

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

**ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»**

на тему:

**Асимптотика аналога процесу відновлення, побудованого за
незалежними випадковими величинами**

студента 4 курсу
Тухаря Федора Сергійовича

Науковий керівник:
професор, доктор фізико-математичних наук
Іксанов О. М.



Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та
рекомендована до захисту в ЕК, протокол № 9 від 23 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО



проф. Іксанов О.М

Київ-2023



Зміст

1. Вступ	2
2. Основні результати	3
3. Допоміжні результати	4
4. Доведення твердження 2.1	5
5. Доведення твердження 2.2	6
6. Доведення теореми 2.3	7
7. Доведення теореми 2.4	9
8. Доведення теореми 2.5	11
9. Висновок	12
Література	13

1 Вступ

Нехай ξ_1, ξ_2, \dots – це незалежні копії невід’ємної випадкової величини ξ . Позначимо через $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, де $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, випадкове блукання, що починається в нулі зі стрибками ξ_k , тобто $S_0 := 0$ та $S_k := \xi_1 + \dots + \xi_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Випадковий процес $N(t) := \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}$, $t \geq 0$ називається процесом відновлення.

Випадкові величини S_1, S_2, \dots є залежними. Позначимо через $(S_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ незалежні випадкові величини такі, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ S_n^* має такий же розподіл, що і S_n . Покладемо

$$N^*(t) := \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^* \leq t\}} \quad (1)$$

Метою даної роботи є порівняння властивостей процесів $N(t)_{t \geq 0}$ та $N^*(t)_{t \geq 0}$, зокрема, буде досліджено асимптотичні властивості дисперсій цих процесів та знайдено асимптотику виразу $\prod_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k^* > t)$.

2 Основні результати

Сформулюємо основні результати даної дипломної роботи.

Твердження 2.1. Для довільного $t \geq 0$

$$\mathbb{E}N^*(t) = \mathbb{E}N(t) < \infty. \quad (2)$$

Твердження 2.2. Нехай ξ_1 має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Тоді для довільного $t \geq 0$

$$\text{Var}N(t) = \lambda t. \quad (3)$$

Теорема 2.3. Нехай ξ_1 має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Тоді

$$\text{Var}N^*(t) \sim \sqrt{\frac{\lambda t}{\pi}} \quad (4)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 2.4. Нехай ξ_1 має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Тоді

$$-\log \prod_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k^* > t) \sim \frac{\lambda^2 t^2}{4} \quad (5)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 2.5. Припустимо, що

$$\int_0^1 -y \log \mathbb{P}(\xi > 1/y) dy < \infty. \quad (6)$$

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\log \prod_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k^* > t)}{t^2} = \int_0^{1/\mu} y I(1/y) dy < \infty, \quad (7)$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, а I - це перетворення Лежандра розподілу ξ , тобто

$$I(x) := \sup_{s \in J} (sx - \log \mathbb{E} \exp(s\xi)) \quad (8)$$

для $x > 0$ та $J := \{s \geq 0 : \mathbb{E} \exp(s\xi) < \infty\}$.

3 Допоміжні результати

Лема 3.1, що наведена нижче, є важливою частиною доведення теореми 2.5.

Лема 3.1. *Припустимо, що $\mathbb{E}\xi < \infty$ і розподіл ξ належить області притягання α -стійкого розподілу, $\alpha \in (1, 2]$. Тоді*

$$-\log \prod_{n \geq \lfloor t/\mu \rfloor + 1} \mathbb{P}\{S_n > t\} = O(t), \quad t \rightarrow \infty$$

Доведення. Для простоти представлення ми опускаємо цілі частини і пишемо, наприклад, t/μ замість $\lfloor t/\mu \rfloor$. Це не впливає на асимптотику.

За припущенням, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{S_{t/\mu} > t\} = \mathbb{P}\{X_\alpha > 0\} =: c_\alpha > 0$, де X_α це випадкова величина з α -стабільним розподілом. Отже, для великих t $\mathbb{P}\{S_{t/\mu} > t\} \geq c_\alpha/2$ і після цього

$$\prod_{n=t/\mu+1}^{2t/\mu} \mathbb{P}\{S_n > t\} \geq \prod_{n=t/\mu+1}^{2t/\mu} \mathbb{P}\{S_{t/\mu} > t\} \geq (c_\alpha/2)^{t/\mu} \quad (9)$$

