilde{B} . $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}$ можна

подати у вигляді: $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \bigcup_{\gamma \in [0;1]} (\min \{ \mu_{\tilde{A}}^\gamma, \mu_{\tilde{B}}^\gamma \}, \gamma)$.

Розглянемо випадок, коли носії нечітких множин значень нечітких функцій належності $\mu_{\tilde{A}}$ та $\mu_{\tilde{B}}$ - скінченні множини, тобто $\mu_{\tilde{A}}$ та $\mu_{\tilde{B}}$ можуть бути представлені у вигляді:

$$\mu_{\tilde{A}} = \bigcup_{i=1}^n (v_i, \alpha_i), v_i \in [0;1], i = \overline{1, n},$$

$$\mu_{\tilde{B}} = \bigcup_{j=1}^m (w_j, \beta_j), w_j \in [0;1], j = \overline{1, m}.$$

Тут α_i та β_j - ступені належності v_i та w_j множинам значень нечітких функцій належності $\mu_{\tilde{A}}$ та $\mu_{\tilde{B}}$ відповідно. Можемо застосувати принцип узагальнення, в результаті отримаємо:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \min \{ \mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}} \} = \min \left\{ \bigcup_{i=1}^n (v_i, \alpha_i), \bigcup_{j=1}^m (w_j, \beta_j) \right\} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (\min \{ v_i, w_j \}, \min \{ \alpha_i, \beta_j \}).$$

Аналогічно отримаємо представлення нечіткої множини значень нечіткої функції належності $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}$ об'єднання $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ нечітких множ типу-2 \tilde{A}

та \tilde{B} : $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (\max \{ v_i, w_j \}, \min \{ \alpha_i, \beta_j \})$, і різниці

$$\mu_{\tilde{A} \setminus \tilde{B}} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (\max \{ v_i - w_j, 0 \}, \max \{ \alpha_i, \beta_j \}).$$

Нехай $\alpha(v), v \in [0;1]$ - функція належності нечіткої множини \tilde{A} типу-2. НМТ-2 \tilde{A} для будь-якого $x \in X$ задається нечіткою множиною значень функції належності $\mu_{\tilde{A}}$, визначеною на універсальній множині $[0;1]$. Нехай носій нечіткої множини значень нечіткої функції належності $\mu_{\tilde{A}}$ - скінченна

множина, тоді $\mu_{\tilde{A}} = \bigcup_{i=1}^n (v_i, \alpha_i)$, $v_i \in [0;1]$, $i = \overline{1, n}$, де точка $v_i \in [0;1]$, а α_i - її ступінь належності нечіткій множині $\mu_{\tilde{A}}$. Застосувавши принцип узагальнення до формули $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, яка визначає значення функції належності доповнення \tilde{A} нечіткої множини A типу-1, можемо отримати представлення нечіткої множини значень функції належності для НМТ-2 \tilde{A} :

$$\mu_{\tilde{A}} = \bigcup_{i=1}^n (1 - v_i, \alpha_i), v_i \in [0;1], i = \overline{1, n}.$$

Якщо носії нечітких множин \tilde{A} та \tilde{B} типу-2 є нескінченними, то операції над множинами можуть бути записані у такому вигляді:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \bigcup_{v \in [0;1]} \bigcup_{w \in [0;1]} (\min\{v, w\}, \min\{\alpha(v), \beta(w)\}),$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \bigcup_{v \in [0;1]} \bigcup_{w \in [0;1]} (\max\{v, w\}, \min\{\alpha(v), \beta(w)\}),$$

$$\mu_{\tilde{A} \setminus \tilde{B}} = \bigcup_{v \in [0;1]} \bigcup_{w \in [0;1]} (\max\{v - w, 0\}, \min\{\alpha(v), \beta(w)\}),$$

$$\mu_{\tilde{A}} = \bigcup_{i=1}^n (1 - v, \alpha(v)).$$

Однак, такий спосіб визначення НМТ-2 може бути незручним у певних випадках. Зважаючи на це та на визначення НМТ-2, можна запропонувати альтернативну форму задання таких множин.

Нехай \tilde{A} і \tilde{B} – нечіткі множини типу-2 універсальної множини X , які задаються функціями належності $\psi_{\tilde{A}}(x, u)$ та $\psi_{\tilde{B}}(x, u)$ відповідно. В такому випадку функція належності перетину $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, об'єднання $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, різниці $\tilde{A} \setminus \tilde{B}$ і доповнення \tilde{A} знаходяться так:

$$\psi_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x, u) = \max_{\substack{v, w \in [0, 1] \\ u = \min\{v, w\}}} \min\{\psi_{\tilde{A}}(x, v), \psi_{\tilde{B}}(x, w)\}, x \in X, u \in [0, 1];$$

$$\psi_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x, u) = \max_{\substack{v, w \in [0, 1] \\ u = \max\{v, w\}}} \min\{\psi_{\tilde{A}}(x, v), \psi_{\tilde{B}}(x, w)\}, x \in X, u \in [0, 1];$$

$$\psi_{\tilde{A} \setminus \tilde{B}}(x, u) = \max_{\substack{v, w \in [0, 1] \\ u = \max\{v-w, 0\}}} \min\{\psi_{\tilde{A}}(x, v), \psi_{\tilde{B}}(x, w)\}, x \in X, u \in [0, 1];$$

$$\psi_{\tilde{A}}(x, v) = \psi_{\tilde{A}}(x, 1-v), x \in X, u \in [0, 1];$$

1.3 Методи представлення нечітких множин типу-2

Для кожного елемента $x \in X$, який називається первинною змінною [6], графічне представлення НМТ-1 на площині, осями якої є ступені належності μ_A та u - називається вертикальним зрізом нечіткої функції належності ψ_A . При цьому, безпосередньо сама НМТ-1 визначається як вторинна множина, а оскільки в ролі НМТ-1 виступає нечіткий ступінь належності ψ_A , то таку НМТ-1 також розглядають як вертикальний зріз і називають вторинною функцією належності [6].

Представлення у вигляді об'єднання всіх вторинних функцій належності називається представлення способом вертикального зрізу [6].

Вторинні ступені належності показують амплітуду значень вторинної функції належності та є складовими елементами області значень цієї функції.

Первинна належність $J_X, J_X \subseteq [0, 1], \forall x \in X$ - це область визначення вторинної функції належності. Вторинні змінні $u, u \in [0, 1]$ є елементами первинної належності, тому вторинний ступінь належності можна розглядати як оцінку вторинної змінної.

Вкладеною НМТ-2 [6] потужності N для дискретних множин X і U називається множина кортежів, яка складається з трьох елементів, де перші елементи кортежу – відповідні первинні змінні $x_i \in X$, другі елементи - точно одне значення $u_1, u_2, \dots, u_N, u_i \in J_{X_i}$, треті елементи – вторинні ступені $\alpha_{X_i}(u)$.

Така множина позначається як:

$$A_e = \sum_{i=1}^N ((\alpha_{x_i}(u_i), u_i), x_i), u_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1], x_i \in X.$$

Множина, в якій кожна первинна змінна $x \in X$ має тільки одну вторинну змінну $u \in U$ називається вкладеною НМТ-2 [6] для неперервних множин X і U та позначається:

$$A_e = \bigcup_{x \in X} ((\alpha_x(u), u), x), u \in J_x \subseteq U = [0,1].$$

Вкладеною НМТ-1 [6] потужності N для дискретних множин X і U називається множина пар, де перші елементи – відповідні первинні змінні $x_i \in X$, а другі – точно одне значення $u_1, u_2, \dots, u_N, u_i \in J_{x_i}$ і позначається

$$A_e = \sum_{i=1}^N (u_i, x_i). \text{ Множина, яка утворена об'єднанням всіх первинних ступенів}$$

належності вкладеного НМТ-2 є вкладеною НМТ-1 для неперервних множин X і U :

$$A_e = \bigcup_{x \in X} (u, x), u \in J_x \subseteq U = [0,1].$$

Займана площа невизначеності [6] (ЗПН, англ. FOU) – це об'єднання всіх первинних ступенів належності.

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{\forall x \in X} J_x = \{(x, u); u \in J_x \subseteq [0,1]\}.$$

Займана площа невизначеності може розглядатись як нечітка множина, значеннями функції належності якої є інтервали. В якості інтервалів в такому випадку виступають первинні ступені належності.

