МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Клевчук Іван Іванович

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних
наук, професор,
академік НАН України
Перестюк Микола Олексійович

Київ – 2016

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. В сучасних задачах природознавства часто доводиться досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків різних класів диференціальних рівнянь. Найбільш складними в теорії стійкості є критичні випадки. Для їх дослідження О.М. Ляпунов запропонував принцип зведення, що дозволяє понизити розмірність системи диференціальних рівнянь і спростити дослідження. Пізніше дослідженням критичних випадків у теорії стійкості займалися І.Г. Малкін, Г.В. Каменков, В.І. Зубов та багато інших.

Ефективним методом дослідження систем диференціальних рівнянь є метод інтегральних многовидів. Цей метод для систем в стандартній формі був запропонований М.М. Боголюбовим. Надалі метод інтегральних многовидів для звичайних диференціальних рівнянь розвивали представники Київської школи з нелінійної механіки: Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, О.Б. Ликова, В.І. Фодчук, Д.І. Мартинюк та інші, а також С. Смейл, А. Халанай, Дж. Хейл та інші. Використання інтегральних многовидів дозволило розширити застосування принципу зведення [98].

Іншою важливою задачею є дослідження структурної стійкості системи. Теорема Гробмана-Хартмана встановлює структурну стійкість сідла. При малому збуренні структурно стійкої системи одержимо систему, топологічно еквівалентну початковій.

Використовуючи принцип зведення [98], можна показати, що в критичному випадку система диференціальних рівнянь топологічно еквівалентна більш простій системі рівнянь, побудованій за допомогою інтегральних многовидів.

Задача дослідження стійкості у критичних випадках тісно зв'язана із задачею дослідження біфуркації стану рівноваги при зміні параметрів системи. В багатьох прикладних задачах зустрічається біфуркація народження циклу. Стійкий цикл може виникати із асимптотично стійкого стану рівноваги, якщо при зміні параметрів системи пара коренів характеристичного рівняння проходить через уявну вісь у праву півплощину. Для систем диференціальних рівнянь з періодичною правою частиною в нерезонансному випадку відбувається біфуркація народження тора.

При дослідженні багатьох задач механіки, біології, математичної економіки, теорії керування, радіофізики необхідно враховувати ефект післядії. Процеси з післядією описуються диференціально- функціональними рівняннями. Починаючи з 50-их років диференціально-функціональними рівняннями займалися багато відомих математиків: А.Д. Мишкіс, Є.М. Райт, М.М. Красовський, Р. Беллман, Л.Е. Ельсгольц, А. Халанай, Дж. Хейл та інші. Важливий внесок у розвиток різних розділів теорії диференціально-функціональних рівнянь зробили Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, О.М. Шарковський, М.В. Азбелєв, Я.Й. Бігун, О.А. Бойчук, Ю.С. Колєсов, В.Б. Колмановський, Я. Курцвейль, Д.І. Мартинюк, Г.П. Пелюх, В.П. Рубаник, В.Ю. Слюсарчук, Ю.В. Теплінський, В.І. Ткаченко, С.І. Трофімчук, В.І. Фодчук, Д.Я. Хусаїнов, Є.Ф. Царков, І.М. Черевко, С.Н. Шиманов та інші.

Для диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, багато праць присвячено розвитку теорії стійкості та асимптотичних методів нелінійної механіки. При цьому часто використовується запропонована М.М. Красовським інтерпретація розв'язку диференціально-функціонального рівняння як інтегральної лінії в нескінченновимірному просторі $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$. Використовуючи цю інтерпретацію, С.Н. Шиманов та Дж. Хейл запропонували метод розщеплення квазілінійного диференціально-функціонального рівняння на систему двох рівнянь.

Багато прикладних задач приводять до сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Фундаментальні результати для таких рівнянь були одержані А.М. Тихоновим. Дальший розвиток вони одержали в працях А.О. Дородніцина, М.Й. Вішіка і Л.А. Люстерника, Є.Ф. Міщенка і М.Х. Розова, А.Б. Васильєвої і В.Ф. Бутузова. Відзначимо також дослідження важливих класів сингулярно збурених задач Ю.С. Колєсовим, В.В. Стригіним і В.А. Соболєвим, В.О. Плотніковим, О.А. Бойчуком, В.Г. Самойленком, В.П. Яковцем та іншими.

На такі задачі були поширені асимптотичні методи, методи примежових функцій та малого параметра. Проте для сингулярно збурених задач доцільно використовувати не тільки асимптотичні, але й геометричні методи аналізу, які дозволяють якісно дослідити поведінку як окремих розв'язків, так і цілих їх множин.

Одним із найефективніших методів дослідження регулярно і сингулярно збурених задач високої розмірності є метод інтегральних многовидів. Для дослідження сингулярно збурених задач метод інтегральних многовидів застосовувався в працях К.В. Задираки, В.І. Фодчука і Я.С. Баріса, В.В. Стригіна і В.А. Соболєва, Д. Хенрі, Н. Фенічела, К. Кноблоха, К. Сакамото та інших. Стійкі інтегральні многовиди сингулярно збурених диференціальних рівнянь із запізненням вивчались у працях А. Халаная, Ю.О. Митропольського і В.І. Фодчука.

Для дослідження стійкості лінійних систем на многовиді застосовується метод усереднення, а для нелінійних систем – метод нормальних форм [4].

Метод інтегральних многовидів застосовується у теорії біфуркацій нелінійних систем із запізненням. Цей метод дозволяє звести дослідження біфуркації стану рівноваги складних систем до дослідження біфуркації стану рівноваги системи звичайних диференціальних рівнянь, що значно спрощує задачу. Для систем нелінійних диференціальних рівнянь можуть існувати інваріантні множини складної структури. Першим складну динаміку для задачі трьох тіл небесної механіки досліджував А. Пуанкаре [100]. Складна динаміка дифеоморфізмів простору $\mathbb{R}^n$ випливає з існування гомоклінічних (гетероклінічних) точок. Такі дифеоморфізми досліджував Дж. Біркгоф, а пізніше С. Смейл та інші математики [91]. При певних умовах із існування гомоклінічної точки випливає існування підкови Смейла та інваріантної множини, яка має структуру множини Кантора. У випадку системи диференціальних рівнянь з періодичною правою частиною встановлено простий критерій існування гомоклінічних точок – критерій Мельникова [78].

Найпростіший клас динамічних систем – одновимірні динамічні системи [140]. Теорія раціональних відображень комплексної площини в себе була розроблена французькими математиками Г. Жуліа і П. Фату майже сто років назад. Протягом останніх десятиліть теорія динамічних систем інтенсивно розвивалася і збагатилася результатами багатьох відомих математиків.

Параболічні функціонально-диференціальні рівняння з перетворенням просторових змінних було запропоновано С.О. Ахмановим, М.А. Воронцовим і В.Ю. Івановим як математичну модель для вивчення динаміки структур в оптичних резонаторах з двовимірним зворотним зв'язком. Задача про біфуркації періодичних за часом розв'язків вивчалася в роботах С.О. Кащенка, О.В. Разгуліна та інших.

Для диференціальних рівнянь з частинними похідними можуть виникати складні просторові структури. У системах нелінійних гіперболічних рівнянь досліджено існування зліченного числа циклів, а у системах параболічних рівнянь з малою дифузією – існування як завгодно великої кількості циклів (феномен буферності). Динаміка таких процесів досліджувалася у роботах А.Ю. Колєсова, Ю.С. Колєсова, Є.Ф. Міщенка, М.Х. Розова, В.А. Садовнічого, А.М. Самойленка, Є.П. Бєлана та інших. Такі математичні моделі описують складні фізичні явища.

Отже, для регулярно та сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь були досліджені тільки окремі задачі, пов'язані із застосуванням методу інтегральних многовидів. Цим задачам та іншим питанням, що пов'язані із методом інтегральних многовидів та дослідженням асимптотичної поведінки розв'язків різних класів регулярно і сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь, різницевих рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними присвячена ця дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження дисертаційної роботи розпочаті в рамках держбюджетних наукових тем кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка №11БФ038-01 "Розроблення нових математичних методів моделювання, аналізу та побудова керувань для нелінійних еволюційних систем зі складною динамікою" (номер державної реєстрації 011U006677), №06БФ038-01 "Якісні та аналітичні методи дослідження і моделювання нелінійних систем та фізико-механічних систем із складною динамікою" (номер державної реєстрації 0106U005863) і були продовжені в рамках науково-дослідних робіт "Якісне дослідження та математичне моделювання процесів, що описуються диференціальними та диференціально-функціональними рівняннями" (номер державної реєстрації 0106U008365), "Методи аналізу диференціально-функціональних і еволюційних рівнянь та математичне моделювання процесів з післядією та випадковостями" (номер державної реєстрації 0111U000181), які виконувалися в Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича.

Мета і задачі досліджень. Об'єктом дослідження є регулярно та сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння. Метою досліджень даної роботи є розвиток методу інтегральних многовидів та асимптотичних методів для параболічних і гіперболічних рівнянь з перетвореним аргументом та диференціально-різницевих рівнянь, дослідження на основі зазначених методів змістовних біфуркаційних задач.

Предмет дослідження – інтегральні многовиди як апарат якісного, біфуркаційного аналізу.

У даній роботі застосовуються методи функціонального аналізу, теорії динамічних систем, якісної теорії диференціальних рівнянь, теорії стійкості, теорії біфуркацій, асимптотичні методи нелінійної механіки, метод усереднення та інші.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати дисертації є новими. Основні результати дисертації полягають в наступному:

– для диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, імпульсних диференціально-функціональних рівнянь та різницевих рівнянь доведено існування інтегральних многовидів та досліджено їх властивості;

– для вказаних рівнянь доведено принцип зведення для дослідження стійкості розв'язків у критичному випадку, згідно з яким стійкість нульового розв'язку рівняння рівносильна стійкості нульового розв'язку рівняння на многовиді;

– запропоновано метод побудови функції, що задає центральний многовид, який полягає у знаходженні асимптотичного розкладу в степеневий ряд за координатами;

– обґрунтовано алгоритм дослідження стійкості нульового розв'язку у критичному випадку, який включає в себе наближену побудову рівняння на многовиді; для дослідження стійкості розв'язку лінійного рівняння на многовиді запропоновано метод усереднення, а для нелінійного рівняння на многовиді – метод нормальних форм;

– доведена динамічна еквівалентність системи диференціально-функціональних рівнянь та деякої більш простої системи рівнянь;

– побудована заміна, яка розщеплює систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу на два незалежних рівняння; така ж заміна побудована для лінійних сингулярно збурених систем нейтрального типу та лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням;

– розв'язана задача квазіоптимальної стабілізації лінійної керованої сингулярно збуреної системи із запізненням;

– для сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь одержано зображення інтегрального многовиду, досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги та субфуркація періодичних розв'язків;

– показано, що при певних припущеннях на праву частину сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь з періодичними коефіцієнтами відображення Пуанкаре має трансверсальну гомоклінічну точку;

– метод усереднення застосовано до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням;

– досліджено поліноміальні і раціональні відображення, еквівалентні кусково-лінійним і такі, що мають інваріантну міру;

– доведено існування інтегральних многовидів для нелінійної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджено біфуркацію стану рівноваги;

– доведено існування інтегральних многовидів сингулярно збуреної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджено біфуркацію інваріантного тора із стану рівноваги;

– доведено існування зліченного числа періодичних розв'язків гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою;

– вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега - де Фріза з перетвореним аргументом;

– досліджено біфуркацію циклів автономних параболічних систем з малою дифузією, одержано умови існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння;

– доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією, досліджено стійкість біжучих хвиль для таких систем;

– крайові задачі для гіперболічних систем диференціальних рівнянь першого порядку зводяться до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь;

– використовуючи групу Вейля, дано означення узагальнених поліномів Чебишова багатьох змінних. Для побудови цих поліномів одержана рекурентна формула. Доведено, що поліноміальні відображення еквівалентні кусково-лінійним і мають зліченне число циклів;

– показано, що узагальнені поліноми Чебишова задовольняють диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають в основному теоретичний характер. Вони є вагомим внеском у методику дослідження регулярно і сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь і можуть бути використані при вивченні багатьох прикладних задач механіки, теорії керування, біології, екології, економіки та інших областей, математичними моделями яких є розглянуті в роботі диференціально-функціональні рівняння. Одержані результати можуть також використовуватись при подальшому дослідженні якісних властивостей та наближеній побудові розв'язків диференціально-функціональних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, включені в дисертацію, отримані автором особисто. Відзначимо внесок автора у спільних публікаціях: У праці [58] автору належать теорема 1 та леми 1, 2, 3, а побудова області стійкості була здійснена автором раніше іншим методом. У праці [125] автору належить останній розділ. У спільній роботі з науковим консультантом [97] Перестюку М.О. належить постановка задачі, визначення загальної схеми досліджень та обговорення одержаних результатів.

Апробація результатів досліджень. Результати дисертаційної роботи доповідались на: республіканській конференції "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" (Одеса, 1987 р.), регіональній конференції "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения" (Махачкала, 1988 р.), Всесоюзній конференції "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики" (Тернопіль, 1989 р.), Міжнародній конференції "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики — Вторые Боголюбовские чтения" (Київ, 1992 р.), Міжнародній математичній школі "Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании" (Воронеж, 1993 р.), Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994, 2004, 2014 р.р.), Всеукраїнській конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1994), Республіканській конференції "Моделирование и исследование устойчивости систем" (Київ, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996 р.р.), Всеукраїнській конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 1996 р.), Міжнародній конференції "Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань. Треті Боголюбовські читання" (Київ, 1997 р.), Міжнародній математичній школі "Singularly Perturbed Systems and Applications" (Берлін, 1997 р.), Міжнародній конференції "Nonlinear Partial Differential Equations" (Kiev, 1997 р., Lviv, 1999 р., Kiev, 2001 р.), Міжнародній конференції "Dynamical system modelling and stability investigation" (Київ, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2011, 2013, 2015 р.р.), Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики" (Чернівці, 1998), IV, V, VII і IX Кримській міжнародній математичній школі "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Сімферополь, 1998, 2000, 2004, 2008 р.р.), Міжнародній конференції "Диференціальні та інтегральні рівняння" (Одеса, 2000 р.), VIII Міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2000 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння і нелінійні коливання" (Чернівці, 2001 р.), Міжнародній конференції "Шості Боголюбовські читання" (Чернівці, 2003 р.), Міжнародній конференції "Modern problems and new trends in probability theory" (Чернівці, 2005 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 2006 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Мелітополь, 2008 р.), Міжнародній конференції "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури" (Чернівці, 2010 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Київ, 2011 р.), Всеукраїнській конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" (Чернівці, 2012 р.), Міжнародній конференції, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха (Львів, 2012 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2012 р.), Міжнародній конференції "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Севастополь, 2013 р.), Міжнародній конференції "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация" (Мінськ, 2013 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" (Київ, 2014 р.), Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 2015 р.), Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2016 р.), Міжнародній конференції "Differential Equations ICL 110" (Lviv, 2016 р.), Міжнародній науковій конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 2016 р.), науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, наукових семінарах факультету математики та інформатики і кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, наукових семінарах кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у тридцяти двох працях [36 – 58], [97], [125], [161, 162], [236 – 240], з них 15 — в наукових періодичних журналах, 15 — у збірниках наукових праць Інституту математики НАН України, Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича та інших університетів. Крім того, деякі результати опубліковані в матеріалах та тезах доповідей міжнародних конференцій, колоквіумів та шкіл [174 – 235].

Об'єм та структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 240 найменувань. Повний обсяг роботи становить 308 сторінок, а основний зміст викладено на 283 сторінках.

У вступі проаналізовано сучасний стан досліджень з теорії регулярно і сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь та методу інтегральних многовидів. Обгрунтовано актуальність розглянутих у дисертаційній роботі задач, вказано наукову новизну та практичне значення роботи. Зазначено особистий внесок здобувача, вказано, де відбувалась апробація результатів роботи та публікації автора.

У першому розділі дисертації зроблено огляд праць за тематикою дисертаційної роботи та наведено питання, які залишились невирішеними.

У другому розділі роботи висвітлено основні результати дисертації.

Третій розділ присвячений питанням існування інтегральних многовидів і встановленню принципу зведення для дослідження стійкості розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку. Підрозділ 3.1 присвячений побудові області стійкості для лінійних диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями. Тут доведена теорема про обмеженість області стійкості. Спочатку одержано обмеження області стійкості, а потім для побудови використано метод D-розбиттів. У підрозділі 3.2 доведено існування інтегральних множин та встановлено принцип зведення для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь. У підрозділі 3.3 аналогічні результати одержано для різницевих рівнянь. Підрозділ 3.4 присвячений питанням існування інтегральних многовидів та дослідженню їх властивостей для рівнянь нейтрального типу. У наступному підрозділі запропоновано метод побудови інтегрального многовиду у вигляді розкладу в степеневий ряд. Тут розглянуто питання про можливість обмежитися першими наближеннями для дослідження стійкості у критичному випадку. У останньому підрозділі третього розділу друге наближення в методі усереднення застосовано до дослідження стійкості системи слабкозв'язаних осциляторів із запізненням. Одержано достатню умову стійкості (нестійкості) лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь.

У розділі 4 досліджено динамічну еквівалентність диференціально-функціональних рівнянь і побудовано заміну, яка зводить систему до простішого вигляду. У підрозділі 4.1 доведено існування інтегральних многовидів, якщо права частина системи диференціально-функціональних рівнянь задовольняє інтегральну умову Ліпшиця. Показано, що вихідну систему за допомогою гомеоморфної заміни можна звести до простішого вигляду. У підрозділі 4.2 побудовано інтегральні многовиди і здійснено розщеплення регулярно збуреної системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу. У підрозділі 4.3 доведено існування інтегральних многовидів і здійснено розщеплення лінійних сингулярно збурених систем нейтрального типу. У підрозділі 4.4 доведено існування інтегральних многовидів і показано, що систему імпульсних сингулярно збурених рівнянь можна розщепити на дві незалежні підсистеми. В останньому підрозділі четвертого розділу одержано зображення інтегральних многовидів системи лінійних керованих сингулярно збурених рівнянь із запізненням. Розв'язок задачі квазіоптимальної стабілізації шукається у вигляді асимптотичного розкладу за степенями малого параметра.

Розділ 5 присвячено застосуванню методу інтегральних многовидів у теорії біфуркацій нелінійних систем із запізненням. У підрозділі 5.1 одержано зображення інтегрального многовиду лінійної сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь з періодичною правою частиною, досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги та субфуркація періодичних розв'язків. У підрозділі 5.2 одержано зображення інтегрального многовиду сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь з періодичною правою частиною. Показано, що при відповідних умовах на праву частину відображення Пуанкаре для збуреної системи має трансверсальну гомоклінічну точку. У підрозділі 5.3 метод усереднення застосовано до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням. У підрозділі 5.4 досліджено поліноміальні і раціональні одновимірні відображення, еквівалентні кусково-лінійним і такі, що мають інваріантну міру. Показано, що інваріантній множині деякого відображення відповідає множина цілих p-адичних чисел.

У розділі 6 досліджено біфуркацію стану рівноваги диференціальних рівнянь з частинними похідними. У підрозділі 6.1 досліджено умови існування та властивості інтегральних многовидів нелінійної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджена біфуркація тора із стану рівноваги. У підрозділі 6.2 доведено існування інтегральних многовидів сингулярно збуреної системи нелінійних параболічних рівнянь з перетвореним аргументом. Досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги. У підрозділі 6.3 доведено існування зліченного числа періодичних розв'язків гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою. Вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом.

У розділі 7 досліджено біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією. У підрозділах 7.1 та 7.2 вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння. У підрозділі 7.2 доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь з малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння Хатчінсона. У підрозділі 7.3 доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи двох диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюється, та малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння із запізненням. У підрозділі 7.4 доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль, одержано біфуркаційні рівняння.

Розділ 8 присвячено дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними. У підрозділі 8.1 крайові задачі для гіперболічних систем диференціальних рівнянь зводяться до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь. У підрозділі 8.2, використовуючи групу Вейля, дано означення узагальнених поліномів Чебишова багатьох змінних. Для побудови цих поліномів одержана рекурентна формула. Доведено, що поліноміальні відображення еквівалентні кусково-лінійним і мають зліченне число циклів. У підрозділі 8.3 досліджено узагальнені поліноми Чебишова, побудовані за допомогою групи Вейля системи коренів і за схемами Динкіна типу A_n, B_n, C_n, D_n. Показано, що узагальнені поліноми Чебишова задовольняють диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

Автор висловлює щиру подяку науковому консультанту академіку НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Перестюку Миколі Олексійовичу за постановку розглянутих у дисертаційній роботі задач та постійну увагу до роботи.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Принцип зведення в теорії стійкості звичайних диференціальних рівнянь запропонував О.М. Ляпунов [73]. Пізніше дослідженням критичних випадків у теорії стійкості займалися І.Г. Малкін, Г.В. Каменков, В.І. Зубов [74, 75] та багато інших.

Ефективним методом дослідження систем диференціальних рівнянь є метод інтегральних многовидів. Основи цього методу для систем у стандартній формі запропонував М.М. Боголюбов [13]. Надалі метод інтегральних многовидів одержав широкий розвиток у працях представників Київської школи з нелінійної механіки: Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, О.Б. Ликової, В.І. Фодчука, Д.І. Мартинюка, Я.С. Баріса та інших [14 - 17, 28, 31, 72, 80, 81, 83, 98, 104, 107, 116, 158].

У працях В.О. Плісса [98] для доведення принципу зведення використано метод інтегральних многовидів. Й.З. Штокало [144] запропонував метод наближеного перетворення лінійних систем із квазіперіодичними коефіцієнтами до систем із сталими коефіцієнтами. Цей метод можна використати для дослідження стійкості таких систем у критичних випадках. О.Б. Ликова і Я.С. Баріс [72] розглянули наближені методи побудови інтегральних многовидів і дослідження стійкості. У працях С.Н. Шиманова і В.П. Прокоп'єва [99, 142], В.А. Вебера [20], Ю.С. Осіпова [95], Ю.С. Колєсова і В.В. Майорова [64] досліджені критичні випадки в теорії стійкості диференціально-функціональних рівнянь.

Стійкість та інтегральні многовиди для різницевих та імпульсних рівнянь досліджували Х.М. Гулов і М.О. Перестюк [27], І.Дж. Марданов і К.Г. Валєєв [76], Д.І. Мартинюк [77], А.М. Самойленко, Д.І. Мартинюк, М.О. Перестюк [105], А.М. Самойленко, М.О. Перестюк [106], В.Ю. Слюсарчук [115], В.І. Ткаченко [118], О.С. Чернікова [139], J.H. Shen, J. Yan [170, 171] та інші.

Розвитку методу інтегральних многовидів та дослідженню критичних випадків у теорії стійкості диференціально-функціональних рівнянь присвячено статті автора [40, 49, 51, 54, 55, 56, 97, 125, 126].

На початку 60-х років минулого століття було доведено теорему Гробмана-Хартмана про структурну стійкість сідла [131]. Узагальнення цієї теореми випливає із принципу зведення В.О. Плісса [98]. Еквівалентності нелінійних та розщепленню лінійних неавтономних диференціальних рівнянь присвячено праці М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, Д.І. Мартинюка [16, 82, 83] та інших.

Аналогічні задачі для диференціально-функціональних рівнянь досліджено автором [43, 45, 46, 59, 125, 127].

Задачі керування для систем із запізненням розглядали Є.А. Андрєєва, В.Б. Колмановський, Л.Є. Шайхет [3], В.Н. Афанасьєв, В.Б. Колмановський, В.Р. Носов [5], Ю.С. Осіпов [93, 94], Р.Т. Янушевський [147] та інші. Квазіоптимальну стабілізацію лінійних сингулярно збурених систем із запізненням досліджено автором [53].

Біфуркацію циклів автономних систем диференціальних рівнянь досліджували В.І. Арнольд [4], Б. Хессард, Н. Казарінов, І. Вен [136] та інші. Умови існування періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь одержали А.М. Самойленко і М.І. Ронто [109]. Релаксаційні коливання сингулярно збурених систем досліджували Є.Ф. Міщенко і М.Х. Розов [88]. Біфуркацію стану рівноваги систем диференціальних рівнянь з періодичною правою частиною розглядали В.І. Арнольд [4], Ю.М. Бібіков [11, 12], В.С. Козякін [62], А.М. Самойленко [104] та інші. Інваріантні тори досліджували Ю.М. Бібіков [11, 12], А.М. Самойленко [104], А.М. Самойленко і І.В. Полеся [108] та інші. Існування періодичних, квазіперіодичних розв'язків та інваріантних торів систем із запізненням досліджували Ю.Ф. Долгій і А.В. Захаров [29], І.І. Клевчук і В.І. Фодчук [60], Ю.С. Колєсов і Д.І. Швітра [65], Ю.О. Митропольський і Д.І. Мартинюк [81], Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, Д.І. Мартинюк [83], Ю.О. Митропольський, В.І. Фодчук, І.І. Клевчук [85], В.П. Рубаник [103], В.І. Фодчук та інші [125], А Халанай [130], Дж. Хейл [132, 155], Б. Хессард, Н. Казарінов, І. Вен [136] та інші. Існування гомоклінічних точок дифеоморфізмів та диференціальних рівнянь з періодичною правою частиною досліджували В.К. Мельников [78], К.В. Аврамов [1], З. Нитецкі [91], А.М. Самойленко, О.Я. Тимчишин, А.К. Прикарпатський [111], M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney [159], K.J. Palmer [165], В.Г. Гельфрейх, В.Ф. Лазуткін [23]. Динаміку одновимірних відображень відрізка в себе досліджували А.Е. Єременко [30], М. Фейгенбаум [120], О.М. Шарковський та інші [140, 141], М.В. Якобсон [146], J.F. Ritt [167] та інші.

Асимптотичні методи до звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними застосовував А. Найфе [90]. Біфуркацію циклів і торів для диференціальних рівнянь з частинними похідними розглядали Д. Хенрі [133], Б. Хессард, Н. Казарінов, І. Вен [136], J. Wu [173]. Диференціальні рівняння параболічного типу з перетвореним аргументом для моделювання нелінійних ефектів у оптиці застосовували С.А. Ахманов, М.А. Воронцов, В.Ю. Іванов [6]. Біфуркацію циклів для таких рівнянь досліджували С.О. Кащенко [33] та А.В. Разгулін [101]. Інтегральні та інерціальні многовиди для диференціальних рівнянь з частинними похідними досліджували Є.П. Бєлан, О.Б. Ликова [9], C. Foias, B. Nicolaenko, G.R. Sell,

R. Temam [152]. Існування та стійкість багатьох циклів та зліченного числа циклів для диференціальних рівнянь з частинними похідними досліджували Є.П. Бєлан, А.М. Самойленко [10], А.Ю Колєсов [63], Є.Ф. Міщенко, Ю.С. Колєсов, А.Ю. Колєсов, М.Х. Розов [86], Є.Ф. Міщенко, В.А. Садовнічій, А.Ю. Колєсов, М.Х. Розов [87] та інші.

Зведення крайових задач для гіперболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними до різних класів диференціально-різницевих рівнянь розглядали Дж. Хейл [132], О.М. Шарковський, Ю.Л. Майстренко, О.Ю. Романенко [141] та інші. Комутуючі поліноми та раціональні функції досліджували Жуліа, Фату, Рітт [167], А.Е. Єременко [30]. Використовуючи групи Лі [113], було побудовано і досліджено узагальнені поліноми Чебишова від кількох змінних у статтях А.П. Веселова [21, 22], M.E. Hoffman, W.D. Withers [160, 172].

Розділ 2

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

У третьому розділі розглядаються диференціально-функціональні рівняння нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}\left[D(x_t) - G(t, x_t)\right] = L(x_t) + F(t, x_t), \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}[D(x_t)] = L(x_t), \tag{2.2}$$

де x_t – елемент простору $\mathbb{C}[-\Delta, 0]$, заданий функцією $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$; $D : \mathbb{C}[-\Delta, 0] \to \mathbb{R}^n$; $L : \mathbb{C}[-\Delta, 0] \to \mathbb{R}^n$; D і L – лінійні неперервні оператори; $G : \mathbb{R} \times \mathbb{C}[-\Delta, 0] \to \mathbb{R}^n$; $F : \mathbb{R} \times \mathbb{C}[-\Delta, 0] \to \mathbb{R}^n$; оператори G і F неперервні відносно t, Оператор $G(t, \varphi)$ неперервно диференційовний відносно t і φ.

Нехай існує стала $\nu > 0$ така, що

$$G(t, 0) = 0,\ F(t, 0) = 0,\ |G(t, \varphi) - G(t, \varphi')| \leq \nu|\varphi - \varphi'|,$$

$$|F(t, \varphi) - F(t, \varphi')| \leq p(t)|\varphi - \varphi'|,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\tau_0} p(\tau)d\tau \leq \nu\tau_0,$$

де $\tau_0 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{C}[-\Delta, 0]$, $\varphi' \in \mathbb{C}[-\Delta, 0]$.

Припустимо, що характеристичне рівняння для лінійного рівняння (2.2) має m коренів на уявній осі (із врахуванням їх кратності), а решта коренів лежать у півплощині $Re\lambda < -\alpha < 0$. Якщо виконуються ці умови, то при досить малій сталій Ліпшиця ν існують інтегральні многовиди рівняння (2.1). Доведено принцип зведення, згідно з яким стійкість нульового розв'язку рівняння (2.1) рівносильна стійкості нульового розв'язку деякої системи звичайних диференціальних рівнянь на многовиді.

Аналогічні результати одержано для різницевих та імпульсних диференціально-функціональних рівнянь.

В останньому підрозділі третього розділу розглядається система слабкозв'язаних осциляторів із запізненням

$$y'' + L^2 y + \varepsilon P(t) y(t-h) = 0, \tag{2.3}$$

де ε – малий додатний параметр, $y = (y_1, \ldots, y_q)^T$, L – діагональна матриця з додатними різними діагональними елементами, $L = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, $\lambda_s > 0$, $\lambda_k \neq \lambda_s$ при $k \neq s$, $h > 0$, $P(t)$ – матриця з елементами

$$P_{js}(t) = \sum_{m=1}^{n} \left(b_{jsm} e^{i a_m t} + \bar{b}_{jsm} e^{-i a_m t} \right), \quad b_{jsm} \in \mathbb{C}, \quad a_m \geq 0.$$

Для дослідження стійкості системи (2.3) застосовано перше і друге наближення в методі усереднення. У нерезонансному випадку одержано явні умови стійкості і нестійкості, у які входять коефіцієнти системи (2.3).

У четвертому розділі розглядається лінійне диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}[D(x_t) - \varepsilon G(t, x_t)] = L(x_t) + \varepsilon F(t, x_t), \tag{2.4}$$

де ε – малий додатний параметр, x_t – елемент простору $\mathbb{C}[-\Delta, 0]$, заданий функцією $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$; D: $\mathbb{C}[-\Delta, 0] \to \mathbb{R}^n$; G: $\mathbb{R} \times \mathbb{C}[-\Delta, 0] \to \mathbb{R}^n$; L: $\mathbb{C}[-\Delta, 0] \to \mathbb{R}^n$; F: $\mathbb{R} \times \mathbb{C}[-\Delta, 0] \to \mathbb{R}^n$; оператори D, L, G, F лінійні неперервні відносно x_t; оператор F неперервний відносно t, а оператор G неперервно диференційовний відносно t. При певних припущеннях відносно коренів характеристичного рівняння для рівняння (2.2) і досить малому ε

існують інтегральні многовиди рівняння (2.4). Показано, що за допомогою лінійної заміни систему (2.4) можна розщепити на два незалежні рівняння.

Аналогічна заміна побудована для сингулярно збуреної системи нейтрального типу та лінійної імпульсної сингулярно збуреної системи із запізненням. Доведена динамічна еквівалентність системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь і деякої простішої системи рівнянь, побудованої за допомогою інтегральних многовидів. Розв'язана задача квазіоптимальної стабілізації лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням.

У п'ятому розділі розглядається система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t), y(t - \varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t - \varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = G(t, x(t), y(t), y(t - \varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t - \varepsilon\Delta)), \tag{2.5}$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Припустимо, що виконуються умови

1) Для всіх $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$ рівняння $G(t, x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(t, x)$, причому функція $\varphi(t, x)$ та її похідні за t і x до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені.

2) Функції $f(t, x, y, z)$, $h(t, x, y, z)$, $G(t, x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$ та їх частинні похідні за t, x, y, z до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $|y - \varphi(t, x)| \le \rho$, $|z - \varphi(t, x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(t, x, y, z)$ в точці $y = \varphi(t, x)$, $z = \varphi(t, x)$ відносно y, z, одержимо

$$G(t, x, \varphi(t, x) + y, \varphi(t, x) + z) = B_1(t, x)y + B_2(t, x)z + G_1(t, x, y, z).$$

Нехай виконується умова:

3) всі корені характеристичного рівняння

$$det(B_1(t, x) + B_2(t, x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать у півплощині $Re\lambda \le -2\alpha < 0$.

Теорема 2.1. *Нехай для системи (2.5) виконуються умови 1 – 3. Тоді інтегральний многовид системи (2.5) можна зобразити у вигляді* $y_t = \varphi(t,x) + g(t,x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$, *де*

$$g(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[B_1(t,x) + B_2(t,x)]^{-1}\Big[(E + \Delta B_2(t,x))\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t} +$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big) - P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big] +$$

$$+\theta\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big], \quad -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0.$$

Це зображення інтегрального многовиду застосовується до дослідження біфуркації інваріантного тора із стану рівноваги та субфуркації періодичних розв'язків. Показано, що при відповідних умовах на праву частину відображення Пуанкаре для збуреної системи має трансверсальну гомоклінічну точку. Метод усереднення застосовано до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням. Досліджено поліноміальні і раціональні одновимірні відображення, еквівалентні кусково-лінійним і такі, що мають інваріантну міру. Досліджено інваріантні множини одновимірних відображень.

У шостому розділі розглядається нелінійна параболічна система з перетвореним аргументом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(t,\varepsilon)u + B(t,\varepsilon)u_\Delta + f(t,x,u,u_\Delta,\varepsilon) \tag{2.6}$$

і з періодичною умовою $u(t,x+2\pi) = u(t,x)$.

Тут ε – p-вимірний параметр з малими додатними компонентами, $u_\Delta = u(t,x-\Delta)$, Δ – зсув аргументу, матриці $D(t,\varepsilon)$, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ і функція f: $\mathbb{R}^{2n+p+2} \to \mathbb{R}^n$ п'ять разів неперервно диференційовні за всіма аргументами і 2π-періодичні відносно t, x, $f(t,x,u,v,\varepsilon) = O(|u|^2+|v|^2)$ при $|u|+|v| \to 0$. При деяких умовах відносно правої частини системи (2.6) доведено існування інтегральних многовидів, встановлено їх властивості та досліджена біфуркація тора із стану рівноваги. Аналогічні питання досліджені для сингулярно збуреної системи нелінійних параболічних рівнянь з перетвореним аргументом. Доведено існування зліченного числа циклів гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку та квазілінійного рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом.

У розділі 7 досліджено біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією. Тут розглядається рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u \right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u}, \tag{2.7}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2.8}$$

де ε – малий додатний параметр.

Теорема 2.2. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (2.7), (2.8) має періодичні відносно t розв'язки*

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon),$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2.$$

при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Ця теорема застосовується до дослідження умов існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння із запізненням. Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із малою дифузією на колі, одержано умови експоненціальної орбітальної стійкості циклів. Аналогічні результати одержано для параболічних систем із запізненням та малою дифузією на колі.

У восьмому розділі розглядається система

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = k_i(d, grad\ u_i), \tag{2.9}$$

де $d = (d_1, ..., d_p)^T$, $grad\ u_i = (\partial u_i/\partial x_1, ..., \partial u_i/\partial x_p)^T$, $x = (x_1, ..., x_p)^T$, $i \in \{1, ..., q\}$. Функції u_1, ..., u_q задовольняють граничні умови

$$u_1\Big|_{(c,x)=0} = u_2\Big|_{(c,x)=0} = ... = u_q\Big|_{(c,x)=0}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{(c,x)=1} = f\Big(u_1\Big|_{(c,x)=1}, ..., u_q\Big|_{(c,x)=1}\Big), \tag{2.11}$$

де $c = (c_1, ..., c_p)^T$. Припустимо, що $k_q > k_{q-1} > ... > k_1 > 0$, $(c, d) > 0$, де $(c, d)-$скалярний добуток векторів c, d. Тоді задача (2.9), (2.10), (2.11) зводиться до диференціально-різницевого рівняння з багатьма запізненнями. Це дозволяє дослідити асимптотичну поведінку розв'язків крайових задач.

Досліджено узагальнені поліноми Чебишова. Для побудови цих поліномів одержана рекурентна формула. Доведено, що поліноміальні відображення еквівалентні кусково-лінійним і мають зліченне число циклів. Показано, що узагальнені поліноми Чебишова задовольняють диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

Розділ 3

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОГОВИДИ І ПРИНЦИП ЗВЕДЕННЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У даному розділі розглядаються квазілінійні диференціально-функціональні рівняння. Доведено існування інтегральних многовидів. Встановлено принцип зведення, згідно з яким дослідження стійкості нульового розв'язку диференціально-функціонального рівняння у критичному випадку зводиться до дослідження стійкості нульового розв'язку відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь. Побудована область стійкості для лінійних диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями. Доведено існування інтегральних множин та встановлено принцип зведення для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь. Аналогічні результати одержано для різницевих рівнянь. Досліджено властивості інтегральних многовидів для рівнянь нейтрального типу. Показано, що можна обмежитися першими наближеннями інтегрального многовиду для дослідження стійкості у критичному випадку. Друге наближення в методі усереднення застосовано до дослідження стійкості лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь.

3.1. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями

Розглянемо рівняння

$$\frac{dz}{dt} = a_1 z(t-1) + a_2 z(t-2) + ... + a_n z(t-n). \tag{3.1}$$

Згідно з [132, 145] для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (3.1) був асимптотично стійким, необхідно і досить, щоб всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda = a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + ... + a_n e^{-n\lambda} \tag{3.2}$$

лежали в лівій півплощині $Re\ \lambda < 0$.

Означення. *Областю стійкості рівняння (3.2) називається множина точок $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, для яких всі корені рівняння (3.2) задовольняють умову $Re\ \lambda < 0$.*

Нехай L – проста неперервна крива, на якій вказано напрямок руху. Через $\Delta Arg_{z\in L}\ f(z)$ позначимо зміну аргументу функції $f(z)$ при русі вздовж кривої L.

Лема 3.1. *Нехай функції $f(z)$ та $g(z)$ аналітичні в комплексній площині і для точок z із деякої простої неперервної кривої L виконуються нерівності $|g(z)| < |f(z)|$. Тоді*

$$\Delta Arg_{z\in L}(f(z) + g(z)) \geq \Delta Arg_{z\in L}\ f(z) - \pi. \tag{3.3}$$

Доведення. Справджується рівність

$$\Delta Arg_{z\in L}(f(z) + g(z)) =$$

$$= \Delta Arg_{z\in L}\left[f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)\right] = \Delta Arg_{z\in L} f(z) + \Delta Arg_{z\in L}\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Оскільки $|g(z)/f(z)| < 1$, то функція $1 + g(z)/f(z)$ відображає криву L у внутрішність одиничного круга з центром в точці $z = 1$. Тому образ кривої L при відображенні $1 + g(z)/f(z)$ може змінити аргумент не більше, ніж на π. Із нерівності

$$\Delta Arg_{z\in L}(1 + g(z)/f(z)) \geq -\pi$$

випливає нерівність (3.3). Лема 3.1 доведена.

Позначимо $Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z$.

Лема 3.2. *Нехай для всіх* $\alpha \in [0; 1]$ *існує* z *таке, що* $|z| = e^{-\alpha}$ *і виконується нерівність* $|Q(z)| \leq \pi + 1$. *Тоді знайдеться стала* $K > 0$ *така, що* $|a_j| \leq K$ *для всіх* $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Доведення. Розкладемо поліном $Q(z)$ на множники $Q(z) = a_n z(z - z_1)...(z - z_{n-1})$. Тоді вірна нерівність

$$|a_n||z||(|z| - |z_1|)...(|z| - |z_{n-1}|)| \leq |Q(z)|. \tag{3.4}$$

Розглянемо поліном $Q_1(x) = |a_n|x(x - |z_1|)...(x - |z_{n-1}|)$. Згідно з умовою леми, із (3.4) випливає, що для всіх $x \in [e^{-1}; 1]$ виконується оцінка $|Q_1(x)| \leq \pi + 1$.