Це доводить $-\log \prod_{n=t/\mu+1}^{2t/\mu} \mathbb{P}\{S_n > t\} = O(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Далі, для великих t $\mathbb{P}\{S_n \leq t\} \leq 1 - c_\alpha/2$ для всіх $n \geq 2t/\mu$. Використовуючи $-\log(1-x) \leq a_\alpha x$ для всіх $x \in [0, 1 - c_\alpha/2]$ ми отримуємо

$$-\log \prod_{n \geq 2t/\mu} \mathbb{P}\{S_n > t\} \leq a_\alpha \sum_{n \geq 2t/\mu} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} \leq a_\alpha \sum_{n \geq 2t/\mu} \mathbb{P}\{S_n \leq \mu n/2\} \quad (10)$$

Оскільки $\lim_{u \rightarrow 0+} u^{-1}(-\log \mathbb{E} \exp(-u\xi)) = \mu$, ми отримуємо, що існує таке $u_0 > 0$, що $c := \mu/2 + u_0^{-1} \log \mathbb{E} \exp(-u_0\xi) \in (-\infty, 0)$. Це дає за допомогою нерівності Маркова наступну нерівність:

$$\sum_{n \geq 2t/\mu} \mathbb{P}\{S_n \leq \mu n/2\} \leq \sum_{n \geq 2t/\mu} \mathbb{E} \exp(-u_0 S_n) \exp(u_0 \mu n/2) = \sum_{n \geq 2t/\mu} \exp(cn) = o(1), \quad t \rightarrow \infty \quad (11)$$

Таким чином, $-\log \prod_{n \geq 2t/\mu} \mathbb{P}\{S_n > t\} = o(1)$ as $t \rightarrow \infty$, що закінчує доведення. \square

4 Доведення твердження 2.1

Для довільного $t \geq 0$ запишемо наступне:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N^*(t) &= \mathbb{E} \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^* \leq t\}} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{S_n^* \leq t\}} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n^* \leq t) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} = \mathbb{E} \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} = \mathbb{E}N(t) \quad (12) \end{aligned}$$

Позначимо $\nu(t) = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}$, тоді, очевидно, що $\nu(t) = N(t) + 1$. Функція $U(t) = \mathbb{E}\nu(t)$ називається функцією відновлення і відомо, що вона є скінченною, тому $\mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}\nu(t) - 1 = U(t) - 1 < \infty$, що завершує доведення.

5 Доведення твердження 2.2

Доведемо, що $N(t)$ - це процес Пуасона. Дійсно, для довільних $t > s \geq 0$:

$$N(t) - N(s) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} - \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq s\}} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{s < S_n \leq t\}}, \quad (13)$$

а величина $\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{s < S_n \leq t\}}$ має розподіл Пуасона з параметром $\lambda(t - s)$. Також прирости процесу $N(t)$ є незалежними і кожна окрема реалізація процесу $N_t(\omega)$ є неперервною справа і має скінченні ліві границі, звідси $N(t)$ є процесом Пуасона. Звідси $Var N(t) = \lambda t$, що і вимагалось довести.

6 Доведення теореми 2.3

Оскільки ξ має показниковий розподіл з параметром λ , а $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, то S_n має розподіл Ерланга з параметрами n та λ , звідси:

$$\mathbb{P}(S_n^* > t) = \mathbb{P}(S_n > t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k. \quad (14)$$

Оскільки $\sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda t}$, то $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k = 1$, тому

$$\mathbb{P}(S_n^* \leq t) = 1 - \mathbb{P}(S_n^* > t) = \sum_{k \geq n} \frac{1}{k!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k. \quad (15)$$

оскільки S_n^* незалежні, то і $\mathbb{1}_{\{S_n^* \leq t\}}$ незалежні, тому:

$$\begin{aligned} \text{Var} N^*(t) &= \sum_{n \geq 1} \text{Var} \mathbb{1}_{\{S_n^* \leq t\}} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n^* > t) \mathbb{P}(S_n^* \leq t) = \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i \geq n} \frac{1}{i!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^i \right) \left(\sum_{j < n} \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j \right) = \sum_{n \geq 1} \sum_{i \geq n} \sum_{j < n} \frac{1}{i!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^i \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j = \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{i > j} (i-j) \frac{1}{i!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^i \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j = \lambda t \sum_{j \geq 0} \sum_{i > j} \frac{1}{(i-1)!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{i-1} \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j - \\ &= \lambda t \sum_{j \geq 1} \sum_{i > j} \frac{1}{i!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^i \frac{1}{(j-1)!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-1} = \lambda t \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq j} \frac{1}{i!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^i \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j - \\ &= \lambda t \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq j+2} \frac{1}{i!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^i \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j = \lambda t \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j+} \\ &= \lambda t \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(j+1)!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j+1} \frac{1}{j!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j = \\ &= \lambda t e^{-2\lambda t} \left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (\lambda t)^j \frac{1}{j!} (\lambda t)^j + \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(j+1)!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j+1} \frac{1}{j!} (\lambda t)^j \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Нагадаємо визначення функцій Бесселя 1-го роду: $I_v(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!(k+v)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}$, тоді:

$$\text{Var} N^*(t) = \lambda t e^{-2\lambda t} (I_0(2\lambda t) + I_1(2\lambda t)). \quad (17)$$