Верхня функція належності (ВФН, англ. UMF) і нижня функція належності (НФН, англ. LMF), позначається $UMF(\tilde{A})$ чи $\overline{\psi_{\tilde{A}}}$ та $LMF(\tilde{A})$ або $\underline{\psi_{\tilde{A}}}$ відповідно.

$$\overline{\psi_{\tilde{A}}} = \overline{FOU(\tilde{A})}, \forall x \in X;$$

$$\underline{\psi_{\tilde{A}}} = \underline{FOU(\tilde{A})}, \forall x \in X;$$

Первинна функція належності – це така НМТ-1, яка визначається, принаймні з одним параметром, діапазон значень якого на області визначення функції.

За допомогою теореми представлення [6], можна представляти НМТ-2 у вигляді об'єднання вкладених в неї більш простих НМТ-2 $A = \bigcup_{j=1}^n A_e^j$.

Представлення НМТ-2 в такому вигляді називають представлення НМТ-2 у вигляді хвилястого зрізу, що пояснює тривимірність даного зрізу, в той час, як вертикальний зріз є двовимірним. Займану площу невизначеності в такому випадку представляють у вигляді:

$$FOU(A) = \bigcup_{j=1}^n A_e^j .$$

1.4 Основні поняття з теорії мережевого планування

Мережеве планування [7] – сукупність методів управління проектами, які забезпечують планування, аналіз та динамічну перебудову термінів виконання комплексу нереалізованих частин проекту. Методи мережевого планування дозволяють встановити термін виконання прийнятного плану проведення робіт та визначають список критичних робіт, тобто робіт, від яких напряду залежить тривалість виконання всього проекту. Такі роботи необхідно суворо контролювати, адже затримки в них тягнуть затримку проекту в цілому.

Для розв'язку вказаних задач використовують модель мережевого графіка.

Мережевий графік [7] - це граф без кратних ребер, всі ребра якого зважені та є дугами. Дуги мережевого графіка відображають трудовий процес, тобто, роботу, поруч із дугою вказується тривалість цієї роботи.

Вершина мережевого графіка позначає певну подію – факт початку або закінчення роботи. Подія, з якої робота починається, називається початковою подією для цієї роботи, кінцева подія – це подія якою ця робота закінчується.

Роботи, для яких їхня початкова подія є кінцевою подією для іншої роботи, називаються наступними, а роботи, для яких їхня кінцева подія є початковою подією для даної роботи, називаються попередніми.

Розрізняють такі види робіт:

1. Дійсні - це роботи, які вимагають витрат сил, коштів та часу.
2. Очікування — це роботи, які потребують лише часу.
3. Фіктивні – це роботи, які не потребують витрат ресурсів. Їх тривалість дорівнює нулю. Такі роботи вказують, що можливість початку однієї операції безпосередньо залежить від виконання іншої.

На мережевому графіку також виділяють вихідну подію, яка визначає початок виконання всього комплексу робіт і не є кінцевим для жодної роботи; завершальну подію, яка визначає закінчення виконання всього комплексу робіт і не є початковою для жодної роботи; проміжну подію, яка визначає закінчення або початок певних робіт, вона має попередні та наступні роботи.

Довжиною шляху називається сума тривалості робіт, з яких цей шлях складається. Найдовший шлях називається критичним шляхом. Довжина критичного шляху визначає тривалість виконання ухваленого плану проведення всього комплексу робіт. Події та роботи, які лежать на цьому шляху, називаються критичними. Будь-яка затримка з виконання будь-якої критичної роботи призводить до збільшення загального часу виконання комплексу робіт.

Мережевий графік будується на підставі технологічної таблиці, в якій вказано тривалість кожної роботи та її зв'язок з попередніми та наступними роботами.

Мережевий графік не повинен мати циклів та кратних ребер, є зв'язним графом та повинен мати одну початкову та одну кінцеву подію. Для зручності події нумеруються числами так, що для будь-якої події номер її початкової події має бути менше номера її кінцевої події.

РОЗДІЛ 2 МЕРЕЖЕВЕ ПЛАНУВАННЯ З НЕЧІТКОЮ ТРИВАЛІСТЮ РОБІТ

Мережеве планування широко й успішно застосовується для оптимізації планування і управління складними розгалуженими комплексами робіт, які вимагають участі багатьох виконавців та затрат обмежених ресурсів.

За допомогою мережевої моделі можна системно представити хід робіт, керувати процесом його втілення та якісно оперувати ресурсами.

Задача мережевого планування ґрунтується на використанні математичного апарату теорії графів [8] і системного підходу для відображення і алгоритмізації комплексів взаємопов'язаних робіт, дій та заходів, які спрямовані на досягнення поставленої мети.

Основна мета задачі мережевого планування – скорочення до мінімуму термінів тривалості проекту. Сама задача полягає в тому, щоб графічно, наочно і системно зобразити і оптимізувати послідовність пов'язаних робіт, які забезпечать вчасне й організоване досягнення фінальних цілей. Для відображення й алгоритмізації дій або ситуацій використовують мережеві моделі, а найпростіші в розумінні й використанні серед них – мережеві графіки. Важливою особливістю задачі мережевого планування є саме її системність, тобто всі роботи, всі їх виконавці розглядаються як складові однієї організаційної системи.

Використання методів мережевого планування дозволяє скоротити час, який необхідний для реалізації проекту та ефективно використовувати трудові ресурси й техніку.

В класичній задачі мережевого планування дані є чіткими. Проте у реальних ситуаціях отримання чітких та однозначних даних про терміни виконання робіт стає складним завданням, оскільки вони залежать від багатьох факторів, більшість з яких є непередбачуваними. Отже, використання нечітких даних дозволяє більш точно описувати проблеми, які зустрічаються на практиці. Цей неточний характер у цій роботі вимірюється нечітким

трикутним числом типу-1, інтервальним нечітким трикутним та трикутно-трапецієподібними числами типу-2.

2.1 Мережеве планування з тривалістю робіт у формі нечітких трикутних чисел

Для того, щоб мати змогу оперувати нечіткими числами, зазначимо визначення такого типу чисел.

Нечітким числом [9] (неперервним), в загальному, називають нечітку множину A , яка задана своєю функцією належності $\mu_A(z)$ на числовій осі R , при цьому множина A є опуклою та нормальною, тобто існує принаймні одне значення $z \in R$, для якого $\mu_A(z) = 1$ та носій A - $\text{supp } A$ – обмежена множина.

Нагадаємо, що нечітка множина A на R називається опуклою [9], якщо $\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\mu_A(x); \mu_A(y)), \forall x, y \in R, \lambda \in [0; 1]$. Носієм нечіткої множини A на універсальній множині R є чітка підмножина $S \subseteq R$, ступені належності елементів якої нечіткій множині A більше 0.

Припустимо, що для задачі мережевого планування тривалість роботи (i, j) є нечітким числом $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$, де a_{ij} - мінімально можливий термін виконання роботи, b_{ij} - максимально можливий термін виконання роботи, $c_{ij} = b_{ij}$. Функцію належності нечіткого числа d_{ij} позначимо $\mu_{ij}(u)$, де u - елемент універсальної множини $U = [0, \infty]$. Припустимо, що на відрізку $[a_{ij}, b_{ij}]$ функція μ_{ij} строго зростає.

Функція належності $\mu_{ij}(u)$ нечіткого числа d_{ij} матиме вигляд:

$$\mu_{ij}(u) = \begin{cases} 0, u \leq a_{ij}; \\ \frac{u - a_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}}, a_{ij} < u \leq b_{ij}; \\ 0, u > b_{ij}. \end{cases} \quad (2.1)$$

На рис. 2.1 наведено графічний приклад представлення такої функції належності.

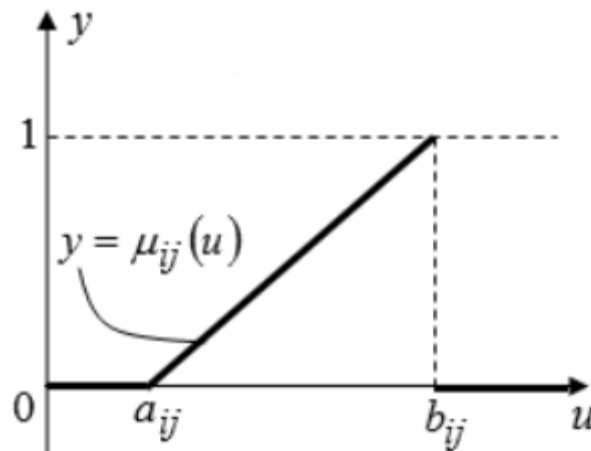


Рисунок 2.1 - Приклад функції належності

Величину $\mu_{ij}(u)$ будемо трактувати як впевненість у тому, що робота (i, j) буде виконана за час не більше u .