Застосовуючи теорему Чебишова, одержимо, що існує $x \in [e^{-1}; 1]$ таке, що

$$|Q_1(x)| \geq 2|a_n| \left(\frac{1 - e^{-1}}{4}\right)^n.$$

Звідси випливає, що

$$|a_n| \leq ((\pi + 1)/2) \left(\frac{4e}{e - 1}\right)^n.$$

Одержимо оцінку для a_{n-1}. Оскільки

$$|a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z| \leq |a_n z^n + ... + a_1 z| + |a_n z^n| \leq \pi + 1 + \frac{\pi + 1}{2}\left(\frac{4e}{e - 1}\right)^n,$$

то

$$|a_{n-1}| \leq \frac{1}{2}\left[\pi + 1 + \frac{\pi + 1}{2}\left(\frac{4e}{e - 1}\right)^n\right]\left(\frac{4e}{e - 1}\right)^{n-1}.$$

Аналогічно можна одержати оцінки для всіх коефіцієнтів. Лема 3.2 доведена.

Теорема 3.1. *Область стійкості рівняння (3.2) обмежена.*

Доведення. Позначимо $P(\lambda) = \lambda - Q(e^{-\lambda})$. Тоді рівняння (3.2) перепишеться у вигляді $P(\lambda) = 0$. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на рис. 1.

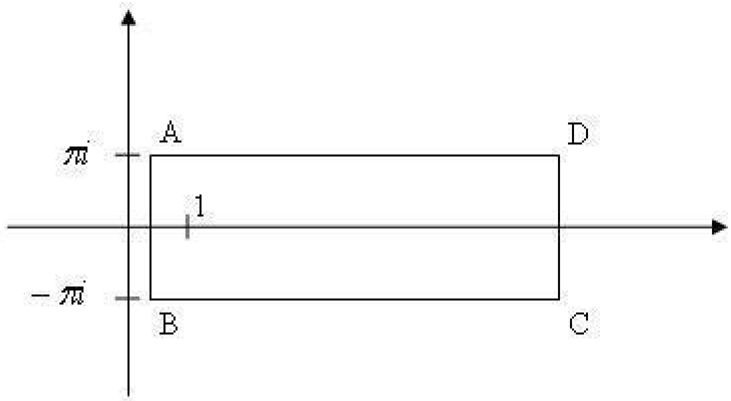

Рис. 1

Згідно з принципом аргументу, число нулів квазіполінома $P(\lambda)$ у прямокутнику дорівнює зміні аргументу функції $P(\lambda)$ при русі λ вздовж контура $ABCD$.

Сторона AB прямокутника перетинає дійсну вісь у точці $x = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Число α ми виберемо пізніше. Сторону CD виберемо досить далеко від уявної осі. Тоді її образ при відображенні $P(\lambda)$ буде міститися в правій півплощині.

На відрізку BC маємо

$$\lambda = -\pi i + x, \quad x \geq \alpha \geq 0, \quad P(\lambda) = -\pi i + x - Q(-e^{-x}).$$

Уявна частина функції $P(\lambda)$ залишається сталою, а дійсна частина прямує до $+\infty$ при $x \to +\infty$. На відрізку AD

$$\lambda = \pi i + x, \quad x \geq \alpha \geq 0, \quad P(\lambda) = \pi i + x - Q(-e^{-x}).$$

Тут знову уявна частина функції $P(\lambda)$ буде сталою. В результаті сумарна зміна аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж відрізків BC, CD і DA буде додатною. Залишилось оцінити зміну аргументу образу відрізка AB. Як ми побачимо, при досить великому $\max\limits_{1\leq j\leq n} |a_j|$ визначальним на відрізку AB для приросту аргументу функції $P(\lambda)$ буде вплив функції $Q(e^{-\lambda})$.

Приріст аргументу функції $Q(e^{-\lambda})$ при русі по відрізку AB дорівнює приросту аргументу функції $Q(z)$, коли z робить обхід кола $|z| = e^{-\alpha}$ проти годинникової стрілки. Згідно з принципом аргументу

$$\Delta Arg_{|z|=e^{-\alpha}} Q(z) = 2\pi N,$$

де $N-$ число нулів функції $Q(z)$ в крузі $|z| < e^{-\alpha}$. Але в цьому крузі завжди є нуль $z = 0$, тому $N \geq 1$, отже

$$\Delta Arg_{\pi\geq y\geq -\pi} Q(e^{-(\alpha+iy)}) \geq 2\pi.$$

Якщо виконуються умови леми 3.2, то коефіцієнти полінома $Q(z)$ обмежені. У протилежному випадку, при досить великому $\max\limits_{1\leq j\leq n} |a_j|$ знайдеться таке α, $0 \leq \alpha \leq 1$, що

$$|Q(e^{-(\alpha+iy)}| \geq \pi + 1 \geq |\alpha + iy|, \quad \pi \geq y \geq -\pi.$$

Використовуючи лему 3.1, оцінимо зміну аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж відрізка AB

$$\Delta Arg_{\pi\geq y\geq -\pi}(\alpha + iy - Q(e^{-(\alpha+iy)})) \geq 2\pi - \pi = \pi.$$

Таким чином, при досить великому $\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|$ зміна аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, згідно з принципом аргументу, функція $P(\lambda)$ матиме нуль в прямокутнику $ABCD$, а тоді $(a_1,...,a_n)$ не належить області стійкості рівняння (3.2).

Звідси випливає обмеженість області стійкості. Теорема доведена.

Лема 3.3. *Якщо вектор* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *належить області стійкості рівняння (3.2), то* $a_1 + a_2 + ... + a_n < 0$.

Доведення. Нехай $a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 0$. Тоді квазімногочлен $P(\lambda) = \lambda - a_1 e^{-\lambda} - ... - a_n e^{-n\lambda}$ задовольняє умови

$$P(0) \le 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} P(\lambda) = +\infty.$$

Значить, існує число λ_0, $0 \le \lambda_0 < \infty$, таке, що $P(\lambda_0) = 0$. Рівняння (3.2) має невід'ємний дійсний корінь. Отже, вектор $(a_1, a_2, ..., a_n)$ не належить області стійкості. Лема 3.3 доведена.

Застосуємо метод $D-$ розбиттів до рівняння

$$\lambda = ae^{-m\lambda} + be^{-n\lambda}, \tag{3.5}$$

де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m < n$. Квазіполіном має нульовий корінь, якщо $a + b = 0$. Ця пряма і є однією з ліній, що утворюють межу $D-$ розбиття.

Нехай тепер рівняння (3.5) має суто уявний корінь iy, $y \ne 0$:

$$a(\cos my - i\sin my) + b(\cos ny - i\sin ny) = iy.$$

Відокремлюючи дійсну і уявну частини, одержимо систему

$$a\cos my + b\cos ny = 0, \quad a\sin my + b\sin ny = -y. \tag{3.6}$$

Розв'яжемо систему (3.6), якщо

$$\begin{vmatrix} \cos my & \cos ny \\ \sin my & \sin ny \end{vmatrix} = \sin(n-m)y \ne 0.$$

Рівняння ліній $D-$ розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y\cos ny}{\sin(n-m)y}, \quad b = -\frac{y\cos my}{\sin(n-m)y}.$$

Ці лінії розбивають площину параметрів (a, b) на нескінченне число областей, всередині кожної з яких рівняння (3.5) має однакове число коренів з додатною дійсною частиною.

Система (3.6) може бути сумісною також у випадку, коли її головний визначник $\sin(n-m)y = 0$. Це можливо при $y \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $\cos my = \cos ny = 0$ або $my = \pi/2 + k\pi$, $ny = \pi/2 + l\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. Такі рівності виконуються тільки у випадку, коли m та n непарні. Якщо ж m та n непарні, то досить взяти $k = (m-1)/2$, $l = (n-1)/2$, $y = \pi/2$ і система (3.6) визначатиме пряму лінію $a\sin m\pi/2 + b\sin n\pi/2 = -\pi/2$. Крім цієї прямої існуватиме ще зліченне число однаково віддалених взаємно паралельних прямих, які є лініями $D-$ розбиття. У цьому випадку лініями $D-$ розбиття будуть прямі, кут нахилу яких рівний $\pi/4$ або $-\pi/4$. При непарних m та n відбувається біфуркація появи нових ліній $D-$ розбиття.

У випадку, коли $m = 1$, n – непарне натуральне число $(n > 1)$, область стійкості обмежена $\frac{n+3}{2}$ дугами ліній, серед яких дві дуги будуть відрізками прямих. Інші дуги одержуються із параметричного зображення

$$a = \frac{y\cos ny}{\sin(n-1)y}, \quad b = -\frac{y\cos y}{\sin(n-1)y}$$

при $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

Як приклад знайдемо область стійкості рівняння

$$\lambda = ae^{-\lambda} + be^{-3\lambda}.$$

Щоб знайти оцінки для коефіцієнтів a та b, використаємо методику доведення теореми 1. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на рис. 1.

Спочатку припустимо, що $\alpha = 0$. Тоді при $||a| - |b|| \geq \pi$ маємо $|ae^{-iy} + be^{-3iy}| \geq \pi \geq |iy|$, тому зміна аргументу функції $P(\lambda) = \lambda - ae^{-\lambda} - be^{-3\lambda}$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у прямокутнику $ABCD$.

Застосовуючи цю ж методику до прямокутника $ABCD$ при $\alpha = 1$, одержимо, що функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у цьому прямокутнику при $||a|e^{-1} - |b|e^{-3}| \geq \sqrt{\pi^2 + 1}$.

Із наших міркувань випливає, що для точок (a, b) із області стійкості правильні нерівності

$$||a| - |b|| \leq \pi, \quad ||a|e^{-1} - |b|e^{-3}| \leq \sqrt{\pi^2 + 1}. \tag{3.7}$$

Згідно з лемою 3 область стійкості повинна задовольняти ще одну нерівність

$$a + b < 0. \tag{3.8}$$

Нерівності (3.7) і (3.8) визначають на площині параметрів a та b деякий обмежений многокутник.

Для знаходження області стійкості застосуємо тепер метод $D-$ розбиттів. Пряма $a + b = 0$ є однією з ліній, що утворюють межу $D-$ розбиття.

Якщо квазіполіном має суто уявний корінь iy, то рівняння меж $D-$ розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y(4\cos^2 y - 3)}{2\sin y}, \quad b = -\frac{y}{2\sin y}. \tag{3.9}$$

Побудуємо лінії, що відповідають випадку $\cos y = \cos 3y = 0$. Ці рівняння мають сумісні корені $y = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому лініями $D-$розбиття будуть прямі $a - b = (-1)^{k+1}(\pi/2 + k\pi)$.

Відзначимо, що лінії $D-$розбиття досить нанести в многокутнику, що обмежує область стійкості. Неважко переконатися, що зв'язна область, обмежена відрізками прямих

$$b = -a, \quad -\frac{\pi}{4} \le a \le \frac{1}{2}; \quad b = a + \frac{\pi}{2}, \quad -3\frac{\pi}{4} \le a \le -\frac{\pi}{4}$$

та дугою лінії (3.9) при $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ є областю стійкості. Область стійкості рівняння (3.5), у якому $m = 1$, а $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, відповідно, – це заштрихована частина площини, зображена на рис. 2, 3, 4. Область стійкості рівняння (3.5), у якому $m = 1$, $n = 2$ зображена у підрозділі 8.1.

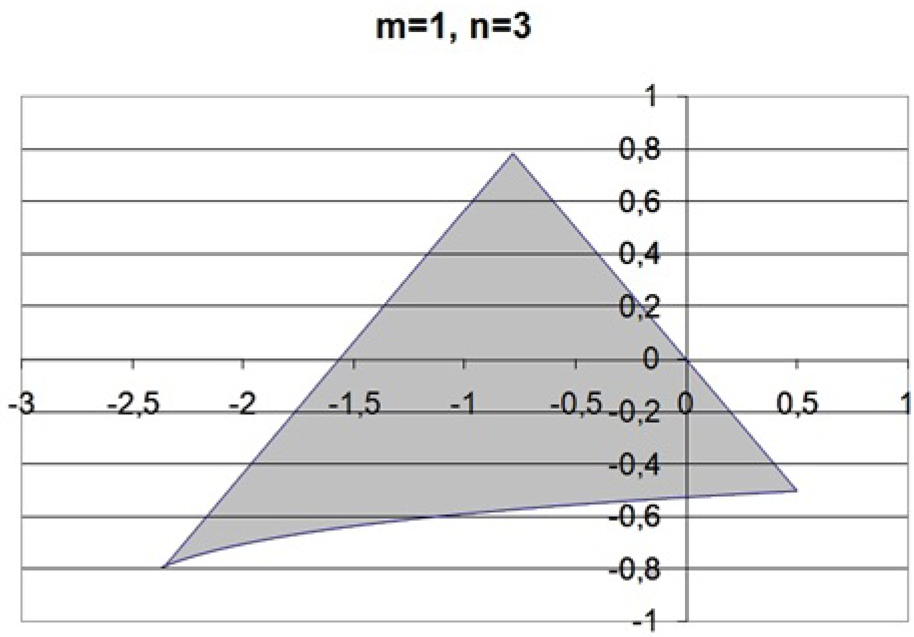

Рис. 2

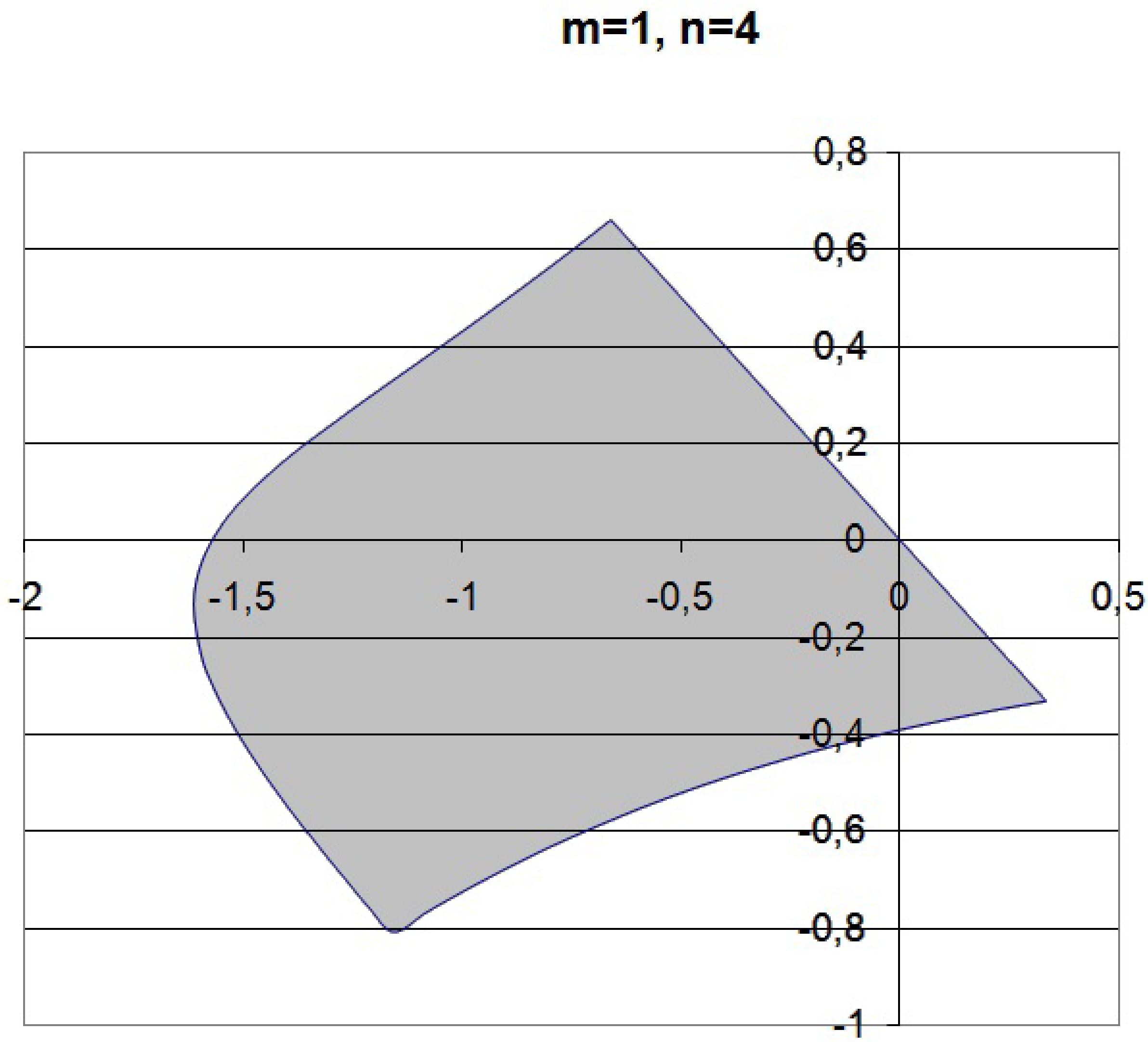

Рис. 3

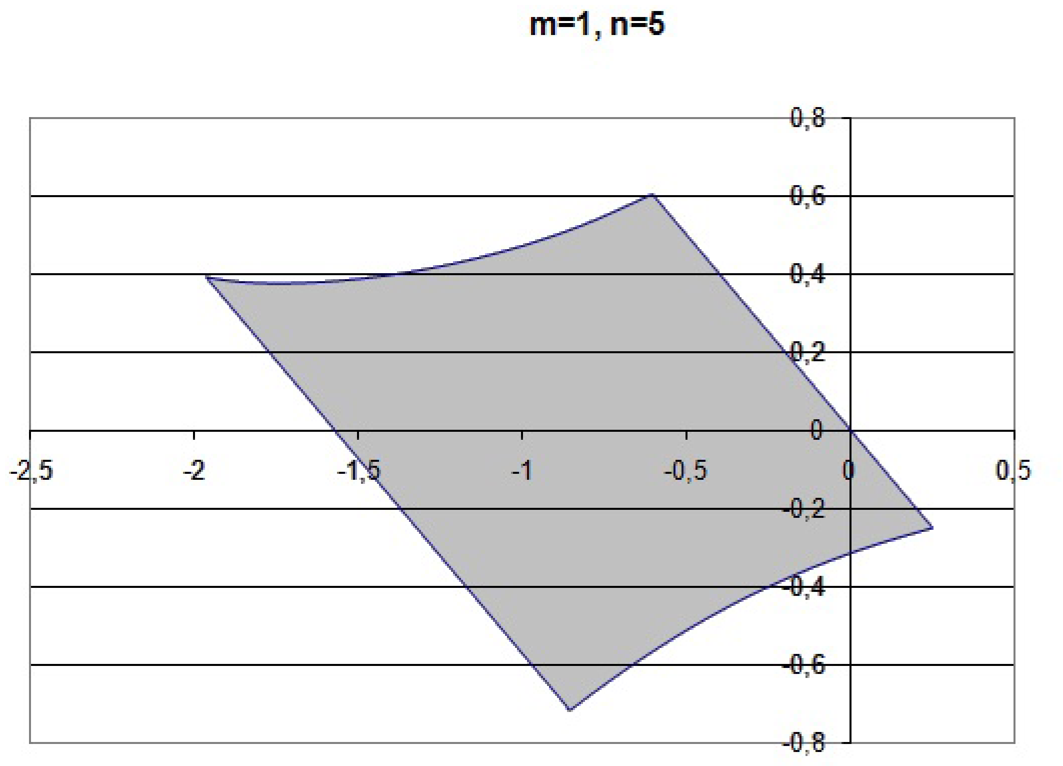

Рис. 4

3.2. Інтегральні множини та принцип зведення для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь

Для звичайних диференціальних рівнянь питання існування і стійкості інтегральних множин в критичному випадку розглядалися в працях [15, 98], для диференціальних рівнянь з імпульсною дією – в [106, 139], а для диференціально-функціональних рівнянь – в [132, 126]. У цьому підрозділі досліджується стійкість тривіального розв'язку неавтономної імпульсної системи диференціально-функціональних рівнянь в критичному випадку.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = L(x_t) + f(t, x_t, y), \quad \frac{dy}{dt} = By + g(t, x_t, y), \quad t \neq t_i, \tag{3.10}$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = Ax + I_i(x_{t_i}, y), \quad \Delta y|_{t=t_i} = J_i(x_{t_i}, y),$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$, x_t – елемент простору $\mathbf{PC} = \mathbf{PC}([-\tau, 0], \mathbb{R}^q)$=$\{\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^q$, $\varphi(t)$ неперервна на $[-\tau, 0]$, за винятком скінченного числа точок $\tilde{t}$, в яких $\varphi(\tilde{t}^+)$ та $\varphi(\tilde{t}^-)$ існують, причому $\varphi(\tilde{t}^-) = \varphi(\tilde{t})\}$, заданий функцією $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$; $L(x_t)$ – лінійний неперервний функціонал, заданий в $\mathbf{PC}$; матриця $E + A$ – невироджена; B – стала квадратна матриця порядку p така, що

$$Re\lambda_j(B) = 0, \quad j = 1, 2, ..., p. \tag{3.11}$$

Через t_i тут позначені моменти часу імпульсної дії, занумеровані множиною цілих чисел $\mathbb{Z}$, причому припускається, що існує таке додатне число δ, при якому

$$0 < \delta < t_{i+1} - t_i \tag{3.12}$$

для всіх $i \in \mathbb{Z}$. Для $\varphi \in \mathbf{PC}$ визначимо норму $|\varphi| = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|$, а для пари $z = (\varphi, y)$, $\varphi \in \mathbf{PC}$, $y \in \mathbb{R}^p$, визначимо норму $|z| = |\varphi| + |y|$.

Відносно функціоналів $f(t, \varphi, y)$, $g(t, \varphi, y)$, $I_i(\varphi, y)$, $J_i(\varphi, y)$ припускається, що вони визначені для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbf{PC}$, $y \in \mathbb{R}^p$, неперервні за всіма змінними і задовольняють умови

$$f(t, 0, 0) = g(t, 0, 0) = I_i(0, 0) = J_i(0, 0) = 0,$$

$$|f(t, \varphi, y) - f(t, \varphi', y')| + |g(t, \varphi, y) - g(t, \varphi', y')| + |I_i(\varphi, y) - I_i(\varphi', y')| +$$

$$+ |J_i(\varphi, y) - J_i(\varphi', y')| \leq \nu(|\varphi - \varphi'| + |y - y'|) \tag{3.13}$$

при всіх $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbf{PC}$, $\varphi' \in \mathbf{PC}$, $y \in \mathbb{R}^p$, $y' \in \mathbb{R}^p$.

Припустимо, що

$$L(x_t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^{l} A_ix(t-\tau_i), f(t,x_t,y) = f_1(t,x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_l),y),$$

$$g(t,x_t,y) = g_1(t,x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_l),y),$$

$$I_i(x_t,y) = I_i^{(1)}(x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_l),y),$$

$$J_i(x_t,y) = J_i^{(1)}(x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_l),y),$$

де $0 < \tau_1 < ... < \tau_l = \tau$.

Права частина системи (3.10) на кожному скінченному інтервалі може мати не більше, ніж скінченне число точок разриву першого роду (точок, в яких $t = t_i$ або $t - \tau_k = t_i$, $k = 1,...,l$, $i \in \mathbb{Z}$). За допомогою методу кроків можна показати, що на кожному скінченному відрізку $[\sigma, T]$, $\sigma < T$, система (3.10) з початковою функцією $x_\sigma = \varphi \in \mathbf{PC}$ і початковим значенням $y(\sigma) = y_0$ має єдиний розв'язок, який неперервний на $[\sigma, T]$ за винятком точок разриву першого роду $t = t_i$ і неперервно диференційовний за винятком скінченного числа точок. В точках вигляду $t = t_i$ і $t = t_i + \tau_k$ під dx/dt і dy/dt будемо розуміти похідні зліва.

Питанням існування, єдиності та стійкості розв'язку основної початкової задачі для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь присвячені праці [170, 171] та ін.

Нехай $T(t,s)$ – оператор зсуву за розв'язками лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = L(x_t), \quad t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = Ax. \tag{3.14}$$

Рівняння для x в системі (3.10) еквівалентне рівнянню

$$x(t) = \bar{x}(t,x_\sigma) + \int_\sigma^t X(t,s)f(s,x_s,y(s))ds + \sum_{\sigma<t_i<t} X(t,t_i)I_i(x_{t_i},y(t_i)),$$

де $\bar{x}(t,x_\sigma)$ – розв'язок системи (3.14) з початковою функцією x_σ, а $X(t,s)$ – фундаментальна матриця системи (3.14).

Враховуючи, що $X(t,s)=0$ при $s>t$, а також співвідношення $X(t+\theta,s)=T(t,s)X_0(\theta)$, одержимо, що система (3.10) еквівалентна системі

$$x_t = T(t,\sigma)x_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0 f(s,x_s,y(s))ds + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0 I_i(x_{t_i},y(t_i)),$$

$$\frac{dy}{dt} = By + g(t,x_t,y), \quad t \neq t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = J_i(x_{t_i},y), \tag{3.15}$$

де $X_0(\theta)=0$, $-\tau \leq \theta < 0$, $X_0(0)=E$.

Припустимо, що справджуються нерівності

$$|T(t,s)\varphi| \leq K|\varphi| exp[-(\alpha+\beta)(t-s)],$$

$$|T(t,s)X_0| \leq K exp[-(\alpha+\beta)(t-s)], \tag{3.16}$$

де $K>0$, $t \geq s$, $0<\beta<\alpha$, $\varphi \in \mathbf{PC}$.

Згідно з припущенням відносно власних значень матриці B правильна також оцінка

$$|\exp(Bt)| \leq K\exp[(-\alpha+\beta)t], \quad t \leq 0. \tag{3.17}$$

Теорема 3.2. *Нехай для системи (3.10) виконуються умови (3.11) – (3.13), (3.16), (3.17). Тоді при досить малій сталій Ліпшиця ν система (3.10) має інтегральну множину*

$$S^- = \{(t,\varphi,y) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^p, \varphi = h(t,y), \varphi \in \mathbf{PC}\},$$

де функція $h(t,y)$ задовольняє умови

$$h(t,0)=0, \quad |h(t,y)-h(t,y')| \leq 0,5|y-y'|. \tag{3.18}$$

Для кожного розв'язку $z_t = (h(t,y(t)),y(t))$ системи (3.10), що належить S^-, справджується оцінка

$$|z_t| \leq 2K|y(\sigma)| exp[-\alpha(t-\sigma)], \quad t \leq \sigma. \tag{3.19}$$

Доведення. Поряд із системою (3.15) розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$x_t = \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)X_0 f(s, x_s, y(s))ds + \sum_{t_i<t} T(t,t_i)X_0 I_i(x_{t_i}, y(t_i)),$$

$$y(t) = e^{B(t-\sigma)}c - \int\limits_{t}^{\sigma} e^{B(t-s)} g(s, x_s, y(s))ds - \sum_{t<t_i<\sigma} e^{B(t-t_i)} J_i(x_{t_i}, y(t_i)), \quad (3.20)$$

$$t \leq \sigma.$$

Будемо розв'язувати систему (3.20) методом послідовних наближень, вважаючи $x_t^{(0)} = 0$, $y_0(t) = 0$,

$$x_t^{(n+1)} = \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)X_0 f(s, x_s^{(n)}, y_n(s))ds + \sum_{t_i<t} T(t,t_i)X_0 I_i(x_{t_i}^{(n)}, y_n(t_i)),$$

$$y_{n+1}(t) = e^{B(t-\sigma)}c - \int\limits_{t}^{\sigma} e^{B(t-s)} g(s, x_s^{(n)}, y_n(s))ds - \sum_{t<t_i<\sigma} e^{B(t-t_i)} J_i(x_{t_i}^{(n)}, y_n(t_i)),$$

$$n = 0, 1, ...$$

Індукцією доведемо нерівність

$$|z_t^{(m)} - z_t^{(m-1)}| \leq K|c|(\nu\gamma)^{m-1} exp[-\alpha(t-\sigma)], \quad (3.21)$$

де $z_t^{(m)} = (x_t^{(m)}, y_m(t))$, $\gamma = 2K(1/\beta + 1/(1 - exp(-\beta\delta)))$, $m = 1, 2, ..., t \leq \sigma$. При $m = 1$ нерівність (3.21) випливає із (3.17). Нехай нерівність (3.21) справджується при $m = n$. Тоді, враховуючи (3.13), (3.16), (3.17), одержимо

$$|z_t^{(n+1)} - z_t^{(n)}| = |x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}| + |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq \int\limits_{-\infty}^{t} K exp[-(\alpha+\beta)(t-s)]\nu \times$$

$$\times |z_s^{(n)} - z_s^{(n-1)}|ds + \int\limits_{t}^{\sigma} K exp[(-\alpha+\beta)(t-s)]\nu |z_s^{(n)} - z_s^{(n-1)}|ds +$$

$$+\sum_{t_i<t} K exp[-(\alpha+\beta)(t-t_i)]\nu|z_{t_i}^{(n)} - z_{t_i}^{(n-1)}|+$$

$$+\sum_{t<t_i<\sigma} K exp[(-\alpha+\beta)(t-t_i)]\nu|z_{t_i}^{(n)} - z_{t_i}^{(n-1)}| \leq K|c|(\nu\gamma)^n exp[-\alpha(t-\sigma)],$$

звідки випливає нерівність (3.21) при $m = n+1$. Отже, вона справджується при всіх натуральних m.

Із (3.21) випливає, що при $\nu\gamma < 1$ послідовність функцій $z_t^{(n)}$ збігається до деякої функції $z_t(\sigma, c)$, яка є розв'язком системи (3.20). Оскільки всі функції $x_t^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, ...$, належать простору **PC**, то і їх границя належить **PC**. Вибираючи в системі (3.20) замість c іншу сталу c', одержимо розв'язок $z_t(\sigma, c')$. Аналогічно нерівності (3.21) можна довести, що при $\nu\gamma < 0,5$ правильна нерівність

$$|z_t^{(m)}(\sigma, c) - z_t^{(m)}(\sigma, c')| \leq 2K|c - c'|exp[-\alpha(t-\sigma)], \quad m = 1, 2, ..., \quad t \leq \sigma.$$

Отже,

$$|z_t(\sigma, c) - z_t(\sigma, c')| \leq 2K|c - c'|exp[-\alpha(t-\sigma)], \quad t \leq \sigma. \tag{3.22}$$

Будемо вважати в (3.20) $t = \sigma$ і позначимо

$$h(\sigma, c) = \int_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma, s)X_0 f(s, x_s, y(s))ds + \sum_{t_i<\sigma} T(\sigma, t_i)X_0 I_i(x_{t_i}, y(t_i)).$$

Доведемо оцінку (3.18):

$$|h(\sigma, c) - h(\sigma, c')| \leq \int_{-\infty}^{\sigma} K exp[-(\alpha+\beta)(\sigma-s)]\nu|z_s(\sigma, c) - z_s(\sigma, c')|ds+$$

$$+\sum_{t_i<\sigma} K exp[-(\alpha+\beta)(\sigma-t_i)]\nu|z_{t_i}(\sigma, c) - z_{t_i}(\sigma, c')| \leq \gamma_1|c - c'|,$$

$$\gamma_1 = 2K^2\nu(1/\beta + 1/(1 - exp(-\beta\delta))).$$

Оскільки при досить малому ν маємо $\gamma_1 \leq 0,5$, то звідси випливає нерівність (3.18). Оцінка (3.19) випливає із (3.22), якщо вважати $c' = 0$. Теорему доведено.

Теорема 3.3. *Нехай для системи (3.10) виконуються умови (3.11)-(3.13), (3.16), (3.17). Тоді при досить малій сталій Ліпшиця* ν *система (3.10) має інтегральну множину*

$$S^{+} = \{(t, \varphi, y) : t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbf{PC}, y = r(t, \varphi), y \in \mathbb{R}^{p}\},$$

де функція $r(t, \varphi)$ *задовольняє умови*

$$r(t, 0) = 0, \quad |r(t, \varphi) - r(t, \varphi')| \leq 0,5|\varphi - \varphi'|.$$

Для кожного розв'язку $z_t = (x_t, r(t, x_t))$ *системи (3.10), що належить* S^{+}*, справджується оцінка*

$$|z_t| \leq 2K|x_\sigma| exp[-\alpha(t - \sigma)], \quad t \geq \sigma.$$

Теорема 3.3 доводиться аналогічно теоремі 3.2.

Розглянемо тепер систему

$$\frac{dw}{dt} = Bw + g(t, h(t, w), w), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta w|_{t=t_i} = J_i(h(t_i, w), w), \tag{3.23}$$

яка описує поведінку розв'язків системи (3.10) на інтегральній множині $x_t = h(t, y)$.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови теорем 3.2 і 3.3. Якщо* $z_t = (x_t, y(t))$ $(t \geq \sigma)$ *– довільний розв'язок системи (3.10) з початковою функцією* z_σ *при* $t = \sigma$*, то існує розв'язок* $\xi_t = (h(t, w(t)), w(t))$*, що належить* S^{-} *і такий, що справджується оцінка*

$$|z_t - \xi_t| \leq 2K|x_\sigma - h(\sigma, w(\sigma))| exp[-\alpha(t - \sigma)], \quad t \geq \sigma. \tag{3.24}$$

Доведення. Позначимо через $w(t)$ розв'язок системи (3.23) з початковою умовою $w(\sigma) = a$. Тоді ξ_t буде залежати від a і визначатися початковою функцією $\xi_\sigma = (h(\sigma, a), a)$. Заміною змінних $v_t = x_t - h(t, w(t))$, $u(t) = y(t) - w(t)$ систему (3.15) зведемо до вигляду

$$v_t = T(t,\sigma)v_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0[f(s,\eta_s+\xi_s) - f(s,\xi_s)]ds +$$
$$+ \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0[I_i(\eta_{t_i}+\xi_{t_i}) - I_i(\xi_{t_i})], \tag{3.25}$$
$$\frac{du}{dt} = Bu + g(t,\eta_t+\xi_t) - g(t,\xi_t), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta u|_{t=t_i} = J_i(\eta_{t_i}+\xi_{t_i}) - J_i(\xi_{t_i}),$$

де $\eta_t = (v_t, u(t))$. Функції $f(t,\eta+\xi) - f(t,\xi)$, $g(t,\eta+\xi) - g(t,\xi)$, $I_i(\eta+\xi) - I_i(\xi)$, $J_i(\eta+\xi) - J_i(\xi)$ задовольняють за змінною η умову Ліпшиця з сталою ν.

Згідно з теоремою 3.3 система (3.25) має інтегральну множину S^+, яку можна зобразити у вигляді $u = r(t, v_t, a)$, де функція r задовольняє умови

$$r(t,0,a) = 0, \quad |r(t,\zeta,a) - r(t,\zeta',a)| \leq 0,5|\zeta - \zeta'|. \tag{3.26}$$

Для кожного розв'язку $\eta_t = (v_t, u(t))$ системи (3.25) з початковими даними $v_\sigma = \zeta$, $u(\sigma) = r(\sigma,\zeta,a)$, $\zeta \in \mathbf{PC}$ правильна нерівність

$$|\eta_t| \leq 2K|v_\sigma|exp[-\alpha(t-\sigma)], \quad t \geq \sigma.$$

Доведемо тепер існування таких ζ і a, що для розв'язку $z_t = (x_t, y(t))$ системи (3.10) і розв'язку $\eta_t = (v_t, u(t))$ системи (3.25) при всіх $t \geq \sigma$ виконуються рівності

$$u(t) = y(t) - w(t), \quad v_t = x_t - h(t, w(t)), \tag{3.27}$$

звідки й буде випливати оцінка (3.24).

Згідно з теоремою єдиності, якщо рівності (3.27) виконуються при $t = \sigma$, то вони виконуються і при всіх $t \geq \sigma$. При $t = \sigma$ ці рівності мають вигляд

$$r(\sigma,\zeta,a) = y(\sigma) - a, \quad \zeta = x_\sigma - h(\sigma, a). \tag{3.28}$$

Будемо розглядати (3.28) як систему рівнянь відносно ζ і a, маємо

$$a = y(\sigma) - r(\sigma, x_\sigma - h(\sigma, a), a). \tag{3.29}$$

Покажемо, що це рівняння має розв'язок при довільних $y(\sigma)$ і x_σ. Розглянемо відображення

$$q(a) = y(\sigma) - r(\sigma, x_\sigma - h(\sigma, a), a).$$

Використовуючи властивості (3.26) функції r, знаходимо оцінку

$$|q(a) - y(\sigma)| \leq 0,5|x_\sigma - h(\sigma, a)|,$$

звідки

$$|q(a) - y(\sigma)| \leq 0,5|x_\sigma - h(\sigma, y(\sigma))| + 0,5|h(\sigma, y(\sigma)) - h(\sigma, a)|.$$

Враховуючи умову (3.18), одержимо

$$|q(a) - y(\sigma)| \leq 0,5|x_\sigma - h(\sigma, y(\sigma))| + 0,25|y(\sigma) - a|.$$

Розглянемо в p – вимірному просторі кулю H, що визначається нерівністю (відносно a)

$$|a - y(\sigma)| \leq |x_\sigma - h(\sigma, y(\sigma))|.$$

Із нерівності

$$|q(a) - y(\sigma)| \leq 0,75|x_\sigma - h(\sigma, y(\sigma))| \tag{3.30}$$

випливає, що відображення $q(a)$ переводить кулю H в себе, тому згідно з теоремою Брауера це відображення має нерухому точку a^*.

Отже, рівняння (3.29) має розв'язок $a = a^*$, для якого згідно з (3.30) виконується оцінка

$$|a^* - y(\sigma)| \leq 0,75|x_\sigma - h(\sigma, y(\sigma))|. \tag{3.31}$$

Підставляючи розв'язок a^* у друге рівняння (3.28), переконуємося, що пара a^*, ζ^*, де $\zeta^* = x_\sigma - h(\sigma, a^*)$, задовольняє систему (3.28). Теорему доведено.

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови теорем 3.2 і 3.3. Якщо нульовий розв'язок системи (3.23) стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок системи (3.10) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.*

Доведення. Нехай нульовий розв'язок системи (3.23) стійкий. Возьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням стійкості знайдеться $\delta > 0$ таке, що якщо $|a| < \delta$, то розв'язок $w(t)$ системи (3.23) з початковою умовою $w(\sigma) = a$ при $t \geq \sigma$ задовольняє нерівність $|w(t)| \leq \varepsilon/(2K + 1,5)$.

Розглянемо розв'язок $z_t = (x_t, y(t))$ системи (3.10) з початковою функцією $z_\sigma = (x_\sigma, y(\sigma))$, що задовольняє оцінку $|x_\sigma| + |y(\sigma)| < \delta/2$. Із оцінки (3.31) випливає нерівність $|a^*| < \delta$, а із нерівності (3.24) випливає, що $|z_t| < \varepsilon$. Це і доводить стійкість нульового розв'язку системи (3.10).

Завершується доведення теореми аналогічно [126].

Нехай система (3.10) є лінійною, тобто функціонали $I_i(\varphi, y)$, $J_i(\varphi, y)$, $f(t, \varphi, y)$, $g(t, \varphi, y)$ лінійні відносно φ, y. У цьому випадку функція $h(t, w)$ і функціонал $r(t, \varphi)$ також є лінійними.

Розглянемо систему

$$v_t = T(t, \sigma)v_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t, s)X_0 f(s, v_s, r(s, v_s))ds + \sum_{\sigma < t_i < t} T(t, t_i)X_0 I_i(v_{t_i}, r(t_i, v_{t_i})),$$

$$\frac{dw}{dt} = Bw + g(t, h(t, w), w), \quad t \neq t_i, \quad \Delta w|_{t=t_i} = J_i(h(t_i, w), w), \qquad (3.32)$$

де $w \in \mathbb{R}^p$, $v_t \in \mathbf{PC}$.