Оскільки для $v \in \mathbb{N}_0$ $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r} I_v(r) \sqrt{2\pi r} = 1$, тоді

$$\lambda t e^{-2\lambda t} I_0(2\lambda t) \sim \lambda t e^{-2\lambda t} \frac{e^{2\lambda t}}{\sqrt{4\pi\lambda t}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda t}{\pi}} \quad (18)$$

$$\lambda t e^{-2\lambda t} I_1(2\lambda t) \sim \lambda t e^{-2\lambda t} \frac{e^{2\lambda t}}{\sqrt{4\pi\lambda t}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda t}{\pi}} \quad (19)$$

і, додаючи два останні вирази, отримуємо, що $Var N^*(t) \sim \sqrt{\frac{\lambda t}{\pi}}$ при $t \rightarrow \infty$, що завершує доведення.

7 Доведення теореми 2.4

Оскільки ξ має показниковий розподіл з параметром λ , а $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, то S_n має розподіл Ерланга з параметрами n та λ . Твірна функція моментів від S_n^* існує для $\theta < \lambda$ і за оцінкою Чернова:

$$\mathbb{P}(S_n^* > t) \leq e^{-\theta t} \mathbb{E}[e^{\theta S_n^*}] = e^{-\theta t} \left(1 - \frac{\theta}{\lambda}\right)^{-n} \quad (20)$$

Функція в правій частині досягає мінімуму при $\theta = \lambda - \frac{n}{t}$ для $n < \lambda t$, тому $\mathbb{P}[S_n^* > t] \leq e^{n - \lambda t} \left(\frac{n}{\lambda t}\right)^{-k}$. Таким чином (тут і надалі вважаємо λt цілим, це мало на що впливає)

$$\begin{aligned} \prod_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k^* > t) &\leq \prod_{k=1}^{\lambda t} \mathbb{P}(S_k^* > t) \leq \prod_{k=1}^{\lambda t} e^{k - \lambda t - k \log\left(\frac{k}{\lambda t}\right)} = \\ &e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{4} - \frac{\lambda t}{2} - \lambda^2 t^2 \left(\int_0^1 x \log(x) dx\right) + O(t \log(\sqrt{t}))} = e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{4} (1 + o(1))}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тепер запишемо аналогічну оцінку для нижньої межі.

$$\mathbb{P}[S_n^* > t] = \frac{1}{\Gamma(n)} \gamma(n, \lambda t) = e^{-\lambda t} \sum_{i \geq 0} \frac{(\lambda t)^i}{(i + n)!} = e^{-\lambda t} \sum_{i \geq n} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad (22)$$

а оскільки $\sum_{i \geq 0} (\lambda t)^i i! = e^{\lambda t}$, тоді $\mathbb{P}(S_n^* > t) = e^{-\lambda t} \sum_{i < n} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \geq e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$. Використаємо цю нерівність для $n \leq \lambda t$:

$$\begin{aligned} \prod_{n \leq \lambda t} \mathbb{P}[S_n^* > t] &\geq \prod_{n \leq \lambda t} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(t-1)!} = \exp\left\{-\lambda^2 t^2 + \sum_{n < \lambda t} n \log(\lambda t) - \log(n!)\right\} = \\ &= \exp\left\{-\lambda^2 t^2 + \sum_{n < \lambda t} n \log(\lambda t) - \sum_{n < \lambda t} (\lambda t - n) \log(\lambda n)\right\} = \\ &\exp\left\{-\lambda^2 t^2 + \sum_{n < \lambda t} (\lambda t - n) \log(\lambda t) - \sum_{n < \lambda t} (\lambda t - n) \log(\lambda n)\right\} = \\ &\exp\left\{-\lambda^2 t^2 + \sum_{n < \lambda t} (\lambda t - n) \log\left(\frac{n}{\lambda t}\right)\right\} = \\ &\exp\left\{-\lambda^2 t^2 - \lambda^2 t^2 \int_0^1 (1-x) \log(x) dx + O(t \log(\sqrt{t}))\right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

звідси

$$\prod_{n \leq \lambda t} \mathbb{P}[S_n^* > t] \geq e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{4} + O(t \log(\sqrt{t}))}. \quad (24)$$