Оцінимо якість плану проведення робіт, який представлено у вигляді мережевого графіка. Для формалізації ступеня досягнення вчасного виконання плану проведення робіт будемо використовувати функцію належності плану нечіткій цілі.

Згідно з Заде і Беллманом [3], [10] розглянемо задачу нечіткого математичного програмування з нечітко заданою ціллю та нечіткою множиною допустимих планів X . Будемо використовувати множину всіх можливих мережевих графіків, які задані на графі, що розглядається, у вигляді універсальної множини X , на якій задано нечітку множину допустимих планів. Функцію належності нечіткої множини X позначимо $\mu_X(x)$, де $x \in X$.

Нечітко задану ціль можна формалізувати нечіткою множиною X_c , яка має функцію належності $\mu_c(x), x \in X$.

Допустимі плани з X по суті є мережевими графіками, які задані на одному графі, але відрізняються часом, який необхідний на виконання всіх робіт. Час, який необхідно витратити на виконання роботи (i, j) позначимо u_{ij} .

Варто зазначити, що для планів з множини X виконується нерівність: $a_{ij} \leq u_{ij} \leq b_{ij}$, таким чином, ступінь впевненості у тому, що робота (i, j) буде виконана за час не більший u , дорівнює $\mu_{ij}(u)$.

Отже, для повної характеристики допустимого плану достатньо вказати тільки тривалості робіт, адже допустимі плани відрізняються один від одного лише цим.

Нехай в графі n дуг. Кожному допустимому мережевому графіку $x \in X$ поставимо у відповідність вектор значень тривалості робіт $u(x)$:

$$u(x) = (u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \dots, u_{i_n j_n})$$

де $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$ - всі роботи в мережевому графіку; $u_{i_k j_k}$ - чітке значення тривалості роботи (i_k, j_k) .

Оскільки перетином нечітких множин A та B є нечітка множина $C = A \cap B$ з функцією належності $\mu_C(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$, тоді

$$\mu_X(x) = \min_k \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}). \quad (2.2)$$

Через $t(x)$ позначимо тривалість критичного шляху у випадку коли тривалість роботи $(i_k, j_k), k = 1, 2, \dots, n$ дорівнює $u_{i_k j_k}$. Якщо тривалість роботи $(i_k, j_k), k = 1, 2, \dots, n$ дорівнює $a_{i_k j_k}$, то тривалість критичного шляху на такому графі позначатимемо T^{\min} , а сам план позначимо x^{\min} , тоді

$$u(x^{\min}) = (a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_n j_n});$$

T^{\max} - тривалість критичного шляху, у випадку коли тривалість роботи $(i_k, j_k), k = 1, 2, \dots, n$ дорівнює $b_{i_k j_k}$. План з такими тривалостями робіт позначимо x^{\max} , тоді

$$u(x^{\max}) = (b_{i_1 j_1}, b_{i_2 j_2}, \dots, b_{i_n j_n});$$

Як функцію належності $\mu_C(x)$ допустимого плану x нечіткої цілі C будемо використовувати відхилення плану, що розглядається від найефективнішого - x^{\min} , тоді

$$\mu_C(x) = \frac{T^{\max} - t(x)}{T^{\max} - T^{\min}}. \quad (2.3)$$

В нашому випадку, розв'язати задачу означає досягнути цілі з визначеним ступенем впевненості, причому варто враховувати і ступінь виконання обмежень, тобто, ступінь належності допустимого плану множині X . Таким чином, як розв'язок задачі будемо розглядати перетин нечіткої цілі і нечіткої множини допустимих планів. Позначимо таку множину через D . Функція належності такої множини матиме вигляд:

$$\mu_D(u) = \min\{\mu_X(x), \mu_C(x)\} \quad (2.4)$$

З урахуванням (2.2) функцію належності множини D можна виразити через функції належності нечітких трикутних чисел:

$$\mu_D(u) = \min\{\min_k \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}), \mu_C(x)\}.$$

Остаточно, з урахуванням (2.3):

$$\mu_D(u) = \min\{\min_k \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}), \frac{T^{\max} - t(x)}{T^{\max} - T^{\min}}\} \quad (2.5)$$

Означення 2.1. Розв'язком задачі мережевого планування з нечіткими тривалостями робіт, що задані нечіткими трикутними числами будемо називати нечітку множину D з функцією належності (2.5).

За такого підходу залишається незрозумілим який допустимий план обирати. Найбільш популярним підходом [3] до вирішення такого роду питань є вибір альтернативи, яка має максимальний ступінь належності нечіткій множині розв'язків, тобто, альтернативу x^0 , для якої

$$\mu_D(x^0) = \max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_X(x), \mu_C(x)\}. \quad (2.6)$$

Фактично, вибір такої альтернативи забезпечує компроміс між максимальним ступенем надійності плану (впевненості, що кожна робота буде виконана за час не більший u) та найменшим відхиленням від мінімального можливого терміну виконання проекту, тобто часу, менше за який проект не може бути виконаний.

Оскільки, довжина критичного шляху визначає тривалість всього проекту, то формально задачу мережевого планування можна представити як задачу знаходження критичного шляху. Так як, $G=(n,P)$ - граф, де n - множина вершин (подій), а P множина дуг (робіт), можна позначити через $x_{ij} \in \{0,1\}$ величину потоку, який проходить через роботу (i,j) . $x_{ij} = 0$, якщо робота (i,j) не лежить на критичному шляху та $x_{ij} = 1$ у протилежному випадку. Для зручності позначимо u_{ij} термін виконання роботи (i,j) , тоді задачу знаходження критичного шляху можна записати у вигляді [11]:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in P} u_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_{(i,j) \in P} x_{ij} - \sum_{(j,k) \in P} x_{jk} &= 0; \\ \sum_{(1,j) \in P} x_{1j} &= 1; \\ \sum_{(i,n) \in P} x_{in} &= 1. \end{aligned}$$

Оскільки час виконання роботи u_{ij} задається у вигляді нечіткого трикутного числа типу-1 з функцією належності (2.1), то остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in P} [a_{ij} + \mu_{ij}(u_{ij})(b_{ij} - a_{ij})] x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_{(i,j) \in P} x_{ij} - \sum_{(j,k) \in P} x_{jk} &= 0; \\ \sum_{(1,j) \in P} x_{1j} &= 1; \\ \sum_{(i,n) \in P} x_{in} &= 1. \end{aligned}$$

де $\mu_{ij}(u_{ij})$ - ступінь впевненості у тому, що робота (i,j) буде виконана за час не більше u_{ij} .

Вважатимемо, що на графіку залишається n робіт, початкова подія має номер 1, а кінцева - m .

Нехай x^0 - оптимальний план і нехай

$$\begin{aligned} u(x^0) &= (u_{i_1 j_1}^0, u_{i_2 j_2}^0, \dots, u_{i_n j_n}^0), \\ \mu_X(x^0) &= \min_k \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) = \mu_{i_v j_v}(u_{i_v j_v}^0) = \alpha, \\ \mu_C(x^0) &= A, \\ t(x^0) &= \theta. \end{aligned}$$

Покажемо, що $\alpha = A$. Припустимо, що $\alpha > A$, тоді $\mu_D(x^0) = A$. Нехай $\alpha - A = \delta$, знайдемо такі $u'_{i_k j_k}$, тоді

$$\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \alpha - 0,5\delta = A + 0,5\delta, k = 1, 2, \dots, n.$$

З рис. 2.1 видно що, $u'_{i_k j_k} < u_{i_k j_k}, \forall k$. Розглянемо той же мережевий графік, але з тривалістю робіт $u'_{i_k j_k}$. Тоді

$$u(x') = (u'_{i_1 j_1}, u'_{i_2 j_2}, \dots, u'_{i_n j_n}).$$

Так як тривалість всіх робіт зменшилась, то і тривалість критичного шляху на отриманому мережевому графіку теж зменшилась, а отже функція належності нечіткій цілі збільшилась і дорівнює $A + \varepsilon, \varepsilon > 0$, тобто, $\mu_C(x') = A + \varepsilon$. Тоді

$$\begin{aligned} \mu_D(x') &= \min\{\mu_X(x'), \mu_C(x')\} = \min\{\min_k \mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}); \mu_C(x')\} = \\ &= \min\{A + 0,5\delta; A + \varepsilon\} > A. \end{aligned}$$

Отже, $\max_{x \in X} \mu_D(x) > A$, а це суперечить початковому припущенню, таким чином як мінімум $\alpha \leq A$.