Функція $h(t, w)$ та функціонал $r(t, v_t)$ задовольняють систему

$$h(t, w(t)) = T(t, \sigma)h(\sigma, w(\sigma)) + \int\limits_\sigma^t T(t, s)X_0 f(s, h(s, w(s)), w(s))ds+$$

$$+ \sum_{\sigma < t_i < t} T(t, t_i)X_0 I_i(h(t_i, w(t_i)), w(t_i)), \quad \frac{dr(t, v_t)}{dt} = Br(t, v_t)+ \qquad (3.33)$$

$$+g(t, v_t, r(t, v_t)), \quad t \neq t_i, \quad \Delta r(t, v_t)|_{t=t_i} = J_i(v_{t_i}, r(t_i, v_{t_i})).$$

Додаючи рівності (3.32), (3.33) і виконуючи заміну

$$y_t = v_t + h(t, w), \quad x = w + r(t, v_t), \tag{3.34}$$

одержимо систему (3.15).

Отже, правильне наступне твердження.

Теорема 3.6. *За допомогою заміни (3.34) лінійна система (3.32) зводиться до вигляду (3.15).*

На підставі лінійності $h(t, w)$ і $r(t, \varphi)$ система (3.34) однозначно розв'язна відносно w та v_t. Отже, визначаючи із (3.34) w та v_t, знаходимо заміну, яка розщеплює лінійну систему (3.15) на дві незалежні системи (3.32).

3.3. Дослідження стійкості розв'язків різницевих рівнянь у критичному випадку

Для звичайних диференціальних рівнянь питання існування і стійкості інтегральних множин у критичному випадку розглядалися, зокрема, у працях [15, 98, 104], а для різницевих рівнянь – в [77, 105, 27, 76]. У цьому підрозділі досліджується стійкість тривіального розв'язку нелінійної системи різницевих рівнянь у критичному випадку.

Розглянемо систему різницевих рівнянь

$$y_{n+1} = A_n y_n + f_n(y_n, z_n), \quad z_{n+1} = B_n z_n + g_n(y_n, z_n), \tag{3.35}$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $y_n \in \mathbb{R}^\nu$, $z_n \in \mathbb{R}^{m-\nu}$, A_n – послідовність матриць розмірності $\nu \times \nu$, B_n – послідовність матриць розмірності $(m - \nu) \times (m - \nu)$, функції f_n та g_n задовольняють умови

$$f_n(0, 0) = g_n(0, 0) = 0, \quad \|f_n(y, z) - f_n(\overline{y}, \overline{z})\| \leq L(\|y - \overline{y}\| + \|z - \overline{z}\|),$$

$$\|g_n(y,z) - g_n(\overline{y},\overline{z})\| \le L(\|y-\overline{y}\| + \|z-\overline{z}\|) \tag{3.36}$$

при всіх $n \in \mathbb{Z}$, $\{y,\overline{y}\} \subset \mathbb{R}^{\nu}$, $\{z,\overline{z}\} \subset \mathbb{R}^{m-\nu}$.

Поряд із системою (3.35) розглянемо лінійні системи

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad z_{n+1} = B_n z_n. \tag{3.37}$$

Нехай матриці B_n невироджені при всіх $n \in \mathbb{Z}$. Позначимо через $G_+(n,s)$ та $G_-(n,s)$ фундаментальні матриці розв'язків систем (3.37), такі, що $G_+(s,s) = E$, $G_-(s,s) = E$, де E – одиничні матриці відповідних розмірностей. Нехай виконуються нерівності

$$\|G_+(n,s)\| \le K\rho^{n-s}, \quad n \ge s, \tag{3.38}$$

$$\|G_-(n,s)\| \le K\gamma^{n-s}, \quad n \le s, \tag{3.39}$$

де $0 < \rho < \gamma \le 1$, $K \ge 1$.

Позначимо через $x_n = (y_n \ z_n)^T$ розв'язок системи (3.35) і визначимо норму $\|x_n\| = \|y_n\| + \|z_n\|$, $x_n \in \mathbb{R}^m$. Також будемо позначати через $x_n(n_0, x_{n_0})$ розв'язок системи (3.35) з початковими даними $n = n_0$, $x_n = x_{n_0}$.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови (3.36), (3.38), (3.39). Тоді при*

$$L < \frac{\gamma - \rho}{8K^2} \tag{3.40}$$

існує послідовність поверхонь

$$S^+ = \{(y,z) \,|\, z = h_n(y), n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}^{\nu}, \quad z \in \mathbb{R}^{m-\nu}\}, \tag{3.41}$$

які задовольняють умови $h_n(0) = 0$, $\|h_n(y) - h_n(\overline{y})\| \le \dfrac{1}{2}\|y-\overline{y}\|$ *і для розв'язку системи (3.35) з початковими даними* y_{n_0}, z_{n_0}, n_0, *які задовольняють рівняння (3.41), виконується нерівність*

$$\|x_n\| \le 2K\|y_{n_0}\|\mu^{n-n_0},$$

де $n \ge n_0$, $\mu = (\rho+\gamma)/2$.

Доведення. Поряд із системою (3.35) розглянемо систему різницевих рівнянь

$$y_n = G_+(n,n_0)c + \sum_{s=n_0}^{n-1} G_+(n,s+1)f_s(y_s,z_s),$$

$$z_n = -\sum_{s=n}^{\infty} G_-(n,s+1)g_s(y_s,z_s), \tag{3.42}$$

де c – сталий ν-вимірний вектор.

Систему (3.42) будемо розв'язувати методом послідовних наближень. Наближення визначимо за допомогою таких формул:

$$x_n^{(0)} = \begin{pmatrix} y_n^{(0)} \\ z_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad x_n^{(k)} = \begin{pmatrix} y_n^{(k)} \\ z_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$y_n^{(k)} = G_+(n,n_0)c + \sum_{s=n_0}^{n-1} G_+(n,s+1)f_s(y_s^{(k-1)}, z_s^{(k-1)}), \tag{3.43}$$

$$z_n^{(k)} = -\sum_{s=n}^{\infty} G_-(n,s+1)g_s(y_s^{(k-1)}, z_s^{(k-1)}), \quad k = 1,2,\ldots.$$

Покажемо, що при будь-якому c всі послідовні наближення визначені і задовольняють оцінки

$$\|x_n^{(k)}\| \le 2K\|c\|\mu^{n-n_0}, \quad n \ge n_0. \tag{3.44}$$

Оцінку (3.44) встановимо індукцією. Нульове наближення, очевидно, задовольняє цю оцінку. Нехай $(k-1)$-е наближення задовольняє (3.44). Тоді із формул (3.43) і умов теореми випливає

$$\|y_n^{(k)}\| \le K\|c\|\rho^{n-n_0} + \sum_{n=n_0}^{n-1} 2K^2L\|c\|\rho^{n-s-1}\mu^{s-n_0};$$

$$\|z_n^{(k)}\| \le \sum_{s=n}^{\infty} 2K^2L\|c\|\gamma^{n-s-1}\mu^{s-n_0}.$$

Звідси

$$\|y_n^{(k)}\| \le K\|c\|\rho^{n-n_0} + \frac{2K^2L\|c\|}{\mu-\rho}\mu^{n-n_0}, \quad \|z_n^{(k)}\| \le \frac{2K^2L\|c\|}{\gamma-\mu}\mu^{s-n_0}.$$

Із цих нерівностей випливає, що якщо $L < (\gamma - \rho)/(8K)$, $\mu = (\rho + \gamma)/2$, то нерівність (3.44) виконується.

Покажемо, що $x_n^{(k)}(c)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\|x_n^{(k)}(c) - x_n^{(k)}(\overline{c})\| \leq 2K\|c - \overline{c}\|\mu^{n-n_0} \tag{3.45}$$

і при цьому

$$\|z_n^{(k)}(c) - z_n^{(k)}(\overline{c})\| \leq \frac{2K^2L}{\gamma - \mu}\|c - \overline{c}\|\mu^{n-n_0}, \quad n \geq n_0. \tag{3.46}$$

Оцінки (3.45) і (3.46) встановимо індукцією. Нульове наближення задовольняє ці оцінки. Припустимо, що $(k-1)$-е наближення їх задовольняє, тоді із формули (3.43) одержимо нерівності

$$\|y_n^{(k)}(c) - y_n^{(k)}(\overline{c})\| \leq K\|c - \overline{c}\|\rho^{n-n_0} + \sum_{s=n_0}^{n-1} 2K^2L\|c - \overline{c}\|\rho^{n-s-1}\mu^{s-n_0},$$

$$\|z_n^{(k)}(c) - z_n^{(k)}(\overline{c})\| \leq \sum_{s=n}^{\infty} 2K^2L\|c - \overline{c}\|\gamma^{n-s-1}\mu^{s-n_0}.$$

Звідси, так само, як і раніше, одержимо оцінки (3.45) і (3.46).

Покажемо тепер, що для всіх k виконується нерівність

$$\|x_n^{(k)}(c) - x_n^{(k-1)}(c)\| \leq K\|c\|\Big(\frac{4KL}{\gamma - \rho}\Big)^{k-1}\mu^{n-n_0}, \tag{3.47}$$

де $\mu = (\rho + \gamma)/2$, $n \geq n_0$.

При $k = 1$ ця нерівність, очевидно, виконується. Припустимо за індукцією, що (3.47) виконується. Оцінимо різницю $\|x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)}\|$. Із (3.43) знаходимо

$$\|y_n^{(k+1)} - y_n^{(k)}\| \leq \sum_{s=n_0}^{n-1} K\rho^{n-s-1}L\|x_s^{(k)} - x_s^{(k-1)}\|,$$

$$\|z_n^{(k+1)} - z_n^{(k)}\| \leq \sum_{s=n}^{\infty} K\gamma^{n-s-1}L\|x_s^{(k)} - x_s^{(k-1)}\|.$$

Звідси, згідно з (3.47), одержимо

$$\|y_n^{(k+1)} - y_n^{(k)}\| \leq K\|c\|\Big(\frac{4KL}{\gamma - \rho}\Big)^{k-1}\frac{KL}{\mu - \rho}\mu^{n-n_0},$$

$$\|z_n^{(k+1)} - z_n^{(k)}\| \le K\|c\|\Big(\frac{4KL}{\gamma-\rho}\Big)^{k-1}\frac{KL}{\gamma-\mu}\mu^{n-n_0}, \quad n \ge n_0.$$

Звідси знаходимо, що

$$\|x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)}\| \le K\|c\|\Big(\frac{4KL}{\gamma-\rho}\Big)^{k}\mu^{n-n_0}, \quad n \ge n_0.$$

Ми одержали нерівність вигляду (3.47), якщо замінити k на $k+1$. Отже, нерівність (3.47) доведена.

Із оцінки (3.47) випливає, що якщо $L < \dfrac{\gamma-\rho}{4K}$, то послідовність $x_n^{(k)}(n_0, c)$ збігається рівномірно для всіх c та $n \ge n_0$. Позначимо

$$\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)}(n_0, c) = x_n(n_0, c), \quad x_n(n_0, c) = \begin{pmatrix} y_n(n_0, c) \\ z_n(n_0, c) \end{pmatrix}.$$

Із нерівності (3.44) випливає нерівність

$$\|x_n(n_0, c)\| \le 2K\|c\|\mu^{n-n_0}, \quad n \ge n_0. \tag{3.48}$$

Із нерівностей (3.45) і (3.46) випливають нерівності

$$\|x_n(n_0, c) - x_n(n_0, \overline{c})\| \le 2K\|c-\overline{c}\|\mu^{n-n_0},$$
$$\|z_n(n_0, c) - z_n(n_0, \overline{c})\| \le \frac{2K^2L}{\gamma-\mu}\|c-\overline{c}\|\mu^{n-n_0}, \quad n \ge n_0. \tag{3.49}$$

Якщо перейти до границі у формулах (3.43), то переконаємося, що послідовність $x_n(n_0, c)$ є розв'язком системи рівнянь (3.42) і системи (3.35).

Із рівностей (3.42) при $n = n_0$ одержимо

$$y_{n_0}(n_0, c) = c, \quad z_{n_0}(n_0, c) = -\sum_{s=n_0}^{\infty} G_-(n_0, s+1)g_s(y_s(n_0, c), z_s(n_0, c)).$$

Нехай тепер $z_{n_0}(n_0, y) = h_{n_0}(y)$. Із оцінок (3.48) і (3.49) випливає, що функція $h_n(y)$ задовольняє твердження теореми. Із умови (3.40) випливає оцінка $\|h_n(y) - h_n(\overline{y})\| \le \dfrac{1}{2}\|y-\overline{y}\|$. Теорема 3.7 доведена.

Теорема 3.8. *Нехай виконуються умови (3.36), (3.38), (3.39), (3.40). Тоді існує послідовність поверхонь*

$$S^- = \{(y, z)\,|\, y = H_n(z), n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{R}^{m-\nu}, y \in \mathbb{R}^{\nu}\},$$

які задовольняють умови

$$H_n(0) = 0, \|H_n(z) - H_n(\overline{z})\| \le \frac{1}{2}\|z - \overline{z}\| \tag{3.50}$$

і для розв'язку системи (3.35) з початковими даними y_{n_0}, z_{n_0}, n_0, які задовольняють рівняння $y = H_n(z)$, виконується нерівність

$$\|x_n\| \le 2K\|z_{n_0}\|\mu^{n-n_0},$$

де $n \le n_0$, $\mu = \dfrac{\rho+\gamma}{2}$.

Доведення теореми 3.8 можна провести тим же шляхом, що і доведення теореми 3.7.

Перейдемо до встановлення принципу зведення для системи (3.35). Для цього аналогічно [98] використаємо побудовані поверхні S^-, S^+ і доведемо, що стійкість системи (3.35) рівносильна стійкості деякої системи меншої розмірності.

Нехай $n = p$ – деяке число (початковий момент). Будемо розглядати тепер поверхні S^- при $n \ge p$ і покажемо, що поверхні S^- стійкі в тому розумінні, що вони притягують до себе всі близькі розв'язки x_n ($n \ge p$).

Зауважимо, що поведінка розв'язків системи (3.35) на інтегральних поверхнях S^- описується рівнянням

$$w_{n+1} = B_n w_n + g_n(H_n(w_n), w_n). \tag{3.51}$$

Вектор-функція $g_n(H_n(w), w)$ перетворюється в нуль при $w = 0$ і задовольняє умову Ліпшиця відносно w.

Нехай

$$x_p \in \mathbb{R}^m, \quad x_p = \begin{pmatrix} y_p \\ z_p \end{pmatrix},$$

$$x_n(p, x_p) = \begin{pmatrix} y_n(p, x_p) \\ z_n(p, x_p) \end{pmatrix}$$

– розв'язок системи (3.35) з початковими даними $n = p$, $x_n = x_p$.

Теорема 3.9. *Нехай $x_n(p, x_p)$ – довільний розв'язок системи (3.35) з початковими даними $n = p$, $x_n = x_p$. При умовах теорем 3.7 та 3.8 існує розв'язок $\varphi_n(p, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^{m-\nu}$, системи (3.35), що належить S^- і такий, що вірна оцінка*

$$\|x_n - \varphi_n(p, \alpha)\| \leq 2K\|y_p - H_p(\alpha)\|\mu^{n-p}, \quad n \geq p, \quad 0 < \mu < 1. \qquad (3.52)$$

Доведення. Покажемо, що на S^- існує розв'язок, до якого $x_n(p, x_p)$ прямує при $n \to +\infty$. Позначимо через $x_n = \varphi_n(p, \alpha)$, де α – сталий вектор, $\alpha \in \mathbb{R}^{m-\nu}$, розв'язок системи (3.35), що міститься на S^-. Позначимо

$$\varphi_n(p, \alpha) = \begin{pmatrix} \psi_n(p, \alpha) \\ \chi_n(p, \alpha) \end{pmatrix},$$

тоді розв'язок $x_n = \varphi_n(p, \alpha)$ буде мати початкові дані $\chi_p(p, \alpha) = \alpha$, $\psi_p(p, \alpha) = H_p(\alpha)$. Покажемо, що при фіксованому p кожному m-вимірному вектору x_p відповідає $(m - \nu)$-вимірний вектор α такий, що

$$\|x_n(p, x_p) - \varphi_n(p, \alpha)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (3.53)$$

Зробимо в системі (3.35) заміну змінних $u_n = y_n - \psi_n(p, \alpha)$, $v_n = z_n - \chi_n(p, \alpha)$, тоді одержимо систему

$$u_{n+1} = Au_n + U_n(u_n, v_n, \alpha), \quad v_{n+1} = Bv_n + V_n(u_n, v_n, \alpha), \qquad (3.54)$$

де

$$U_n(u_n, v_n, \alpha) = f_n(y_n, z_n) - f_n(\psi_n, \chi_n),$$

$$V_n(u_n, v_n, \alpha) = g_n(y_n, z_n) - g_n(\psi_n, \chi_n).$$

Вектор-функції U_n та V_n неперервні за всіма своїми аргументами і задовольняють умову Ліпшиця з константою L відносно u_n та v_n. За теоремою 3.7 система (3.54) має інтегральні поверхні S^+ вигляду $v_n = h_n(u_n, \alpha)$, де вектор-функція h_n задовольняє такі умови:

$$h_n(0, \alpha) = 0, \quad \|h_n(u, \alpha) - h_n(\overline{u}, \alpha)\| \leq \frac{1}{2}\|u - \overline{u}\|. \qquad (3.55)$$

Функція h_n залежить від α неперервно. Кожний розв'язок u_n, v_n системи (3.54) з початковими даними $n = p$, $u_n = u_p$, $v_p = h_p(u_p, \alpha)$ задовольняє нерівності

$$\|u_n\| + \|v_n\| \leq 2K\|u_p\|\mu^{n-p}, \quad n \geq p, \quad 0 < \mu < 1.$$

Покажемо, що існують такі u_p і α, що для розв'язку $x_n(p, x_p)$ системи (3.35) і розв'язку u_n, v_n системи, що лежить на послідовності поверхонь S^+, виконуються рівності

$$u_n = y_n(p, x_p) - \psi_n(p, \alpha), \quad v_n = z_n(p, x_p) - \chi_n(p, \alpha), \tag{3.56}$$

звідки і буде випливати (3.53).

Якщо рівності (3.56) виконуються при $n = p$, то згідно з теоремою єдиності вони справджуються і при всіх $n \geq p$. При $n = p$ (3.56) мають вигляд

$$u_p = y_p - H_p(\alpha), \quad h_p(u_p, \alpha) = z_p - \alpha. \tag{3.57}$$

Розглядаючи (3.57) як систему рівнянь відносно u_p і α, одержимо

$$\alpha = z_p - h_p(y_p - H_p(\alpha), \alpha). \tag{3.58}$$

Покажемо, що це рівняння має розв'язок при довільних y_p та z_p. Розглянемо відображення $G(\alpha) = z_p - h_p(y_p - H_p(\alpha), \alpha)$. Використовуючи властивості (3.55) функції h_p, знаходимо оцінку

$$\|G(\alpha) - z_p\| \leq 0,5\|y_p - H_p(\alpha)\|,$$

звідки

$$\|G(\alpha) - z_p\| \leq 0,5\|y_p - H_p(z_p)\| + 0,5\|H_p(z_p) - H_p(\alpha)\|.$$

Функція H_p задовольняє умову Ліпшиця (3.50), тому із останньої нерівності випливає, що

$$\|G(\alpha) - z_p\| \leq 0,5\|y_p - H_p(z_p)\| + 0,25\|\alpha - z_p\|.$$

Розглянемо в $(m-\nu)$-вимірному просторі кулю M, що визначається нерівністю (відносно α) $\|\alpha - z_p\| \le \|y_p - H_p(z_p)\|$. Із нерівності

$$\|G(\alpha) - z_p\| \le 0,75\|y_p - H_p(z_p)\| \tag{3.59}$$

випливає, що відображення $G(\alpha)$ переводить кулю M в себе, тому згідно з теоремою Брауера це відображення має нерухому точку α^*.

Отже, рівняння (3.58) має розв'язок $\alpha = \alpha^*$, який згідно з (3.59) задовольняє оцінку

$$\|\alpha^* - z_p\| \le 0,75\|y_p - H_p(z_p)\|. \tag{3.60}$$

Підставляючи розв'язок α^* у перше рівняння (3.57), знаходимо, що пара α^*, u_p^*, де $u_p^* = y_p - H_p(\alpha^*)$, задовольняє систему (3.57). Теорема 3.9 доведена.

Теорема 3.10. *Нехай виконуються умови теорем 3.7 та 3.8. Якщо нульовий розв'язок системи (3.51) стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок системи (3.35) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.*

Доведення. Нехай нульовий розв'язок системи (3.51) стійкий. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. При вибраному ε згідно з означенням стійкості знайдеться таке $\delta > 0$, що якщо $\|\alpha\| < \delta$, то розв'язок w_n системи (3.51) з початковою умовою $w_p = \alpha$ при $n \ge p$ задовольняє нерівність

$$\|w_n\| < \frac{\varepsilon}{2K + 1,5}. \tag{3.61}$$

Розглянемо розв'язок $x_n = (y_n\ z_n)^T$ системи (3.35) з початковими даними $n = p$, $y_n = y_p$, $z_n = z_p$, що задовольняють оцінку $\|y_p\| + \|z_p\| < \delta/2$. Із оцінки (3.60) випливає нерівність $\|\alpha^*\| < \delta$, а із нерівностей (3.52) і (3.61) випливає, що

$$\|x_n\| = \|y_n\| + \|z_n\| \le \|\varphi_n(p,\alpha)\| + \|x_n - \varphi_n(p,\alpha)\| \le$$

$$\le \|H_n(w_n)\| + \|w_n\| + 2K\|y_p - H_p(\alpha)\| < \varepsilon.$$

Це і доводить стійкість нульового розв'язку системи (3.35).

Якщо нульовий розв'язок системи (3.51) асимптотично стійкий, то із оцінки (3.52) випливає асимптотична стійкість нульового розв'язку системи (3.35).

Нарешті, якщо нульовий розв'язок системи (3.51) нестійкий, то за означенням і нульовий розв'язок системи (3.35) нестійкий. Теорема 3.10 доведена.

Зауваження 1. Нехай система (3.35) є лінійною, тобто функції $f_n(y,z)$ та $g_n(y,z)$ лінійні відносно y, z. У цьому випадку функції $h_n(y)$ та $H_n(z)$ також будуть лінійними відносно y, z. Із теореми 3.9 випливає існування заміни $y_n = u_n + H_n(w_n)$, $z_n = w_n + h_n(u_n)$, яка розщеплює систему (3.35) на дві незалежні системи

$$u_{n+1} = A_n u_n + f_n(u_n, h_n(u_n)), \quad w_{n+1} = B_n w_n + g_n(H_n(w_n), w_n).$$

Зауваження 2. Нехай матриці $A_n = A$, $B_n = B$ не залежать від n, всі власні значення матриці B за модулем рівні одиниці, всі власні значення матриці A за модулем менші одиниці, а функції $f_n(y,z)$, $g_n(y,z)$ можна розкласти в степеневі ряди з періодичними коефіцієнтами. Тоді функцію $H_n(z)$ також можна шукати у вигляді степеневого ряду і теорема 3.10 дозволяє обгрунтувати алгоритм дослідження стійкості у критичному випадку.

Зауваження 3. Теореми 3.7 та 3.8 можна узагальнити на випадок рівнянь у банаховому просторі, а теореми 3.9 та 3.10 – на випадок, коли y_n належать банаховому простору, а z_n – скінченновимірному простору.

Як приклад розглянемо систему лінійних різницевих рівнянь

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon a \; v_n \cos nh, \quad v_{n+1} = \varepsilon b \; u_n \sin nh + q \; v_n, \tag{3.62}$$

де ε – малий додатний параметр, $|q| < 1$, $u_n \in \mathbb{R}$, $v_n \in \mathbb{R}$.

При $\varepsilon = 0$ система (3.62) розпадається на незалежні рівняння

$$u_{n+1} = u_n, \quad v_{n+1} = q \; v_n. \tag{3.63}$$

Оскільки розв'язки другого рівняння системи (3.63) прямують до нуля при $n \to \infty$, то стійкість розв'язків системи (3.62) рівносильна стійкості розв'язків рівняння на поверхні S^-.

Будемо шукати рівняння поверхні S^- у вигляді

$$v_n = \varepsilon K_n u_n + O(\varepsilon^2),$$

тоді

$$v_{n+1} = \varepsilon K_{n+1} u_{n+1} + O(\varepsilon^2).$$

Підставляючи значення v_n та v_{n+1} у систему (3.62) і зрівнюючи коефіцієнти при ε, одержимо

$$K_{n+1} u_n = b u_n \sin nh + q K_n u_n,$$

звідки

$$K_{n+1} = q K_n + b \sin nh. \tag{3.64}$$

Частинний розв'язок рівняння (3.64) будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів

$$K_n = \gamma \cos nh + \delta \sin nh,$$

тоді

$$K_{n+1} = \gamma \cos(nh + h) + \delta \sin(nh + h).$$

Підставляючи вирази K_n та K_{n+1} у рівняння (3.64) і зрівнюючи коефіцієнти при $\cos nh$ та $\sin nh$, одержимо лінійну систему

$$\gamma \cos h + \delta \sin h = \gamma q,$$

$$-\gamma \sin h + \delta \cos h = b + \delta q$$

відносно γ та δ.

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$\gamma = -bK, \quad \delta = -bL,$$

де

$$K = \frac{\sin h}{1 - 2q\cos h + q^2}, \quad L = \frac{q - \cos h}{1 - 2q\cos h + q^2}.$$

Отже, рівняння поверхні S^- має вигляд

$$v_n = -\varepsilon b(K\cos nh + L\sin nh)u_n + O(\varepsilon^2).$$

Звідси одержуємо рівняння на поверхні S^-

$$u_{n+1} = u_n - \varepsilon^2 \frac{ab}{2}(K(1 + \cos 2nh) + L\sin 2nh)u_n + O(\varepsilon^3). \quad (3.65)$$

Існує заміна змінних $u_n = z_n + \varepsilon^2 z_n \varphi(n)$ з деякою періодичною функцією $\varphi(n)$, яка перетворює рівняння (3.65) в рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$z_{n+1} = z_n + \varepsilon^2 C_1 z_n + O(\varepsilon^3).$$

Для функції $\varphi(n)$ одержимо різницеве рівняння

$$\varphi(n+1) + C_1 = \varphi(n) - \frac{ab}{2}(K(1 + \cos 2nh) + L\sin 2nh).$$

Із цього рівняння знаходимо $C_1 = -\dfrac{ab}{2}K$. Тому різницеве рівняння із сталими коефіцієнтами має вигляд

$$z_{n+1} = z_n - \varepsilon^2 \frac{ab}{2} K z_n + O(\varepsilon^3).$$

Отже, нульовий розв'язок системи (3.62) асимптотично стійкий при $abK > 0$ тобто при $ab\sin h > 0$ і нестійкий при $ab\sin h < 0$.

3.4. Інтегральні многовиди і принцип зведення для рівнянь нейтрального типу

3.4.1. Перетворення вихідної задачі

Для звичайних диференціальних рівнянь питання існування і стійкості інтегральних многовидів розглядалися, зокрема, в працях [80, 98], а для диференціально-функціональних рівнянь – в [126, 132, 154]. Принцип зведення для дослідження стійкості автономних систем було розвинуто в [20, 75, 95, 99, 132, 142, 154, 156], причому доведення цього принципу для автономних рівнянь нейтрального типу в [154, 156] базується на вивченні інтегральних многовидів. У цьому підрозділі досліджується стійкість тривіального розв'язку неавтономної системи рівнянь нейтрального типу в критичному випадку.

Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний простір з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ – простір неперервних на $[-\Delta, 0]$ функцій із значеннями в $\mathbb{R}^n$ і нормою $|\varphi| = \sup\limits_{-\Delta \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$.

Розглянемо диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}\left[D(x_t) - G(t, x_t)\right] = L(x_t) + F(t, x_t), \tag{3.66}$$

де x_t – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$; $D : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; $L : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; D і L – лінійні неперервні оператори; $G : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; $F : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; оператори G і F неперервні відносно t. Оператор $G(t, \varphi)$ неперервно диференційовний відносно t і φ. Згідно з теоремою Рісса оператори $D(\varphi)$ і $L(\varphi)$ можна зобразити за допомогою інтеграла Стілтьєса:

$$D(\varphi) = \varphi(0) - \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\mu(\theta)]\, \varphi(\theta), \quad L(\varphi) = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)]\, \varphi(\theta),$$

де $\mu(\theta)$, $\eta(\theta)$ – матриці-функції обмеженої варіації.

Припустимо, що функція $\mu(\theta)$ не містить сингулярної компоненти і повна варіація $V_{-s}^{0}[\mu] \to 0$ при $s \to 0$. Нехай існує стала $\nu > 0$ така, що

$$G(t, 0) = 0,\ F(t, 0) = 0,\ |G(t, \varphi) - G(t, \varphi')| \le \nu|\varphi - \varphi'|,$$

$$|F(t, \varphi) - F(t, \varphi')| \le p(t)|\varphi - \varphi'|,\ \sup_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_{t}^{t+\tau_0} p(\tau) d\tau \le \nu\tau_0, \tag{3.67}$$

де $\tau_0 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{C}$, $\varphi' \in \mathbb{C}$.

Поряд з (3.66) розглянемо лінійне рівняння

$$\frac{d}{dt}D(\bar{x}_t) = L(\bar{x}_t), \tag{3.68}$$

позначимо через $\bar{x}_t(\varphi)$ його розв'язок з початковою функцією $\varphi \in \mathbb{C}$. Визначимо оператор зсуву за розв'язками рівняння (3.68) співвідношенням $T(t)\varphi = \bar{x}_t(\varphi)$. Сім'я $\{T(t), t \geq 0\}$ утворює сильно неперервну півгрупу. Твірний оператор півгрупи є оператором диференціювання $A\varphi(\theta) = \dot{\varphi}(\theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$, із областю визначення

$$D(A) = \left\{ \varphi \in \mathbb{C} : \dot{\varphi} \in \mathbb{C}, \dot{\varphi}(0) = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\mu(\theta)]\, \dot{\varphi}(\theta) + \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)]\, \varphi(\theta) \right\}.$$

Характеристичне рівняння для рівняння (3.68) набере вигляду

$$det\ \Lambda(\lambda) = 0, \quad \Lambda(\lambda) = \lambda[E - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(\theta)] - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta). \tag{3.69}$$

Позначимо

$$b = \sup \left\{ Re\lambda : det \left(E - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(\theta) \right) = 0 \right\}.$$

Нехай $b < 0$. Тоді в півплощині $Re\lambda \geq -\alpha = b/2$ міститься скінченна кількість коренів рівняння (3.69). Припустимо, що рівняння (3.69) має l коренів на уявній осі (із врахуванням їх кратності), а решта коренів лежать у півплощині $Re\lambda < -\alpha - \beta_1$, де $0 < \beta_1 < \alpha$. Позначимо через $\mathbb{P}$ власний підпростір в $\mathbb{C}$, породжений розв'язками рівняння (3.68), що відповідають кореням на уявній осі. Нехай $\Phi = \Phi(\theta) = (\varphi_1(\theta), ..., \varphi_l(\theta))$ – $n \times l$ – матриця, стовбці якої є лінійно незалежними розв'язками рівняння (3.68), що належать $\mathbb{P}$.

Спряжене до (3.68) рівняння набере вигляду

$$\frac{d}{ds}\left[v(s) - \int\limits_{-\Delta}^{0} v(s-\theta) d\mu(\theta) \right] = - \int\limits_{-\Delta}^{0} v(s-\theta) d\eta(\theta). \tag{3.70}$$

Нехай $\varphi \in \mathbb{C}[-\Delta, 0],\ \psi \in \mathbb{C}[0, \Delta],\ \dot{\psi} \in \mathbb{C}[0, \Delta]$.

Розглянемо білінійний функціонал [132, 154]

$$(\psi, \varphi) = \psi(0)D(\varphi) + \int\limits_{-\Delta}^{0} \int\limits_{0}^{\theta} \dot{\psi}(\xi - \theta)[d\mu(\theta)]\varphi(\xi)d\xi -$$

$$- \int\limits_{-\Delta}^{0} \int\limits_{0}^{\theta} \psi(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\varphi(\xi)d\xi.$$

Позначимо через $\mathbb{P}^*$ підпростір розв'язків рівняння (3.70), спряжений до $\mathbb{P}$, а через $\Psi(\theta),\ 0 \le \theta \le \Delta$, – базис в $\mathbb{P}^*$. Тоді матриця (Ψ, Φ) невироджена і її можна вибрати одиничною. Кожний елемент $x_t \in \mathbb{C}$ можна зобразити у вигляді

$$x_t = \Phi u(t) + w_t, \quad u(t) = (\Psi, x_t), \quad w_t = x_t - \Phi u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^l, \quad w_t \in \mathbb{Q}.$$

Рівняння (3.66) еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left[u(t) - \Psi(0)G(t, x_t)\right] = Bu(t) + \Psi(0)F(t, x_t), \\ w_t = T(t - \sigma)[w_\sigma - X_0^Q G(\sigma, x_\sigma)] + X_0^Q G(t, x_t) + \\ + \int\limits_{\sigma}^{t} T(t - s)X_0^Q F(s, x_s)ds - \int\limits_{\sigma}^{t} d_s\left[T(t - s)X_0^Q\right]G(s, x_s), \end{gathered} \tag{3.71}$$

де X_0^Q – проекція на підпростір $\mathbb{Q}$ функції

$$X_0(\theta) = 0, \quad -\Delta \le \theta < 0, \quad X_0(0) = E;$$

B – $l \times l$ – матриця, власні значення якої збігаються із згаданими вище уявними коренями.

Правильні нерівності [132, 154, 157]

$$\begin{gathered} |T(t)\varphi| \le K_1 \exp[-(\alpha + \beta_1)t]|\varphi|, \quad \varphi \in \mathbb{Q}, \\ |T(t)X_0^Q| + \int\limits_0^1 |d_s T(t - s)X_0^Q| \le K_1 \exp[-(\alpha + \beta_1)t], \end{gathered} \tag{3.72}$$

де $t \geq 0, \;\; K_1 > 0.$

Згідно з припущенням відносно власних значень матриці B правильна також оцінка

$$|\exp(Bt)| \leq K \exp[(-\alpha+\beta)t], \tag{3.73}$$

де $t \leq 0, \;\; K > 0, \;\; 0 < \beta < \alpha.$

3.4.2. Існування інтегральних многовидів

Теорема 3.11. Нехай виконуються умови (3.67). Тоді знайдеться таке $\nu_0 > 0$, що при $\nu < \nu_0$ існує функція $h(t,u) \in \mathbb{Q}$, що визначена на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^l$, задовольняє умови

$$h(t,0) = 0, \;\; |h(t,u) - h(t,u')| \leq 0,5|u-u'|, \tag{3.74}$$

і така, що множина

$$S^- = \{(t,\varphi) : t \in \mathbb{R}, \quad \varphi = \Phi u + \zeta, \quad u \in \mathbb{R}^l, \quad \zeta = h(t,u), \quad \zeta \in \mathbb{Q}\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (3.66).

Для кожного розв'язку $x_t = \Phi u(t) + h(t,u(t))$ рівняння (3.66), що належить S^- , правильна оцінка

$$|x_t| \leq 2K|\Phi||u(\sigma)| \exp[-\alpha(t-\sigma)], \;\; t \leq \sigma. \tag{3.75}$$

Доведення. Поряд із системою (3.71) розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$u(t) = e^{B(t-\sigma)}[c - \Psi(0)G(\sigma,x_\sigma)] + \Psi(0)G(t,x_t) -$$
$$- \int\limits_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)F(s,x_s)ds - B\int\limits_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)G(s,x_s)ds, \tag{3.76}$$

$$w_t = X_0^Q G(t,x_t) + \int\limits_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Q F(s,x_s)ds - \int\limits_{-\infty}^t d_s[T(t-s)X_0^Q]G(s,x_s),$$

$$t \le \sigma.$$

Помноживши перше рівняння системи (3.76) на Φ и додаючи ці рівності, одержимо

$$x_t = \Phi e^{B(t-\sigma)}[c - \Psi(0)G(\sigma, x_\sigma)] + X_0 G(t, x_t) +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{t} T(t-s) X_0^Q F(s, x_s) ds - \int\limits_{-\infty}^{t} d_s[T(t-s) X_0^Q] G(s, x_s) - \tag{3.77}$$
$$-\Phi \int\limits_{t}^{\sigma} e^{B(t-s)} \Psi(0) F(s, x_s) ds - \Phi B \int\limits_{t}^{\sigma} e^{B(t-s)} \Psi(0) G(s, x_s) ds.$$

Навпаки, із рівняння (3.77) можна одержати систему рівнянь (3.76).

Існування розв'язку рівняння (3.77) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$x_t^{(0)} = 0,\ x_t^{(n+1)} = \Phi e^{B(t-\sigma)}[c - \Psi(0)G(\sigma, x_\sigma^{(n)})] + X_0 G(t, x_t^{(n)}) -$$
$$-\Phi \int\limits_{t}^{\sigma} e^{B(t-s)} \Psi(0) F(s, x_s^{(n)}) ds - \Phi B \int\limits_{t}^{\sigma} e^{B(t-s)} \Psi(0) G(s, x_s^{(n)}) ds + \tag{3.78}$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{t} T(t-s) X_0^Q F(s, x_s^{(n)}) ds - \int\limits_{-\infty}^{t} d_s[T(t-s) X_0^Q] G(s, x_s^{(n)}),$$
$$n = 0, 1, 2, ...$$

Індукцією доведемо, що правильна нерівність

$$|x_t^{(m)} - x_t^{(m-1)}| \le K|\Phi|(\nu\gamma)^{m-1}|c| \exp[-\alpha(t-\sigma)], \tag{3.79}$$

де

$$\gamma = |\Phi||\Psi(0)|K + 1 + |\Phi||\Psi(0)|K\tau_0/(1 - \exp(-\beta\tau_0)) + |\Phi||\Psi(0)||B|K/\beta +$$
$$+ K_1\tau_0/(1 - \exp(-\beta_1\tau_0)) + K_1/(\exp(\beta_1) - 1), \quad m = 1, 2, ..., \ t \le \sigma.$$

При $m = 1$ нерівність (3.79) випливає із (3.73).

Нехай нерівність (3.79) вірна при $m = n$. Тоді, враховуючи (3.67), (3.72), (3.73), одержимо

$$|x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}| \leq |e^{B(t-\sigma)}||\Phi||\Psi(0)|\nu|x_\sigma^{(n)} - x_\sigma^{(n-1)}| + \nu|x_t^{(n)} - x_t^{(n-1)}|+$$

$$+|\Phi|\int\limits_t^\sigma |e^{B(t-s)}||\Psi(0)|(p(s)+\nu|B|)|x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}|ds+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^t |T(t-s)X_0^Q|p(s)|x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}|ds + \int\limits_{-\infty}^t |d_sT(t-s)X_0^Q|\nu|x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}| \leq$$

$$\leq K|\Phi|(\nu\gamma)^n|c|\exp[-\alpha(t-\sigma)].$$

Тому нерівність (3.79) правильна при $m = n+1$, отже, вона вірна при всіх натуральних m.

Із (3.79) випливає, що при $\nu\gamma < 1$ послідовність функцій $x_t^{(n)}$ збігається до деякої функції $x_t(\sigma, c)$, яка є розв'язком рівняння (3.77). Вибираючи в рівнянні (3.77) замість c іншу сталу c', одержимо розв'язок $x_t(\sigma, c')$. Аналогічно нерівності (3.79) можна довести, що при $\nu\gamma < 0,5$ правильна нерівність

$$|x_t^{(m)}(\sigma, c) - x_t^{(m)}(\sigma, c')| \leq 2K|\Phi||c - c'|\exp[-\alpha(t-\sigma)],$$

$$m = 1, 2, ..., \ t \leq \sigma.$$

Отже,

$$|x_t(\sigma, c) - x_t(\sigma, c')| \leq 2K|\Phi||c - c'|\exp[-\alpha(t-\sigma)], \ t \leq \sigma. \tag{3.80}$$

Підставляючи в (3.76) $t = \sigma$, позначимо

$$h(\sigma, c) = x_\sigma(\sigma, c) - \Phi c = X_0^Q G(\sigma, x_\sigma(\sigma, c)) + \int\limits_{-\infty}^\sigma T(\sigma - s)X_0^Q F(s, x_s(\sigma, c))ds-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^\sigma d_s[T(\sigma - s)X_0^Q]G(s, x_s(\sigma, c)).$$

Доведемо оцінку (3.74):

$$|h(\sigma,c)-h(\sigma,c')|\le|X_0^Q|\nu|x_\sigma(\sigma,c)-x_\sigma(\sigma,c')|+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\sigma}K_1e^{-(\alpha+\beta_1)(\sigma-s)}p(s)|x_s(\sigma,c)-x_s(\sigma,c')|ds+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\sigma}|d_sT(\sigma-s)X_0^Q|\nu|x_s(\sigma,c)-x_s(\sigma,c')|\le\gamma_1|c-c'|,$$

$\gamma_1=2\nu|X_0^Q|K|\Phi|+2\nu K_1K|\Phi|\tau_0/(1-\exp(-\beta_1\tau_0))+2\nu K_1K|\Phi|/(\exp(\beta_1)-1).$

При досить малому ν маємо $\gamma_1\le 0,5$, звідки випливає нерівність (3.74). Оцінка (3.75) випливає із (3.80), якщо підставити $c'=0$. Теорема доведена.