оскільки $\mathbb{P}[S_{\lambda t}^* > t] = e^{-\lambda t} \sum_{i \geq \lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \mathbb{P}(\text{Poisson}(\lambda t) > \lambda t) \rightarrow \frac{1}{2}$ при $t \rightarrow \infty$, звідси існує достатньо велике t , що для будь-кого $n > \lambda t$ виконується $\mathbb{P}[S_n^* > t] \geq \frac{1}{4}$. Тоді, для достатньо великих t , отримуємо:

$$\prod_{n=\lambda t+1}^{2\lambda t} \mathbb{P}[S_n^* > t] \geq e^{-\lambda t \log(4)}. \quad (25)$$

Тепер доведемо, що для достатньо великих t , з ймовірністю принаймні $\frac{1}{2}$, подія $\{S_n^* > t, \text{ для кожного } n > 2\lambda t\}$ трапляється. Щоб це довести, згадаємо принцип великих відхилень (оцінку Крамера) для випадкових величин, що мають показниковий розподіл з параметром λ , отримуємо, що:

$$\mathbb{P}[S_n^* < \frac{k}{2}] \leq e^{-ck}, \quad (26)$$

де константа c не залежить від k . Тоді для достатньо великих t $\sum_{n > 2\lambda t} \mathbb{P}[S_n^* < t] < \frac{1}{2}$, звідси

$$\prod_{n > 2\lambda t} \mathbb{P}[S_n^* > t] \geq \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Об'єднуючи результати (24), (25) і (27), отримуємо, що

$$\prod_{n \geq 1} \mathbb{P}[S_n^* > t] \geq e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{4} + O(t \log(\sqrt{t}))}, \quad (28)$$

що і завершує доведення.

8 Доведення теореми 2.5

Згідно з умовами теореми, $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Це означає, що розподіл ξ належить до наближення нормального розподілу. Отже, за лемою 3.1 достатньо дослідити асимптотику добутку $\prod_{n=1}^{\lfloor t/\mu \rfloor} \mathbb{P}\{S_n > t\}$. Для довільного $a \in (0, 1/\mu)$ і $t > 1/a$,

$$\begin{aligned} -t^2 \log \prod_{n=1}^{\lfloor t/\mu \rfloor} \mathbb{P}\{S_n > t\} &= t^2 \int_1^{t/\mu} -\log \mathbb{P}\{S_{\lfloor y \rfloor} > t\} dy = \\ &= \int_{1/t}^{1/\mu} \frac{-x \log \mathbb{P}\{S_{\lfloor tx \rfloor} > t\}}{tx} dx = \int_{1/t}^a \dots + \int_a^{1/\mu} \dots \end{aligned} \quad (29)$$

За теоремою Крамера (див., наприклад, теорему I.4 у [1]) для кожного $x \in [a, 1/\mu]$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\log \mathbb{P}\{S_{\lfloor tx \rfloor} > t\}}{tx} = I(1/x) \quad (30)$$

Крім того, збіжність є рівномірною $x \in [a, 1/\mu]$, оскільки $x \mapsto I(1/x)$ неперервна функція (I є опуклою) і для кожного t , функція $-\log \mathbb{P}\{S_{\lfloor tx \rfloor} > t\} / (tx)$ не зростає. Отже,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^{1/\mu} \frac{-x \log \mathbb{P}\{S_{\lfloor tx \rfloor} > t\}}{tx} dx = \int_a^{1/\mu} x I(1/x) dx. \quad (31)$$

Достатньо довести, що $\lim_{a \rightarrow 0+} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{1/t}^a \frac{-\log \mathbb{P}\{S_{\lfloor tx \rfloor} > t\}}{t} dx = 0$. Використовуючи

$$\mathbb{P}\{S_n > t\} \geq \mathbb{P}\left\{\min_{1 \leq k \leq n} \xi_k > t/n\right\} = (\mathbb{P}\{\xi > t/n\})^n, \quad t \geq 0, n \in \mathbb{N} \quad (32)$$

і нехтуючи для спрощення цілими частинами, які ми отримуємо

$$\int_{1/t}^a \frac{-\log \mathbb{P}\{S_{\lfloor tx \rfloor} > t\}}{t} dx \leq \int_0^a -x \log \mathbb{P}\{\xi > 1/x\} dx. \quad (33)$$

При $a \rightarrow 0+$, інтеграл збігається до 0 за припущенням.

9 Висновок

У цій дипломній роботі ми порівняли властивості процесів $N(t)_{t \geq 0}$ та $N^*(t)_{t \geq 0}$, зокрема, дослідили асимптотичні властивості дисперсій цих процесів та знайшли асимптотику виразу $\prod_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k^* > t)$.

Література

- [1] F. den Hollander, *Large deviations*. American Mathematical Society, 2000