Тепер припустимо, що $\alpha < A$. Варто зазначити, що в такому випадку $\max_{x \in X} \mu_D(x) = \alpha$. Нехай $\alpha - A = \delta > 0$.

Оскільки $\mu_C(x^0) = \frac{T^{\max} - t(x^0)}{T^{\max} - T^{\min}} = A > (A - 0,5\delta)$, тоді, якщо

$$\Delta = T^{\max} - t(x^0) - (A - 0,5\delta)(T^{\max} - T^{\min}), \quad (2.7)$$

то $\Delta > 0$.

Розглянемо допустимий план $x' = (u'_{i_1j_1}, u'_{i_2j_2}, \dots, u'_{i_nj_n})$, для якого $\mu_{i_kj_k}(u'_{i_kj_k}) = \mu_{i_kj_k}(u^0_{i_kj_k}) + \varepsilon, k=1,2,\dots,n$, де $0 < \varepsilon \leq 0,5\delta$ і таке, що

$$u'_{i_kj_k} \leq u^0_{i_kj_k} + \frac{1}{n}(T^{\max} - t(x^0)) - (A - 0,5\delta)(T^{\max} - T^{\min}). \quad (2.8)$$

Для такого допустимого плану

$$\mu_X(x') = \min_k \mu_{i_kj_k}(u'_{i_kj_k}) = \min_k (\mu_{i_kj_k}(u^0_{i_kj_k}) + \varepsilon) > \alpha.$$

Оскільки тривалість робіт збільшилась не більш ніж на Δ , то тривалість критичного шляху $t(x')$ задовольняє нерівність

$$t(x') \leq t(x^0) + T^{\max} - t(x^0) - (A - 0,5\delta)(T^{\max} - T^{\min})$$

яка випливає з (2.7), тоді

$$\begin{aligned} \mu_C(x') &= \frac{T^{\max} - t(x')}{T^{\max} - T^{\min}} > (A - 0,5\delta) \frac{T^{\max} - T^{\min}}{T^{\max} - T^{\min}} = \\ &= A - 0,5\delta = \alpha + 0,5\delta > \alpha \end{aligned}$$

Отже,

$$\mu_D(x') = \min\{\mu_X(x'), \mu_C(x')\} > \alpha,$$

що суперечить оптимальності плану x^0 . Таким чином припущення $\alpha < A$ хибне, а отже $\alpha = A$, що і треба було показати.

Твердження 2.1. Існує такий план

$$x^* \in X, u(x^*) = (u^*_{i_1j_1}, u^*_{i_2j_2}, \dots, u^*_{i_nj_n}),$$

що

$$\mu_D(x^*) = \mu_D(x^0) = A \quad \text{і} \quad \mu_{i_kj_k}(u^*_{i_kj_k}) = A, \text{ для } k=1,2,\dots,n.$$

Побудуємо план x^* . Для цього розглянемо план x^0 . З твердження 2.1 випливає, що $\mu_D(x^0) = A$. Якщо роботи (i_k, j_k) виконується нерівність $\mu_{i_kj_k}(u^0_{i_kj_k}) > A$, то зменшимо тривалість цієї роботи так, щоб значення функції належності цієї роботи дорівнювало $A, k=1,2,\dots,n$. Позначимо такий план через x^* . Для такого плану $\mu_X(x^*) = A$.

Оскільки тривалість всіх робіт не збільшилась, то і тривалість критичного шляху, на отриманому мережевому графі, не збільшилась, відповідно $\mu_c(x^*) \geq A$. Звідси $\mu_D(x^*) = A$.

Твердження 2.1. дозволяє будувати простий алгоритм побудови оптимального мережевого графіка, тобто, графіка з максимальним значенням функції належності нечіткого розв'язку $\mu_D(x)$.

Алгоритм виглядає так: задамо число кроків N , покладемо $\Delta = \frac{1}{N}$. На кроці з номером $k, k=1,2,\dots,N$ знайдемо такі тривалості робіт u_{ij} , що $\mu_{ij}(u_{ij}) = k \cdot \Delta$.

Позначивши отриманий мережевий графік через x^k маємо: $\mu_x(x^k) = k \cdot \Delta$. Знаходимо $\mu_c(x^k)$ і $\mu_D(x^k)$. Мережевий графік x^{k_0} , для якого $\mu_D(x^{k_0}) = \max_{0 \leq k \leq N} \mu_D(x^k)$ є оптимальним мережевим графіком.

2.2 Тривалість робіт у формі інтервальних нечітких чисел типу-2

Іноді під час роботи з даними використання нечітких чисел типу-1 може бути недостатнім через біль високий порядок нечіткості, який може виникати з різних причин, наприклад, існує залежність від погодних умов або від кваліфікації осіб, які виконують роботу, затримок постачання тощо. Тому у таких ситуаціях може бути корисним використання нечітких чисел типу-2, оскільки вони здатні краще описати рівень нечіткості, що присутній у даних.

Розглянемо задачу мережевого планування, в якій тривалість робіт є інтервальним нечітким числом типу-2.

Інтервальне нечітке число типу-2 називається трикутним інтервальним нечітким числом типу-2 [12], якщо НФН і ВФН є нечіткими трикутними числами:

$$\tilde{A} = (A^L, A^U) = ((a^L, b^L, c^L), (a^U, b^U, c^U)) \quad (2.9)$$

Ми ж будемо розглядати трикутне інтервальне нечітке число типу-2, в якого $b^U = c^U$ та $b^L = c^L$. На рис. 2.2 наведено графічний приклад представлення функції належності такого числа.

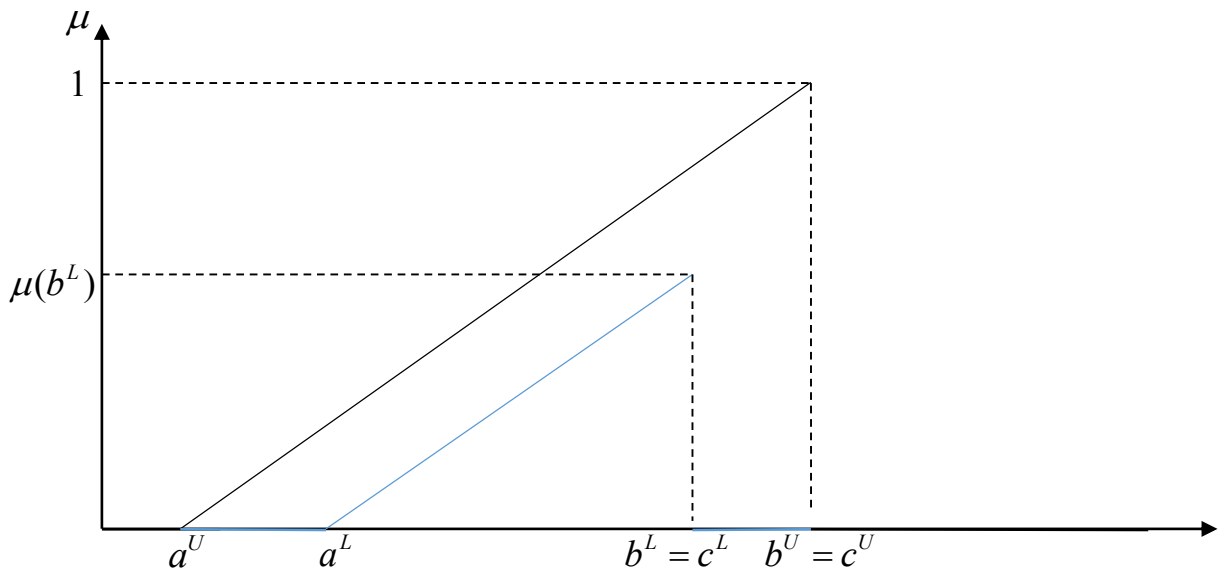


Рисунок 2.2 - Функція належності НЧТ-2

Вторинний ступінь належності інтервального нечіткого числа типу-2 незмінний і рівний одиниці. При заданому значенні α первинного ступеня належності α -зріз буде представлений інтервалом, який має кінці на верхній та нижній функції належності відповідно. Оскільки «кращі» розв'язки знаходяться на верхній функції належності, то з урахуванням (2.5) функцію належності нечіткої множини розв'язків можна виразити через верхню функцію належності:

$$\mu_D(u) = \min \left\{ \min_k \mu_{i_k j_k}^U(u_{i_k j_k}^U), \frac{T^{\max} - t(x)}{T^{\max} - T^{\min}} \right\},$$

де

$$\mu_{ij}^U(u_{ij}^U) = \begin{cases} 0, u_{ij}^U \leq a_{ij}^U; \\ \frac{u_{ij}^U - a_{ij}^U}{b_{ij}^U - a_{ij}^U}, a_{ij}^U < u_{ij}^U \leq b_{ij}^U; \\ 0, u > b_{ij}^U. \end{cases}$$

Таким чином, згідно з твердженням 2.1 та (2.6) оптимальний план є той, для якого досягається максимум функції належності на множині нечітких

розв'язків. Отже, можна перейти від задачі з нечіткими числами типу-2 до задачі з нечіткими числами типу-1, де задачу можна розглядати використовуючи лише верхню функцію належності.