Теорема 3.12. Нехай виконуються умови (3.67). Тоді знайдеться таке $\nu_1>0$, що при $\nu<\nu_1$ існує функція $r(t,\zeta)\in\mathbb{R}^l$, що визначена на $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$, задовольняє умови

$$r(t,0)=0,\quad |r(t,\zeta)-r(t,\zeta')|\le 0,5|\zeta-\zeta'|$$

і така, що множина

$$S^+=\{(t,\varphi):t\in\mathbb{R},\quad \varphi=\Phi u+\zeta,\quad \zeta\in\mathbb{Q},\quad u=r(t,\zeta),\quad u\in\mathbb{R}^l\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (3.66). Для кожного розв'язку $x_t=\Phi r(t,w_t)+w_t$ рівняння (3.66), що належить S^+, правильна оцінка

$$|x_t|\le 2K_1\exp[-\alpha(t-\sigma)]|w_\sigma|,\ \ t\ge\sigma.$$

Теорема 3.12 доводиться аналогічно теоремі 3.11.

3.4.3. Принцип зведення

Перейдемо до встановлення принципу зведення для диференціально – функціонального рівняння (3.66). Для цього, аналогічно [98], використаємо побудовані інтегральні многовиди і доведемо, що стійкість рівняння (3.66) рівносильна стійкості деякої скінченновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Нехай $t = \sigma$ – деяке число (початковий момент). Будемо розглядати тепер інтегральний многовид S^- при $t \geq \sigma$ і покажемо, що S^- стійкий в тому розумінні, що він притягує до себе всі близькі розв'язки x_t $(t \geq \sigma)$ за експоненціальним законом.

Поведінка розв'язків рівняння (3.66) на інтегральному многовиді S^- описується рівнянням

$$\frac{d}{dt}\left[y - \Psi(0)G(t, \Phi y + h(t,y))\right] = By + \Psi(0)F(t, \Phi y + h(t,y)). \tag{3.81}$$

Теорема 3.13. Нехай виконуються умови (3.67), де $\nu < \min(\nu_0, \nu_1)$. Якщо $x_t = \Phi u(t) + w_t$ $(t \geq \sigma)$ – довільний розв'язок рівняння (3.66) з початковою функцією x_σ при $t = \sigma$, то існує розв'язок $\xi_t = \Phi y(t) + h(t, y(t))$, що належить S^- і такий, що правильна оцінка

$$|x_t - \xi_t| \leq 2K_1 |w_\sigma - h(\sigma, y(\sigma))| \exp[-\alpha(t-\sigma)], \quad t \geq \sigma. \tag{3.82}$$

Доведення. Позначимо через $y(t)$ розв'язок рівняння (3.81) з початковою умовою $y(\sigma) = a$. Тоді ξ_t буде залежати від a і визначатися початковою функцією $\xi_\sigma = \Phi a + h(\sigma, a)$. Заміною змінних $z(t) = u(t) - y(t)$, $v_t = w_t - h(t, y(t))$ систему (3.71) зведемо до вигляду

$$\frac{d}{dt}\left[z(t) - \Psi(0)(G(t, \eta_t + \xi_t) - G(t, \xi_t))\right] =$$

$$= Bz(t) + \Psi(0)(F(t, \eta_t + \xi_t) - F(t, \xi_t)),$$

$$v_t = T(t-\sigma)\left[v_\sigma - X_0^Q G(\sigma, \eta_\sigma + \xi_\sigma) + X_0^Q G(\sigma, \xi_\sigma)\right] + X_0^Q G(t, \eta_t + \xi_t) -$$

$$-X_0^Q G(t, \xi_t) + \int\limits_\sigma^t T(t-s) X_0^Q [F(s, \eta_s + \xi_s) - F(s, \xi_s)]ds- \tag{3.83}$$

$$-\int_{\sigma}^{t} d_s[T(t-s)X_0^Q][G(s,\eta_s+\xi_s)-G(s,\xi_s)],$$

де $\eta_t = \Phi z(t) + v_t$. Систему (3.83) можна також одержати із рівняння

$$\frac{d}{dt}\left[D(\eta_t) - G(t,\eta_t+\xi_t) + G(t,\xi_t)\right] = L(\eta_t) + F(t,\eta_t+\xi_t) - F(t,\xi_t). \quad (3.84)$$

Функції $G(t,\varphi+\zeta) - G(t,\zeta)$ и $F(t,\varphi+\zeta) - F(t,\zeta)$ задовольняють за змінною φ умову Ліпшиця із сталою ν.

Згідно з теоремою 3.12 рівняння (3.84) має інтегральний многовид

$$S^+ = \{(t,\varphi) : t \in \mathbb{R}, \quad \varphi = \Phi z + \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{Q}, \quad z = r(t,\zeta,a), \quad z \in \mathbb{R}^l\},$$

де функція r задовольняє умови

$$r(t,0,a) = 0, \ \ |r(t,\zeta,a) - r(t,\zeta',a)| \le 0,5|\zeta - \zeta'|. \quad (3.85)$$

Для кожного розв'язку $\eta_t = \Phi z(t) + v_t$ рівняння (3.84) з початковими даними $v_\sigma = \zeta, \ \eta_\sigma = \Phi r(\sigma,\zeta,a) + \zeta$ правильна нерівність

$$|\eta_t| \le 2K_1 \exp[-\alpha(t-\sigma)]|v_\sigma|, \quad t \ge \sigma.$$

Доведемо тепер існування таких ζ і a, що для розв'язку $x_t =$ $= \Phi u(t) + w_t$ рівняння (3.66) і розв'язку $\eta_t = \Phi z(t) + v_t$ рівняння (3.84) при всіх $t \ge \sigma$ виконуються рівності

$$z(t) = u(t) - y(t), \quad v_t = w_t - h(t, y(t)), \quad (3.86)$$

звідки й буде випливати оцінка (3.82).

Згідно з теоремою єдиності розв'язків, якщо рівності (3.86) виконуються при $t = \sigma$, то вони виконуються і при всіх $t \ge \sigma$. При $t = \sigma$ рівності (3.86) наберуть вигляду

$$r(\sigma,\zeta,a) = u(\sigma) - a, \quad \zeta = w_\sigma - h(\sigma,a). \quad (3.87)$$

Будемо розглядати рівності (3.87) як систему рівнянь відносно ζ і a. Підставляючи в перше рівняння (3.87) значення ζ із другого рівняння, одержимо

$$a = u(\sigma) - r(\sigma, w_\sigma - h(\sigma, a), a). \tag{3.88}$$

Покажемо, що це рівняння має розв'язок при довільних $u(\sigma)$ и w_σ. Розглянемо відображення

$$q(a) = u(\sigma) - r(\sigma, w_\sigma - h(\sigma, a), a).$$

Використовуючи властивості (3.85) функції r, знаходимо оцінку

$$|q(a) - u(\sigma)| \leq 0,5|w_\sigma - h(\sigma, a)|,$$

звідки

$$|q(a) - u(\sigma)| \leq 0,5|w_\sigma - h(\sigma, u(\sigma))| + 0,5|h(\sigma, u(\sigma)) - h(\sigma, a)|.$$

Враховуючи умову (3.73), одержимо

$$|q(a) - u(\sigma)| \leq 0,5|w_\sigma - h(\sigma, u(\sigma))| + 0,25|u(\sigma) - a|.$$

Розглянемо в l – вимірному просторі кулю H, що визначена нерівністю (відносно a)

$$|a - u(\sigma)| \leq |w_\sigma - h(\sigma, u(\sigma))|.$$

Із нерівності

$$|q(a) - u(\sigma)| \leq 0,75|w_\sigma - h(\sigma, u(\sigma))| \tag{3.89}$$

випливає, що відображення $q(a)$ переводить кулю H в себе, тому згідно з теоремою Брауера це відображення має нерухому точку a^*.

Отже, рівняння (3.88) має розв'язок $a = a^*$, який згідно з (3.89) задовольняє оцінку

$$|a^* - u(\sigma)| \leq 0,75|w_\sigma - h(\sigma, u(\sigma))|. \tag{3.90}$$

Підставляючи розв'язок a^* у друге рівняння (3.87), знаходимо, що пара a^*, ζ^*, де $\zeta^* = w_\sigma - h(\sigma, a^*)$, задовольняє систему (3.87). Теорема доведена.

Теорема 3.14. Нехай виконуються умови (3.67), де $\nu < \min(\nu_0, \nu_1)$. Якщо нульовий розв'язок рівняння (3.81) стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок рівняння (3.66) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.

Доведення. Нехай нульовий розв'язок рівняння (3.81) стійкий. Візьмемо довільне додатне число ε. Згідно з означенням стійкості знайдеться таке $\delta > 0$, що якщо $|a| < \delta$, то розв'язок $y(t)$ рівняння (3.81) з початковою умовою $y(\sigma) = a$ при $t \geq \sigma$ задовольняє нерівність

$$|y(t)| < \varepsilon/(2|\Phi| + 2K_1 + 1). \tag{3.91}$$

Розглянемо розв'язок $x_t = \Phi u(t) + w_t$ рівняння (3.66) з початковою функцією $x_\sigma = \Phi u(\sigma) + w_\sigma$, що задовольняє оцінку $|u(\sigma)| + |w_\sigma| < \delta/2$. Із оцінки (3.90) випливає нерівність $|a^*| < \delta$, а із (3.82) і (3.91) випливає, що

$$|x_t| \leq |\Phi y(t) + h(t, y(t))| + |x_t - \xi_t| < \varepsilon.$$

Це і доводить стійкість нульового розв'язку рівняння (3.66).

Якщо нульовий розв'язок рівняння (3.81) асимптотично стійкий, то із оцінки (3.82) випливає асимптотична стійкість нульового розв'язку рівняння (3.66).

Нарешті, якщо нульовий розв'язок рівняння (3.81) нестійкий, то за означенням і нульовий розв'язок рівняння (3.66) нестійкий. Теорема доведена.

3.5. Побудова інтегральних многовидів і дослідження стійкості розв'язків у критичному випадку

В багатьох випадках для застосування теореми 3.14 досить визначити функцію $h(\sigma, c)$ наближено. Нехай, наприклад,

$$h_n(\sigma, c) = x_\sigma^{(n+1)}(\sigma, c) - \Phi c, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{3.92}$$

де $x_\sigma^{(n+1)}(\sigma, c)$ знаходиться за допомогою рекурентної формули (3.78). В частковому випадку, нульове і перше наближення мають вигляд

$$h_0(\sigma, c) = 0, \quad h_1(\sigma, c) = \int\limits_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma - s) X_0^Q F(s, \Phi e^{B(s-\sigma)} c) ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma - s) X_0^Q \frac{d}{ds} G(s, \Phi e^{B(s-\sigma)} c) ds. \tag{3.93}$$

Теорема 3.15. Нехай виконуються умови (3.67), причому $\nu\gamma < 1$,

$$\gamma = |\Phi||\Psi(0)|K + 1 + |\Phi||\Psi(0)|K\tau_0/(1 - \exp(-\beta\tau_0)) + |\Phi||\Psi(0)||B|K/\beta +$$

$$+ K_1\tau_0/(1 - \exp(-\beta_1\tau_0)) + K_1/(\exp(\beta_1) - 1).$$

Тоді виконується нерівність

$$|h(\sigma, c) - h_n(\sigma, c)| \leq \frac{K|\Phi||c|}{1 - \nu\gamma} (\nu\gamma)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.94}$$

Доведення. Підставляючи в нерівності (3.79) $t = \sigma$, одержимо

$$|x_\sigma^{(m)} - x_\sigma^{(m-1)}| \leq K|\Phi||c|(\nu\gamma)^{m-1}.$$

Сумуючи ці нерівності відносно m від $n + 2$ до ∞, одержимо оцінку (3.94). Теорема доведена.

У теоремах 3.11 – 3.15 вимагається виконання умов Ліпшиця (3.67) для $\{\varphi, \varphi'\} \subset \mathbb{C}$. Якщо умови (3.67) виконуються лише для $|\varphi| \le \rho$, $|\varphi'| \le \rho$, то визначимо нові функції

$$g(t,\varphi) = \begin{cases} G(t,\varphi), & |\varphi| \le \rho, \\ G(t,\varphi\rho/|\varphi|), & \rho < |\varphi| < \infty, \end{cases}$$

$$f(t,\varphi) = \begin{cases} F(t,\varphi), & |\varphi| \le \rho, \\ F(t,\varphi\rho/|\varphi|), & \rho < |\varphi| < \infty, \end{cases}$$

які неперервні відносно t і задовольняють умови (3.67). Замість рівняння (3.66) розглянемо рівняння

$$\frac{d}{dt}\left[D(x_t) - g(t,x_t)\right] = L(x_t) + f(t,x_t). \tag{3.95}$$

Очевидно, що стійкість нульового розв'язку рівняння (3.66) рівносильна стійкості нульового розв'язку рівняння (3.95). До рівняння (3.95) можна застосувати теорему 3.14.

Нехай тепер функції $F(t,\Phi y)$, $G(t,\Phi y)$ аналітичні відносно y в деякому околі точки $y = 0$

$$F(t,\Phi y) = \sum_{|\alpha|=m}^{\infty} f_\alpha(t) y^\alpha, \quad G(t,\Phi y) = \sum_{|\alpha|=m}^{\infty} g_\alpha(t) y^\alpha, \tag{3.96}$$

де $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_l)$, $\alpha_j (j = 1, ..., l)$ – невід'ємні цілі,

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_l, \quad y^\alpha = y_1^{\alpha_1} ... y_l^{\alpha_l}.$$

Припустимо, що $f_\alpha(t)$, $g_\alpha(t)$ – квазіперіодичні відносно t вектор - функції, причому

$$f_\alpha(t) = \sum_k f_{\alpha k} e^{i(k,w)t}, g_\alpha(t) = \sum_k g_{\alpha k} e^{i(k,w)t}, \tag{3.97}$$

де $w = (w_1, ..., w_p)$, $k = (k_1, ..., k_p)$.

Нехай власні значення матриці B мають прості елементарні дільники. Тоді знаходження функції $h_1(\sigma, c)$ зводиться до обчислення інтегралів вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma - s)X_0^Q e^{i\eta s} e^{i\mu(s-\sigma)} ds = e^{i\eta\sigma} \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{i(\eta+\mu)s} ds.$$

Інтеграл

$$z = \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{i\delta s} ds$$

згідно із (3.72) є збіжним, причому виконується рівномірна відносно δ оцінка $|z| \le K_1/(\alpha + \beta_1)$.

Теорема 3.16. При довільних дійсних δ функція $z(\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$, належить $\mathbb{Q} \bigcap D(A)$ і виконується рівність

$$i\delta z - Az = X_0^Q. \tag{3.98}$$

Доведення. Справді,

$$(\Psi, z) = \int\limits_{-\infty}^{0} (\Psi, T(-s)X_0^Q) e^{i\delta s} ds = 0,$$

тому $z \in \mathbb{Q}$. Згідно з означенням твірного оператора A півгрупи $T(t)$ маємо

$$A\varphi = \lim_{t \to 0} A_t \varphi,$$

де $A_t = (T(t) - I)/t$. При $t > 0$ одержимо

$$A_t z = \frac{1}{t} \int\limits_{-\infty}^{0} T(t-s)X_0^Q e^{i\delta s} ds - \frac{1}{t} \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{i\delta s} ds =$$

$$= \frac{e^{i\delta t} - 1}{t} \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{i\delta s} ds - \frac{e^{i\delta t}}{t} \int\limits_{-t}^{0} T(-s)X_0^Q e^{i\delta s} ds,$$

так що

$$A_t z \to i\delta z - X_0^Q$$

при $t \to 0$. Отже, $z \in D(A)$ і $Az = i\delta z - X_0^Q$. Звідси випливає рівність (3.98). Теорема доведена.

Для знаходження z треба розв'язати відносно z рівняння (3.98), яке рівносильне системі

$$\frac{dz(\theta)}{d\theta} - i\delta z(\theta) = -X_0^Q(\theta), \quad -\Delta \le \theta < 0, \tag{3.99}$$

$$\int_{-\Delta}^{0} [d\mu(\theta)]\dot{z}(\theta) + \int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)]z(\theta) - i\delta z(0) = -X_0^Q(0). \tag{3.100}$$

Підставивши розв'язок рівняння (3.99)

$$z(\theta) = e^{i\delta\theta}a - \int_{0}^{\theta} e^{i\delta(\theta-s)}X_0^Q(s)ds, \;\; -\Delta \le \theta \le 0, \tag{3.101}$$

для знаходження сталої a в (3.100), одержимо рівняння

$$i\delta \int_{-\Delta}^{0} [d\mu(\theta)]e^{i\delta\theta}a - i\delta \int_{-\Delta}^{0} [d\mu(\theta)] \int_{0}^{\theta} e^{i\delta(\theta-s)}X_0^Q(s)ds - \int_{-\Delta}^{0} [d\mu(\theta)]X_0^Q(\theta) +$$

$$+ \int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)]e^{i\delta\theta}a - \int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)] \int_{0}^{\theta} e^{i\delta(\theta-s)}X_0^Q(s)ds - i\delta a = -X_0^Q(0),$$

або

$$\Lambda(i\delta)a = \left(e^{-i\delta\cdot}I, X_0^Q\right). \tag{3.102}$$

Якщо число $i\delta$ не є коренем характеристичного рівняння, то матриця $\Lambda(i\delta)$ має ненульовий визначник і вектор a знаходиться однозначно.

Нехай тепер число $i\delta$ є коренем характеристичного рівняння. Оскільки повинна виконуватися умова $(\Psi, z) = 0$, то згідно з (3.101) ми можемо доповнити рівняння (3.102) рівнянням

$$\left(\Psi, e^{i\delta\cdot}a\right) - \left(\Psi, \int_{0}^{\cdot} \exp(i\delta(\cdot - s))X_0^Q(s)ds\right) = 0. \tag{3.103}$$

Згідно з теоремою 3.16 існує розв'язок $z \in \mathbb{Q} \bigcap D(A)$ рівняння (3.98). Тому існує розв'язок системи рівнянь (3.102), (3.103), і він буде єдиним тоді і тільки тоді, коли відповідна однорідна система

$$\Lambda(i\delta)a = 0, \quad (\Psi, \exp(i\delta\cdot)a) = 0 \tag{3.104}$$

має тільки нульовий розв'язок. Нехай вектор a є розв'язком системи (3.104). Із першого рівняння системи (3.104) випливає, що $e^{i\delta\theta}a$ буде розв'язком рівняння (3.68), отже, правильне зображення

$$e^{i\delta\theta}a = b_1\varphi_1(\theta) + ... + \quad b_l\varphi_l(\theta),$$

де $\varphi_1(\theta), ..., \varphi_l(\theta)$ – стовпці матриці Φ. Оскільки $(\Psi, \Phi) = E$, то, враховуючи другу рівність системи (3.104), одержимо

$$0 = (\Psi, \exp(i\delta\cdot)a) = col(b_1, ..., b_l).$$

Звідси $a = 0$, отже, існує єдиний розв'язок системи рівнянь (3.102), (3.103).

Теорема 3.17. Нехай власні значення матриці B мають прості елементарні дільники. Припустимо, що при $|u| \leq \rho$ виконуються умови (3.67), а також умови

$$|F(t, \Phi u)| \leq p(t)|u|^m, \quad |G(t, \Phi u)| \leq M|u|^m, \ m \geq 2,$$
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\tau_0} p(\tau)d\tau \leq M\tau_0,$$

де $\tau_0 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^l$.

Тоді знайдеться стала $\bar{M} > 0$ така, що виконується нерівність

$$|h(\sigma, c)| \leq \bar{M}|c|^m, |c| \leq \rho.$$

Доведення. Оскільки власні значення матриці B мають прості елементарні дільники, то нерівність (3.73) можна переписати у вигляді $|\exp(Bt)| \leq K, \quad t \leq 0$.

Використовуючи (3.78), одержимо оцінку

$$|x_t^{(2)} - x_t^{(1)}| \leq |\Phi||\Psi(0)|MK|c|^m + MK^m|c|^m +$$

$$+K|\Phi||\Psi(0)|MK^m|c|^m e^{\alpha(\sigma-t)}\tau_0/(1-\exp(-\alpha\tau_0))+$$

$$+K|\Phi||B||\Psi(0)|MK^m|c|^m e^{\alpha(\sigma-t)}/\alpha + K_1MK^m|c|^m\tau_0/(1-\exp(-(\alpha+\beta_1)\tau_0))+ \tag{3.105}$$

$$+K_1MK^m|c|^m/(e^{\alpha+\beta_1}-1) \leq M_1|c|^m e^{\alpha(\sigma-t)},$$

де

$$M_1 = |\Phi||\Psi(0)|MK + |\Phi||\Psi(0)|MK^{m+1}\tau_0/(1-\exp(-\alpha\tau_0))+$$

$$+|\Phi||B||\Psi(0)|MK^{m+1}/\alpha + MK^m + K_1MK^m/(e^{\alpha+\beta_1}-1)+$$

$$+K_1MK^m\tau_0/(1-\exp(-(\alpha+\beta_1)\tau_0)).$$

Індукцією доведемо нерівність

$$|x_t^{(k)} - x_t^{(k-1)}| \leq M_1 2^{2-k}|c|^m e^{\alpha(\sigma-t)}, \quad k=2,3,..., \quad t \leq \sigma. \tag{3.106}$$

При $k=2$ нерівність (3.106) випливає із (3.105).

Нехай нерівність (3.106) виконується при $k=n$. Тоді, враховуючи (3.67), (3.72), одержимо

$$|x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}| \leq |\Phi|K|\Psi(0)|\nu|x_\sigma^{(n)} - x_\sigma^{(n-1)}| + \nu|x_t^{(n)} - x_t^{(n-1)}| + |\Phi|\times$$

$$\times\int_t^\sigma (p(s)+\nu|B|)K|\Psi(0)||x_s^{(n)}-x_s^{(n-1)}|ds + \int_{-\infty}^t K_1 e^{(\alpha+\beta_1)(s-t)}p(s)|x_s^{(n)}-x_s^{(n-1)}|ds+$$

$$+\int_{-\infty}^t |d_sT(t-s)X_0^Q|\nu|x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}| \leq \nu M_2M_1 2^{2-n}|c|^m e^{\alpha(\sigma-t)},$$

де

$$M_2 = |\Phi|K|\Psi(0)| + 1 + |\Phi|K|\Psi(0)|\tau_0/(1-\exp(-\alpha\tau_0)) + |\Phi||B|K|\Psi(0)|/\alpha +$$

$$+K_1/(\exp(\beta_1)-1) + K_1\tau_0/(1-\exp(-\beta_1\tau_0)).$$

При досить малому ν виконується оцінка $\nu M_2 < 0,5$, тому нерівність (3.106) правильна при $k = n+1$, отже, вона виконується при $k = 2, 3, ...$

Підставляючи в нерівності (3.106) $t = \sigma$ і сумуючи одержані нерівності відносно k від 2 до p, одержимо оцінку

$$|x_\sigma^{(p)} - x_\sigma^{(1)}| \leq 2M_1|c|^m.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $p \to \infty$, знаходимо

$$|h(\sigma, c)| = |x_\sigma(\sigma, c) - \Phi c| \leq 2M_1|c|^m.$$

Теорема доведена.

Теорема 3.18. Нехай власні значення матриці B мають прості елементарні дільники. Припустимо, що при $|u| \leq \rho$ виконуються умови (3.67), а також умови

$$|F(t, x_t^{(2)}) - F(t, x_t^{(1)})| \leq p(t)|c|^{2m-1}, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\tau_0} p(\tau)d\tau \leq M\tau_0, \tag{3.107}$$

$$|G(t, x_t^{(2)}) - G(t, x_t^{(1)})| \leq M|c|^{2m-1}, \quad m \geq 2, \quad |c| \leq \rho,$$

де $\tau_0 > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Тоді знайдеться стала $\bar{M} > 0$ така, що виконується оцінка

$$|h(\sigma, c) - h_1(\sigma, c)| \leq \bar{M}|c|^{2m-1}, \quad |c| \leq \rho.$$

Доведення. Враховуючи (3.107), одержимо нерівність

$$|x_t^{(3)} - x_t^{(2)}| \leq |\Phi|K|\Psi(0)||G(\sigma, x_\sigma^{(2)}) - G(\sigma, x_\sigma^{(1)})| + |G(t, x_t^{(2)}) - G(t, x_t^{(1)})| +$$

$$+|\Phi| \int\limits_t^\sigma K|\Psi(0)||F(s, x_s^{(2)}) - F(s, x_s^{(1)})|ds + |B||\Phi| \int\limits_t^\sigma K|\Psi(0)||G(s, x_s^{(2)}) -$$

$$-G(s, x_s^{(1)})|ds + \int\limits_{-\infty}^t K_1 e^{-(\alpha+\beta_1)(t-s)}|F(s, x_s^{(2)}) - F(s, x_s^{(1)})|ds + \tag{3.108}$$

$$+\int_{-\infty}^{t}|d_sT(t-s)X_0^Q||G(s,x_s^{(2)})-G(s,x_s^{(1)})|\leq M_1|c|^{2m-1}e^{\alpha(\sigma-t)},$$

де

$$M_1=|\Phi|K|\Psi(0)|M+|\Phi|K|\Psi(0)|M\tau_0/(1-\exp(-\alpha\tau_0))+|\Phi|K|\Psi(0)|M|B|/\alpha+M+$$

$$+K_1M\tau_0/(1-\exp(-(\alpha+\beta_1)\tau_0))+K_1M/(\exp(\alpha+\beta_1)-1).$$

Виконується нерівність

$$|x_t^{(k)}-x_t^{(k-1)}|\leq M_12^{3-k}|c|^{2m-1}e^{\alpha(\sigma-t)},\quad k=3,4,...,\ \ t\leq\sigma. \tag{3.109}$$

При $k=3$ нерівність (3.109) випливає із (3.108). Аналогічно можна переконатися, що нерівність (3.109) виконується при всіх k.

Якщо в (3.109) підставити $t=\sigma$ і просумувати по k від 3 до p, то одержимо оцінку

$$|x_\sigma^{(p)}-x_\sigma^{(2)}|\leq 2M_1|c|^{2m-1}.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $p\to\infty$, знаходимо

$$|h(\sigma,c)-h_1(\sigma,c)|=|x_\sigma(\sigma,c)-x_\sigma^{(2)}|\leq 2M_1|c|^{2m-1}.$$

Теорема доведена.

Теореми 3.15 – 3.18 дозволяють обґрунтувати алгоритм дослідження стійкості нульового розв'язку рівняння (3.66) у критичному випадку.

Опишемо алгоритм дослідження стійкості у випадку, коли функції $G(t,\Phi y)$, $F(t,\Phi y)$ є періодичними відносно t з періодом ω і аналітичними відносно y в деякому околі точки $y=0$. Нехай власні значення $\lambda_1,\dots,\lambda_l$ матриці B мають прості елементарні дільники і виконуються співвідношення

$$\pm i\omega(m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+\ldots+m_l\lambda_l-\lambda_k)\neq 2\pi,$$

де $k\in\{1,\dots,l\}$; $m_1,\dots,m_l$ – невід'ємні цілі числа, $2\leq m_1+\ldots+m_l\leq 3$.

Згідно з теоремою 3.17, якщо розклад функцій $G(t, \Phi y)$, $F(t, \Phi y)$ в ряд по y починається з членів третього порядку, то і розклад функції $h(t, y)$ починається з членів третього порядку. Якщо, крім того, задача про стійкість нульового розв'язку рівняння

$$\frac{d}{dt}\left[y - \Psi(0)G(t, \Phi y)\right] = By + \Psi(0)F(t, \Phi y) \tag{3.110}$$

розв'язується за допомогою членів третього порядку, то стійкість нульового розв'язку рівняння (3.66) рівносильна стійкості нульового розв'язку рівняння (3.110).

Нехай тепер розклад функцій $G(t, \Phi y)$, $F(t, \Phi y)$ в ряд за степенями y починається з членів другого порядку і задача про стійкість нульового розв'язку рівняння

$$\frac{d}{dt}\left[y - \Psi(0)G(t, \Phi y + h_1(t, y))\right] = By + \Psi(0)F(t, \Phi y + h_1(t, y)) \tag{3.111}$$

розв'язується за допомогою членів третього порядку. Згідно з теоремою 3.18, якщо нульовий розв'язок рівняння (3.111) асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок рівняння (3.66) асимптотично стійкий або нестійкий. У цьому випадку досить замість функції $h_1(t, y)$ підставити члени другого порядку її розкладу в ряд за степенями y.

Як приклад розглянемо рівняння Хатчінсона

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\pi}{2}[1 - N(t-1)]N.$$

Зробивши заміну $N = x + 1$, одержимо

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\pi}{2}x(t-1)(1+x). \tag{3.112}$$

Дослідимо стійкість нульового розв'язку рівняння (3.112). Розглянемо лінійне рівняння

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{2}u(t-1). \tag{3.113}$$

Характеристичне рівняння, що відповідає рівнянню (3.113), має два суто уявних корені $\lambda = \pm\frac{\pi}{2}i$, а інші корені мають від'ємні дійсні частини. Згідно з [132] визначимо

$$\Phi(\theta) = (\cos\frac{\pi}{2}\theta, \sin\frac{\pi}{2}\theta), \quad \Psi(0) = 4\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ \pi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\alpha = \dfrac{1}{\pi^2+4}$. Тоді рівняння на многовиді набере вигляду

$$\frac{dy}{dt} = By + \Psi(0)F(\Phi y + h(y)),$$

де

$$F(\Phi y + w_t) = -\frac{\pi}{2}[-y_2 + w(t-1)][y_1 + w(t)].$$

Використовуючи (3.93), знайдемо перше наближення функції $h(c)$. Зберігаючи тільки члени другого порядку, одержимо

$$h_1(c) = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q\left(\frac{c_2^2-c_1^2}{2}\sin\pi s + c_1c_2\cos\pi s\right)ds =$$

$$= \frac{i\pi}{8}(c_2^2-c_1^2)\left[(-i\pi-A)^{-1}X_0^Q - (i\pi-A)^{-1}X_0^Q\right] +$$
$$+\frac{\pi}{4}c_1c_2\left[(-i\pi-A)^{-1}X_0^Q + (i\pi-A)^{-1}X_0^Q\right]. \qquad (3.114)$$

Виконується рівність

$$(i\omega-A)^{-1}X_0^P = \Phi\begin{pmatrix} i\omega & \pi/2 \\ -\pi/2 & i\omega \end{pmatrix}^{-1}\Psi(0) = \frac{-8\alpha\Phi}{3\pi^2}\begin{pmatrix} \pi^2+4i\omega \\ 2i\omega\pi-2\pi \end{pmatrix}, \quad (3.115)$$

де $\omega = \pm\pi$. Обчислимо $\varphi = (i\omega-A)^{-1}X_0$. Для цього треба розв'язати систему

$$i\omega\varphi(\theta) - \varphi'(\theta) = 0, \quad -1 \le \theta < 0,$$

$$i\omega\varphi(0) + \frac{\pi}{2}\varphi(-1) = 1.$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$\varphi(\theta) = \exp(i\omega\theta)/\left(i\omega + \frac{\pi}{2}\exp(-i\omega)\right). \tag{3.116}$$

Враховуючи, що $X_0^Q = X_0 - X_0^P$ і підставляючи (3.115) і (3.116) в (3.114), одержимо

$$h_1(c)|_{\theta=-1} = k(c_2^2 - c_1^2) + lc_1c_2, \quad h_1(c)|_{\theta=0} = m(c_2^2 - c_1^2) - kc_1c_2,$$

де

$$k = 1/5 - 4\pi\alpha/3, \quad l = 1/5 + 8\alpha/3, \quad m = 8\alpha/3 - 1/5.$$

Якщо в рівнянні на многовиді відкинути члени четвертого і вищих порядків, то одержимо рівняння

$$\frac{dy}{dt} = By + 2\pi\alpha\left[y_1y_2 + ky_1^3 - (m+l)y_1^2y_2 - 2ky_1y_2^2 + my_2^3\right]\begin{pmatrix} 2 \\ \pi \end{pmatrix}. \tag{3.117}$$

Нульовий розв'язок рівняння (3.117) асимптотично стійкий [75], отже, нульовий розв'язок рівняння (3.112) також буде асимптотично стійким.

3.6. Застосування методу усереднення до дослідження стійкості диференціально-різницевих рівнянь

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, x(t-\Delta)), \tag{3.118}$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^n$, функція $X(t,x,y)$ тричі неперервно диференційовна за всіма змінними.

Нехай

$$X(t,x,x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t}X_\nu(x).$$

Тоді усереднена система для (3.118) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x),$$

де $X_0(x)$ – середнє значення функції $X(t,x,x)$ за змінною t, $X_0(x) = M\{X(t,x,x)\}$. У статті Хейла [153] доведено узагальнення другої теореми Боголюбова про усереднення для системи вигляду (3.118). У цьому підрозділі побудуємо друге наближення в методі усереднення і застосуємо його для дослідження стійкості розв'язків лінійної системи.

У системі (3.118) зробимо заміну $x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)$, де

$$\tilde{X}(t,\xi) = \sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}X_\nu(\xi).$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial\tilde{X}(t,x)}{\partial t} = X(t,x,x) - X_0(x),$$

одержимо систему

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t,\xi,\xi) - \varepsilon X_0(x) + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}(t,\xi)}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt} =$$

$$= \varepsilon X(t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi), \xi(t-\Delta) + \varepsilon\tilde{X}(t-\Delta,\xi(t-\Delta))). \qquad (3.119)$$

Оскільки згідно з [153]

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + O(\varepsilon^2),$$

то

$$\xi(t-\Delta) = \xi(t) - \Delta\frac{d\xi}{dt} + O(\varepsilon^2) = \xi(t) - \varepsilon\Delta X_0(\xi) + O(\varepsilon^2).$$

Тому

$$X(t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi), \xi(t-\Delta) + \varepsilon\tilde{X}(t-\Delta,\xi(t-\Delta))) =$$

$$= X(t,\xi,\xi) + \varepsilon Y(t,\xi)\tilde{X}(t,\xi) + \varepsilon Z(t,\xi)[\tilde{X}(t-\Delta,\xi) - \Delta X_0(\xi)] + O(\varepsilon^2),$$

де

$$Y(t,\xi) = \frac{\partial X(t,x,\xi)}{\partial x}|_{x=\xi}, \quad Z(t,\xi) = \frac{\partial X(t,\xi,y)}{\partial y}|_{y=\xi}.$$

Отже, система (3.119) набере вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 Y(t,\xi)\tilde{X}(t,\xi) +$$

$$+ \varepsilon^2 Z(t,\xi)[\tilde{X}(t-\Delta,\xi) - \Delta X_0(\xi)] + O(\varepsilon^3). \qquad (3.120)$$

Система (3.120) – це система звичайних диференціальних рівнянь, права частина якої записана з точністю до $O(\varepsilon^3)$. Тому, згідно з [15, 104], рівняння другого наближення в методі усереднення для системи (3.120) наберуть вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 M\{Y(t,\xi)\tilde{X}(t,\xi) + Z(t,\xi)[\tilde{X}(t-\Delta,\xi) - \Delta X_0(\xi)]\}.$$

Розглянемо систему слабкозв'язаних осциляторів із запізненням

$$y'' + L^2 y + \varepsilon P(t) y(t-h) = 0, \qquad (3.121)$$

де ε – малий додатний параметр, $y = (y_1, \ldots, y_q)^T$, L – діагональна матриця з додатними різними діагональними елементами,

$$L = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}, \quad \lambda_s > 0,$$

$\lambda_k \neq \lambda_s$ при $k \neq s$, $h > 0$, $P(t)$ – матриця з елементами

$$P_{js}(t) = \sum_{m=1}^{n} (b_{jsm} e^{i a_m t} + \bar{b}_{jsm} e^{-i a_m t}), \quad b_{jsm} \in \mathbb{C}, \quad a_m \geq 0. \qquad (3.122)$$

Стійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку вивчалася у багатьох роботах (див., наприклад, [40, 127, 132]). Далі використаємо методику з цих робіт і знайдемо умови стійкості системи (3.121) в термінах її коефіцієнтів.

Систему (3.121) перепишемо у вигляді

$$y_j'' = -\lambda_j^2 y_j - \varepsilon \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h), \quad j \in \{1, \ldots, q\}.$$

Позначимо $z_j = y_j'/\lambda_j$, тоді одержимо систему

$$y_j' = \lambda_j z_j, \quad z_j' = -\lambda_j y_j - \frac{\varepsilon}{\lambda_j}\sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h).$$

Перейдемо до комплексних змінних $u_j = y_j + iz_j$, тоді

$$u_j' = -i\lambda_j u_j - \frac{\varepsilon i}{2\lambda_j}\sum_{s=1}^{q} P_{js}(t)(u_s(t-h) + \bar{u}_s(t-h)).$$

Зробивши заміну $u_j = x_j \exp(-i\lambda_j t)$, одержимо систему в стандартній формі

$$x' = \varepsilon F(t)x(t-h) + \varepsilon G(t)\bar{x}(t-h), \tag{3.123}$$

де $x = (x_1, ..., x_q)^T$, $F(t)$ та $G(t)$ – матриці з елементами

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_s)t} e^{i\lambda_s h},$$

$$G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j + \lambda_s)t} e^{-i\lambda_s h} \tag{3.124}$$

відповідно.

Підставляючи (3.122) у (3.124), одержимо

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} \left(b_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t} + \bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t} \right),$$

$$G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{-i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} \left(b_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t} + \bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)t} \right).$$

Позначимо $c_j = b_{jj1} + \bar{b}_{jj1}$.

Теорема 3.19. *Нехай $a_1 = 0$, $a_m > 0$ при $m \geq 2$ і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$ при $|j - s| + |m - 1| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$ для всіх j, s, m. Тоді нульовий розв'язок системи (3.121) асимптотично стійкий, якщо $c_j \sin(\lambda_j h) < 0$ при $j \in \{1, \dots, q\}$, і нестійкий, якщо $c_j \sin(\lambda_j h) \neq 0$ для всіх j та існує k, для якого $c_k \sin(\lambda_k h) > 0$.*

Доведення. Стійкість розв'язків системи (3.121) рівносильна стійкості розв'язків системи (3.123). Оскільки середнє значення функції $e^{i\alpha t}$ дорівнює нулю при $\alpha \neq 0$, то при виконанні умов теореми середні значення всіх елементів матриці $G(t)$ та всіх позадіагональних елементів матриці $F(t)$ дорівнюють нулеві. Тому усереднена система для системи (3.123) матиме вигляд $x' = \varepsilon Ax$, де

$$A = \mathrm{diag}\{\gamma_1, \ldots, \gamma_q\}, \quad \gamma_j = -i\exp(i\lambda_j h)c_j/(2\lambda_j) =$$

$$= (c_j \sin(\lambda_j h) - ic_j \cos(\lambda_j h))/(2\lambda_j), \quad j \in \{1, \ldots, q\}.$$

Із теореми Хейла [153] випливає, що якщо нульовий розв'язок усередненої системи асимптотично стійкий (нестійкий), то і нульовий розв'язок системи (3.123) буде відповідно асимптотично стійким (нестійким). Теорема доведена.

Нехай тепер $a_m > 0$ для всіх m. Тоді перше наближення в методі усереднення не дає відповіді на питання про стійкість.

Позначимо $d_s = \mathrm{Re}\{\delta_s\}$,

$$\delta_s = \sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}\exp(i(2\lambda_s + a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} +$$

$$+ \frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}\exp(i(2\lambda_s - a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}\Big).$$

У випадку симетричної матриці $P(t)$ маємо $b_{ksm} = b_{skm}$, отже,

$$d_s = \sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}|b_{skm}|^2\Big(\frac{\sin((2\lambda_s + a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} +$$

$$+ \frac{\sin((2\lambda_s - a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}\Big).$$

Теорема 3.20. *Нехай $a_m > 0$ для всіх m і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$ при $|j-s| + |m-k| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m + a_k \neq 0$ для всіх j, s, m, k. Тоді нульовий розв'язок системи (3.121) асимптотично стійкий, якщо $d_s > 0$ при $s \in \{1, \ldots, q\}$ і нестійкий, якщо $d_s \neq 0$ для всіх s та існує k, для якого $d_k < 0$.*

Доведення. У системі (3.123) зробимо заміну

$$x(t) = \xi(t) + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t)\bar{\xi}(t),$$

де $\tilde{F}(t)$ та $\tilde{G}(t)$ – матриці з елементами

$$\tilde{F}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j}e^{i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j-\lambda_s+a_m)}e^{i(\lambda_j-\lambda_s+a_m)t}+$$
$$+\frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j-\lambda_s-a_m)}e^{i(\lambda_j-\lambda_s-a_m)t}\Big),$$
$$\tilde{G}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j}e^{-i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j+\lambda_s+a_m)}e^{i(\lambda_j+\lambda_s+a_m)t}+$$
$$+\frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j+\lambda_s-a_m)}e^{i(\lambda_j+\lambda_s-a_m)t}\Big).$$

Тоді

$$x(t-h) = \xi - h\xi' + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}(t) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \xi + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}(t) + O(\varepsilon^2),$$

оскільки $\xi' = O(\varepsilon^2)$.

Підставляючи в систему (3.123), одержимо

$$\xi' + \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi' + \varepsilon G(t)\bar{\xi} + \varepsilon\tilde{G}(t)\bar{\xi}' =$$

$$= \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}+$$

$$+\varepsilon G(t)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3),$$

або

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{G}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\bar{\xi}+$$
$$+\varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3). \tag{3.125}$$

У системі (3.125) можна ще раз застосувати метод усереднення [15, 153] і одержати усереднену систему

$$\xi' = \varepsilon^2 M\{F(t)\tilde{F}(t-h)\}\xi + \varepsilon^2 M\{F(t)\tilde{G}(t-h)\}\bar{\xi}+$$

$$+\varepsilon^2 M\{G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\}\bar{\xi}+\varepsilon^2 M\{G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\}\xi.$$

Позначимо через $f_{ss}(t)$ та $g_{ss}(t)$ діагональні елементи матриць $F(t)\tilde{F}(t-h)$ та $G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)$ відповідно і знайдемо їх середні значення

$$M\{f_{ss}(t)\}=M\{\sum_{k=1}^{q}F_{sk}(t)\tilde{F}_{ks}(t-h)\}=M\{\frac{i}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}e^{i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}(b_{skm}e^{i(\lambda_s-\lambda_k+a_m)t}+$$

$$+\bar{b}_{skm}e^{i(\lambda_s-\lambda_k-a_m)t})\frac{i}{2\lambda_k}e^{i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)}e^{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)(t-h)}+$$

$$+\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)}e^{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)(t-h)})\}=M\{-\frac{1}{2\lambda_s}e^{i\lambda_s h}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}e^{i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}(b_{skm}e^{ia_m t}+$$

$$+\bar{b}_{skm}e^{-ia_m t})\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)}e^{ia_m t}e^{i(\lambda_s-\lambda_k-a_m)h}+\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)}e^{-ia_m t}\times$$

$$\times e^{i(\lambda_s-\lambda_k+a_m)h})\}=-\frac{1}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)}e^{i(2\lambda_s+a_m)h}+$$

$$+\frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)}e^{i(2\lambda_s-a_m)h}),$$

$$M\{g_{ss}(t)\}=M\{\sum_{k=1}^{q}G_{sk}(t)\bar{\tilde{G}}_{ks}(t-h)\}=M\{\frac{i}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}e^{-i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}(b_{skm}e^{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)t}+$$

$$+\bar{b}_{skm}e^{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)t})\frac{i}{2\lambda_k}e^{i\lambda_s h}\sum_{m=1}^{n}(\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}e^{-i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)(t-h)}+$$

$$+\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{-i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)(t-h)})\}=$$

$$=M\{-\frac{1}{2\lambda_s}e^{i\lambda_s h}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}e^{-i\lambda_k h}\sum_{m=1}^{n}(b_{skm}e^{ia_m t}+\bar{b}_{skm}e^{-ia_m t})\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{n}(\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}e^{-ia_m t}e^{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)h}+\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{ia_m t}e^{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)h})\}=$$

$$=-\frac{1}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}e^{i(2\lambda_s+a_m)h}+\frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{i(2\lambda_s-a_m)h}).$$

Отже,

$$M\{f_{ss}(t)\} + M\{g_{ss}(t)\} = -\frac{\delta_s}{2\lambda_s}.$$

Якщо відсутній резонанс, то середні значення всіх елементів матриць $F(t)\tilde{G}(t-h)$, $G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)$, а також всіх позадіагональних елементів матриць $F(t)\tilde{F}(t-h)$ та $G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)$ дорівнюють нулеві, отже за допомогою лінійної заміни систему (3.125) можна звести до системи $\xi' = \varepsilon^2 D\xi + O(\varepsilon^3)$, де $D = \mathrm{diag}\{-\delta_1/(2\lambda_1), \ldots, -\delta_q/(2\lambda_q)\}$. Якщо $d_s = \mathrm{Re}\{\delta_s\} > 0$ при $s \in \{1, \ldots, q\}$, то, згідно з [153], нульовий розв'язок системи (3.122) асимптотично стійкий, а якщо $d_s \neq 0$ при $s \in \{1, \ldots, q\}$, але існує k, для якого $d_k < 0$, то нульовий розв'язок системи (3.121) нестійкий. Теорема доведена.

Зауваження. *Твердження теорем 3.19 і 3.20 про нестійкість правильні й без припущення про відмінність від нуля величин $c_j \sin(\lambda_j h)$ та d_s. Це можна показати, виконавши в системі (3.125) лінійну заміну і використавши схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням [24].*

Розглянемо систему слабкозв'язаних осциляторів із змінним запізненням

$$y'' + L^2 y + \varepsilon P(t) y(t - h + g(t)) = 0, \tag{3.126}$$

де ε – малий додатний параметр,

$$y = (y_1, \ldots, y_q)^T, \quad L^2 = \mathrm{diag}\{\lambda_1^2, \ldots, \lambda_q^2\}, \quad \lambda_s > 0, \quad \lambda_k \neq \lambda_s, \quad k \neq s,$$

$$h > 0, \quad |g(t)| \leq h; \quad g(t) = \sum_{m=1}^{n} \left(\alpha_m e^{ia_m t} + \overline{\alpha}_m e^{-ia_m t}\right),$$

a_m – дійсні додатні різні числа, $\alpha_m \in \mathbb{C}$; $P(t)$ – матриця з елементами

$$P_{js}(t) = \sum_{m=1}^{n} \left(b_{jsm} e^{ia_m t} + \bar{b}_{jsm} e^{-ia_m t}\right), \quad b_{jsm} \in \mathbb{C}. \tag{3.127}$$

Вище досліджено стійкість системи (3.126), якщо $g(t) \equiv 0$.

Систему (3.126) перепишемо у вигляді

$$y_j'' = -\lambda_j^2 y_j - \varepsilon \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t - h + g(t)).$$

Позначимо $z_j = y_j'/\lambda_j$, тоді одержимо систему

$$y_j' = \lambda_j z_j, \quad z_j' = -\lambda_j y_j - \frac{\varepsilon}{\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t - h + g(t)).$$

Перейдемо до комплексних змінних $u_j = y_j + i z_j$, тоді

$$u_j' = -i\lambda_j u_j - \frac{\varepsilon i}{2\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t)(u_s(t-h+g(t)) + \overline{u}_s(t-h+g(t))).$$

Зробивши заміну $u_j = x_j \exp(-i\lambda_j t)$, одержимо систему в стандартній формі

$$x' = \varepsilon F(t) x(t-h+g(t)) + \varepsilon G(t) \overline{x}(t-h+g(t)), \tag{3.128}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_q)^T$, $F(t)$ та $G(t)$ – матриці з елементами

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_s)t} e^{i\lambda_s(h-g(t))},$$
$$G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j + \lambda_s)t} e^{i\lambda_s(g(t)-h)}, \tag{3.129}$$

відповідно.

Підставляючи (3.127) у (3.129), одержимо

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{i\lambda_s(h-g(t))} \sum_{m=1}^{n} \left(b_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t} + \overline{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t} \right),$$
$$G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{i\lambda_s(g(t)-h)} \sum_{m=1}^{n} \left(b_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t} + \overline{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)t} \right).$$

Якщо $g(t) \neq 0$, то аналогічно випадку $g(t) \equiv 0$ до системи (3.128) можна застосувати метод усереднення, але при цьому складніше знаходяться коефіцієнти усередненої системи.

Розглянемо систему

$$x' = \varepsilon F(t) x(t-h+g(t)), \tag{3.130}$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^p$, $|g(t)| \le h$,

$$F(t) = \sum_{m=1}^{n} \left(A_m e^{ib_m t} + \overline{A}_m e^{-ib_m t} \right), \quad g(t) = \sum_{m=1}^{n} \left(\alpha_m e^{ib_m t} + \overline{\alpha}_m e^{-ib_m t} \right),$$

b_m – дійсні додатні різні числа, $\alpha_m \in \mathbb{C}$, A_m – матриці з комплексними елементами.

У системі (3.130) зробимо заміну

$$x(t) = \xi(t) + \varepsilon \tilde{F}(t)\xi(t),$$

де

$$\tilde{F}(t) = \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{1}{ib_m} A_m e^{ib_m t} - \frac{1}{ib_m} \overline{A}_m e^{-ib_m t} \Big).$$

Тоді

$$x(t-h+g(t)) = \xi + (g(t)-h)\xi' + \varepsilon \tilde{F}(t-h+g(t))\xi + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \xi + \varepsilon \tilde{F}(t-h+g(t))\xi + O(\varepsilon^2),$$

оскільки $\xi' = O(\varepsilon^2)$.

Підставляючи цей вираз у систему (3.130), одержимо

$$\xi' + \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon \tilde{F}(t)\xi' = \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h+g(t))\xi + O(\varepsilon^3),$$

або

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h+g(t))\xi + O(\varepsilon^3). \tag{3.131}$$

У системі (3.131) можна ще раз застосувати метод усереднення [104] і одержати усереднену систему $\xi' = \varepsilon^2 B\xi$, де

$$B = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T F(t)\tilde{F}(t-h+g(t))dt.$$

Якщо $g(t) \equiv 0$, то

$$F(t)\tilde{F}(t-h) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(A_k e^{ib_k t} + \overline{A}_k e^{-ib_k t} \right) \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{ib_m} A_m e^{ib_m (t-h)} - \frac{1}{ib_m} \overline{A}_m e^{-ib_m (t-h)} \Big).$$

Тому в цьому випадку

$$B = -\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{b_m} \sin(b_m h) \left(A_m \overline{A}_m + \overline{A}_m A_m\right).$$

Теорема 3.21. *Якщо всі власні значення матриці B мають від'ємні дійсні частини, то система (3.130) асимптотично стійка, а якщо існує власне значення матриці B з додатною дійсною частиною, то система (3.130) нестійка.*

Доведення теореми випливає з теореми Хейла про усереднення [153]. Якщо існують власні значення матриці B з нульовою та додатною дійсними частинами, то треба використати схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням.

Як приклад розглянемо рівняння

$$x' = 2\varepsilon \cos t \; x(t-h). \tag{3.132}$$

Застосувавши схему доведення теореми 3.21, одержимо усереднене рівняння $\xi' = \varepsilon^2 B \xi$, де $B = -2\sin h$. Отже, рівняння (3.132) буде асимптотично стійким при $\sin h > 0$ і нестійким при $\sin h < 0$.

3.7. Висновки

Третій розділ присвячений питанням існування інтегральних многовидів і встановленню принципу зведення для дослідження стійкості різних класів диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку.

1. Підрозділ 3.1 присвячений побудові області стійкості для лінійних диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями. Тут доведена теорема про обмеженість області стійкості. Спочатку одержано обмеження області стійкості, а потім для побудови використано метод D-розбиттів.

2. У підрозділі 3.2 доведено існування інтегральних множин та встановлено принцип зведення для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь.

3. У підрозділі 3.3 аналогічні результати одержано для різницевих рівнянь.

4. Підрозділ 3.4 присвячений питанням існування інтегральних многовидів та дослідженню їх властивостей для рівнянь нейтрального типу.

5. У наступному підрозділі запропоновано метод побудови інтегрального многовиду у вигляді розкладу в степеневий ряд. Тут розглянуто питання про можливість обмежитися першими наближеннями для дослідження стійкості у критичному випадку.

6. У останньому підрозділі третього розділу друге наближення в методі усереднення застосовано до дослідження стійкості системи слабкозв'язаних осциляторів із запізненням. Одержано достатню умову стійкості (нестійкості) лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь.

Ці результати одержані автором роботи вперше.

Розділ 4

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ ДИНАМІЧНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У цьому розділі доведена динамічна еквівалентність системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь і деякої простішої системи рівнянь, побудованої за допомогою інтегральних многовидів. Побудована заміна, яка розщеплює систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу. Аналогічна заміна побудована для сингулярно збуреної системи нейтрального типу та лінійної імпульсної сингулярно збуреної системи із запізненням. Розв'язана задача квазіоптимальної стабілізації лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням.

4.1. Інтегральні многовиди та динамічна еквівалентність диференціально-функціональних рівнянь

Нехай $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний простір, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ — простір неперервних на $[-\Delta, 0]$ n-вимірних вектор-функцій. Через x_t позначимо елемент простору $\mathbb{C}$, заданий при кожному фіксованому t функцією $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x_t) + F(t, x_t), \tag{4.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$; $x_t \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$; $f(x_t)$ – лінійний неперервний оператор, заданий в $\mathbb{C}$; $F(t, x_t)$ – нелінійний оператор від x_t із значеннями в $\mathbb{R}^n$.

Поряд з (4.1) розглянемо лінійне автономне диференціально-функціональне рівняння

$$\frac{du}{dt} = f(u_t). \tag{4.2}$$

Наведемо деякі відомості із загальної теорії таких рівнянь [125, 126, 132].

Згідно з теоремою Рісса оператор f можна зобразити у вигляді інтеграла Стілтьєса

$$f(u_t) = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)]u(t+\theta),$$

де матриця $\eta(\theta)$ має обмежену варіацію відносно θ. Позначимо через $u_t(\varphi)$ розв'язок рівняння (4.2) з початковою функцією $\varphi \in \mathbb{C}$ при $t = 0$. Визначимо оператор зсуву за розв'язками рівняння (4.2) співвідношенням $T(t)\varphi = u_t(\varphi)$.

Характеристичне рівняння для рівняння (4.2) має вигляд

$$\det \Lambda(\lambda) = 0, \quad \Lambda(\lambda) = \lambda E - \int\limits_{-\Delta}^{0} \exp(\lambda\theta) d\eta(\theta). \tag{4.3}$$

Припустимо, що рівняння (4.3) має l коренів на уявній осі і в правій півплощині (з урахуванням їх кратності), а решта коренів лежать у лівій комплексній півплощині. Позначимо власний підпростір в $\mathbb{C}$, що відповідає кореням на уявній осі та в правій півплощині, через $\mathbb{P}$, а доповнювальний до нього підпростір — через $\mathbb{Q}$. Нехай $\Phi = \Phi(\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$ – базис в $\mathbb{P}$. Розглядаючи спряжене до (4.2) рівняння, можна аналогічно визначити функцію $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \le \theta \le \Delta$. Тоді кожний елемент $x_t \in \mathbb{C}$ єдиним способом можна зобразити у вигляді

$$x_t = x_t^P + x_t^Q = \Phi y(t) + z_t, \quad y \in \mathbb{R}^l, \quad z_t \in \mathbb{Q}, \tag{4.4}$$

де x_t^P, x_t^Q – проекції x_t відповідно на $\mathbb{P}$ і $\mathbb{Q}$. Рівняння (4.1) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = By + \Psi(0)F(t, \Phi y + z_t),$$

$$z_t = T(t-\sigma)z_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F(s, \Phi y(s) + z_s)ds, \tag{4.5}$$

де σ – довільне дійсне число (початковий момент для задачі Коші); X_0^Q– проекція на підпростір $\mathbb{Q}$ функції $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \le \theta < 0$, $X_0(0) = E$; B – стала матриця, власні значення якої збігаються із згаданими вище коренями рівняння (4.3) з невід'ємними дійсними частинами.

Корені, що лежать у лівій півплощині та корені з невід'ємними дійсними частинами можна, очевидно, розділити деякою прямою $Re\lambda = -\alpha$, де $\alpha > 0$. Справджуються нерівності

$$|T(t)\varphi^P| \le K|\varphi^P| \exp[(\beta-\alpha)t], \quad |T(t)X_0^P| \le K \exp[(\beta-\alpha)t], \quad t \le 0,$$

$$|T(t)\varphi^Q| \le K|\varphi^Q| \exp[-(\beta+\alpha)t], \quad |T(t)X_0^Q| \le K \exp[-(\beta+\alpha)t], \quad t \ge 0, \tag{4.6}$$

де $K \ge 1$, $\alpha > \beta > 0$, $\varphi \in \mathbb{C}$, $|\cdot|$– норма в $\mathbb{C}$.

Поряд із звичайною нормою $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^l$ ми будемо використовувати далі також норму $|y|_1 = |\Phi y|$, $y \in \mathbb{R}^l$.

Теорема 4.1. *Нехай функція F неперервна за t і задовольняє умови*

$$F(t,0) = 0, \quad |F(t,\varphi) - F(t,\varphi')| \le p(t)|\varphi - \varphi'|,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\tau_0} p(\tau)d\tau \le \nu\tau_0, \tag{4.7}$$

де $\nu > 0$, $\tau_0 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{C}$, $\varphi' \in \mathbb{C}$. *Тоді при*

$$\nu < \frac{1 - exp(-\beta\tau_0)}{4K^2\tau_0} \tag{4.8}$$

існує функція $g(t, y) \in \mathbb{Q}$, *що визначена на* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^l$, *задовольняє умови*

$$g(t, 0) = 0, \quad |g(t, y) - g(t, y')| \leq 0,5|y - y'|_1 \tag{4.9}$$

і така, що множина

$$S^- = \{(t, \varphi)|t \in \mathbb{R}, \varphi = \Phi y + \zeta, y \in \mathbb{R}^l, \zeta = g(t, y), \zeta \in \mathbb{Q}\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (4.1).

Для кожного розв'язку $x_t = \Phi y(t) + g(t, y(t))$ *рівняння (4.1), що лежить на* S^-, *виконується оцінка*

$$|x_t| \leq 2K|y(\sigma)|_1 \exp(-\alpha(t - \sigma)), \quad t \leq \sigma. \tag{4.10}$$

Доведення. Поряд із системою (4.5) розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$y(t) = e^{B(t-\sigma)}c - \int_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)F(s, \Phi y(s) + z_s)ds,$$

$$z_t = \int_{-\infty}^t T(t - s)X_0^Q F(s, \Phi y(s) + z_s)ds, \tag{4.11}$$

звідки одержимо

$$\Phi y(t) = T(t - \sigma)\Phi c - \int_t^\sigma T(t - s)X_0^P F(s, \Phi y(s) + z_s)ds,$$

$$z_t = \int_{-\infty}^t T(t - s)X_0^Q F(s, \Phi y(s) + z_s)ds.$$

Додаючи ці рівності, з урахуванням (4.4) знаходимо

$$x_t = T(t-\sigma)\Phi c - \int_t^\sigma T(t-s)X_0^P F(s, x_s)ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Q F(s, x_s)ds. \tag{4.12}$$

Навпаки, із рівняння (4.12) можна одержати систему рівнянь (4.11).

Існування розв'язку рівняння (4.12) доведемо за допомогою методу послідовних наближень:

$$x_t^{(0)} = 0, \quad x_t^{(n+1)} = T(t-\sigma)\Phi c - \int\limits_t^\sigma T(t-s)X_0^P F(s, x_s^{(n)})ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Q F(s, x_s^{(n)})ds, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Індукцією доведемо, що справджується нерівність

$$|x_t^{(m)} - x_t^{(m-1)}| \leq K|c|_1(\nu\gamma)^{m-1}\exp[-\alpha(t-\sigma)], \tag{4.13}$$

де $m = 1, 2, ...$, $t \leq \sigma$,

$$\gamma = \frac{2K\tau_0}{1-\exp(-\beta\tau_0)}.$$

При $m = 1$ нерівність (4.13) випливає із (4.6).

Нехай нерівність (4.13) правильна при $m = n$. Тоді, враховуючи (4.6) та (4.7), одержимо

$$|x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}| \leq \int\limits_t^\sigma K\exp[(\beta-\alpha)(t-s)]p(s)|x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}|ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^t K\exp[-(\beta+\alpha)(t-s)]p(s)|x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}|ds \leq$$

$$\leq K|c|_1(\nu\gamma)^n\exp[-\alpha(t-\sigma)].$$

Отже, нерівність (4.13) правильна при $m = n+1$, тому вона справджується при всіх натуральних m. Послідовні наближення збігаються до розв'язку $x_t(\sigma, c)$ рівняння (4.12) за умови $\nu\gamma < 1$.

Вибираючи в рівності (4.12) замість c іншу сталу c', одержимо розв'язок $x_t(\sigma, c')$. Аналогічно нерівності (4.13) можна довести, що при $\nu\gamma < 0,5$ справджуються нерівності

$$|x_t^{(m)}(\sigma, c) - x_t^{(m)}(\sigma, c')| \leq 2K|c - c'|_1\exp[-\alpha(t-\sigma)], \quad m = 1, 2, ..., \quad t \leq \sigma.$$

Отже,

$$|x_t(\sigma,c)-x_t(\sigma,c')|\le 2K|c-c'|_1\exp[-\alpha(t-\sigma)],\quad t\le\sigma. \tag{4.14}$$

Підставляючи в (4.11) $t=\sigma$, одержимо зображення інтегрального многовиду

$$y(\sigma)=c,\quad g(\sigma,c)=\int\limits_{-\infty}^{\sigma}T(\sigma-s)X_0^QF(s,x_s(\sigma,c))ds.$$

Доведемо оцінку з (4.9). Маємо

$$|g(\sigma,c)-g(\sigma,c')|\le\int\limits_{-\infty}^{\sigma}K\exp[-(\alpha+\beta)(\sigma-s)]p(s)|x_s(\sigma,c)-x_s(\sigma,c')|ds\le$$

$$\le\frac{2K^2\nu\tau_0}{1-exp(-\beta\tau_0)}|c-c'|_1.$$

Якщо задовольняється умова (4.8), то виконується нерівність (4.9). Оцінка (4.10) випливає із (4.14), якщо покласти $c'=0$. Теорема доведена.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови теореми 4.1. Тоді існує функція $r(t,\zeta)\in\mathbb{R}^l$, що визначена на $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$, задовольняє умови*

$$r(t,0)=0,\quad |r(t,\zeta)-r(t,\zeta')|_1\le 0,5|\zeta-\zeta'|$$

і така, що множина

$$S^+=\{(t,\varphi)|t\in\mathbb{R},\varphi=\Phi y+\zeta,\zeta\in\mathbb{Q},y=r(t,\zeta),y\in\mathbb{R}^l\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (4.1). Для кожного розв'язку $x_t=\Phi r(t,W_t)+W_t$ рівняння (4.1), що лежить на S^+, виконується оцінка

$$|x_t|\le 2K|W_\sigma|\exp[-\alpha(t-\sigma)],\quad t\ge\sigma.$$

Доведення теореми 4.2 можна провести тим самим шляхом, що й доведення теореми 4.1.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови теореми 4.1. Тоді існує гомеоморфна заміна змінних, яка зводить систему (4.5) до вигляду*

$$\frac{du}{dt} = Bu + \Psi(0)F(t, \Phi u + g(t,u)),$$

$$v_t = T(t-\sigma)v_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_1(s, u(s), v_s)ds, \tag{4.15}$$

де $F_1(t,u,v)$ *— деяка неперервна за сукупністю аргументів функція, що визначається через функцію* F *і задовольняє умови*

$$F_1(t,u,0) = 0, \quad |F_1(t,u,v) - F_1(t,u,v')| \le 2Kp(t)|v - v'|. \tag{4.16}$$

Доведення. Позначимо через $U(t,u)$ розв'язок першого рівняння системи (4.15) з початковою умовою $U(\sigma, u) = u$. У системі (4.5) зробимо заміну змінних $\xi = y - u$, $v_t = z_t - g(t,u)$, тоді

$$\frac{d\xi}{dt} = B\xi + F_3(t, w_t, P_t), \quad v_t = T(t-\sigma)v_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_2(s, w_s, P_s)ds, \tag{4.17}$$

де

$$w_t = \Phi\xi(t) + v_t, \quad P_t = \Phi U(t,u) + g(t, U(t,u)),$$

$$F_2(t,\varphi,\chi) = F(t, \varphi + \chi) - F(t,\chi), \quad F_3(t,\varphi,\chi) = \Psi(0)F_2(t,\varphi,\chi).$$

Розглянемо також систему інтегральних рівнянь

$$\xi(t) = -\int\limits_t^\infty \exp[B(t-s)]F_3(s, w_s, P_s)ds,$$

$$v_t = T(t-\sigma)v_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_2(s, w_s, P_s)ds. \tag{4.18}$$

Домноживши першу рівність з системи (4.18) на Φ і додавши ці рівності, одержимо

$$w_t = T(t-\sigma)v_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_2(s, w_s, P_s)ds - \int\limits_t^\infty T(t-s)X_0^Q F_2(s, w_s, P_s)ds. \tag{4.19}$$

Навпаки, із рівняння (4.19) можна одержати систему рівнянь (4.18).

Існування розв'язку рівняння (4.19) доведемо за допомогою методу послідовних наближень:

$$w_t^{(0)} = 0, \quad w_t^{(n+1)} = T(t-\sigma)v_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_2(s, w_s^{(n)}, P_s)ds -$$

$$- \int\limits_t^\infty T(t-s)X_0^P F_2(s, w_s^{(n)}, P_s)ds, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Індукцією доведемо, що справджується нерівність

$$|w_t^{(m+1)} - w_t^{(m)}| \leq K2^{1-m}|v_\sigma| \exp[-\alpha(t-\sigma)], \tag{4.20}$$

де $m = 1, 2, ...,$ $t \geq \sigma$.

При $m = 1$ нерівність (4.20) випливає із (4.6).

Нехай нерівність (4.20) справджується при $m = n$. Тоді, враховуючи (4.6) і (4.7), одержимо

$$|w_t^{(n+1)} - w_t^{(n)}| \leq \int\limits_\sigma^t |T(t-s)X_0^Q|p(s)|w_s^{(n)} - w_s^{(n-1)}|ds +$$

$$+ \int\limits_t^\infty |T(t-s)X_0^P|p(s)|w_s^{(n)} - w_s^{(n-1)}|ds \leq \mu K 2^{1-n}|v_\sigma| \exp[-\alpha(t-\sigma)],$$

де $\mu = 2\nu K\tau_0/[1 - \exp(-\beta\tau_0]$. Виберемо ν так, щоб виконувалась умова $\mu < 0,5$. Тоді нерівність (4.20) справджується при $m = n+1$, отже, вона правильна при всіх натуральних m.

Із (4.20) випливає, що послідовність $\{w_t^{(m)}\}$ збігається рівномірно при $0 \leq t < \infty$ до функції $w_t = w_t(u, v_\sigma)-$ розв'язку рівняння (4.19). Вибираючи в рівності (4.19) замість v_σ іншу сталу v'_σ, одержимо розв'язок $w_t(u, v'_\sigma)$. При $\mu < 0,5$ справджується оцінка

$$|w_t(u, v_\sigma) - w_t(u, v'_\sigma)| \leq 2K|v_\sigma - v'_\sigma| \exp[-\alpha(t-\sigma)]. \tag{4.21}$$

Вважаючи в (4.18) $t = \sigma$, позначимо

$$j(\sigma, u, v_\sigma) = -\int_{\sigma}^{\infty} \exp[B(\sigma - s)] F_3(s, w_s(u, v_\sigma), P_s) ds.$$

Функція $j(\sigma, u, v_\sigma)$ неперервна за сукупністю аргументів як рівномірна границя послідовності неперервних функцій. Крім того, функція $j(\sigma, u, v_\sigma)$ задовольняє умову $j(\sigma, u, 0) = 0$, а також умову Ліпшиця за третім аргументом

$$|j(\sigma, u, v_\sigma) - j(\sigma, u, v'_\sigma)|_1 \le 0,5|v_\sigma - v'_\sigma|. \tag{4.22}$$

Позначимо

$$V(t, u, v_\sigma) = T(t - \sigma)v_\sigma + \int_{\sigma}^{t} T(t - s) X_0^Q F_2(s, w_s(u, v_\sigma), P_s) ds.$$

Функція $w_s(u, v_\sigma)$ має півгрупову властивість: $w_s(U(t, u), V(t, u, v_\sigma)) = w_{s+t}(u, v_\sigma)$, тому

$$j(t, U(t, u), V(t, u, v_\sigma)) = -\int_{t}^{\infty} \exp[B(t - s)] F_3(s, w_s(u, v_\sigma), P_s) ds.$$

Враховуючи (4.17), одержимо, що

$$(U(t, u) + j(t, U(t, u), V(t, u, v_\sigma)), V(t, u, v_\sigma) + g(t, U(t, u)))$$

буде розв'язком системи (4.5) з початковою умовою

$$(u + j(\sigma, u, v_\sigma), v_\sigma + g(\sigma, u)).$$

Розглянемо відображення

$$J_\sigma(u, v_\sigma) = (u + j(\sigma, u, v_\sigma), v_\sigma + g(\sigma, u)).$$

Функція J_σ відображає розв'язок системи (4.15) в розв'язок системи (4.5), якщо покласти

$$F_1(\sigma, u, v) = F_2(\sigma, w_\sigma(u, v), \Phi u + g(\sigma, u)), \quad w_\sigma(u, v) = v + \Phi j(\sigma, u, v).$$

Тоді функція $F_1(\sigma, u, v)$ задовольняє умови (4.16).

Як доведено в [126], сюр'єктивність відображення J_σ випливає із теореми Брауера.

Доведемо взаємну однозначність відображення J_σ. Припустимо, що J_σ не є однозначним, тобто існують u_1, u_2, v_1, v_2, $u_1 \neq u_2$, для яких

$$u_1 + j(\sigma, u_1, v_1) = u_2 + j(\sigma, u_2, v_2), \quad v_1 + g(\sigma, u_1) = v_2 + g(\sigma, u_2).$$

Тоді

$$U(t, u_1) + j(t, U(t, u_1), V(t, u_1, v_1)) = U(t, u_2) + j(t, U(t, u_2), V(t, u_2, v_2)),$$

отже,

$$e^{\alpha t}[U(t, u_1) - U(t, u_2)] = e^{\alpha t}[j(t, U(t, u_2), V(t, u_2, v_2)) -$$
$$-j(t, U(t, u_1), V(t, u_1, v_1))]. \tag{4.23}$$

Згідно з нерівностями (4.21) та (4.22) права частина рівності (4.23) обмежена при $t \in [0, \infty)$. Враховуючи (4.6) та (4.7), можна довести, що

$$|U(t, u_1) - U(t, u_2)|_1 \geq K^{-1}|u_1 - u_2|_1 \exp[(\beta - \alpha)(t - \sigma) - \chi \int\limits_\sigma^t p(s)ds],$$

де $t \geq \sigma$, $\chi = K(\Phi + 0,5)$. Отже, при $\nu\chi < \beta$ ліва частина рівності (4.23) необмежена на півосі $[0, \infty)]$. Суперечність доводить, що наше припущення неправильне. Тому $u_1 = u_2$, отже, $v_1 = v_2$.

Позначимо $J_1(u) = u + j(t, u, v)$, де t та v фіксовані, і розглянемо обернене відображення J_1^{-1}. Для доведення неперервності J_1^{-1} розглянемо точку $u \in \mathbb{R}^l$. Їй відповідає $J_1^{-1}(u) \in \mathbb{R}^l$. Візьмемо замкнуту кулю B_l з центром у точці $J_1^{-1}(u)$. Оскільки B_l- компакт, то J_1- гомеоморфізм на B_l [34, с. 191], а це значить, що J_1^{-1} неперервне в точці u. Оскільки $u-$ довільна точка $\mathbb{R}^l$, то J_1^{-1} неперервне на $\mathbb{R}^l$. Отже, відображення J^{-1} неперервне. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Якщо одну систему диференціальних рівнянь за допомогою гомеоморфної заміни можна звести до іншої, то такі системи називаються динамічно еквівалентними [59].*

Зауваження 2. *У цьому підрозділі використовується методика з праць [15, 59, 104, 125, 126], але на відміну від [59, 126] на функцію F накладаються більш загальні умови.*

4.2. Розщеплення лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу

Узагальнимо результати роботи [127] на випадок рівнянь нейтрального типу.

Розглянемо лінійні диференціально-функціональні рівняння нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}[D(x_t) - \varepsilon G(t, x_t)] = L(x_t) + \varepsilon F(t, x_t), \tag{4.24}$$

$$\frac{d}{dt}[D(u_t)] = L(u_t), \tag{4.25}$$

де x_t – елемент простору $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$, заданий функцією $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$; D: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; G: $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; L: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; F: $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; оператори D, L, G, F лінійні відносно x_t; оператор F неперервний відносно t, а оператор G неперервно диференційовний відносно t. Згідно з теоремою Рісса оператор $D(\varphi)$ можна зобразити за допомогою інтеграла Стільтьєса

$$D(\varphi) = \varphi(0) - \int_{-\Delta}^{0} [d\mu(\theta)]\varphi(\theta),$$

де $\mu(\theta)$ – матриця-функція обмеженої варіації.

Припустимо, що функція $\mu(\theta)$ не містить снгулярної компоненти і повна варіація $V_{-s}^{0}[\mu] \to 0$ при $s \to 0$.

Позначимо

$$b = \sup\left\{ \operatorname{Re}\lambda \,:\, \det\left(E - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(\theta)\right) = 0 \right\}.$$

Тоді в півплощині $\operatorname{Re}\lambda > \alpha > b$ міститься скінченне число (m) коренів характеристичного рівняння, що відповідає рівнянню (4.25), а інші корені лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda < \alpha$. Позначимо через $\mathbb{P}$ власний підпростір в $\mathbb{C}$, породжений розв'язками рівняння (4.25), що відповідають кореням у півплощині $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$. Розкладемо простір $\mathbb{C}$ в пряму суму $\mathbb{C} = \mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$. Нехай $\Phi = \Phi(\theta)$ – базис в $\mathbb{P}$. Розглядаючи спряжене з (4.25) рівняння, можна аналогічно визначити базис $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \le \theta \le \Delta$. Тоді кожний елемент $x_t \in C$ можна зобразити у вигляді $x_t = \Phi y(t) + z_t$, де $y(t) = (\Psi, x_t)$, $z_t = x_t - \Phi y(t)$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $z_t \in \mathbb{Q}$, (Ψ, x_t) – деякий білінійний функціонал [132, 154].

Рівняння (4.24) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{d}{dt}[y - \varepsilon\Psi(0)G(t, x_t)] = By + \varepsilon\Psi(0)F(t, x_t),$$

$$z_t = T(t-\sigma)z_\sigma + \varepsilon \int\limits_{\sigma}^{t} T(t-s)X_0^Q \left[F(s, x_s) + \frac{d}{ds}G(s, x_s)\right] ds, \qquad (4.26)$$

де $T(t)\varphi = u_t(\varphi)$, X_0^Q – проекція на підпростір $\mathbb{Q}$ функції $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \le \theta < 0$; $X_0(0) = E$; B – стала матриця, власні значення якої лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$.

Виконуються нерівності [132, 154, 157]

$$|T(t)\varphi| \le K_1 \exp[(\alpha - \beta_1)t]|\varphi|, \quad \varphi \in \mathbb{Q},$$

$$|T(t)X_0^Q| + \int\limits_{0}^{1} |d_s T(t-s)X_0^Q| \le K_1 \exp[(\alpha - \beta_1)t], \qquad (4.27)$$

де $t \ge 0$, $K_1 > 0$.

Згідно з припущенням відносно власних значень матриці B правильна також оцінка

$$|\exp(Bt)| \le K\exp[(\alpha+\beta)t],$$

де $t \le 0$, $K > 0$.

Нехай $|G(t,\varphi)| \le \nu|\varphi|$, $|F(t,\varphi)| \le \nu|\varphi|$, $\nu > 0$. У статті [40] доведено, що при досить малому ε існують інтегральні многовиди системи (4.26), які можна подати у вигляді $z_t = g(t,\varepsilon)y$, $y = r(t, z_t, \varepsilon)$, причому правильні оцінки $|g(t,\varepsilon)| \le 0,5$, $|r(t,\varphi,\varepsilon)| \le 0,5|\varphi|$.

Функцію $g(t,\varepsilon)$ можна зобразити у вигляді границі послідовності

$$g_n(t,\varepsilon) = \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{t} T(t-s)X_0^Q\left[F(s,x_s^{(n)}(t)) + \frac{d}{ds}G(s,x_s^{(n)}(t))\right]ds,$$

де

$$x_s^0 = 0,\ x_s^{(n)} = \Phi e^{B(s-t)} - \varepsilon\Phi\int\limits_{s}^{t} e^{B(s-\tau)}\Psi(0)\Big[F(\tau,x_\tau^{(n-1)}) +$$

$$+\frac{d}{d\tau}G(\tau,x_\tau^{(n-1)})\Big]d\tau + \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{s} T(s-\tau)X_0^Q\Big[F(\tau,x_\tau^{(n-1)}) +$$

$$+\frac{d}{d\tau}G(\tau,x_\tau^{(n-1)})\Big]d\tau, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Звідси випливає, що функцію $g_n(t,\varepsilon)$ можна подати у вигляді

$$g_n(t,\varepsilon) = \varepsilon h_1(t) + \varepsilon^2 h_2(t) + \ldots + \varepsilon^n h_n(t),$$

де функції $h_1(t)$, $h_2(t)$, ..., $h_n(t)$ виражаються через функції F та G. Наприклад,

$$h_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} T(t-s)X_0^Q\left[F\left(s,\Phi e^{B(s-t)}\right) + \frac{d}{ds}G\left(s,\Phi e^{B(s-t)}\right)\right]ds.$$

Із теореми 5 роботи [40] випливає оцінка

$$|g(t,\varepsilon) - g_n(t,\varepsilon)| \le L\varepsilon^{n+1},$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$; L – деяка додатна стала, що не залежить від ε.

Нехай функції $F(t, \varphi)$, $G(t, \varphi)$ є квазіперіодичними відносно t і розкладаються в ряди

$$F(t, \varphi) = \sum_k F_k(\varphi) e^{i(k,w)t}, \; G(t, \varphi) = \sum_k G_k(\varphi) e^{i(k,w)t},$$

де $w = (w_1, \ldots, w_j)$, $k = (k_1, \ldots, k_j)$, $F_k(\varphi)$, $G_k(\varphi)$ – лінійні неперервні функціонали. Тоді визначення функції $g_n(t, \varepsilon)$ зводиться до обчислення інтеграла

$$\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s) X_0^Q e^{\delta s} ds,$$

де $\delta = i(k, w) + \lambda$, λ – власне значення матриці B.

Теорема 4.4. *Функція $\xi(\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$, належить $\mathbb{Q} \cap D(A)$ і виконується рівність*

$$\delta\xi - A\xi = X_0^Q, \tag{4.28}$$

де A – твірний оператор півгрупи $\{T(t), t \ge 0\}$ з областю визначення $D(A)$.