В такому випадку, задачу можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in P} [a_{ij}^U + \alpha(b_{ij}^U - a_{ij}^U)]x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_{(i,j) \in P} x_{ij} - \sum_{(j,k) \in P} x_{jk} &= 0; \\ \sum_{(1,j) \in P} x_{1j} &= 1; \\ \sum_{(i,n) \in P} x_{in} &= 1. \end{aligned}$$

де α - заданий рівень первинного ступеня належності, в нашому випадку однаковий для всіх робіт.

За такого підходу ОПР буде запропоновано мережевий план, який матиме найбільший ступінь належності до нечіткої множини розв'язків та забезпечуватиме найшвидше виконання проекту з найбільшим ступенем впевненості.

2.3 Тривалість робіт у формі трикутно-трапецієподібних нечітких чисел типу-2

Опишемо застосування наведеного вище підходу для задач мережевого планування, в яких тривалість робіт задана нечіткими трикутно-трапецієподібними числами типу-2 [13]. Такі числа, в загальному, задають у вигляді:

$$\tilde{A} = (A^{LL}, A^{LU}, A^{UL}, A^{UU}) = \begin{pmatrix} (a^{LL}, b^{LL}, c^{LL}), \\ (a^{LU}, b^{LU}, c^{LU}), \\ (a^{UL}, b^{UL}, c^{UL}), \\ (a^{UU}, b^{UU}, c^{UU}), \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Ми ж будемо розглядати числа для яких
 $b^{LL} = c^{LL}, b^{LU} = c^{LU}, b^{UL} = c^{UL}, b^{UU} = c^{UU}$.

Приклад представлення первинної функції належності такого числа наведено на рис. 2.3.:

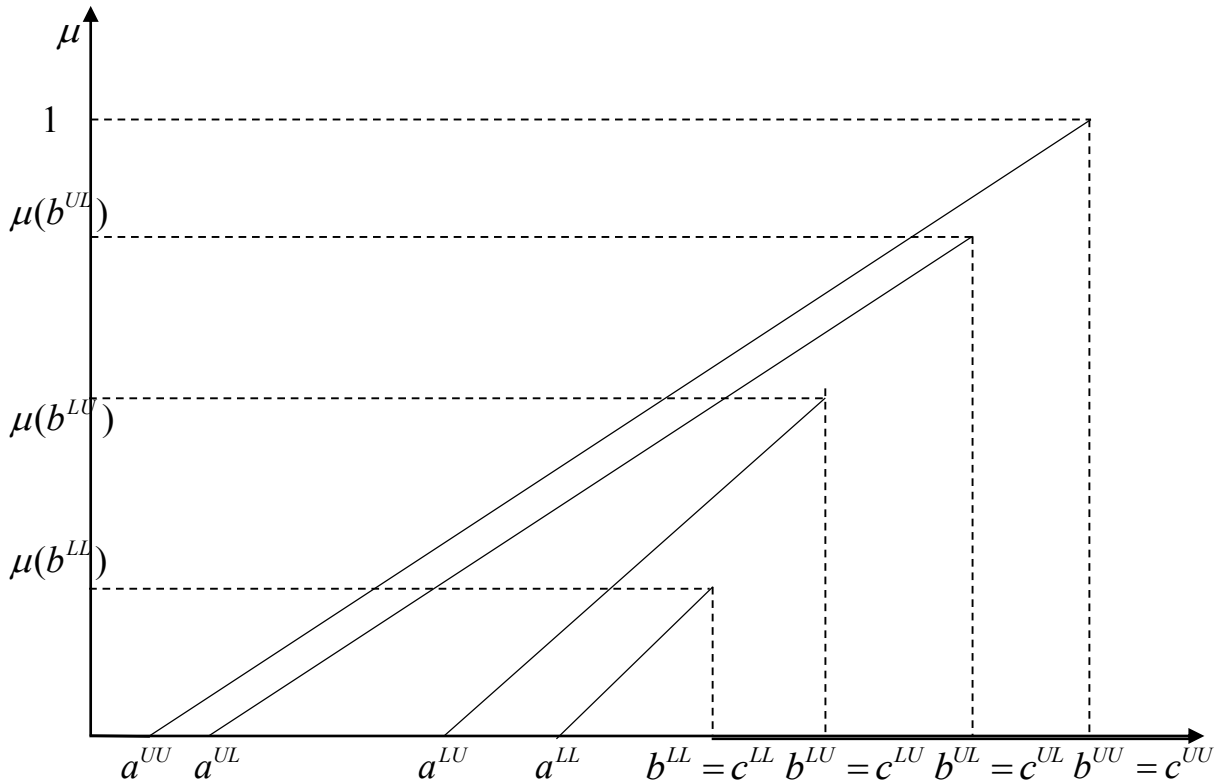


Рисунок 2.3 - Функція належності НЧТ-2

Задача для знаходження критичного шляху, у випадку коли тривалість робіт є нечіткими трикутно-трапецієподібними числами типу-2 набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in P} \tilde{u}_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_{(i,j) \in P} x_{ij} - \sum_{(j,k) \in P} x_{jk} &= 0; \\ \sum_{(1,j) \in P} x_{1j} &= 1; \\ \sum_{(i,n) \in P} x_{in} &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{де } \tilde{u}_{ij} = (u_{ij}^{LL}, u_{ij}^{LU}, u_{ij}^{UL}, u_{ij}^{UU}) = \begin{pmatrix} (a_{ij}^{LL}, b_{ij}^{LL}, b_{ij}^{LL}), \\ (a_{ij}^{LU}, b_{ij}^{LU}, b_{ij}^{LU}), \\ (a_{ij}^{UL}, b_{ij}^{UL}, b_{ij}^{UL}), \\ (a_{ij}^{UU}, b_{ij}^{UU}, b_{ij}^{UU}) \end{pmatrix}$$

Вторинна ж функція належності такого числа, при фіксованому рівні первинного ступеня належності μ , матиме вигляд трапеції:

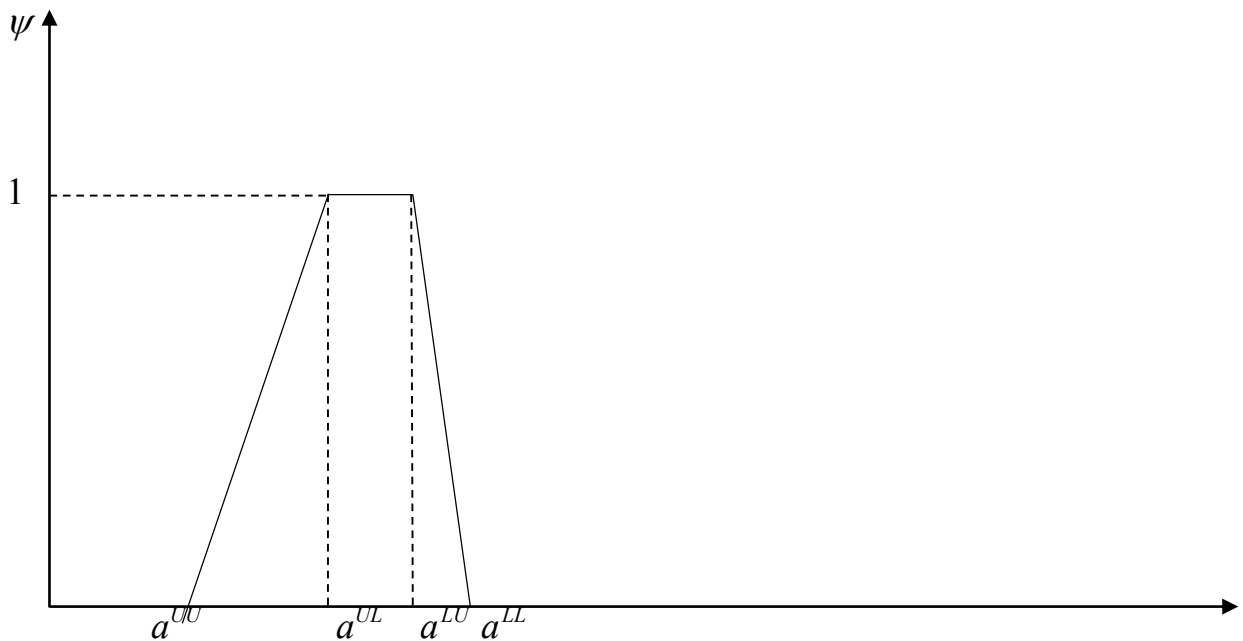


Рисунок 2.4 - Вторинна функція належності НЧТ-2

При використанні нечітких трикутно-трапецієподібних чисел типу-2 будемо розв'язувати задачу при заданих рівнях вторинного та первинного ступенів належності. Задання рівня β -зрізу вторинного ступеня належності дозволить задавати нечітке число типу-2 лише двома функціями належності:

$$\tilde{u}_{ij} = (u_{ij}^{\beta L}, u_{ij}^{\beta U}) = \begin{pmatrix} (a_{ij}^{\beta L}, b_{ij}^{\beta L}, b_{ij}^{\beta L}), \\ (a_{ij}^{\beta U}, b_{ij}^{\beta U}, b_{ij}^{\beta U}) \end{pmatrix},$$

де в свою чергу

$$a_{ij}^{\beta U} = a_{ij}^{UU} + \beta(a_{ij}^{UL} - a_{ij}^{UU}),$$

$$b_{ij}^{\beta U} = b_{ij}^{UU} + \beta(b_{ij}^{UL} - b_{ij}^{UU}),$$

$$a_{ij}^{\beta L} = a_{ij}^{LU} + \beta(a_{ij}^{LL} - a_{ij}^{LU})$$

$$b_{ij}^{\beta L} = b_{ij}^{LU} + \beta(b_{ij}^{LL} - b_{ij}^{LU})$$

Таким чином, це дозволяє представити нечіткі трикутно-трапецієподібні числа типу-2 у вигляді інтервальних нечітких чисел типу-2. За такого підходу значення тривалості роботи (i, j) , при заданих рівнях α та β первинного та вторинних ступенів належності, можна знайти у вигляді (2.11):

$$u_{ij} = a_{ij}^{UU} + \beta(a_{ij}^{UL} - a_{ij}^{UU}) + \alpha[b_{ij}^{UU} + \beta(b_{ij}^{UL} - b_{ij}^{UU}) - a_{ij}^{UU} - \beta(a_{ij}^{UL} - a_{ij}^{UU})] \quad (2.11)$$

Остаточно, задача мережевого планування з тривалістю робіт у формі нечітких трикутно-трапецієподібних чисел типу-2 набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in P} [a_{ij}^{UU} + \beta(a_{ij}^{UL} - a_{ij}^{UU}) + \alpha[b_{ij}^{UU} + \beta(b_{ij}^{UL} - b_{ij}^{UU}) - a_{ij}^{UU} - \beta(a_{ij}^{UL} - a_{ij}^{UU})]] x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{(i,j) \in P} x_{ij} - \sum_{(j,k) \in P} x_{jk} = 0; \\ \sum_{(1,j) \in P} x_{1j} = 1; \\ \sum_{(i,n) \in P} x_{in} = 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Розв'язавши задачу, ОПР отримає мережевий план з заданими рівнями ступенів належності та істинності α і β відповідно. Мережевий план характеризуватиметься тривалістю робіт, які лежать на критичному шляху та забезпечують компроміс між мінімально можливим часом виконання проекту та бажаними рівнями ступенів належності та істинності. Якщо отриманий час виконання проекту не задовольняє ОПР, можна перерозв'язати задачу, задавши інші ступені належності або істинності, проте, отриманий розв'язок, незалежно від ситуації є корисним джерелом інформації для ОПР.

РОЗДІЛ 3 ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕРЕЖЕВОГО ПЛАНУВАННЯ З НЕЧІТКОЮ ТРИВАЛІСТЮ РОБІТ

3.1 Приклад застосування у випадку тривалості робіт у формі нечітких інтервальних чисел типу-2

Покажемо як описаний підхід можна використовувати для розв'язання конкретних мережевого планування.

Приклад 3.1. Нехай необхідно побудувати мережевий графік виконання комплексу робіт, пов'язаних з реконструкцією магазину; визначити критично важливі роботи та мінімальний строк реалізації проекту. В табл. 3.1 міститься перелік робіт, які необхідно виконати, та від яких підготовчих робіт вони залежать.

Таблиця 3.1 - Перелік робіт

№	Назва роботи	Підготовчі роботи
1	Підготовчі роботи	-
2	Демонтаж старого обладнання	-
3	Будівельно-монтажні роботи	1
4	Підготовка фундаменту	1,2
5	Підготовка до монтажу обладнання	1
6	Електротехнічні роботи	1
7	Монтаж нового обладнання	4,5
8	Підключення обладнання до мережі	6,7
9	Технологічні випробування	8
10	Оздоблювальні роботи	3,6,7
11	Прийняття магазину в експлуатацію	9,10

Тривалість певної роботи важко визнати чітко, тож вона задана нечіткими трикутними інтервальними числами типу-2 вигляду (2.8) та представлена у табл. 3.2.

Таблиця 3.2 - Тривалості робіт

№	Назва роботи	Позначення роботи (i, j)	Тривалість роботи, год	
			НФН	ВФН
1	Підготовчі роботи	(1,2)	(12,15,15)	(10,20,20)
2	Демонтаж старого обладнання	(1,3)	(6,7,7)	(6,8,8)
3	Будівельно-монтажні роботи	(2,6)	(100,150,150)	(60,210,210)
4	Підготовка фундаменту	(3,4)	(101,103,103)	(100,105,105)
5	Підготовка до монтажу обладнання	(2,4)	(60,75,75)	(50,90,90)
6	Електротехнічні роботи	(2,5)	(61,69,69)	(45,75,75)
7	Монтаж нового обладнання	(4,5)	(42,44,44)	(40,45,45)
8	Підключення обладнання до мережі	(5,7)	(19,21,21)	(17,22,22)
9	Технологічні випробування	(7,8)	(33,34,34)	(30,35,35)
10	Оздоблювальні роботи	(6,8)	(23,37,37)	(15,45,45)
11	Прийняття центру в експлуатацію	(8,9)	(8,12,12)	(5,15,15)

Нижня та верхня функція належності мають вигляд:

$$\mu_{ij}(u) = \begin{cases} 0, u \leq a_{ij}; \\ \frac{u - a_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}}, a_{ij} < u \leq b_{ij}; \\ 0, u > b_{ij}. \end{cases}$$

Для верхньої функції належності $b_{ij}^U = c_{ij}^U$ - час, за який робота (i, j) буде обов'язково виконана. $\mu_{ij}(b_{ij}^U) = \mu_{ij}(c_{ij}^U) = 1$ відображає впевненість у тому, що

робота буде точно виконана за час не більший $b_{ij}^U = c_{ij}^U$. За час менший a_{ij}^U роботу виконати неможливо.

Спочатку, на основі даних з табл. 3.1 побудуємо мережевий графік, на якому зазначимо номери робіт. Такий графік представлено на рис. 3.1. Варто зазначити, що пунктиром позначено фіктивні роботи, які не потребують ресурсів для виконання, але наступна робота не може бути виконана поки не завершаться попередні.