Доведення. Справді,

$$(\Psi, \xi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\Psi, T(-s) X_0^Q\right) e^{\delta s} ds = 0,$$

тому $\xi \in \mathbb{Q}$. Згідно з означенням твірного оператора A півгрупи $T(t)$ маємо $A\varphi = \lim\limits_{t \to 0} A_t \varphi$, де

$$A_t = \frac{T(t) - I}{t}.$$

При $t > 0$ одержимо

$$A_t \xi = \frac{1}{t} \int\limits_{-\infty}^{0} T(t-s) X_0^Q e^{\delta s} ds - \frac{1}{t} \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s) X_0^Q e^{\delta s} ds =$$

$$= \frac{e^{\delta t} - 1}{t} \int\limits_{-\infty}^{0} T(-s) X_0^Q e^{\delta s} ds - \frac{e^{\delta t}}{t} \int\limits_{-t}^{0} T(-s) X_0^Q e^{\delta s} ds,$$

так що $A_t\xi \to \delta\xi - X_0^Q$ при $t \to 0$. Отже, $\xi \in D(A)$ та $A\xi = \delta\xi - X_0^Q$. Звідси випливає рівність (4.28). Теорема доведена.

Можна показати, що розв'язування рівняння (4.28) зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо систему

$$\frac{d}{dt}[v - \varepsilon\Psi(0)G_1(t,\varepsilon)v] = Bv + \varepsilon\Psi(0)F_1(t,\varepsilon)v,$$

$$w_t = T(t-\sigma)w_\sigma + \varepsilon\int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q\left[F_2(s,w_s,\varepsilon) + \frac{d}{ds}G_2(s,w_s,\varepsilon)\right]ds, \quad (4.29)$$

де $v \in \mathbb{R}^m$, $w_t \in Q$,

$$G_1(t,\varepsilon)v = G(t,\Phi v + g(t,\varepsilon)v), \quad F_1(t,\varepsilon)v = F(t,\Phi v + g(t,\varepsilon)v),$$

$$G_2(t,w_t,\varepsilon) = G(t,\Phi r(t,w_t,\varepsilon) + w_t), \quad F_2(t,w_t,\varepsilon) = F(t,\Phi r(t,w_t,\varepsilon) + w_t).$$

Функції $r(t,w_t,\varepsilon)$, $g(t,\varepsilon)$ задовольняють рівняння

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}[r(t,w_t,\varepsilon) - \varepsilon\Psi(0)G_2(t,w_t,\varepsilon)] = Br(t,w_t,\varepsilon)+\\ +\varepsilon\Psi(0)F_2(t,w_t,\varepsilon), \quad g(t,\varepsilon)v(t) = T(t-\sigma)g(\sigma,\varepsilon)v(\sigma)+ \qquad (4.30)\\ +\varepsilon\int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q\left[F_1(s,\varepsilon)v(s) + \frac{d}{ds}(G_1(s,\varepsilon)v(s))\right]ds.\end{gathered}$$

Додаючи рівності (4.29), (4.30) і виконуючи заміну

$$y = v + r(t,w_t,\varepsilon), \quad z_t = w_t + g(t,\varepsilon)v, \quad (4.31)$$

одержимо систему (4.26).

Отже, правильне наступне твердження.

Теорема 4.5. *За допомогою заміни (4.31) система (4.29) зводиться до вигляду (4.26).*

Згідно з лінійністю $r(t,\varphi,\varepsilon)$ відносно φ систему (4.31) можна однозначно розв'язати відносно v і w_t. Отже, визначаючи із (4.31) v та w_t, знаходимо заміну, яка розщеплює систему (4.26) на два незалежних рівняння (4.29).

Друге рівняння системи (4.29) перепишемо у вигляді

$$w_t = T(t-\sigma)\left[w_\sigma - \varepsilon X_0^Q G_2(\sigma, w_\sigma, \varepsilon)\right] + \varepsilon X_0^Q G(t, w_t, \varepsilon) +$$

$$+\varepsilon \int\limits_\sigma^t T(t-s) X_0^Q F_2(s, w_s, \varepsilon) ds - \varepsilon \int\limits_\sigma^t d_s \left[T(t-s) X_0^Q\right] G_(s, w_s, \varepsilon).$$

Оцінимо розв'язок цього рівняння, використовуючи метод послідовних наближень

$$w_t^{(0)} = 0,\ w_t^{(n+1)} = T(t-\sigma)\left[c - \varepsilon X_0^Q G_2(\sigma, c, \varepsilon)\right] + \varepsilon X_0^Q G_2(t, w_t^{(n)}, \varepsilon) +$$

$$+\varepsilon \int\limits_\sigma^t T(t-s) X_0^Q F_2(s, w_s^{(n)}, \varepsilon) ds - \varepsilon \int\limits_\sigma^t d_s \left[T(t-s) X_0^Q\right] G_2(s, w_s^{(n)}, \varepsilon),$$

де $c = w_\sigma$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Функції $G_2(t,\varphi,\varepsilon)$ та $F_2(t,\varphi,\varepsilon)$ задовольняють за змінною φ умову Ліпшиця із сталою $\nu_1 = \nu(0,5|\Phi|+1)$. Індукцією доведемо, що правильна нерівність

$$|w_t^{(q)} - w_t^{(q-1)}| \le K_1(1 + \varepsilon |X_0^Q| \nu_1)(\varepsilon\gamma)^{q-1} |c| \exp[\alpha(t-\sigma)], \tag{4.32}$$

де

$$\gamma = \nu_1 \left(|X_0^Q| + \frac{K_1}{\beta_1} + \frac{K_1}{\exp(\beta_1 - 1)} \right), \quad q = 1, 2, \ldots, \quad t \ge \sigma.$$

При $q = 1$ нерівність (4.32) випливає із (4.27).

Нехай нерівність (4.32) вірна при $q = n$. Тоді, враховуючи (4.27), одержимо

$$|w_t^{(n+1)} - w_t^{(n)}| \le K_1(1 + \varepsilon |X_0^Q| \nu_1)(\varepsilon\gamma)^{n} |c| \exp[\alpha(t-\sigma)].$$

Тому нерівність (4.32) правильна при $q = n+1$, отже, вона вірна при всіх натуральних q.

Якщо просумувати нерівності (4.32) відносно q, то при $\varepsilon\gamma < 0,5$ одержимо оцінку

$$|w_t| \leq 2K_1(1 + \varepsilon|X_0^Q|\nu_1)|c| \exp[\alpha(t - \sigma)], \quad t \geq \sigma.$$

Аналогічно, використовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана, можна одержати оцінку

$$|v(t)| \leq M_1|v(\sigma)| \exp[(\alpha + \beta - \varepsilon M)(t - \sigma)],$$

де

$$t \leq \sigma,\ M = \frac{K|\Psi(0)|\nu_2(1 + |B|)}{1 - \varepsilon|\Psi(0)|\nu_2},\ M_1 = \frac{K(1 + \varepsilon|\Psi(0)|\nu_2)}{1 - \varepsilon|\Psi(0)|\nu_2},\ \nu_2 = \nu(|\Phi| + 0,5).$$

Розглянемо тепер критичний випадок: характеристичне рівняння, що відповідає рівнянню (4.25), має m коренів на уявній осі (із врахуванням їх кратності), а решта коренів мають від'ємні дійсні частини.

У цьому випадку $\alpha < 0$. Із теореми 4.5 випливає, що якщо нульовий розв'язок рівняння

$$\frac{d}{dt}[v - \varepsilon\Psi(0)G_1(t, \varepsilon)v] = Bv + \varepsilon\Psi(0)F_1(t, \varepsilon)v \qquad (4.33)$$

стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок рівняння (4.24) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.

Для дослідження стійкості рівняння (4.33) можна розв'язати відносно v і застосувати метод Штокало [144] або метод прискореної збіжності [82]. Якщо власні значення матриці B мають прості елементарні дільники, то в рівнянні (4.33) можна зробити заміну $v = \exp(Bt)u$ і одержати систему в стандартній формі. Для дослідження стійкості розв'язків такої системи в багатьох випадках доцільно застосовувати метод усереднення.

Зауваження 1. Теореми 4.4 і 4.5 дозволяють обґрунтувати алгоритм дослідження стійкості розв'язків лінійних майже періодичних рівнянь з післядією. Аналогічний метод запропоновано в [64].

4.3. Розщеплення лінійних сингулярно збурених систем нейтрального типу

Розглянемо систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F(t, x_t),$$
$$\varepsilon \frac{d}{dt}[C(t)x(t) + D(t, y_t)] = B_1(t)x(t) + G_1(t, y_t), \tag{4.34}$$

де ε – малий додатний параметр, x – m-вимірний вектор, y – n-вимірний вектор; $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$; $F(t,\varphi)$, $G_1(t,\varphi)$, $D(t,\varphi)$ – лінійні неперервні відносно φ оператори; матриці $A(t)$, $B_1(t)$ і оператори $F(t,\varphi)$, $G_1(t,\varphi)$, $D(t,\varphi)$ неперервні відносно t. Згідно з теоремою Рісса оператори $D(t,\varphi)$, $G_1(t,\varphi)$ можна зобразити за допомогою інтеграла Стільтьєса

$$D(t,\varphi) = \varphi(0) - \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\mu(t,\theta)]\varphi(\theta), \; G_1(t,\varphi) = \int\limits_{-\Delta}^{0} [d\eta(t,\theta)]\varphi(\theta),$$

де $\mu(t,\theta)$, $\eta(t,\theta)$ – матриці-функції обмеженої варіації по θ.

Припустимо, що функція $\mu(t,\theta)$ не містить сингулярної компоненти і повна варіація відносно θ $V_{-s}^{0}[\mu] \to 0$ при $s \to 0$ рівномірно відносно t. Позначимо

$$b(t) = \sup\left\{ \operatorname{Re}\lambda(t) : \; \det\left(E - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(t,\theta) \right) = 0 \right\}.$$

Нехай $b(t) < b_0 < 0$.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1) норми матриць A, B_1, C, D, C', $B_1 - \varepsilon C' - \varepsilon CA$ і операторів F, G_1, D, $\partial D/\partial t$ рівномірно обмежені при $t \in \mathbb{R}$ деякою додатною сталою M;

2) всі корені характеристичного рівняння

$$\det\Lambda(\lambda) = 0, \; \Lambda(\lambda) = \lambda\left[E - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(t,\theta) \right] - \int\limits_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(t,\theta),$$

лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda(t) \le -2\alpha < 0$.

Шляхом диференціювання другого рівняння систему (4.34) перетворимо до вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t),$$
$$\varepsilon\frac{d}{dt}D(t, y_t) = B(t,\varepsilon)x(t) + G(t, y_t, \varepsilon), \tag{4.35}$$

де

$$B(t,\varepsilon) = B_1(t) - \varepsilon C'(t) - \varepsilon C(t)A(t), \quad G(t,\varphi,\varepsilon) = G_1(t,\varphi) - \varepsilon C(t)F(t,\varphi).$$

Система (4.35) еквівалентна такій системі рівнянь:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t),$$
$$y_t = T(t,\sigma)y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0B(s,\varepsilon)x(s)ds, \tag{4.36}$$

де $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$; $X_0(0) = E$; $T(t,s)$ – оператор зсуву за розв'язками рівняння

$$\varepsilon\frac{d}{dt}D(t, y_t) = G(t, y_t, \varepsilon).$$

Лема 4.1. *Нехай виконуються умови 1 та 2. Тоді для оператора $T(t,s)$ правильна оцінка*

$$|T(t,s)\varphi| \le K|\varphi|\exp\left[-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)\right], \quad t \ge s.$$

Доведення леми можна провести аналогічно статті [138].

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови 1 та 2. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$ що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (4.36), який можна зобразити у вигляді $y_t = P(t,\varepsilon)x$, де $P(t,\varepsilon)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ – рівномірно обмежений при $t \in \mathbb{R}$ оператор.*

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$x(t) = H(t,\sigma) - \int\limits_t^\sigma H(t,s)F(s, y_s)ds,$$

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s) X_0 B(s,\varepsilon) x(s) ds, \tag{4.37}$$

де $H(t,s)$ – фундаментальна матриця рівняння $dx/dt = A(t)x$.

Існування розв'язку системи (4.37) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$y_t^{(0)} = 0,\ x_n(t) = H(t,\sigma) - \int\limits_{t}^{\sigma} H(t,\sigma) F(s, y_s^{(n)}) dx,$$

$$y_t^{(n+1)} = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s) X_0 B(s,\varepsilon) x_n(s) ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Правильна нерівність

$$|H(t,s)| \le \exp[-M(t-s)], \quad t \le s.$$

Доведемо, що справджується оцінка

$$|y_t^{(q)} - y_t^{(q-1)}| \le \frac{N}{2^q} \exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right], \tag{4.38}$$

де

$$q = 1, 2, \ldots,\ N = \frac{4KM}{\alpha},\ \varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2M}, \frac{\alpha^2}{32KM^2}\right),\ t \le \sigma.$$

При $q = 1$ нерівність (4.38) виконується. Нехай нерівність (4.38) виконується при $q = n$. Тоді одержимо

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le \frac{2MN\varepsilon}{2^n(\alpha - \varepsilon M)} \exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Звідси знаходимо

$$|y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)}| \le \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-t)\right] \frac{2KM^2N}{(\alpha - \varepsilon M)2^n} \exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - s)\right] ds =$$

$$= \frac{4\varepsilon KM^2N}{(\alpha - \varepsilon M)^2 2^n} \exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right] \le \frac{32KM^2\varepsilon N}{\alpha^2 2^{n+1}} \exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Із правильності нерівності (4.38) при $q = n$ випливає її вірність при $q = n+1$. Отже, нерівність правильна при всіх натуральних q. Із (4.38) випливає, що послідовність $(x_n(t), y_t^{(n)})$ збігається до деякої функції $(x(t), y_t)$, яка є розв'язком системи (4.37).

Підставляючи в (4.37) $t = \sigma$, одержимо зображення інтегрального многовиду

$$P(\sigma, \varepsilon) = y_\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma, s) X_0 B(s, \varepsilon) x(s) ds.$$

Якщо просумувати нерівності (4.38) відносно q і підставити $t = \sigma$, то одержимо рівномірну оцінку $|P(\sigma, \varepsilon)| \leq N$.

Теорема 4.6 доведена.

Зауваження 1. Аналогічно статті [39] можна показати, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P(t, \varepsilon) = G(t, E, 0)^{-1} B(t, 0).$$

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови 1 та 2. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_1 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ існує інтегральний многовид системи (4.36), який можна зобразити у вигляді $x = Q(t, y_t, \varepsilon)$, де $Q(t, \varphi, \varepsilon)$ – лінійний відносно φ оператор. Виконується нерівність*

$$|Q(t, \varphi, \varepsilon)| \leq \varepsilon N |\varphi|,$$

де $N > 0$.

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$x(t) = -\int\limits_{t}^{\infty} H(t, s) F(s, y_s) ds,$$

$$y_t = T(t, \sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\sigma}^{t} T(t, s) X_0 B(s, \varepsilon) x(s) ds. \tag{4.39}$$

Існування розв'язку системи (4.39) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$x_0(t) = 0,\ x_{n+1}(t) = -\int\limits_t^\infty H(t,s)F(s, y_s^{(n)})ds,$$

$$y_t^{(n)} = T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0B(s,\varepsilon)x_n(s)ds.$$

Доведемо, що справджується оцінка

$$|x_q(t) - x_{q-1}(t)| \le \frac{\varepsilon N|\varphi|}{2^q}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right], \tag{4.40}$$

де

$$q = 1, 2, \ldots,\ N = \frac{4KM}{\alpha},\ \varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2M}, \frac{\alpha^2}{32KM^2}\right),\ t \ge \sigma.$$

При $q = 1$ нерівність (4.40) виконується.

Нехай нерівність (4.40) виконується при $q = n$. Тоді одержимо

$$|y_t^{(q)} - y_t^{(q-1)}| \le \frac{2\varepsilon KMN|\varphi|}{(\alpha - \varepsilon M)2^n}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Звідси знаходимо

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \le \int\limits_t^\infty \exp[M(s-t)]\frac{2\varepsilon KM^2N|\varphi|}{(\alpha-\varepsilon M)2^n}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - s)\right]ds =$$

$$= \frac{4\varepsilon^2KM^2N|\varphi|}{(\alpha-\varepsilon M)^2 2^n}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right] \le \frac{32KM^2\varepsilon^2N}{\alpha^2 2^{n+1}}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon M}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Нерівність (4.40) правильна при $q = n+1$, отже, вона вірна при всіх натуральних q. Із (4.40) випливає, що послідовність $(x_n(t), y_t^{(n)})$ рівномірно збігається до функції $(x(t), y_t)$, яка є розв'язком системи (4.39).

Підставляючи в (4.39) $t = \sigma$, одержимо зображення інтегрального многовиду

$$Q(\sigma,\varphi,\varepsilon) = x(\sigma) = -\int\limits_\sigma^\infty H(\sigma,s)F(s,y_s)ds.$$

Додаючи нерівності (4.40) і підставляючи $t = \sigma$, знаходимо $|Q(\sigma,\varphi,\varepsilon)| \leq \varepsilon N|\varphi|$.

Теорема 4.7 доведена.

Розглянемо систему

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v + F(t, P(t,\varepsilon)v),$$

$$w_t = T(t,\sigma)w_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0B(s,\varepsilon)Q(s,w_s,\varepsilon)ds. \tag{4.41}$$

Функції $Q(t,w_t,\varepsilon)$, $P(t,\varepsilon)v$ задовольняють рівняння

$$\frac{dQ(t,w_t,\varepsilon)}{dt} = A(t)Q(t,w_t,\varepsilon) + F(t,w_t),$$

$$P(t,\varepsilon)v(t) = T(t,\sigma)P(\sigma,\varepsilon)v(\sigma) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0B(s,\varepsilon)v(s)ds. \tag{4.42}$$

В результаті заміни

$$x = v + Q(t,w_t,\varepsilon), \;\; y_t = w_t + P(t,\varepsilon)v \tag{4.43}$$

і додавання рівностей (4.41), (4.42) одержимо систему (4.36).

Отже, правильне наступне твердження.

Теорема 4.8. *За допомогою заміни (4.43) система (4.41) зводиться до вигляду (4.36).*

Для досить малого ε систему (4.43) можна розв'язати відносно v та w_t і тим самим визначити заміну, яка розщеплює систему (4.36) на два незалежних рівняння (4.41).

Із другого рівняння системи (4.41) знаходимо

$$|w_t| \leq K\exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(\sigma - t)\right]|w_\sigma| + \int\limits_\sigma^t K\exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-t)\right]MN|w_s|ds.$$

Звідси, згідно з лемою Гронуолла-Беллмана, одержимо

$$|w_t| \le K|w_\sigma| \exp\left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} - KMN\right)(\sigma - t)\right], \ t \ge \sigma$$

Тому стійкість нульового розв'язку системи (4.34) рівносильна стійкості нульового розв'язку першого рівняння системи (4.41).

4.4. Розщеплення лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t), \quad \varepsilon\frac{dy}{dt} = D(t)x(t) + G(t, y_t), \quad t \ne t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = B_i x + \varepsilon H_i(y_{t_i}), \quad \Delta y|_{t=t_i} = C_i x + N_i(y_{t_i}), \qquad (4.44)$$

де ε – малий додатний параметр; x – m-вимірний вектор, y_t – елемент простору $PC = PC[-\varepsilon\tau, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\tau \le \theta \le 0$; $PC[-\varepsilon\tau, 0]$ – простір функцій $\varphi(t)$, неперервних на відрізку $[-\varepsilon\tau, 0]$ за винятком скінченного числа точок розриву першого роду, в яких $\varphi(t)$ неперервна зліва; $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $N_i(\varphi)$ – лінійні відносно φ функціонали; матриці $A(t)$, $D(t)$ і функціонали $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$ неперервні відносно t; матриці $E + B_i$ невироджені; через t_i , $i \in \mathbb{Z}$, позначено моменти імпульсної дії.

Припустимо, що виконуються умови:

1) існує додатне число δ, при якому $0 < \delta < t_{i+1} - t_i$, $i \in \mathbb{Z}$;

2) норми матриць $A(t)$, $B(t)$, C_i, $(E+B_i)^{-1}$ та функціоналів $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $N_i(\varphi)$ рівномірно обмежені при $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$ деякою додатною сталою $M > 1$;

3) для оператора $T(t,s)$ зсуву за розв'язками системи

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(t, y_t), \quad t \ne t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = N_i(y_{t_i})$$

виконуються нерівності

$$|T(t,s)\varphi| \le K|\varphi| \exp\left[-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)\right], \quad |T(t,s)X_0| \le K \exp\left[-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)\right],$$

де $K > 0$, $t \ge s$, $\alpha > 0$, $\varphi \in PC$.

Система (4.44) еквівалентна системі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t), t \ne t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x + \varepsilon H_i(y_{t_i}),$$

$$y_t = T(t,\sigma)y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0 D(s)x(s)dx + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i x(t_i), \quad (4.45)$$

де $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\tau \le \theta < 0$, $X_0(0) = E$.

Теорема 4.9. *Нехай відносно системи (4.44) виконуються умови 1 – 3. Тоді можна вказати таке* $\varepsilon > 0$, *що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *існує інтегральний многовид системи (4.45), який можна зобразити у вигляді* $y_t = P(t,\varepsilon)x$, *де* $P(t,\varepsilon)\colon \mathbb{R}^m \to PC$ *– рівномірно обмежений при* $t \in \mathbb{R}$ *оператор.*

Доведення.

Розглянемо систему рівнянь

$$x(t) = L(t,\sigma) - \int\limits_t^\sigma L(t,s)F(s, y-s)ds - \varepsilon \sum_{t<t_i<\sigma} L(t,t_i)H_i(y_{t_i}),$$

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t T(t,s)X_0 D(s)x(s)ds + \sum_{-\infty<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i x(t_i), \quad (4.46)$$

де $L(t,s)$ – фундаментальна матриця системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \ne t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x.$$

Існування розв'язку системи (4.46) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$y_t^{(0)} = 0, x_n(t) = L(t,\sigma) - \int\limits_t^\sigma L(t,s)F(s, y_s^{(n)})ds - \varepsilon \sum_{t<t_i<\sigma} L(t,t_i)H_i(y_{t_i}^{(n)}),$$

$$y_t^{(n+1)} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} T(t,s)X_0D(s)x_n(s)ds + \sum_{-\infty<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_ix_n(t_i), n = 0,1,\ldots.$$

Справджується нерівність

$$|L(t,s)| \leq \exp[\gamma(s-t)], \gamma = M + \frac{\ln M}{\delta}, t \leq s.$$

Доведемо, що правильна оцінка

$$|y_t^{(q)} - y_t^{(q-1)}| \leq \frac{K_1}{2^q}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right], \tag{4.47}$$

де

$$q = 1,2,\ldots, \quad K_1 = \frac{4KM}{\alpha} + \frac{2KM}{1-\exp(-\gamma\delta)},$$

$$\varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2\gamma}, \frac{1}{2KM^2(\frac{4}{\alpha} + \frac{1}{1-\exp(-\gamma\delta/2)})}\right).$$

При $q = 1$ нерівність (4.47) правильна.

Нехай нерівність (4.47) правильна при $q = n$. Тоді одержимо

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \left(\frac{4\varepsilon MK_1}{\alpha 2^n} + \frac{\varepsilon MK_1}{2^n(1-\exp(-\gamma\delta 2))}\right)\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right].$$

Звідси знаходимо

$$|y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)}| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} K\exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-t)\right] M|x_n(s) - x_{n-1}(s)|ds +$$

$$+\sum_{-\infty<t_i<t} L\exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(t_i - t)\right] M|x_n(t_i) - x_{n-1}(t_i)| \leq \frac{\varepsilon KK_1M^2}{2^n}(\frac{4}{\alpha}+$$

$$+\frac{1}{1-\exp(-\gamma\delta 2)})^2\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right] \leq \frac{K_1}{2^{n+1}}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right].$$

Із правильності нерівності (4.47) при $q = n$ випливає її виконання при $q = n+1$. Отже, нерівність справджується при всіх натуральних q. Із (4.47) випливає, що послідовність $(x_n(t), y_t^{(n)})$ збігається до деякої функції $(x(t), y_t)$, яка є розв'язком системи (4.46).

Вважаючи в (4.46) $t = \sigma$, одержуємо зображення інтегрального многовиду

$$P(\sigma,\varepsilon) = y_\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma,s)X_0D(s)x(s)ds + \sum_{-\infty<t_i<\sigma} T(\sigma,t_i)X_0C_ix(t_i).$$

Якщо просумувати нерівності (4.47) по всіх q і вважати $t = \sigma$, то одержимо рівномірно оцінку $|P(\sigma,\varepsilon)| \le K_1$. Теорема 4.9 доведена.

Теорема 4.10. *Нехай відносно системи (4.44) виконуються умови 1 – 3. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_1 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ існує інтегральний многовид системи (4.45), який можна зобразити у вигляді $x = Q(t, y_t, \varepsilon)$, де $Q(t,\varphi,\varepsilon)$ – лінійний відносно φ функціонал. Справджується оцінка*

$$|Q(t,\varphi,\varepsilon)| \le \varepsilon K_1|\varphi|, \quad K_1 > 0.$$

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$x(t) = -\int\limits_{t}^{\infty} L(t,s)F(s,y_s)ds - \varepsilon\sum_{t<t_i<\infty} L(t,t_i)H_i(y_{t_i}),$$

$$y_t = T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma}^{t} T(t,s)X_0D(s)x(s)ds + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_ix(t_i). \qquad (4.48)$$

Існування розв'язку системи (4.48) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$x_0(t) = 0, x_{n+1}(t) = -\int\limits_{t}^{\infty} L(t,s)F(s,y_s^{(n)})ds - \varepsilon\sum_{t<t_i<\infty} L(t,t_i)H_i(y_{t_i}^{(n)}),$$

$$y_t^{(n)} = T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma}^{t} T(t,s)X_0D(s)x_n(s)ds + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_ix_n(t_i).$$

Доведемо, що справджується оцінка

$$|x_q(t) - x_{q-1}(t)| \le \frac{\varepsilon K_1|\varphi|}{2^q}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right], \qquad (4.49)$$

де

$$q = 1, 2, \ldots, K_1 = \frac{4KM}{\alpha} + \frac{2KM}{1 - \exp(-\gamma\delta)},$$

$$\varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2\gamma}, \frac{1}{2KM^2(\frac{4}{\alpha} + \frac{1}{1-\exp(-\gamma\delta 2)})}\right).$$

При $q = 1$ нерівність (4.49) правильна.

Нехай нерівність (4.49) правильна при $q = n$. Тоді одержимо

$$|y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)}| \leq \left(\frac{4\varepsilon KMK_1|\varphi|}{\alpha 2^n} + \frac{\varepsilon KMK_1|\varphi|}{2^n(1 - \exp(-\gamma\delta 2))}\right) \exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Звідси знаходимо

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \int\limits_t^\infty \exp[\gamma(s-t)]M|y_s^{(n)} - y_s^{(n-1)}|ds +$$

$$+\varepsilon \sum_{t<t_i<\infty} \exp[\gamma(t_i - t)]M|y_{t_i}^{(n)} - y_{t_i}^{(n-1)}| \leq \frac{\varepsilon^2 KM^2 K_1|\varphi|}{2^n} \times$$

$$\times \left(\frac{4}{\varepsilon} + \frac{1}{1 - \exp(-\gamma\delta 2)}\right)^2 \exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right] \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon K_1|\varphi|}{2^{n+1}} \exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\right].$$

Нерівність (4.49) правильна при $q = n + 1$, отже, вона правильна при всіх натуральних q. Із (4.49) випливає, що послідовність $(x_n(t), y_t^{(n)})$ рівномірно збігається до функції $(x(t), y_t)$, яка є розв'язком системи (4.48).

Вважаючи в (4.48) $t = \sigma$, одержуємо зображення інтегрального многовиду

$$Q(\sigma, \varphi, \varepsilon) = x(\sigma) = -\int\limits_\sigma^\infty L(\sigma, s)F(s, y_s)ds - \varepsilon \sum_{\sigma<t_i<\infty} L(\sigma, t_i)H_i(y_{t_i}).$$

Додаючи нерівності (4.49) і вважаючи $t = \sigma$, знаходимо $|Q(\sigma, \varphi, \varepsilon)| \leq \varepsilon K_1|\varphi|$. Теорема 4.10 доведена.

Розглянемо систему

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v + F(t, P(t, \varepsilon)v), t \neq t_i,$$

$$\Delta v|_{t=t_i} = B_i v + \varepsilon H_i(P(t_i,\varepsilon)v),$$

$$w_i = T(t,\sigma)w_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0D(s)Q(s,w_s,\varepsilon)ds+ \tag{4.50}$$

$$+\sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_iQ(t_i,w_{t_i},\varepsilon).$$

Функції $Q(t,w_t,\varepsilon)$, $P(t,\varepsilon)v$ задовольняють рівняння

$$\frac{dQ(t,w_t,\varepsilon)v}{dt} = A(t)Q(t,w_t,\varepsilon)v + F(t,w_t), t\neq t_i,$$

$$\Delta Q(t,w_t,\varepsilon)|_{t=t_i} = B_iQ(t_i,w_{t_i},\varepsilon) + \varepsilon H_i(w_{t_i}),$$

$$P(t,\varepsilon)v(t) = T(t,\sigma)P(\sigma,\varepsilon)v(\sigma)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0D(s)v(s)ds + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_iv(t_i). \tag{4.51}$$

В результаті заміни

$$x = v + Q(t,w_t,\varepsilon), \quad y_t = w_t + P(t,\varepsilon)v \tag{4.52}$$

і додавання рівностей (4.50), (4.51) одержимо систему (4.45).

Отже, правильне таке твердження.

Теорема 4.11. *За допомогою заміни (4.52) система (4.50) зводиться до вигляду (4.45).*

При досить малому ε систему (4.52) можна розв'язати відносно v та w_t і визначити заміну, яка розщеплює систему (4.45) на дві незалежні підсистеми (4.50).

Оцінимо розв'язок останнього рівняння системи (4.50), використовуючи метод послідовних наближень

$$w_t^{(0)} = 0, w_t^{(n+1)} = T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0D(s)Q(s,w_s^{(n)},\varepsilon)ds+$$

$$+ \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_iQ(t_i, wt_i{}^{(n)}, \varepsilon),$$

де $\varphi = w_\sigma$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Індукцією можна довести, що правильна нерівність

$$|w_t^{(n+1)} - w_t^{(n)}| \leq \frac{K|\varphi|}{2^n} \exp\left[(\frac{\alpha}{\varepsilon} - \chi)(\sigma - t)\right], \tag{4.53}$$

де

$$t \geq \sigma, \chi = 2MKK_1, \varepsilon < \min\left(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \frac{1-\exp(-\chi\delta)}{4MKK_1}\right).$$

Якщо просумувати нерівності (4.53) за n, то одержимо оцінку

$$|w(t)| \leq 2K|\varphi| \exp\left[(\frac{\alpha}{\varepsilon} - \chi)(\sigma - t)\right].$$

Тому стійкість нульового розв'язку системи (4.44) при $\varepsilon < \alpha/\chi$ рівносильна стійкості нульового розв'язку імпульсної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v + F(t, P(t,\varepsilon)v), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta v|_{t=t_i} = B_iv + \varepsilon H_i(P(t_i,\varepsilon)v).$$

Зауваження 1. Умова 3 накладає обмеження на корені характеристичного рівняння, що відповідає системі $\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(t, y_t)$.

Зауваження 2. У цьому підрозділі розглядається узагальнення результатів статті [127] та монографії [106] на випадок лінійних імпульсних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь.

4.5. Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = Lx(t) + My(t) + Ny(t - \varepsilon\Delta) + Au(t),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta) + Dx(t), \tag{4.54}$$

де ε — малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, всі корені характеристичного рівняння $\det(B + C\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$ лежать в півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Керування $u(t)$ повинно бути вибране так, щоб забезпечити асимптотичну стійкість розв'язків системи (4.54) і мінімізувати функціонал

$$J(u) = \int\limits_0^\infty (x'(t)Qx(t) + u'(t)Fu(t))dt, \tag{4.55}$$

де Q та F – додатно визначені симетричні матриці, $x(t)$ – розв'язок системи (4.54) на многовиді $y_t = p(\varepsilon)x(t)$. Тут y_t – елемент простору $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\varepsilon\Delta, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$.

Стабілізація керованих систем із запізненням розглядалася в [93, 94] та ін. При цьому задача зводилася до стабілізації системи звичайних диференціальних рівнянь. При квазіоптимальній стабілізації [5, с. 226] розв'язок шукається у вигляді асимптотичного розкладу за степенями малого параметра. У цьому підрозділі використовується метод інтегральних многовидів для сингулярно збурених систем із запізненням [43, 51, 85, 97, 127]. Знайдено зображення інтегральних многовидів і наближений розв'язок задачі квазіоптимальної стабілізації.

Поряд із системою (4.54) розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = Lx(t) + My(t) + Ny(t - \varepsilon\Delta) + Agx(t),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta) + Dx(t), \tag{4.56}$$

де матрицю g розмірності $r \times n$ будемо вважати параметром. Система (4.56) еквівалентна такій системі рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Lx(t) + My(t) + Ny(t - \varepsilon\Delta) + Agx(t),$$

$$y_t = T(t)y_0 + \int\limits_0^t T(t-s)X_0Dx(s)ds,$$

де $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$, $X_0(0) = E$, E – одинична матриця; $T(t)$ – оператор зсуву за розв'язками рівняння

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = By(t) + Cy(t-\varepsilon\Delta).$$

Для оператора T справджується оцінка

$$|T(t)\varphi| \le K_1|\varphi| \exp\left[-\frac{\alpha t}{\varepsilon}\right],$$

де $t \ge 0$, $\alpha > 0$, $K_1 > 0$, $\varphi \in \mathbb{C}$, $|\cdot|$ – норма в просторі $\mathbb{C}$.

Теорема 4.12. *Нехай відносно системи (4.54) виконуються вищевказані умови. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (4.56), що може бути зображений у вигляді $y_t = p(\varepsilon, g)x$, де $p(\varepsilon, g)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ – лінійний обмежений оператор.*

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$x(t) = H(t) - \int\limits_t^0 H(t-s)[My(s) + Ny(s-\varepsilon\Delta)]ds,$$

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t T(t-s)X_0Dx(s)ds, \tag{4.57}$$

де $H(t)$ – фундаментальна матриця рівняння

$$\frac{dx}{dt} = Lx + Agx, \quad H(t) = \exp[(L+Ag)t].$$

Існування розв'язків системи (4.57) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$y_t^{(0)} = 0, \quad x_n(t) = H(t) - \int\limits_t^0 H(t-s)[My^{(n)}(s) + Ny^{(n)}(s-\varepsilon\Delta)]ds,$$

$$y_t^{(n+1)} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} T(t-s)X_0Dx_n(s)ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Виконується нерівність $|H(t)| \le \exp[-M_1 t]$, $t \le 0$, $M_1 > 0$.

Доведемо, що справджується оцінка

$$|y_t^{(q)} - y_t^{(q-1)}| \le \frac{N_1}{2^q}\exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-t)\right], \tag{4.58}$$

де

$$q = 1, 2, \dots, \quad N_1 = \frac{4K_1M_1}{\alpha}, \quad \varepsilon < \min\Big(\frac{\alpha}{2M_1}, \quad \frac{\alpha^2}{32K_1M_1^2}\Big), \quad t \le 0.$$

При $q = 1$ нерівність (4.58) справджується.

Нехай нерівність (4.58) справджується при $q = n$. Тоді одержимо

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le \frac{2M_1N_1\varepsilon}{2^n(\alpha - \varepsilon M_1)}\exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-t)\right].$$

Звідси знаходимо

$$|y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)}| \le \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-t)\right]\frac{2K_1M_1^2N_1}{(\alpha - \varepsilon M_1)2^n}\exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-s)\right]ds =$$

$$= \frac{4\varepsilon K_1M_1^2N_1}{(\alpha - \varepsilon M_1)^2 2^n}\exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-t)\right] \le \frac{32K_1M_1^2\varepsilon N_1}{\alpha^2 \cdot 2^{n+1}}\exp\left[\frac{\alpha + \varepsilon M_1}{2\varepsilon}(-t)\right].$$

Із виконання нерівності (4.58) при $q = n$ випливає виконання при $q = n + 1$. Отже, нерівність справджується при всіх натуральних q. Із (4.58) випливає, що послідовність $(x_n(t), y_t^{(n)})$ збігається до деякої функції $(x(t), y_t)$, яка є розв'язком системи (4.57).

Підставляючи в (4.58) $t = 0$, одержимо зображення інтегрального многовиду

$$p(\varepsilon, g) = y_0 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{0} T(-s)X_0Dx(s)ds.$$

Якщо просумувати нерівності (4.58) по q і підставити $t = 0$, то одержимо оцінку $|p(\varepsilon, g)| \le N_1$.

Теорема доведена.

Зауваження 1. Оператор $p(\varepsilon, g)$ є неперервно диференційовним відносно ε, g.

Диференційовність відносно g випливає із диференційовності послідовності $(x_n(t), y_t^{(n)})$.

Аналогічно [51, 97] знайдемо наближене зображення оператора $p(\varepsilon, g)$, звідки буде випливати диференційовність відносно ε при $\varepsilon = 0$. Інтегральний многовид системи (4.56) будемо шукати у вигляді

$$y(t) = (P_0 + \varepsilon Q)x(t) + O(\varepsilon^2),$$

де $P_0 = -(B + C)^{-1}D$, а матрицю Q визначимо пізніше. Тоді

$$y(t+\theta) = P_0 x(t+\theta) + \varepsilon Q x(t) + O(\varepsilon^2) = P_0 x(t) + \theta P_0 \frac{dx}{dt} + \varepsilon Q x(t) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= P_0 x(t) + \theta \Psi x(t) + \varepsilon Q x(t) + O(\varepsilon^2),$$

де $\Psi = P_0[L + Ag + (M + N)P_0]$. Звідси

$$y(t - \varepsilon\Delta) = (P_0 - \varepsilon\Delta\Psi + \varepsilon Q)x(t) + O(\varepsilon^2).$$

Тому

$$By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta) + Dx(t) = \varepsilon(BQ + CQ - \Delta C\Psi)x(t) + O(\varepsilon^2).$$

Крім того,

$$\frac{dy}{dt} = P_0 \frac{dx}{dt} + O(\varepsilon) = \Psi x(t) + O(\varepsilon).$$

Підставляючи знайдені вирази в систему (4.56) і зберігаючи тільки члени порядку ε, одержимо

$$\varepsilon\Psi x(t) = \varepsilon(BQ + CQ - \Delta C\Psi)x(t),$$

звідки знаходимо

$$Q = (B + C)^{-1}(E + \Delta C)\Psi.$$

Отже, інтегральний многовид системи (4.56) можна зобразити у вигляді $y_t = p(\varepsilon, g)x$, де

$$p(\varepsilon, g) = P_0 + \varepsilon Q + \theta\Psi + O(\varepsilon^2), \quad -\varepsilon\Delta \leq \theta \leq 0.$$

Аналогічно [43, 127] можна вказати таке $\varepsilon_1 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ існує інтегральний многовид системи (4.56), що може бути зображений у вигляді $x = h(\varepsilon, g)y_t$, де $h(\varepsilon, g)$: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ – лінійний обмежений оператор.

Для оператора $h(\varepsilon, g)$ справджується оцінка $|h(\varepsilon, g)| \leq \varepsilon\gamma$, $\gamma > 0$, і можна одержати зображення

$$h(\varepsilon, g)y_t = \varepsilon(M + N)(B + C)^{-1}y(t) + [M(B + C)^{-1}C - N(B + C)^{-1}B]\times$$

$$\times \int\limits_{-\varepsilon\Delta}^{0} y(t + \theta)d\theta + O(\varepsilon^2).$$

Для перевірки досить продиференціювати ліву і праву частину системи (4.56) і відкинути доданки порядку $O(\varepsilon)$. В результаті одержимо рівність

$$My(t) + Ny(t - \varepsilon\Delta) = (M + N)(B + C)^{-1}(By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta))+$$

$$+[M(B + C)^{-1}C - N(B + C)^{-1}B](y(t) - y(t - \varepsilon\Delta)).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $y(t)$ та $y(t - \varepsilon\Delta)$, переконуємося, що ми одержали тотожність.

Розглянемо задачу квазіоптимальної стабілізації системи (4.54). Підставивши $\varepsilon = 0$, одержимо вироджену систему, із якої знайдемо $y(t) = -(B + C)^{-1}Dx(t)$. Тоді перше рівняння системи (4.54) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = [L + (M + N)P_0]x(t) + Au(t), \tag{4.59}$$

де $P_0 = -(B + C)^{-1}D$. Нехай система (4.59) цілком керована. Тоді існує розв'язок задачі (4.59), (4.55), причому $u(t) = g_0x(t)$, де $g_0 = -F^{-1}A'K_0$, симетрична додатно визначена матриця K_0 є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті

$$KL_0 + L_0'K - KRK + Q = 0, \quad R = AF^{-1}A', \quad L_0 = L + (M+N)P_0.$$

Щоб одержати наступне наближення, побудуємо інтегральний многовид $y_t = p(\varepsilon, g_0)x$ системи (4.56), в якій $g = g_0$. Підставивши в перше рівняння системи (4.54), одержимо

$$\frac{dx}{dt} = L_1(\varepsilon)x(t) + Au(t), \tag{4.60}$$

де

$$L_1(\varepsilon) = L_0 + \varepsilon G_1, \quad G_1 = MQ + NQ - \Delta N\Psi.$$

Розв'язуючи задачу (4.60), (4.55), одержимо

$$u(t) = \overline{g}(\varepsilon)x(t), \quad g(\varepsilon) = -F^{-1}A'K(\varepsilon),$$

де симетрична додатно визначена матриця $K(\varepsilon)$ є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті

$$KL_1(\varepsilon) + L_1'(\varepsilon)K - KRK + Q = 0. \tag{4.61}$$

Розв'язок рівняння (4.61) має вигляд $K(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon H + O(\varepsilon^2)$, де матриця H задовольняє рівняння Ляпунова

$$H(L_0 - RK_0) + (L_0 - RK_0)'H = -K_0G_1 - G_1'K_0. \tag{4.62}$$

Оскільки матриця $L_0 - RK_0$ стійка, то існує єдиний розв'язок рівняння (4.62), що має вигляд

$$H = \int_0^\infty \exp[(L_0 - RK_0)'t](K_0G_1 + G_1'K_0)\exp[(L_0 - RK_0)t]dt.$$

Аналогічно можна знаходити вищі наближення. Нехай відоме наближення матриці $g(\varepsilon)$ вигляду

$$g(\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_1 + \ldots + \varepsilon^{k-1}g_{k-1} + O(\varepsilon^k), \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Тоді інтегральний многовид системи (4.56), де $g = g(\varepsilon)$, будемо шукати у вигляді

$$y(t) = (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots + \varepsilon^k P_k)x(t) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Знаходження матриці P_k зводиться до розв'язування рівняння вигляду $(B + C)P_k = \Psi_k$. Це дозволить знайти наступне наближення

$$K(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \ldots + \varepsilon^k K_k + O(\varepsilon^{k+1})$$

розв'язку матричного рівняння Ріккаті. Знаходження K_k зводиться до розв'язування рівняння Ляпунова вигляду

$$K_k(L_0 - RK_0) + (L_0 - RK_0)' K_k = G_k.$$

Звідси знайдемо наступне наближення матриці $g(\varepsilon) = -F^{-1}A'K(\varepsilon)$. Таким методом можна шукати асимптотичні наближення розв'язку.

Існування розв'язку задачі квазіоптимальної стабілізації випливає із теореми про неявну функцію [67, с. 492]. У нас $p(\varepsilon, g(\varepsilon))$ та $K(\varepsilon)$ знаходяться як неявні функції від ε.

Позначимо $\xi(\varepsilon) = p(\varepsilon)|_{\theta=0}$, $\eta(\varepsilon) = p(\varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta}$ і розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= (L + M\xi(\varepsilon) + N\eta(\varepsilon) + Ag(\varepsilon))v, \\ \varepsilon\frac{dw}{dt} &= Bw(t) + Cw(t - \varepsilon\Delta) + Dh(\varepsilon)w_t. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Аналогічно [43, 127] можна показати, що система (4.63) за допомогою заміни $x = v + h(\varepsilon)w_t$, $y_t = w_t + p(\varepsilon)v$ зводиться до вигляду (4.56), де $g = g(\varepsilon)$. Із асимптотичної стійкості розв'язків системи (4.63) випливає асимптотична стійкість розв'язків системи (4.56), де $g = g(\varepsilon)$.

Зауваження 2. У випадку $N = C = 0$ система (4.54) буде системою звичайних диференціальних рівнянь. Тоді задача квазіоптимальної стабілізації зводиться до розв'язування відносно матриць p, K системи рівнянь

$$KL_1 + L_1'K - KAF^{-1}A'K + Q = 0, \quad \varepsilon p(L_1 + Ag) = Bp + D,$$

де $L_1 = L + Mp$, $g = -F^{-1}A'K$.

Зауваження 3. Для розв'язування матричних алгебраїчних рівнянь Ріккаті та Ляпунова можна застосовувати метод Ньютона-Рафсона, метод матричної сигнум-функції або QR-алгоритм [5].

4.6. Висновки

У розділі 4 досліджено динамічну еквівалентність диференціально-функціональних рівнянь і побудовано заміну, яка зводить систему до простішого вигляду.

1. У підрозділі 4.1 доведено існування інтегральних многовидів, якщо права частина системи диференціально-функціональних рівнянь задовольняє інтегральну умову Ліпшиця. Показано, що вихідну систему за допомогою гомеоморфної заміни можна звести до простішого вигляду.

2. У підрозділі 4.2 побудовано інтегральні многовиди і здійснено розщеплення регулярно збуреної системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу.

3. У підрозділі 4.3 доведено існування інтегральних многовидів і здійснено розщеплення лінійних сингулярно збурених систем нейтрального типу.

4. У підрозділі 4.4 доведено існування інтегральних многовидів і показано, що систему імпульсних сингулярно збурених рівнянь можна розщепити на дві незалежні підсистеми.

5. В останньому підрозділі четвертого розділу одержано зображення інтегральних многовидів системи лінійних керованих сингулярно збурених рівнянь із запізненням. Розв'язок задачі квазіоптимальної стабілізації шукається у вигляді асимптотичного розкладу за степенями малого параметра.

Розділ 5

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОГОВИДІВ У ТЕОРІЇ БІФУРКАЦІЙ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

У цьому розділі одержано зображення інтегрального многовиду сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь, досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги та субфуркація періодичних розв'язків. Показано, що при відповідних умовах на праву частину відображення Пуанкаре для збуреної системи має трансверсальну гомоклінічну точку. Метод усереднення застосовано до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням. Досліджено поліноміальні і раціональні одновимірні відображення, еквівалентні кусково-лінійним і такі, що мають інваріантну міру. Досліджено інваріантні множини одновимірних відображень.

5.1. Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із запізненням

5.1.1. Перетворення вихідної задачі

Нехай задана система сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x(t) + M(t)y(t) + N(t)y(t-\varepsilon\Delta) + F(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)y(t) + C(t)y(t-\varepsilon\Delta) + D(t)x(t) + G(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \quad (5.1)$$

де ε – малий додатний параметр; $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$; $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $B(t)$, $C(t)$ і $D(t)$ – двічі неперервно диференційовні періодичні матриці періоду 2π, а функції F і G мають період 2π відносно t і чотири рази неперервно диференційовні за всіма аргументами. Крім того, в деякому околі початку координат вірна нерівність

$$|F(t, x, y, z)| + |G(t, x, y, z)| \le K(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2), \quad K > 0.$$

Припустимо, що виконується умова

1) всі корені характеристичного рівняння

$$\det(B(t) + C(t)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать в півплощині $\operatorname{Re}\lambda \le -2\lambda_0 < 0$.

Розглянемо рівняння

$$(B(t) + C(t))y + D(t)x + G(t, x, y, y) = 0. \quad (5.2)$$

За теоремою про неявну функцію в деякому околі початку координат існує розв'язок $y = \psi(t, x)$ рівняння (5.2); функція $\psi(t, x)$ двічі неперервно диференційовна відносно t і чотири рази неперервно диференційовна відносно x, причому $\psi(t, 0) = 0$.

Згідно з [85] при деякому $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, існує інтегральний многовид системи (5.1), що може бути поданий у вигляді $y_t = \psi(t, x) + \xi(t, x, \varepsilon)$, де $\xi(t, x, 0) = \xi(t, 0, \varepsilon) = 0$. Тут y_t – елемент простору $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\varepsilon\Delta, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$, функція $\xi(t, x, \varepsilon) \in \mathbb{C}$ неявно залежить від аргументу θ. Позначимо

$$\eta(t, x, \varepsilon) = \psi(t, x) + \xi(t, x, \varepsilon)\Big|_{\theta=0}, \quad \zeta(t, x, \varepsilon) = \psi(t, x) + \xi(t, x, \varepsilon)\Big|_{\theta=-\varepsilon\Delta}.$$

Тоді рівняння на многовиді для системи (5.1) набуде вигляду

$$\frac{d\chi}{dt} = L(t)\chi + M(t)\eta(t,\chi,\varepsilon) + N(t)\zeta(t,\chi,\varepsilon) + F(t,\chi,\eta(t,\chi,\varepsilon),\zeta(t,\chi,\varepsilon)). \quad (5.3)$$

При $\varepsilon = 0$ рівняння (5.3) співпадає з рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x + (M(t) + N(t))\psi(t,x) + F(t,x,\psi(t,x),\psi(t,x)). \quad (5.4)$$

Для кожного розв'язку $(x(t), y(t))$ системи (5.1) існує розв'язок $\chi(t)$ рівняння (5.3) такий, що справедлива оцінка

$$|x(t) - \chi(t)| + |y_t - \psi(t,\chi(t)) - \xi(t,\chi(t),\varepsilon)| \le K_1 \exp(-\lambda_0 t/(2\varepsilon)),$$

де $t \ge \sigma$, $K_1 > 0$.

В роботі [85] досліджено біфуркацію стану рівноваги автономної сингулярно збуреної системи з малим сталим загаюванням. У даному підрозділі розглянуто сингулярно збурену систему типу (21) із [85] у більш загальному випадку, коли права частина є 2π-періодичною відносно t. Досліджено біфуркацію стану рівноваги системи (5.1).

5.1.2. Побудова інтегрального многовиду лінійної системи

З метою лінеаризації рівняння (5.3) побудуємо інтегральний многовид лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x(t) + M(t)y(t) + N(t)y(t - \varepsilon\Delta),$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)y(t) + C(t)y(t - \varepsilon\Delta) + D(t)x(t).$$

Ця система рівносильна системі

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x(t) + M(t)y(t) + N(t)y(t - \varepsilon\Delta),$$

$$y_t = T(t,\sigma)y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0 D(s)x(s)ds, \quad (5.5)$$

де $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$, $X_0(0) = E$, E – одинична матриця; $T(t,s)$ – оператор зсуву за розв'язками рівняння

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)y(t) + C(t)y(t-\varepsilon\Delta).$$

Оператор $T(t,s)$ залежить від ε, причому із леми А. Халаная [130] випливає оцінка

$$|T(t,s)\varphi| \le \overline{k}_1|\varphi|\exp(-\lambda_0(t-s)/\varepsilon), \tag{5.6}$$

де $\varphi \in \mathbb{C}$, $t \ge s$.

Лема 5.1. *Нехай виконується умова 1, а матриці $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, їх перші та другі похідні рівномірно обмежені на всій осі. Тоді інтегральний многовид системи (5.5) можна зобразити у вигляді*

$$y_t = h(t)x + f(t,\theta,\varepsilon)x + O(\varepsilon^2),$$

де

$$h(t) = -[B(t)+C(t)]^{-1}D(t),$$

$$f(t,\theta,\varepsilon) = \varepsilon[B(t)+C(t)]^{-1}[E+\Delta C(t)]\varphi(t) + \theta\varphi(t), \quad -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0,$$

$$\varphi(t) = h'(t) + h(t)L(t) + h(t)[M(t)+N(t)]h(t).$$

Доведення. Враховуючи, що $T(t,s) = T(t,s+\tau)T(s+\tau,s)$, $\tau > 0, t > s+\tau$, одержуємо

$$\frac{d}{ds}T(t,s)E = \lim_{\tau\to 0}\{[T(t,s+\tau)E - T(t,s)E]/\tau\} =$$

$$= T(t,s)\lim_{\tau\to 0}\{[E - T(s+\tau,s)E]/\tau\} = -T(t,s)X_0[B(s)+C(s)]/\varepsilon.$$

У другому рівнянні системи (5.5) зробимо заміну $y_t = z_t + h(t)x$, де $h(t) = -[B(t)+C(t)]^{-1}D(t)$. В результаті одержимо рівняння

$$z_t + h(t)x(t) = T(t,\sigma)z_\sigma + T(t,\sigma)h(\sigma)x(\sigma) + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0D(s)x(s)ds.$$

Справджується рівність

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\sigma}^{t} T(t,s)X_0D(s)x(s)ds = -\int_{\sigma}^{t}\frac{d}{ds}[T(t,s)][B(s)+C(s)]^{-1}D(s)x(s)ds =$$

$$= h(t)x(t) - T(t,\sigma)h(\sigma)x(\sigma) + \int_{\sigma}^{t} T(t,s)\frac{d}{ds}[h(s)x(s)]ds.$$

Звідси знаходимо

$$z_t = T(t,\sigma)z_\sigma + \int_{\sigma}^{t} T(t,s)[h'(s)x(s) + h(s)x'(s)]ds.$$

Тому система (5.5) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x(t) + [M(t)+N(t)]h(t)x(t) + M(t)z(t) + N(t)z(t-\varepsilon\Delta),$$

$$z_t = T(t,\sigma)z_\sigma + \int_{\sigma}^{t} T(t,s)[\varphi(s)x(s) + h(s)M(s)z(s)+ \tag{5.7}$$

$$+h(s)N(s)z(s-\varepsilon\Delta)]ds,$$

де

$$\varphi(s) = h'(s) + h(s)L(s) + h(s)[M(s)+N(s)]h(s).$$

Знайдемо зображення інтегрального многовиду системи (5.7) з точністю до членів порядку ε:

$$z_t = g(t,\varepsilon)x, \quad g(t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} T(t,s)\varphi(s)K(s,t)ds,$$

де g: $\mathbb{R}\times[0,\varepsilon_0]\to\mathbb{C}$, $K(s,t)$ – фундаментальна матриця системи

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x + [M(t)+N(t)]h(t)x.$$

Покладемо

$$f(t,\theta,\varepsilon) = \varepsilon[B(t)+C(t)]^{-1}[E+\Delta C(t)]\varphi(t) + \theta\varphi(t).$$

Тоді

$$\frac{d}{ds}[T(t,s)]f(s,\theta,\varepsilon)=\lim_{\tau\to 0}\{[T(t,s+\tau)f(s,\theta,\varepsilon)-T(t,s)f(s,\theta,\varepsilon)]/\tau\}=$$

$$=T(t,s)\lim_{\tau\to 0}\{[f(s,\theta,\varepsilon)-T(s+\tau,s)f(s,\theta,\varepsilon)]/\tau\}=T(t,s)\varphi(s).$$

Звідси одержимо

$$g(t,\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{d}{ds}[T(t,s)]f(s,\theta,\varepsilon)K(s,t)ds=f(t,\theta,\varepsilon)-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{t}T(t,s)\Big\{\frac{\partial f(s,\theta,\varepsilon)}{\partial s}K(s,t)+f(s,\theta,\varepsilon)[L(s)+$$

$$+(M(s)+N(s))h(s)]K(s,t)\Big\}ds.$$

Оскільки матриці $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, їх перші та другі похідні рівномірно обмежені на всій осі, то із нерівності (5.6) випливає оцінка

$$|g(t,\varepsilon)-f(t,\theta,\varepsilon)|\le\nu\varepsilon^2,\quad t\in\mathbb{R},\quad \nu>0.$$

Отже, інтегральний многовид системи (5.7) можна наближено подати у вигляді $z_t=f(t,\theta,\varepsilon)x$. Тому інтегральний многовид системи (5.5) можна зобразити у вигляді

$$y_t=h(t)x+f(t,\theta,\varepsilon)x+O(\varepsilon^2).$$

Лема доведена.

5.1.3. Дослідження біфуркації стану рівноваги

Рівняння на многовиді системи (5.5) з точністю до членів порядку ε набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt}=L(t)x+[M(t)+N(t)]h(t)x+\varepsilon M(t)[B(t)+C(t)]^{-1}(E+$$

$$+\Delta C(t))\varphi(t)x + \varepsilon N(t)[B(t) + C(t)]^{-1}(E - \Delta B(t))\varphi(t)x. \tag{5.8}$$

Рівняння (5.8) є лінійним диференціальним рівнянням з періодичними коефіцієнтами. Нехай виконується умова

2) оператор монодромії для рівняння (5.8) має пару коренів

$$\exp[\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)], \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) > 0, \quad \beta(0) > 0,$$

а решта його коренів розміщені всередині кола $|\lambda| \le \exp(-2\lambda_1) < 1$.

Тоді згідно з теоремою Флоке-Ляпунова існує невироджена матриця $H(t, \varepsilon)$, $H(t + 2\pi, \varepsilon) = H(t, \varepsilon)$, така, що заміна

$$x = H(t, \varepsilon)[u, \overline{u}, v]^T \tag{5.9}$$

зводить рівняння (5.8) до вигляду

$$\frac{du}{dt} = (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))u, \quad \frac{d\overline{u}}{dt} = (\alpha(\varepsilon) - i\beta(\varepsilon))\overline{u}, \quad \frac{dv}{dt} = A(\varepsilon)v,$$

причому всі власні значення матриці $A(\varepsilon)$ лежать у півплощині $\mathrm{Re}\lambda \le -2\lambda_1 < 0$.

Виконавши заміну (5.9) у рівнянні (5.3), одержимо систему

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))u + F_1(t, u, \overline{u}, v, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{d\overline{u}}{dt} &= (\alpha(\varepsilon) - i\beta(\varepsilon))\overline{u} + \overline{F}_1(t, u, \overline{u}, v, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dv}{dt} &= A(\varepsilon)v + F_2(t, u, \overline{u}, v, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{5.10}$$

де

$$|F_1(t, u, \overline{u}, v, \varepsilon)| + |F_2(t, u, \overline{u}, v, \varepsilon)| \le k(|u|^2 + |v|^2).$$

Тоді згідно з [15, 80, 98] існує інтегральний многовид системи (5.10), що може бути поданий у вигляді $v = S(t, u, \overline{u}, \varepsilon)$. Поведінка розв'язків системи (5.10) на многовиді описується системою

$$\frac{dw}{dt} = (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))w + F_1(t, w, \overline{w}, S(t, w, \overline{w}, \varepsilon), \varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{d\overline{w}}{dt} = (\alpha(\varepsilon) - i\beta(\varepsilon))\overline{w} + \overline{F}_1(t, w, \overline{w}, S(t, w, \overline{w}, \varepsilon), \varepsilon) + O(\varepsilon^2). \tag{5.11}$$

Для кожного розв'язку $(u(t), \overline{u}(t), v(t))$ системи (5.10) існує розв'язок $(w(t), \overline{w}(t))$ системи (5.11) такий, що справджується оцінка [98, с. 55]

$$|u(t) - w(t)| + |v(t) - S(t, w(t), \overline{w}(t), \varepsilon)| \leq M_1 \exp(-\lambda_1 t), \quad t \geq \sigma.$$

Нехай відсутній сильний резонанс, тобто для всіх цілих m_1, m_2, $0 < m_2 < 5$, виконується нерівність $m_2\beta(0) + m_1 \neq 0$. Зауважимо, що умова відсутності сильного резонансу накладає обмеження тільки на пару коренів оператора монодромії рівняння

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x + [M(t) + N(t)]h(t)x,$$

що розміщені на одиничному колі. Перше рівняння системи (5.11) перетворимо за допомогою підстановки

$$w = p + W_2(t, p, \overline{p}, \varepsilon) + W_3(t, p, \overline{p}, \varepsilon), \tag{5.12}$$

де W_2 і W_3 – форми відповідно другого і третього порядку з періодичними коефіцієнтами.

Перетворення (5.12) можна підібрати так, що рівняння для p набуде вигляду [11, с. 1542]

$$\frac{dp}{dt} = (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))p + (\gamma(\varepsilon) + i\delta(\varepsilon))p^2\overline{p} + P(t, p, \overline{p}, \varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

де

$$P(t + 2\pi, p, \overline{p}, \varepsilon) = P(t, p, \overline{p}, \varepsilon), \quad P(t, p, \overline{p}, \varepsilon) = O(|p|^4)$$

при $|p| \to 0$. Перейдемо до полярних координат, покладаючи $p = r\exp(i\varphi)$. Тоді одержимо дійсну систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)r^2 + \Phi(t, r, \varphi, \varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{dr}{dt} = \alpha(\varepsilon)r + \gamma(\varepsilon)r^3 + R(t,r,\varphi,\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \qquad (5.13)$$

де

$$R(t,r,\varphi,\varepsilon) = O(|r|^4), \quad \Phi(t,r,\varphi,\varepsilon) = O(|r|^3)$$

при $|r| \to 0$.

Оскільки виконується умова 2, то при дослідженні на стійкість нульового розв'язку рівняння (5.4) маємо критичний випадок. Нехай нульовий розв'язок рівняння (5.4) асимптотично стійкий, причому питання про стійкість вирішується членами третього порядку, тобто $\gamma(0) < 0$.

Із [11, 15, 108] випливає, що при досить малому ε система (5.13) має інваріантний тор

$$S_\varepsilon = \{(t,\varphi,r) : \, t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}, r = \rho(t,\varphi,\varepsilon)\}.$$

При цьому

$$\rho(t+2\pi,\varphi,\varepsilon) = \rho(t,\varphi,\varepsilon), \quad \rho(t,\varphi+2\pi,\varepsilon) = \rho(t,\varphi,\varepsilon)$$

і справджується рівність

$$\rho(t,\varphi,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon N} + O(\varepsilon), \quad N = -\alpha'(0)/\gamma(0).$$

Поведінка розв'язків системи (5.13) на торі S_ε описується рівнянням

$$\frac{d\chi}{dt} = \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)\rho^2(t,\chi,\varepsilon) + \Phi(t,\rho(t,\chi,\varepsilon),\chi,\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \qquad (5.14)$$

Для кожного розв'язку $(\varphi(t), r(t))$ системи (5.13), що задовольняє умову $0 < r(\sigma) < r_0$, знайдеться розв'язок $\chi(t)$ рівняння (5.14) такий, що виконується оцінка

$$|\varphi(t) - \chi(t)| + |r(t) - \rho(t,\chi(t),\varepsilon)| \le M_2 \exp(-\varepsilon n_1 t),$$

$$M_2 > 0, \;\; n_1 > 0, \;\; t \ge \sigma.$$

Тору S_ε відповідає інваріантний тор системи (5.11), що може бути зображений у вигляді

$$W(t,\varphi,\varepsilon)=\rho(t,\varphi,\varepsilon)e^{i\varphi}+W_2(t,\rho(t,\varphi,\varepsilon)e^{i\varphi},\rho(t,\varphi,\varepsilon)e^{-i\varphi},\varepsilon)+$$

$$+W_3(t,\rho(t,\varphi,\varepsilon)e^{i\varphi},\rho(t,\varphi,\varepsilon)e^{-i\varphi},\varepsilon).$$

Інваріантний тор системи (5.10) визначається функцією

$$V(t,\varphi,\varepsilon)=S(t,W(t,\varphi,\varepsilon),\overline{W}(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon).$$

Звідси одержимо зображення інваріантного тора системи (5.1)

$$X(t,\varphi,\varepsilon)=H(t,\varepsilon)[W(t,\varphi,\varepsilon),\overline{W}(t,\varphi,\varepsilon),V(t,\varphi,\varepsilon)]^T,$$

$$Y(t,\varphi,\varepsilon)=\psi(t,X(t,\varphi,\varepsilon))+\xi(t,X(t,\varphi,\varepsilon),\varepsilon). \qquad (5.15)$$

Для кожного розв'язку $(w(t),\overline{w}(t))$ системи (5.11), $0<|w(\sigma)|<w_1$, існує розв'язок $\chi(t)$ рівняння (5.14) такий, що справедлива оцінка

$$|w(t)-W(t,\chi(t),\varepsilon)|\le M_3\exp(-n\varepsilon t),\quad n>0.$$

Звідси одержуємо нерівність

$$|u(t)-W(t,\chi(t),\varepsilon)|+|v(t)-V(t,\chi(t),\varepsilon)|\le$$

$$\le M_4\exp(-\lambda_1 t)+M_5\exp(-n\varepsilon t).$$

Тому існують числа $\varepsilon_1>0$, $r_2>0$ такі, що при $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ для кожного розв'язку $(x(t),y_t)$ системи (5.1) з початковим значенням $(x(\sigma),y_\sigma)$, $0<|x(\sigma)|+|y_\sigma|<r_2$, знайдеться розв'язок $\chi(t)$ рівняння (5.14) такий, що виконується оцінка

$$|x(t)-X(t,\chi(t),\varepsilon)|+|y_t-Y(t,\chi(t),\varepsilon)|\le$$

$$\le K_1\exp(-\lambda_0 t/(2\varepsilon))+K_2\exp(-\lambda_1 t)+K_3\exp(-n\varepsilon t),\quad t\ge\sigma. \qquad (5.16)$$

Нехай $\nu(\varepsilon)$ – число обертання для рівняння (5.14). Тоді згідно з [15] маємо зображення

$$\nu(\varepsilon) = \beta(0) + \varepsilon\beta'(0) - \varepsilon\delta(0)\alpha'(0)/\gamma(0) + O(\varepsilon^{3/2})$$

і розв'язок рівняння (5.14) можна записати у вигляді

$$\chi(t,\varepsilon) = \nu(\varepsilon)t + c + f_1(t, \nu(\varepsilon)t + c, \varepsilon),$$

де c – довільна стала, а $f_1(t,\varphi,\varepsilon)$ – неперервна, періодична відносно t та φ функція з періодом 2π. Розв'язок рівняння (5.13), що лежить на торі, можна подати у вигляді

$$r(t,\varepsilon) = \rho(t, \chi(t,\varepsilon), \varepsilon) = \Lambda(t, \nu(\varepsilon)t + c, \varepsilon),$$

де $\Lambda(t,\varphi,\varepsilon)$ – неперервна, періодична відносно t, φ функція з періодом 2π. Отже, число обертання $\nu(\varepsilon)$ є власною частотою для розв'язків на торі. Якщо власна частота $\nu(\varepsilon)$ ірраціональна, то кожний із цих розв'язків є квазіперіодичною функцією t з двома основними частотами 1 та $\nu(\varepsilon)$. Якщо число $\nu(\varepsilon)$ раціональне, то розв'язки, що лежать на торі S_ε, є періодичними з періодом, рівним знаменнику нескоротного дробу $\nu(\varepsilon)$.

Нехай виконується умова

$$\beta'(0) - \delta(0)\alpha'(0)/\gamma(0) \neq 0. \tag{5.17}$$

Тоді при досить малих ε функція $\nu(\varepsilon)$ буде монотонно зростаючою або монотонно спадною. Тому ця функція набуває кожного значення з деякого відрізка. Виберемо послідовність чисел ε_k, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, таку, що $\nu(\varepsilon_k) \neq \beta(0)$ і числа $\nu(\varepsilon_k)$ є раціональними. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(\varepsilon_k) = \beta(0)$ і знаменник T_k нескоротного дробу $\nu(\varepsilon_k)$ прямує до ∞ при $k \to \infty$. Отже, існує збіжна до нуля послідовність ε_k така, що при $\varepsilon = \varepsilon_k$ рівняння на торі S_ε, а отже, і рівняння (5.1) мають періодичні розв'язки, амплітуди яких прямують до нуля, а найменші періоди T_k необмежено зростають при $k \to \infty$. Таке явище називається субфуркацією періодичних розв'язків, а значення $\varepsilon = 0$ – точкою субфуркації [62].

Для квазіперіодичних розв'язків системи (5.1) на торі вірне зображення

$$X(t,\chi(t,\varepsilon),\varepsilon) = H(t,\varepsilon)[\sqrt{\varepsilon N}e^{i\nu(\varepsilon)t}, \sqrt{\varepsilon N}e^{-i\nu(\varepsilon)t}, 0]^T + O(\varepsilon),$$

$$Y(t,\chi(t,\varepsilon),\varepsilon) = h(t)X(t,\chi(t,\varepsilon),\varepsilon) + O(\varepsilon).$$

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 5.1. *Нехай виконуються умови леми та умова 2, нульовий розв'язок рівняння (5.4) асимптотично стійкий і відсутній сильний резонанс. Тоді існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ множина*

$$\{(t,\omega,\zeta) :\, t \in \mathbb{R}, \omega = X(t,\varphi,\varepsilon), \zeta = Y(t,\varphi,\varepsilon), \varphi \in \mathbb{R}\},$$

де функції $X(t,\varphi,\varepsilon)$, $Y(t,\varphi,\varepsilon)$ визначені рівностями (5.15), є інваріантним тором системи (5.1). Крім того, існує $r_2 > 0$ таке, що для кожного розв'язку $(x(t), y_t)$ системи (5.1), $0 < |x(\sigma)| + |y_\sigma| < r_2$, знайдеться розв'язок $\chi(t)$ рівняння (5.14) такий, що вірна оцінка (5.16). Якщо виконується також нерівність (5.17), то значення $\varepsilon = 0$ є точкою субфуркації періодичних розв'язків системи (5.1).

Зауваження. Лему 5.1 та теорему 5.1 можна узагальнити на випадок, коли права частина системи (5.1) залежить від ε. При цьому інтегральний многовид лінійної системи можна будувати за такими ж формулами.

Як приклад розглянемо систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F_1(t,x,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + F_2(t,x,\varepsilon)x + F_3(t,x,\varepsilon)y(t) + F_4(t,x,\varepsilon)y(t-\varepsilon) = 0,$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = -2y(t) + y(t-\varepsilon) + x, \tag{5.18}$$

де

$$F_k(t,x,\varepsilon) = a_k(\varepsilon) + b_k(\varepsilon)x^2 + c_k(t,x,\varepsilon), \quad c_k(t,x,\varepsilon) = o(|x|^2), \quad k = \overline{1,4},$$

$\varepsilon > 0$ і функції $c_k(t,x,\varepsilon)$ періодичні відносно t з періодом 2π.

Рівняння на многовиді буде рівнянням Льєнара вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a(\varepsilon) + b(\varepsilon)x^2 + c(t,x,\varepsilon))\frac{dx}{dt} + (A(\varepsilon) + B(\varepsilon)x^2 + C(t,x,\varepsilon))x = 0,$$

де

$$a(\varepsilon) = a_1(\varepsilon) - 2\varepsilon a_3(0) - 3\varepsilon a_4(0) + o(\varepsilon), \quad b(0) = b_1(0),$$

$$A(\varepsilon) = a_2(\varepsilon) + a_3(\varepsilon) + a_4(\varepsilon) + o(\varepsilon), \quad B(0) = b_2(0) + b_3(0) + b_4(0),$$

$$c(t,x,\varepsilon) = o(|x|^2), \quad C(t,x,\varepsilon) = o(|x|^2).$$

Із теореми 5.1 випливає, що за умов

$$a(0) = 0, \quad A(0) > 0, \quad A(0) \neq (k/3)^2, (k/4)^2, \quad k \in \{1, 2, \ldots\},$$

$$a'(0) < 0, \quad b(0) > 0$$

існує стійкий інваріантний тор системи (5.18). Якщо виконується також умова $A'(0)b(0) \neq 3B(0)a'(0)$, то значення $\varepsilon = 0$ є точкою субфуркації періодичних розв'язків системи (5.18).

5.2. Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G_1(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \qquad (5.19)$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbf{R^m}$, $y \in \mathbf{R^n}$, функції $h(t,x,y,z)$ та $P(t,x,y,z)$ періодичні відносно t з періодом 2π.

Припустимо, що виконуються умови

1) $f(0,0,0) = G_1(0,0,0) = 0$.

2) Для всіх $x \in \mathbf{R^m}$ рівняння $G_1(x,y,y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(x)$, причому $\varphi(0) = 0$, а функція $\varphi(x)$ та її похідні відносно x до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені.

3) Функції $f(x,y,z)$, $h(t,x,y,z)$, $G_1(x,y,z)$, $P(t,x,y,z)$ та їх частинні похідні відносно t, x, y, z до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені при $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R^m}$, $|y - \varphi(x)| \le \rho$, $|z - \varphi(x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G_1(x,y,z)$ в точці $y = \varphi(x)$, $z = \varphi(x)$ відносно y, z, систему (5.19) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B_1(x(t))y(t) + B_2(x(t))y(t-\varepsilon\Delta) + G(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) +$$
$$+\varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

причому при досить малому ρ для $|y| \le \rho$, $|z| \le \rho$ вірна нерівність

$$|G(x, y+\varphi(x), z+\varphi(x)) - G(x, \varphi(x), \varphi(x))| \le K(|y|^2 + |z|^2), \quad K > 0. \quad (5.20)$$

Нехай виконується умова

4) Всі корені характеристичного рівняння

$$det(B_1(x) + B_2(x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать в півплощині $Re\lambda \le -2\alpha < 0$.

Система (5.19) еквівалентна такій системі рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$y_t = T(t,\sigma)y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0[G(x(s), y(s), y(s-\varepsilon\Delta)) + \quad (5.21)$$

$$+\varepsilon P(s, x(s), y(s), y(s-\varepsilon\Delta))]ds,$$

де y_t−елемент простору $\mathbf{C} = \mathbf{C}[-\varepsilon\Delta, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$; $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$, $X_0(0) = E$, $E-$ одинична матриця; $T(t,s)-$ оператор зсуву за розв'язками рівняння

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B_1(x(t))y(t) + B_2(x(t))y(t-\varepsilon\Delta).$$

Для регулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь існування інтегральних многовидів доведено в [132], а для сингулярно збурених – в [85] та ін. Згідно з [85] при деякому $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, існує інтегральний многовид системи (5.19), що може бути поданий у вигляді $y_t = \varphi(x) + \xi(t, x, \varepsilon)$, де $\xi(t, x, 0) = 0$. У праці [39] одержано зображення інтегрального многовиду лінійної системи. У цьому підрозділі одержано наближене зображення інтегрального многовиду нелінійної сингулярно збуреної системи. Це дає можливість використати результати Мельникова [78] для рівняння на многовиді і дослідити умови існування гомоклінічних точок.

Теорема 5.2. *Нехай для системи (5.19) виконуються умови 1 – 4. Тоді інтегральний многовид системи (5.19) можна зобразити у вигляді* $y_t = \varphi(x) + g(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$, *де*

$$g(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[B_1(x) + B_2(x)]^{-1}\Big[(E + \Delta B_2(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x, \varphi(x), \varphi(x)) -$$

$$-P(t, x, \varphi(x), \varphi(x))\Big] + \theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x, \varphi(x), \varphi(x)), \quad -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0.$$

Доведення. Систему (5.21) перепишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\frac{dy_t}{dt} = A(t)y_t + \frac{1}{\varepsilon}X_0 G(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + X_0 P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \quad (5.22)$$

де $A(t)-$ необмежений оператор, що задається рівністю

$$A(t)\psi(\theta) = \begin{cases} d\psi/d\theta, & -\varepsilon\Delta \le \theta < 0, \\ (B_1(x(t))\psi(0) + B_2(x(t))\psi(-\varepsilon\Delta))/\varepsilon, & \theta = 0. \end{cases}$$

Зробивши в системі (5.22) заміну $y_t = \varphi(x) + z_t$, одержимо систему

$$
\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) + \varepsilon h(t, x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta),\\
\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) + \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial x} h(t, x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) +\\
+\frac{dz_t}{dt} = A(t)\varphi(x) + A(t)z_t + \frac{1}{\varepsilon} X_0 G(x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) +\\
+X_0 P(t, x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta),
\end{gathered}
\tag{5.23}
$$

де $z = z(t)$, $z_\Delta = z(t - \varepsilon\Delta)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-$ матриця Якобі з елементами $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$.

Оскільки

$$
A(t)\varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon} X_0 B_1(x)\varphi(x) + \frac{1}{\varepsilon} X_0 B_2(x)\varphi(x) = -\frac{1}{\varepsilon} X_0 G(x, \varphi(x), \varphi(x)),
$$

то із нерівності (5.20) випливає оцінка

$$
\left| A(t)\varphi(x) + \frac{1}{\varepsilon} X_0 G(x, \varphi(x) + z, \varphi(x) + z_\Delta) \right| \le \frac{K}{\varepsilon}(|z|^2 + |z_\Delta|^2).
$$

Знайдемо зображення інтегрального многовиду $z_t = g(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$ системи (5.23) з точністю до членів порядку ε. Тоді для функції $g(t, x, \varepsilon)$ одержимо рівняння

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)) = A(t) g(t, x, \varepsilon) + X_0 P(t, x, \varphi(x), \varphi(x)). \tag{5.24}
$$

В цьому рівнянні збережено члени порядку $O(1)$. Із рівняння (5.24) при $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$ знаходимо

$$
g(t, x, \varepsilon) = g(t, x, \varepsilon)|_{\theta=0} + \theta \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)).
$$

При $\theta = 0$ маємо

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\varepsilon} B_1(x) g(t, x, \varepsilon)|_{\theta=0} + \frac{1}{\varepsilon} B_2(x) g(t, x, \varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta} + P(t, x, \varphi(x), \varphi(x)) =\\
= \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(x, \varphi(x), \varphi(x)),
\end{gathered}
$$

або

$$[B_1(x)+B_2(x)]g(t,x,\varepsilon)|_{\theta=0}=\varepsilon(E+\Delta B_2(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x,\varphi(x),\varphi(x))-$$

$$-\varepsilon P(t,x,\varphi(x),\varphi(x)).$$

Звідси знаходимо шуканий вираз

$$g(t,x,\varepsilon)=\varepsilon[B_1(x)+B_2(x)]^{-1}\Big[(E+\Delta B_2(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x,\varphi(x),\varphi(x))-$$

$$-P(t,x,\varphi(x),\varphi(x))\Big]+\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x,\varphi(x),\varphi(x)).$$

Тому інтегральний многовид системи (5.19) можна зобразити у вигляді

$$y_t=\varphi(x)+g(t,x,\varepsilon)+O(\varepsilon^2).$$

Теорема доведена.

Позначимо

$$\mu(t,x)=\frac{1}{\varepsilon}g(t,x,\varepsilon)\Big|_{\theta=0}=[B_1(x)+B_2(x)]^{-1}\Big[(E+\Delta B_2(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x,\varphi(x),\varphi(x))-$$

$$-P(t,x,\varphi(x),\varphi(x))\Big],\quad \eta(t,x)=\frac{1}{\varepsilon}g(t,x,\varepsilon)\Big|_{\theta=-\varepsilon\Delta}=[B_1(x)+B_2(x)]^{-1}\times$$

$$\times\Big[(E-\Delta B_1(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x,\varphi(x),\varphi(x))-P(t,x,\varphi(x),\varphi(x))\Big].$$

Тоді рівняння на многовиді системи (5.19) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\varphi(x)+\varepsilon\mu(t,x),\varphi(x)+\varepsilon\eta(t,x))+\varepsilon h(t,x,\varphi(x),\varphi(x))+O(\varepsilon^2).$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\varphi(x),\varphi(x))+\varepsilon\Big[\frac{\partial f}{\partial y}\mu(t,x)+\frac{\partial f}{\partial z}\eta(t,x)+$$

$$+h(t,x,\varphi(x),\varphi(x))\Big]+O(\varepsilon^2),$$

або

$$\frac{dx}{dt}=F(x)+\varepsilon H(t,x)+O(\varepsilon^2), \tag{5.25}$$

де

$$F(x) = f(x, \varphi(x), \varphi(x)), \quad H(t,x) = f_y(x, \varphi(x), \varphi(x))\mu(t,x) +$$

$$+ f_z(x, \varphi(x), \varphi(x))\eta(t,x) + h(t, x, \varphi(x), \varphi(x)).$$

Для кожного розв'язку $(x(t), y(t))$ системи (5.19) існує розв'язок $\chi(t)$ рівняння (5.25), такий, що вірна оцінка

$$|x(t) - \chi(t)| + |y_t - \varphi(\chi(t)) - \xi(t, \chi(t), \varepsilon)| \leq K_1 \exp(-\alpha/(2\varepsilon)),$$

де $t \geq \sigma$, $K_1 > 0$.

Нехай виконуються умови

5) Матриця $F_x(0)$ не має власних чисел на уявній осі.

6) Система $dx/dt = F(x)$ має обмежений розв'язок $x = \zeta(t)$, причому $\lim_{t\to-\infty} \zeta(t) = \lim_{t\to+\infty} \zeta(t) = 0$.

7) Рівняння в варіаціях

$$\frac{dx}{dt} = F_x(\zeta(t))x \tag{5.26}$$

є експоненціально дихотомічним на півосях $(-\infty, 0]$ та $[0, \infty)$.