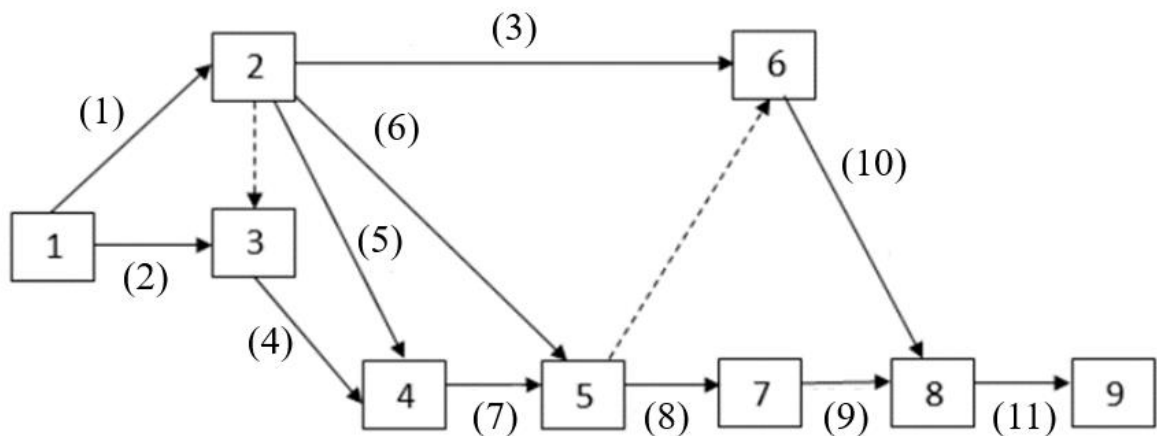


Рисунок 3.1 - Мережевий графік

Для визначення найкоротшого терміну виконання проекту, скористаємось методом критичного шляху [14]. Так, на основі даних табл. 3.2 для кожної події визначимо ранній старт та раннє завершення. Ранній термін завершення останньої події й визначить термін реалізації проекту. Оскільки тривалості робіт є нечіткими трикутними числами типу-2, то розв'язком такої задачі вважаємо оптимальний план з максимальним ступенем належності до нечіткої множини розв'язків. Такий підхід до визначення оптимального розв'язку дозволяє розглядати задачу лише з використанням верхньої функції належності.

Будемо знаходити ступені належності $\mu_D(x)$ допустимих планів x нечіткій множині розв'язків D , підвищуючи впевненість у тому, що кожна робота буде виконана за час не більший u , з кроком $\Delta = 0,1$, тобто,

$\mu_{ij}(u_{ij}) = k \cdot \Delta$ і однаковий для всіх робіт, які представлені на мережевому графіку.

Оскільки нечітка множина розв'язків D є перетином нечіткої множини допустимих планів X та нечіткої цілі C , то значення функцій належності $\mu_X(x)$, $\mu_C(x)$, $\mu_D(x)$, будемо знаходити у вигляді (2.1)-(2.3) відповідно.

Для розрахунку вище зазначених показників скористаємось Microsoft Excel 2016. Результати представлено у табл. 3.3.

Таблиця 3.3 - Тривалість критичного шляху

№	$\mu_{ij}(u_{ij})$	$\mu_X(x)$	Тривалість критичного шляху	$\mu_C(x)$	$\mu_D(x)$
1	0,0	0,0	202	1,00	0,00
2	0,1	0,1	206	0,95	0,10
3	0,2	0,2	210	0,91	0,20
4	0,3	0,3	214	0,86	0,30
5	0,4	0,4	218	0,82	0,40
6	0,5	0,5	222	0,77	0,50
7	0,6	0,6	226	0,73	0,60
8	0,7	0,7	230	0,68	0,68
9	0,8	0,8	250	0,45	0,45
10	0,9	0,9	270	0,23	0,23
11	1,0	1,0	290	0,00	0,00

Зазначимо, що значення тривалості критичного шляху обраховувалось за умови, що тривалість всіх робіт відповідає вказаному значенню функції належності $\mu_{ij}(u_{ij})$. При цьому, при зміні цих значень функції належності від нуля до 0,7 критичний шлях проходить через події 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, і відповідно критичні роботи – (1), (4), (7), (8), (9), (11), а при зміні від 0,8 до одиниці критичний шлях проходить через події 1, 2, 6, 8, 9 та критичними є роботи (1), (3), (10), (11).

Аналіз табл. 3.3 дозволяє зробити висновок, що максимальне значення функції належності нечіткої множини розв'язків дорівнює 0,68 і досягається при $\mu_{ij}(u_{ij}) = 0,7$.

Для знайденого розв'язку тривалість реалізації проекту складе 230 годин, критичним є шлях, що проходить через події 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 та критичні роботи – (1), (4), (7), (8), (9), (11). Вказані роботи потребують ретельного контролю та затримки у їх виконання є неприпустимими та призведуть до збільшення термінів виконання проекту.

Фактично, знайдений розв'язок визначає компроміс між ступенем надійності плану, який складає 0,7 та найменшим відхиленням від мінімально можливого часу виконання проекту, яке складе 28 годин. Отже, знайдений план забезпечуватиме реалізацію проекту за 230 годин зі ступенем надійності 0,7.

Запропонований підхід дозволяє будувати оптимальні плани проведення робіт, задаючи ступінь впевненості у тому, що робота буде виконана вчасно.

3.2 Приклад застосування у випадку тривалості робіт у формі нечітких трикутно-трапецієподібних чисел типу-2

Розв'яжемо задачу мережевого планування, в якій тривалості робіт задані нечіткими трикутно-трапецієподібними числами типу-2.

Приклад 3.2. ІТ-компанія займається проектом розробки нової інформаційної системи для споживання в середині компанії. Необхідно розподілити задачі між членами команди та розробити план робіт на основі їх тривалості та залежностей; визначити термін реалізації проекту. В таб. 3.4 наведено перелік робіт, які необхідно виконати для успішної реалізації системи. Деякі роботи можуть бути виконані паралельно, а деякі – залежать від виконання попередніх.

Таблиця 3.4 - Перелік робіт

№	Назва роботи	Залежить від робіт
1	Розробка технічного завдання	-
2	Створення дизайну інтерфейсу користувача	1
3	Написання програмного коду	1
4	Тестування програмного коду	2,3
5	Написання документації	4
6	Підготовка до розгортання системи	3
7	Впровадження системи	5,6

Точні терміни виконання завдань складно визначити, тож вони задаються нечіткими трикутно-трапецієподібними числами виду (2.10) та наведені в табл. 3.5.

Таблиця 3.5 - Тривалість роботи

№	Назва роботи	Позначення роботи (i, j)	Тривалість роботи, дні	
			НФН	ВФН
1	Розробка технічного завдання	(1,2)	(5;5,5;5,5) (4; 6; 6)	(3,5; 6,5; 6,5) (3; 7; 7)
2	Створення дизайну інтерфейсу користувача	(2,3)	(6,5; 8; 8) (6,5; 8; 8)	(6; 8,5; 8,5) (5; 9; 9)
3	Написання програмного коду	(2,4)	(7; 8; 8) (6; 9; 9)	(5; 10; 10) (4; 11; 11)
4	Тестування програмного коду	(3,5)	(3; 3,5 ;3,5) (2,5; 4; 4)	(2; 5; 5) (1; 6; 6)
5	Написання документації	(5,6)	(6; 9; 9) (5; 10; 10)	(4; 11; 11) (3; 12;12)

6	Підготовка до розгортання системи	(4,7)	(4; 5,5; 5,5) (3; 6; 6)	(2; 6,5; 6,5) (1; 7; 7)
7	Впровадження системи	(6,8)	(5; 7; 7) (4; 8; 8)	(3; 9; 9) (2; 10; 10)

Перш за все, на основі даних табл. 3.4 побудуємо мережеву діаграму. На рис. 3.2 показано мережевий графік, з зазначенням номерів робіт та їх залежностей. Нагадаємо, що пунктиром позначено фіктивні роботи.

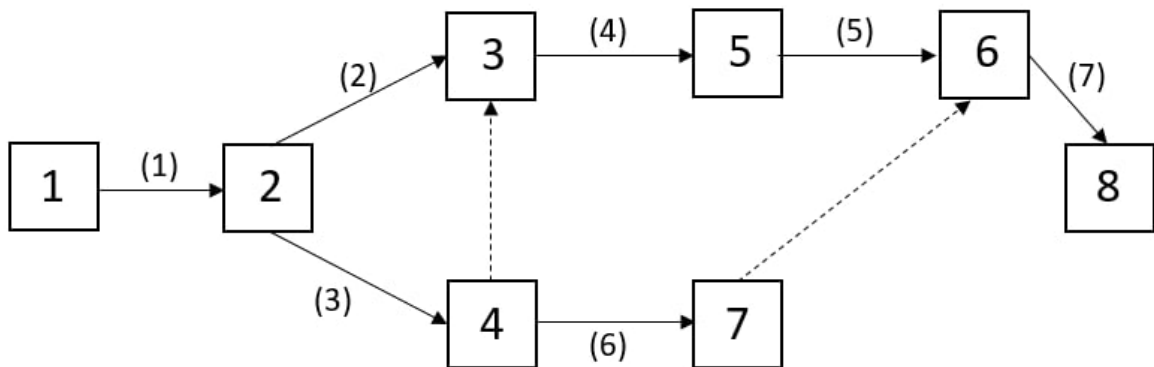


Рисунок 3.2 - Мережевий графік

Оскільки необхідно виконати проект в найкоротші строки, то розв'язувати задачу будемо методом критичного шляху, який дозволить визначити критичні роботи та з'ясувати термін реалізації проекту. Для цього розглянемо модель виду (2.12). Запропонуємо особі, що приймає рішення задати бажані рівні ступеня належності α та ступеня істинності β . Нехай $\alpha = 0,8; \beta = 0,9$. Відповідно до описаного підходу, задання бажаних рівнів дає змогу розглядати «кращі» розв'язки, які знаходять на верхній функції належності, що в свою чергу дозволяє переписати цільову функцію моделі (2.12) з урахуванням даних табл. 3.5 у вигляді:

$$\begin{aligned}
& [3 + \beta(3,5 - 3) + \alpha[(7 + \beta(6,5 - 7)) - 3 - \beta(3,5 - 3)]]x_{12} + \\
& + [5 + \beta(6 - 5) + \alpha[(9 + \beta(8,5 - 9)) - 5 - \beta(6 - 5)]]x_{23} + \\
& + [4 + \beta(5 - 4) + \alpha[(11 + \beta(10 - 11)) - 4 - \beta(5 - 4)]]x_{24} + \\
& + [1 + \beta(2 - 1) + \alpha[(6 + \beta(5 - 6)) - 1 - \beta(2 - 1)]]x_{35} + \\
& + [3 + \beta(4 - 3) + \alpha[(12 + \beta(11 - 12)) - 3 - \beta(4 - 3)]]x_{56} + \\
& + [1 + \beta(2 - 1) + \alpha[(7 + \beta(6,5 - 7)) - 1 - \beta(2 - 1)]]x_{47} + \\
& + [2 + \beta(3 - 2) + \alpha[(10 + \beta(9 - 10)) - 2 - \beta(3 - 2)]]x_{68} \rightarrow \min.
\end{aligned}$$

Отримали чітку цільову функцію задачі пошуку критичного шляху при обмеженнях моделі (2.12). Знайдемо мінімальний термін реалізації проекту, визначивши критичні роботи та їх тривалість за допомогою Microsoft Excel.

Тривалість кожної роботи при заданих рівнях ступенів належності та істинності наведено в табл. 3.6.

Таблиця 3.6 - Тривалість робіт

Номер роботи	Позначення	Тривалість, дні
1	(1,2)	5,93
2	(2,3)	8,02
3	(2,4)	9,06
4	(3,5)	4,46
5	(5,6)	9,66
6	(4,7)	5,62
7	(6,8)	7,86

В результаті, знайшовши критичний шлях, отримаємо послідовність критичних робіт: 1, 2, 4, 5, 7. Критичний шлях буде проходити через події 1, 2, 3, 5, 6, 8. Термін виконання проекту при цьому складе 35,93 дні. Варто зазначити, що при вказаних значеннях α та β ступень належності μ_D отриманого розв'язку до нечіткої множини розв'язків D , який знаходять у вигляді (2.5) буде рівний 0,16, адже відповідає значенню належності отриманого розв'язку до нечіткої множини цілі, який обраховують у вигляді (2.3) та який трактується як відхилення часу виконання проекту від мінімально

можливо. Отже, якщо ОПР не задовольняє даний ступінь належності розв'язку до нечіткої множини цілі, можна розв'язати задачу повторно, задавши нові значення α та β . Це дозволить підвищити ступінь належності до нечіткої множини цілі, при цьому знизивши ступінь впевненості.

В цьому випадку ОПР все влаштовує, таким чином важливо посилено контролювати такі роботи: розробку технічного завдання, створення дизайну інтерфейсу користувача, тестування програмного коду, написання документації та впровадження системи, адже затримки в цих роботах призведуть до збільшення часу виконання всього проекту. При цьому, роботи «Написання програмного коду» та «Підготовка до розгортання системи» можуть виконуватись паралельно з іншими та мають певний запас часу на затримки у виконанні.

ВИСНОВКИ

Задача мережевого планування знаходить застосування при розробці планів управління комплексом робіт або організацією в цілому. Проте, використання стандартних методів та математичного апарату теорії чітких множин для чіткого мережевого планування не охоплюють всіх аспектів даної проблеми. Тому в цій роботі представлено модель мережевого планування, у вигляді мережевого графіка, та знаходження на ньому критичного шляху, для якого тривалість робіт визначалась нечіткими числами типу-2. Це дало змогу більш детально розкрити суть проблеми та наблизити її до реальних життєвих ситуацій.

У роботі зроблено огляд з теорії нечітких множин та мережевого планування, включаючи базові визначення, основні операції, методи та типи подання нечітких множин, а також досліджено особливості побудови мережевого графіка. Було проведено систематизацію основних понять, що стосуються даної теми.

Використовуючи набуті знання, було продемонстровано застосування математичного апарату теорії нечітких множин для розв'язання задачі мережевого планування, де тривалості робіт мають нечіткий характер.

Представлено підхід до розв'язання задачі мережевого планування з нечіткою тривалістю робіт, який дозволяє вибрати з множини допустимих розв'язків такий мережевий графік, для якого досягається мінімальний час виконання проекту. Мережевий графік будується методом критичного шляху.

Запропонована альтернатива відображає компроміс між ступенем надійності плану та терміном його виконання. Тривалості робіт задано нечіткими трикутними числами типу-1, нечіткими інтервальними числами типу-2 та трикутно-трапецієподібними числами типу-2.

Для ілюстрації запропонованого підходу було розв'язано дві задачі з використанням нечіткого інтервального та трикутно-трапецієподібних чисел типу-2.

Результати, що отримані в роботі, можуть бути використані як навчальний матеріал, так і для більш ґрунтовного аналізу та побудови планів виконання робіт, які постають перед керівниками проєктів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Заболотский В.П., Оводенко А.А., Степанов А.Г. Математические модели в управлении: Учеб. пособие/ СПбГУАП. СПб., 2001, 196с.: ил.
2. Zadeh L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning / L. A. Zadeh // Inform. Sci. – 1975. – Vol. 8. – P. 199-249.
3. Zadeh, L. A. Decision-making in a fuzzy environment / L. A. Zadeh, R. E. Bellman // Management. Sci. — 1970. — Vol. 17. — P. 141–164.
4. Мащенко С. О. Принятие решений при нечетком множестве состояний природы / С. О. Мащенко. – Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2013. – 109 с.
5. Олизаренко С. А. Нечеткие множества типа 2. Терминология и представление / С. А. Олизаренко, Е. В. Брежнев, А. В. Перепелица – Х.: Ун-т Возд. Сил им. Ивана Кожедуба, 2010. – с.131-140.
6. Mendel J.M. Type-2 Fuzzy Sets Made Simple / J.M. Mendel, R.I. John // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2002. – Vol. 10, № 2. – P. 117-127.
7. Кривошеев, А. З. Основы математического моделирования / А. З. Кривошеев, Ю. Н. Волков, В. Б. Вилков, Ю. Н. Савченко, Н. Г. Федоров. —СПб. : ВАТТ, 1996. — 272 с.
8. Оре, О. Теория графов. — М. : Наука, 1968. — 352 с.
9. Chang P.-T. Ranking of Fuzzy Sets Based on the Concept of Existence / P.-T. Chang, E.S. Lee // Computers and mathematics with applications. – Elsevier. – 1994. – Vol.27. – p. 1–21.
10. Орловский, С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М. : Наука, 1981. — 206 с.
11. Chen S. M. Fuzzy multiple attributes group decision making based on the ranking value sand the arithmetic operations of interval type-2 fuzzy sets / Chen S. M., Lee L. W. // Experts Syst. – 2010. –Appl. 37. – P. 824–833.
12. Матвеев М. Г. Математическое моделирование задачи сетевого планирования с помощью нечеткой математики / М. Г. Матвеев, Н. А.

- Алейникова – В.: Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – №3. – С. 155–162.
13. Hamrawi H. Type-2 fuzzy arithmetic using alpha-planes / Hamrawi H, Coupland S. // Proceedings of IFSA-EUSFLAT. – 2009. – P. 606-611.
14. Таха, Т. Введение в исследование операций. – М. : Вильямс, 2005. – 912с.