8) Існує $t_0 \in \mathbf{R}$ таке, що $\Delta(t_0) = 0$, $\Delta'(t_0) \neq 0$, де

$$\Delta(t_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^*(t) H(t + t_0, \zeta(t)) dt,$$

$\psi(t)$ – обмежений на $(-\infty, \infty)$ розв'язок системи, спряженої до (5.26).

Тоді згідно з [78, 111, 165] існує єдиний обмежений розв'язок $x(t, \varepsilon)$ системи (5.25), такий, що $|x(t,\varepsilon) - \zeta(t)| \leq C\varepsilon$, $C > 0$, причому рівняння в варіаціях

$$\frac{dx}{dt} = [F_x(x(t,\varepsilon)) + \varepsilon H_x(t, x(t,\varepsilon))]x$$

є експоненціально дихотомічним на $(-\infty, \infty)$.

Позначимо через $Q(t)$ матрицю Гріна системи $dx/dt = F_x(0)x$ і розглянемо інтегральне рівняння

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(t-s)[F(x(s)) - F_x(0)x(s) + \varepsilon H(s, x(s)) + O(\varepsilon^2)] ds. \tag{5.27}$$

За допомогою методу послідовних наближень можна показати, що рівняння (5.27) має обмежений розв'язок $\bar{x}(t,\varepsilon)$, який є періодичним розв'язком системи (5.25), причому $\sup_{-\infty<t<\infty}|\bar{x}(t,\varepsilon)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Крім того, виконуються рівності

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t,\varepsilon)-\bar{x}(t,\varepsilon)| = \lim_{t\to-\infty}|x(t,\varepsilon)-\bar{x}(t,\varepsilon)| = 0.$$

Замкнутій сепаратрисі $x = \zeta(t)$ сідла системи $dx/dt = F(x)$ відповідає замкнута сепаратриса $x = \zeta(t)$, $y_t = \varphi(\zeta(t))$ сідла системи (5.19) при $\varepsilon = 0$. Періодичному розв'язку $\bar{x}(t,\varepsilon)$ системи (5.25) відповідає періодичний розв'язок

$$x = \bar{x}(t,\varepsilon), \quad y_t = \bar{y}_t(\varepsilon) \equiv \varphi(\bar{x}(t,\varepsilon)) + g(t,\bar{x}(t,\varepsilon),\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$$

системи (5.19). Обмеженому розв'язку $x(t,\varepsilon)$ системи (5.25), близькому до $\zeta(t)$ відповідає обмежений розв'язок

$$x = x(t,\varepsilon), \quad y_t = y_t(\varepsilon) \equiv \varphi(x(t,\varepsilon)) + g(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$$

системи (5.19), причому

$$|x(t,\varepsilon)-\zeta(t)| + |y_t(\varepsilon)-\varphi(\zeta(t))| \le |x(t,\varepsilon)-\zeta(t)| +$$

$$+L|x(t,\varepsilon)-\zeta(t)| + \varepsilon M + M_1\varepsilon^2 \le [(1+L)C+M]\varepsilon + M_1\varepsilon^2, \tag{5.28}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}(|x(t,\varepsilon)-\bar{x}(t,\varepsilon)| + |y_t(\varepsilon)-\bar{y}_t(\varepsilon)|) = 0,$$

де L – стала Ліпшиця для функції φ, M – стала, що обмежує зверху функцію

$$\left|[B_1(x)+B_2(x)]^{-1}\left[(E+\Delta B_2(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x,\varphi(x),\varphi(x)) - P(t,x,\varphi(x),\varphi(x))\right]\right| +$$

$$+\left|\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(x,\varphi(x),\varphi(x))\right|.$$

Розглянемо відображення Пуанкаре $x \to \Phi(x)$ для системи (5.25), тобто відображення, що ставить у відповідність початковому значенню $x \in \mathbf{R^m}$ при $t = 0$ розв'язку системи (5.25) значення цього розв'язку в момент $t =$

2π. Згідно з [165] існує трансверсальна гомоклінічна точка відображення Φ. Тому згідно з теоремою Смейла-Біркгофа [91, с. 143] існує канторова множина $\Lambda \subset \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, на якій деяка ітерація відображення Φ є інваріантною і топологічно спряженою зсуву Бернуллі над скінченною множиною символів.

Розглянемо множину

$$\Lambda_1 = \{(x,q)|x \in \Lambda, q = \varphi(x) + \xi(0,x,\varepsilon), q \in \mathbf{C}\}.$$

Ця множина є канторовою. На множині Λ_1 деяка ітерація відображення Пуанкаре для системи (5.19) є інваріантною і топологічно спряжена зсуву Бернуллі над скінченною множиною символів.

Отже, вірне наступне твердження.

Теорема 5.3. *Нехай виконуються умови 1 – 8. Тоді існує замкнута сепаратриса сідла, періодичний розв'язок $(\bar{x}(t,\varepsilon), \bar{y}_t(\varepsilon))$ і обмежений розв'язок $(x(t,\varepsilon), y_t(\varepsilon))$ системи (5.19). При цьому справджуються співвідношення (5.28). Існує канторова множина Λ_1 така, що на цій множині деяка ітерація відображення Пуанкаре для системи (5.19) є інваріантною і топологічно спряжена зсуву Бернуллі над скінченною множиною символів.*

Як приклад розглянемо систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = y(t-0,5\varepsilon) - x_1^3 - \varepsilon\gamma x_2 + \varepsilon\beta\cos\omega t,$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = -2y(t) + y(t-0,5\varepsilon) + x_1, \tag{5.29}$$

де ε – малий додатний параметр. Згідно з теоремою 5.2 інтегральний многовид системи (5.29) можна зобразити у вигляді $y_t = x_1 - 1,5\ \varepsilon x_2 + \theta x_2$, $-0,5\ \varepsilon \le \theta \le 0$. Тому система рівнянь на многовиді для системи (5.29) матиме вигляд

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_1^3 - \varepsilon(\gamma+2)x_2 + \varepsilon\beta\cos\omega t + O(\varepsilon^2).$$

Сідлова точка незбуреної системи розташована в початку координат, а рух по петлі сепаратриси цієї системи описується виразами

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{ch(t+\theta)}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(t+\theta)}{ch^2(t+\theta)}.$$

Інтеграли для функції Мельникова $\Delta(\theta)$ можна обчислити явно

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{sh}^2 t}{ch^4 t} = \frac{4}{3},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2(t+\theta)\cos\omega t dt = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(t+\theta)}{ch^2(t+\theta)}\cos\omega t dt = -\frac{\sqrt{2}\pi\omega}{ch(\pi\omega/2)}\sin\omega\theta,$$

отже,

$$\Delta(\theta) = -\frac{4}{3}(\gamma+2) - \beta\frac{\sqrt{2}\pi\omega}{ch(\pi\omega/2)}\sin\omega\theta.$$

При $\gamma + 2 > 0$ умова знакозмінності функції Мельникова та існування гомоклінічних точок системи (5.29) набере вигляду

$$\frac{\beta}{\gamma+2} > \frac{2\sqrt{3}\,\mathrm{ch}(\pi\omega/2)}{3\pi\omega}.$$

Як приклад розглянемо систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -y(t-0,5\varepsilon) + x_1^2 - \varepsilon\gamma x_2 + \varepsilon\beta\cos\omega t,$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = -2y(t) + y(t-0,5\varepsilon) + x_1, \tag{5.30}$$

де ε – малий додатний параметр. Згідно з теоремою 5.2 інтегральний многовид системи (5.30) можна зобразити у вигляді $y_t = x_1 - 1,5\ \varepsilon x_2 + \theta x_2$, $-0,5\ \varepsilon \le \theta \le 0$. Тому система рівнянь на многовиді для системи (5.30) матиме вигляд

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_1^2 - \varepsilon(\gamma-2)x_2 + \varepsilon\beta\cos\omega t + O(\varepsilon^2).$$

Сідлова точка незбуреної системи розташована в точці $(0;1)$, а рух по петлі сепаратриси цієї системи описується виразами

$$x_1 = \frac{ch(t+\theta)-2}{ch(t+\theta)+1}, \quad x_2 = \frac{3\,\mathrm{sh}(t+\theta)}{(ch(t+\theta)+1)^2}.$$

Інтеграли для функції Мельникова $\Delta(\theta)$ можна обчислити явно

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{9\,\mathrm{sh}^2 t}{(ch(t)+1)^4} = \frac{6}{5},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_2(t+\theta)\cos\omega t dt = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{3\,\mathrm{sh}(t+\theta)}{(ch(t+\theta)+1)^2}\cos\omega t dt = -\frac{6\pi\omega^2}{sh(\pi\omega)}\sin\omega\theta,$$

отже,

$$\Delta(\theta) = -\frac{6}{5}(\gamma-2) - \beta\frac{6\pi\omega}{sh(\pi\omega)}\sin\omega\theta.$$

При $\gamma - 2 > 0$ умова знакозмінності функції Мельникова та існування гомоклінічних точок системи (5.30) набере вигляду

$$\frac{\beta}{\gamma-2} > \frac{\pi\ sh(\pi\omega)}{5\pi^2\omega^2}.$$

5.3. Застосування асимптотичних методів до дослідження періодичних розв'язків диференціально-різницевих рівнянь

5.3.1. Побудова інтегрального многовиду сингулярно збуреної системи

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \tag{5.31}$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Припустимо, що виконуються умови

1) Для всіх $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$ рівняння $G(t, x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(t, x)$, причому функція $\varphi(t, x)$ та її похідні за t і x до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені.

2) Функції $f(t, x, y, z)$, $h(t, x, y, z)$, $G(t, x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$ та їх частинні похідні за t, x, y, z до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $|y - \varphi(t, x)| \le \rho$, $|z - \varphi(t, x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(t, x, y, z)$ в точці $y = \varphi(t, x)$, $z = \varphi(t, x)$ відносно y, z, одержимо

$$G(t, x, \varphi(t, x) + y, \varphi(t, x) + z) = B_1(t, x)y + B_2(t, x)z + G_1(t, x, y, z),$$

причому при досить малому ρ для $|y| \le \rho$, $|z| \le \rho$ правильна нерівність $|G_1(t, x, y, z)| \le K(|y|^2 + |z|^2), \quad K > 0$.

Нехай виконується умова:

3) всі корені характеристичного рівняння

$$det(B_1(t, x) + B_2(t, x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать у півплощині $Re\lambda \le -2\alpha < 0$.

Для регулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь існування інтегральних многовидів доведено в [132], а для сингулярно збурених – в [85] та ін. Згідно з [85], при деякому $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (5.31), що може бути поданий у вигляді $y_t = \varphi(t, x) + \xi(t, x, \varepsilon)$, де $\xi(t, x, 0) = 0$. У праці [39] одержано зображення інтегрального многовиду лінійної системи. У цьому підрозділі одержано наближене зображення інтегрального многовиду нелінійної сингулярно збуреної системи більш загального вигляду, ніж в [39, 50].

Теорема 5.4. *Нехай для системи (5.31) виконуються умови 1 – 3. Тоді інтегральний многовид системи (5.31) можна зобразити у вигляді* $y_t = \varphi(t,x) + g(t,x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$, *де*

$$g(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[B_1(t,x) + B_2(t,x)]^{-1}\Big[(E + \Delta B_2(t,x))\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t} +$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big) - P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big] +$$

$$+\theta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right], \quad -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0.$$

Доведення. Інтегральний многовид системи (5.31) будемо шукати у вигляді $y(t) = \varphi(t,x(t)) + \varepsilon\psi(t,x(t)) + O(\varepsilon^2)$, де $\psi(t,x)$ – функція, яку ми визначимо пізніше. Тоді

$$y(t+\theta) = \varphi(t+\theta, x(t+\theta)) + \varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2) = \varphi\left(t+\theta, x+\theta\frac{dx}{dt}\right) +$$

$$+\varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2) = \varphi(t,x) + \theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \varphi(t,x) + \theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) + \varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2).$$

Звідси

$$y(t-\varepsilon\Delta) = \varphi(t,x) - \varepsilon\Delta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right] + \varepsilon\psi(t,x) + O(\varepsilon^2).$$

Тому

$$G(t,x,y(t),y(t-\varepsilon\Delta)) = G(t,x,\varphi(t,x) + \varepsilon\psi(t,x), \varphi(t,x) - \varepsilon\Delta\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \varepsilon\psi(t,x)) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon B_1(t,x)\psi(t,x) +$$

$$+\varepsilon B_2(t,x)\psi(t,x) - \varepsilon\Delta B_2(t,x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right) + O(\varepsilon^2).$$

Крім того

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi(t,x)}{dt} + O(\varepsilon) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)) + O(\varepsilon).$$

Підставляючи знайдені вирази в систему (5.31) і зберігаючи тільки члени порядку ε, одержимо

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))=\varepsilon B_1(t,x)\psi(t,x)+\varepsilon B_2(t,x)\psi(t,x)-$$
$$-\varepsilon\Delta B_2(t,x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right)+\varepsilon P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)),$$

звідки

$$[B_1(t,x)+B_2(t,x)]\psi(t,x)=(E+\Delta B_2(t,x))\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right)-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)),$$

або

$$\psi(t,x)=(B_1(t,x)+B_2(t,x))^{-1}\Big[(E+\Delta B_2(t,x))\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right)-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big].$$

Звідси знаходимо шуканий вираз

$$g(t,x,\varepsilon)=\varepsilon[B_1(t,x)+B_2(t,x)]^{-1}\Big[(E+\Delta B_2(t,x))\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big)-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big]+\theta\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big],\quad -\varepsilon\Delta\le\theta\le 0.$$

Тому інтегральний многовид системи (5.31) можна зобразити у вигляді

$$y_t=\varphi(t,x)+g(t,x,\varepsilon)+O(\varepsilon^2).$$

Теорема доведена.

Позначимо

$$\eta(t,x)=\frac{1}{\varepsilon}g(t,x,\varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta}=[B_1(t,x)+B_2(t,x)]^{-1}\Big[(E-\Delta B_1(t,x))\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big)-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\Big].$$

Тоді рівняння на многовиді системи (5.31) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\varphi(t,x)+\varepsilon\psi(t,x),\varphi(t,x)+\varepsilon\eta(t,x))+\varepsilon h(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))+O(\varepsilon^2).$$

5.3.2. Періодичні коливання в автономних рівняннях з малим запізненням

Розглянемо сингулярно збурену систему

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \qquad (5.32)$$

де ε – малий додатний параметр, Δ – фіксоване додатне число, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Нехай виконуються умови:

1) Для всіх $x \in \mathbb{R}$ рівняння $G(x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(x)$, причому функція $\varphi(x)$ та її похідні за x до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені.

2) Функції $f(x, y, z)$, $h(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $P(x, y, z)$ і їх частинні похідні за x, y, z до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені при $x \in \mathbb{R}$, $|y - \varphi(x)| \leq \rho$, $|z - \varphi(x)| \leq \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(x, y, z)$ в точці $y = \varphi(x)$, $z = \varphi(x)$ відносно y, z, одержимо

$$G(x, y + \varphi(x), z + \varphi(x)) = B_1(x)y + B_2(x)z + G_1(x, y, z),$$

де $G_1(x, y, z) = O(|y|^2 + |z|^2)$ при $|y| + |z| \to 0$.

Нехай виконується умова:

3) всі корені характеристичного рівняння

$$det(B_1(x) + B_2(x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda \leq -2\alpha < 0$.

Тоді згідно з теоремою 1 інтегральний многовид системи (5.32) можна зобразити у вигляді

$$y_t = \varphi(x) + \varepsilon\Psi(x, z) + \theta z\frac{d\varphi(x)}{dx} + O(\varepsilon^2), \quad -\varepsilon\Delta \leq \theta \leq 0,$$

де

$$\Psi(x,z)=(B_1(x)+B_2(x))^{-1}\Big[z(E+\Delta B_2(x))\frac{d\varphi}{dx}-P(x,\varphi(x),\varphi(x))\Big].$$

Позначимо $\eta(x,z)=\Psi(x,z)-\Delta z\dfrac{d\varphi}{dx}$. Тоді рівняння на многовиді системи (5.32) наберуть вигляду

$$\frac{dx}{dt}=z,\quad \frac{dz}{dt}=f(x,\varphi(x)+\varepsilon\Psi(x,z),\varphi(x)+\varepsilon\eta(x,z))+$$
$$+\varepsilon h(x,\varphi(x),\varphi(x))+O(\varepsilon^2). \tag{5.33}$$

Підставляючи $z=dx/dt$ у друге рівняння системи (5.33), одержимо рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\Big(x,\varphi(x)+\varepsilon\Psi\Big(x,\frac{dx}{dt}\Big),\varphi(x)+\varepsilon\eta\Big(x,\frac{dx}{dt}\Big)\Big)+$$
$$+\varepsilon h(x,\varphi(x),\varphi(x))+O(\varepsilon^2). \tag{5.34}$$

Рівняння (5.34) зведемо до вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+q(x)=\varepsilon Q\Big(x,\frac{dx}{dt},\varepsilon\Big), \tag{5.35}$$

де

$$q(x)=-f(x,\varphi(x),\varphi(x)),$$
$$Q(x,y,\varepsilon)=\Psi(x,y)\frac{\partial f(x,y,\varphi(x))}{\partial y}\Big|_{y=\varphi(x)}+\eta(x,y)\frac{\partial f(x,\varphi(x),z)}{\partial z}\Big|_{z=\varphi(x)}+$$
$$+h(x,\varphi(x),\varphi(x))+O(\varepsilon).$$

Нехай рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}+q(x)=0 \tag{5.36}$$

має періодичний розв'язок

$$x=z(\psi,a),\quad z(\psi+2\pi,a)=z(\psi,a),\quad \psi=w(a)t+\varphi, \tag{5.37}$$

де стала a належить деякому інтервалу, φ – довільна стала, Дослідженню рівняння (5.35) присвячено праці М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського [79], І.Г.Малкіна [74], А.М.Самойленка [104] та ін. У цьому підрозділі за допомогою методу усереднення [79] встановлено існування періодичних розв'язків рівняння (5.35). Ці результати застосовано до рівнянь із запізненням. Метод усереднення застосовано також до дослідження стійкості систем із запізненням.

Зробимо в рівнянні (5.35) заміну

$$x = z(\psi, a), \quad \frac{dx}{dt} = w(a) z'_{\psi}(\psi, a). \tag{5.38}$$

Врахувавши співвідношення $w^2(a) z''_{\psi^2} + q(z) = 0$, рівняння (5.35) зведемо до стандартної форми

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{D(a)} Q(z, wz'_{\psi}, \varepsilon) z'_{\psi},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = w(a) - \frac{\varepsilon}{D(a)} Q(z, wz'_{\psi}, \varepsilon) z'_{a},$$

де $D(a) = -wz'_a z''_{\psi^2} + z'_{\psi}(wz'_{\psi})'_a$.

Поділивши в цій системі перше рівняння на друге, отримаємо

$$\frac{da}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{D(a)w(a)} Q(z, wz'_{\psi}, \varepsilon) z'_{\psi} + O(\varepsilon^2). \tag{5.39}$$

Поставимо у відповідність рівнянню (5.39) усереднене рівняння $\dfrac{da_1}{d\psi} = \varepsilon G(a_1)$, де

$$G(a) = \frac{\Phi(a)}{D(a)w(a)}, \quad \Phi(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q(z(\psi, a), w(a) z'_{\psi}(\psi, a), 0) z'_{\psi}(\psi, a) d\psi.$$

Теорема 5.5. *Нехай для системи (5.32) виконуються умови 1 – 3. Припустимо, що рівняння (5.36) має періодичний розв'язок (5.37) для a, що належать деякому околу значення $\bar{a}$. Якщо $\Phi(\bar{a}) = 0$, $D(\bar{a}) \neq 0$, $w(\bar{a}) \neq 0$, $G'(\bar{a}) \neq 0$, то система (5.32) має цикл з періодом, близьким до $2\pi/w(\bar{a})$. Цей цикл буде стійким, якщо $G'(\bar{a}) < 0$ і нестійким, якщо $G'(\bar{a}) > 0$.*

Для доведення досить застосувати до рівняння (5.39) другу теорему Боголюбова про усереднення на нескінченному інтервалі [79].

Дослідимо періодичні коливання в рівнянні [29]

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + H(x(t), x(t-\varepsilon)) = 0, \tag{5.40}$$

де ε – малий додатний параметр, функція $H(x,y)$ тричі неперервно диференційовна при $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Позначимо

$$q(x) = H(x,x), \quad g(x) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=x}.$$

Тоді

$$H(x(t), x(t-\varepsilon)) = H\Big(x(t), x(t) - \varepsilon\frac{dx(t)}{dt} +$$

$$+O(\varepsilon^2)\Big) = q(x(t)) - \varepsilon g(x(t))\frac{dx(t)}{dt} + O(\varepsilon^2).$$

Підставляючи в рівняння (5.40), одержимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q(x) = \varepsilon g(x)\frac{dx}{dt} + O(\varepsilon^2).$$

Це рівняння з точністю до $O(\varepsilon^2)$ зводиться до вигляду (5.35), причому $Q(x,y,\varepsilon) = g(x)y + O(\varepsilon)$. Нехай рівняння (5.36) має періодичний розв'язок (5.37) для a, що належать деякому околу значення $\bar{a}$. Зробивши в рівнянні (5.40) заміну (5.38), можна одержати рівняння вигляду (5.39). Застосовуючи до цього рівняння другу теорему Боголюбова про усереднення на нескінченному інтервалі [79], одержимо, що при $\Phi_1(\bar{a}) = 0$, $D(\bar{a}) \neq 0$, $w(\bar{a}) \neq 0$, $G_1'(\bar{a}) \neq 0$ система (5.32) має цикл з періодом, близьким до $2\pi/w(\bar{a})$. Цей цикл буде стійким, якщо $G_1'(\bar{a}) < 0$ і нестійким, якщо $G_1'(\bar{a}) > 0$. Тут позначено

$$G_1(a) = \frac{\Phi_1(a)}{D(a)}, \quad \Phi_1(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(z(\psi,a))(z_\psi'(\psi,a))^2 d\psi.$$

Як приклад розглянемо рівняння (5.40) з функцією

$$H(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + my^3 + \delta y - \gamma x,$$

де $a+b+c+m=1$, $\gamma-\delta=1$. Тоді рівняння (5.40) зводиться до вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 - x = \varepsilon\delta\frac{dx}{dt} + \varepsilon\beta x^2\frac{dx}{dt} + O(\varepsilon^2), \tag{5.41}$$

де $\beta = b + 2c + 3m$. При $\varepsilon = 0$ це рівняння має періодичний розв'язок

$$x = z(\psi,k) = \sqrt{\frac{2}{2-k^2}}\,\mathrm{dn}\,\frac{K\psi}{\pi}, \quad \psi = \frac{\pi t}{K\sqrt{2-k^2}}, \quad w(k) = \frac{\pi}{K\sqrt{2-k^2}},$$

де k – модуль еліптичної функції, K – повний еліптичний інтеграл.

Згідно з аналогом теореми 5.5 умова існування періодичних розв'язків рівняння (5.41) набуде вигляду

$$\delta F_1(k) + \beta F_2(k) = 0, \tag{5.42}$$

де

$$F_1(k) = 2(2-k^2)^{-3/2}\int\limits_0^{2K}(d')^2du, \quad F_2(k) = 4(2-k^2)^{-5/2}\int\limits_0^{2K}d^2(d')^2du.$$

Тут позначено $d = \mathrm{dn}\,u$. Для обчислення $F_1(k)$ використаємо рівність $\int\limits_0^{2K}\mathrm{dn}^2u\,du = 2E$, де E – повний еліптичний інтеграл другого роду. Застосовуючи формули для похідних функції $d = \mathrm{dn}\,u$, одержуємо

$$(d^2)'' = 2(1-d^2)(d^2+k^2-1) + 2d^2(2-2d^2-k^2).$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{2K}(\mathrm{d}^2)''\,du = 0,$$

то

$$\int\limits_0^{2K}d^4\,du = \frac{4}{3}E(2-k^2) - \frac{2}{3}K(1-k^2),$$

отже,

$$F_1(k) = 2(2-k^2)^{-3/2} \int\limits_0^{2K} (2d^2 - d^4 + k^2 - 1 - d^2k^2)du =$$

$$= \frac{4}{3}[(2-k^2)E + 2(k^2-1)K](2-k^2)^{-3/2}.$$

Оскільки $\int\limits_0^{2K} (\mathrm{d}^4)''\, du = 0$, то, інтегруючи рівність

$$(d^4)'' = 16(2-k^2)d^4 + 12(k^2-1)d^2 - 20d^6$$

в межах від 0 до $2K$, отримуємо

$$\int\limits_0^{2K} d^6 dt = \frac{1}{15}[E(16k^4 + 46 - 46k^2) + 8K(1-k^2)(k^2-2)],$$

звідки

$$F_2(k) = \frac{8}{15}[2(1-k^2+k^4)E + (k^2-2)(1-k^2)K](2-k^2)^{-5/2}.$$

Із рівності (5.42) знаходимо $\dfrac{\beta}{\delta} = -\dfrac{F_1(k)}{F_2(k)}$. При збільшенні модуля k від 0 до 1 функція $\dfrac{F_1(k)}{F_2(k)}$ монотонно зростає, причому

$$\lim_{k\to 1-0} \frac{F_1(k)}{F_2(k)} = \frac{5}{4}, \quad \lim_{k\to 0+0} \frac{F_1(k)}{F_2(k)} = 1.$$

Отже, якщо $-\dfrac{5}{4} < \dfrac{\beta}{\delta} < -1$, то при малих значеннях $\varepsilon > 0$ існує періодичний розв'язок рівняння (5.41) та відповідного йому рівняння (5.40). Внаслідок симетрії рівняння (5.41) існує ще один періодичний розв'язок з протилежним знаком.

5.4. Дослідження різницевих рівнянь з раціональними правими частинами

Розглянемо неперервне відображення $y = f(x)$ відрізка $[a, b]$ в себе. За допомогою цього відображення можна задати різницеве рівняння $x_{i+1} = f(x_i)$. Нерухомою точкою цього відображення називається таке число x_0, що $f(x_0) = x_0$. Точка x_0 називається періодичною періоду m, якщо $f^m(x_0) = x_0$, $f^i(x_0) \neq x_0$ при $0 < i < m$. Якщо точка x_0 періодична періоду m, то кожна із точок $x_i = f^i(x_0)$, $1 \leq i \leq m-1$, також буде періодичною і точки x_0, x_1, ..., x_{m-1} утворюють періодичну траєкторію або цикл періоду m.

Розглянемо нелінійне відображення із зліченним числом циклів. Це відображення будемо задавати за допомогою деякого полінома Чебишова $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$.

Припустивши, що $n \geq 2$, одержимо

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad \ldots .$$

Розглянемо функцію $H(x) = -\cos \dfrac{\pi(x+1)}{2}$. Ця функція гомеоморфно відображає відрізок $[-1, 1]$ в себе. Обернене відображення має вигляд

$$H^{-1}(y) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos y, \quad y \in [-1; 1].$$

За допомогою гомеоморфізму H побудуємо кусково-лінійне відображення f_n, еквівалентне відображенню T_n

$$f_n(x) = H^{-1}(T_n(H(x))) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \cos n \arccos \left(-\cos \frac{\pi(x+1)}{2} \right).$$

Оскільки $\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos \alpha$, то

$$f_n(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \cos \frac{n\pi(1-x)}{2}.$$

Якщо $1 - \dfrac{2}{n} \le x \le 1$, то $0 \le \dfrac{n\pi(1-x)}{2} \le \pi$, тому

$$f_n(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n\pi(1-x)}{2} = n(x-1) + 1.$$

Якщо $1 - \dfrac{4}{n} \le x \le 1 - \dfrac{2}{n}$, то $\pi \le \dfrac{n\pi(1-x)}{2} \le 2\pi$.

Враховуючи, що $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$, одержимо

$$\cos\frac{n\pi(1-x)}{2} = \cos\left(\pi + \frac{n\pi(1-x-\frac{2}{n})}{2}\right) = -\cos\frac{n\pi\left(1-x-\frac{2}{n}\right)}{2},$$

після чого функція f_n зведеться до вигляду

$$f_n(x) = n(1-x) - 3.$$

Значення функції $f_n(x)$ будуть періодично повторюватися на відрізку $[-1, 1]$ з періодом $\dfrac{4}{n}$. Отже, графіком функції $f_n(x)$ буде кусково-лінійне зубчате відображення.

Оскільки відображення T_n і f_n спряжені, то спряжені (або еквівалентні) і динамічні системи, породжені цими відображеннями.

Щоб дослідити властивості відображення T_n досить розглянути кусково-лінійне відображення f_n. При цьому відображення f_n природно розглядати в n-ічній системі числення, враховуючи співвідношення $f_n^m(x) = f_{n^m}(x)$.

Спочатку знайдемо нерухомі точки відображення T_n із рівняння $T_n(x) = x$. Останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$\cos(n \arccos x) - \cos\arccos x = 0.$$

Зобразивши різницю у вигляді добутку, одержимо

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}\arccos x\right)\sin\left(\frac{n-1}{2}\arccos x\right) = 0.$$

Спочатку розв'яжемо рівняння

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}\arccos x\right) = 0. \tag{5.43}$$

Звідси одержимо

$$\frac{n+1}{2}\arccos x = r\pi, \quad x = \ cos\frac{2r\pi}{n+1}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Але $0 \le \arccos x \le \pi$, тому $r \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\}$.

Розв'яжемо рівняння

$$\sin\left(\frac{n-1}{2}\arccos x\right) = 0. \tag{5.44}$$

Звідси знаходимо

$$\frac{n-1}{2}\arccos x = l\pi, \quad x = \ cos\frac{2l\pi}{n+1}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Умова $0 \le \dfrac{2l\pi}{n-1} \le \pi$ виконується, якщо $l \in \left\{0, 1, \ldots \left[\frac{n}{2} - 1\right]\right\}$. Значення $x = 1$ задовольняє рівняння (5.43) і (5.44), інші розв'язки цих рівнянь не збігаються.

Отже, ми знайшли n дійсних коренів рівняння $T_n(x) = x$ при $n \ge 2$. Розглянемо тепер різницеве рівняння

$$x_{i+1} = T_n(x_i). \tag{5.45}$$

Ми визначили n нерухомих точок цього рівняння. Періодичні точки періоду m знайдемо із рівняння

$$T_n^m(x) = x. \tag{5.46}$$

Враховуючи, що $T_n^m(x) = T_{n^m}(x)$, останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$T_{n^m}(x) = x. \tag{5.47}$$

Рівняння (5.47) має розв'язки

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n^m+1}, \quad k \in \left\{0, 1, \ldots, \left[\frac{n^m+1}{2}\right]\right\},$$

$$x = \cos\frac{2l\pi}{n^m-1}, \quad l \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n^m}{2} - 1\right]\right\}.$$

Всього рівняння (5.47) має n^m розв'язків, отже, рівняння (5.46) теж має n^m розв'язків. Відмітимо, що крім періодичних точок періоду m рівняння (5.46) задовольняють також нерухомі точки рівняння (5.45). Якщо число m не просте і p – дільник числа m, $1 < p < m$, то розв'язками рівняння (5.46) будуть періодичні точки періоду p. Але серед розв'язків рівняння (5.46) завжди є періодичні точки періоду m.

Отже, відображення $x \to T_n(x)$ має зліченне число циклів. Поліном n-го степеня не може мати більше циклів періоду m, ніж поліном $T_n(x)$. У цьому унікальність поліномів Чебишова.

Відображення $x \to T_n(x)$ має інваріантну міру

$$\mu(dx) = dH^{-1}(x) = \frac{2dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \tag{5.48}$$

абсолютно неперервну відносно міри Лебега.

Це свідчить про те, що система має властивості випадкової величини. Імовірність знаходження траєкторії відображення $x \to T_n(x)$ на інтервалі $(\alpha, \beta) \subset [-1; 1]$ дорівнює

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}(\arccos\alpha - \arccos\beta) = H^{-1}(\beta) - H^{-1}(\alpha).$$

У загальному випадку дослідження поліноміальних відображень становить собою досить складну задачу. Тому далі будемо розглядати відображення

$$f(x) = \lambda x(1-x). \tag{5.49}$$

Для відображення (5.49) можна дослідити біфуркацію циклів при зміні параметра λ [140, 141].

Функція (5.49) відображає при $0 < \lambda \leq 4$ відрізок $[0, 1]$ в себе.

Якщо $0 < \lambda \leq 1$, то на відрізку $[0, 1]$ є тільки одна нерухома точка $x = 0$ і вона притягуюча. При $\lambda > 1$ нерухома точка $x = 0$ стає відштовхуючою і появляється ще одна нерухома точка β_1. Якщо $1 < \lambda \leq 3$, то точка β_1 буде притягуючою. При переході параметра λ через значення $\lambda = 3$ відбувається нова біфуркація: нерухома точка $x = \beta_1$ із притягуючої перетворюється у відштовхуючу і від неї народжується притягуючий цикл періоду 2. При $\lambda > 1 + \sqrt{6}$ відбувається біфуркація народження циклу періоду 4 і т.д.

Згідно з теоремою Шарковського [140, 141] про співіснування циклів, якщо неперервне відображення $I \to I$ має цикл періоду m, то воно має цикли кожного періоду m' такого, що $m' \lhd m$, де

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \ldots \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \ldots \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \ldots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3. \quad (5.50)$$

При збільшенні параметра λ у відображення (5.49) буде відбуватися біфуркація циклів згідно з порядком (5.50), якщо не враховувати повторні біфуркації циклів попередніх періодів.

Відображенню (5.49) відповідає різницеве рівняння

$$y_{i+1} = \lambda y_i (1 - y_i). \quad (5.51)$$

Зробивши у рівнянні (5.51) лінійну заміну

$$y_i = \frac{x_i}{\lambda} + \frac{1}{2},$$

одержимо рівняння

$$x_{i+1} = \frac{\lambda(\lambda - 2)}{4} - x_i^2.$$

Позначивши $4a = \lambda(\lambda - 2)$, запишемо останнє рівняння у вигляді

$$x_{i+1} = a - x_i^2. \quad (5.52)$$

Відзначимо, що при $\lambda = 4$ ($a = 2$) відображення (5.49) еквівалентне поліному Чебишова $T_2(x) = 2x^2 - 1$. Крім того, до вигляду (5.51) або (5.52) зводиться рівняння з довільною квадратною нелінійністю в правій частині.

За допомогою громіздких обчислень можна знайти значення $a = \dfrac{7}{4}$, при якому відбувається біфуркація циклу періоду 3. Перевіримо це. Позначимо $f(x) = \dfrac{7}{4} - x^2$, тоді для періодичних точок періоду 3 маємо рівняння $f^3(x) - x = 0$, або

$$x^8 - 7x^6 + \frac{119}{8}x^4 - \frac{147}{16}x^2 + x - \frac{7}{256} = 0.$$

Щоб виключити нерухомі точки, розділимо ліву частину останнього рівняння на $x - f(x) = x^2 + x - \dfrac{7}{4}$. Тоді одержимо рівняння

$$x^6 - x^5 - \frac{17}{4}x^4 + \frac{10}{4}x^3 + \frac{79}{16}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{1}{64} = 0. \tag{5.53}$$

Рівняння (5.53) має кратні корені, тому зобразимо ліву частину цього рівняння у вигляді $(x^3 + bx^2 + cx + d)^2$.

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знаходимо $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = -\dfrac{9}{4}$, $d = \dfrac{1}{8}$. Отже, рівняння (5.53) еквівалентне рівнянню

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{8} = 0. \tag{5.54}$$

Рівняння (5.54) має корені $x_1 \approx 0,0538$, $x_2 \approx 1,747$, $x_3 \approx -1,302$, які утворюють цикл періоду 3 відображення $f(x)$. Позначимо через I_0 відкритий інтервал $I_0 = (-x_1, x_1)$. Легко переконатися (обчисленням на комп'ютері або безпосередньою перевіркою), що $f^3 I_0 \subset I_0$, оскільки $f^3(0) \in I_0$. Точка x_0 є притягуючою нерухомою точкою відображення f^3 на інтервалі I_0. Для довільної точки $x_0 \in I_0$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} f^{3n}(x_0) = x_1.$$

Отже, ми маємо цикл інтервалів періоду 3 з центральним інтервалом I_0. Позначимо через I відрізок $I = [\overline{x}, -\overline{x}]$, де $\overline{x} < 0$ – нерухома точка відображення f. Множина

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i} I_0$$

складається з тих і тільки тих точок інтервала I, які притягуються циклом періоду 3. Оскільки $mes\ P = mesI$ [140], то цикл x_1, x_2, x_3 притягує майже всі точки із I. Множина $I \backslash P$ гомеоморфна множині Кантора.

Задача знаходження найпростіших відображень, еквівалентних кусково-лінійним відображенням, тісно пов'язана з задачею побудови всіх пар комутуючих раціональних функцій, тобто функцій f_1, f_2 таких, що $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$.

Жюліа і Фату довели, що комутуючими поліномами з точністю до лінійного спряження будуть тільки поліноми z^n, $T_n(x)$, $-T_n(x)$. У першому випадку множиною Жюліа буде одиничне коло $|z| = 1$, у двох інших – відрізок $[-1, 1]$.

Можна довести, що відображення $x \to -T_n(x)$ еквівалентне кусково-лінійному відображенню $x \to -f_n(x)$ з гомеоморфізмом $H(x)$. При парному n поліноми $T_n(x)$ та $-T_n(x)$ еквівалентні. Відображення $x \to -T_n(x)$ має інваріантну міру (5.48) і зліченне число циклів, які можна знайти наведеним вище методом.

Ріттом [167] було показано, що комутуючі раціональні відображення $f(x)$ степеня, більшого за 1, які не мають спільної ітерації, задовольняють співвідношення $\varphi(\alpha x + \beta) = f(\varphi(x))$, причому функція φ з точністю до дробово-лінійного перетворення може мати вигляд

$$1)\,\varphi(x) = \exp x; \quad 2)\,\varphi(x) = \cos x; \quad 3)\,\varphi(x) = P(x, 1, \tau); \quad 4)\,\varphi(x) =$$

$$= P^2(x, 1, i); \quad 5)\,\varphi(x) = P'(x, 1, w); \quad 6)\,\varphi(x) = (P')^2(x, 1, w),$$

де $P(x, w_1, w_2)$ – еліптична функція Вейєрштрасса з періодами w_1, w_2; $i = \sqrt{-1}$, $w = e^{\pi i/3}$, $\operatorname{Im} \tau > 0$.

Інше доведення наведено в [30]. Кожному випадку відповідають свої відображення $\Lambda(x) = \alpha x + \beta$. Наприклад, у випадку 1) маємо $\Lambda(x) = nx$, у випадку 2) $\Lambda(x) = nx$, $\Lambda(x) = nx + \dfrac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > 1$. У випадках 3) – 6) множина Жюліа збігається із $\overline{\mathbb{C}}$.

Виділимо деякі комутуючі раціональні функції, які на відрізку дійсної осі будуть еквівалентними кусково-лінійним відображенням.

Визначимо функцію g співвідношенням

$$P(nx, 1, \tau) = g(P(x, 1, \tau)), \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 2.$$

Еліптичну функцію Вейєрштрасса виразимо через еліптичний синус Якобі [119]

$$P(x, 1, \tau) = e_3 + \frac{\lambda^2}{\mathrm{sn}^2(\lambda x)},$$

тоді одержимо

$$e_3 + \frac{\lambda^2}{\mathrm{sn}^2(n\lambda x)} = g\left(e_3 + \frac{\lambda^2}{\mathrm{sn}^2(\lambda x)}\right).$$

Функція

$$f(x) = \lambda^2 \left[g\left(e_3 + \frac{\lambda^2}{x}\right) - e_3\right]^{-1}$$

еквівалентна функції $g(x)$ і задовольняє співвідношення $\mathrm{sn}^2(n\lambda x) = f(\mathrm{sn}^2(\lambda x))$. Така функція $f(x)$ не залежить від вибору сталої λ, тому виберемо замість λ повний еліптичний інтеграл

$$\lambda = K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

тоді

$$\mathrm{sn}^2(nKx) = f(\mathrm{sn}^2(Kx)). \tag{5.55}$$

Розглянемо так званий нормальний випадок, коли $0 < k < 1$. Тоді функція $H(x) = \mathrm{sn}^2(Kx)$ гомеоморфно відображає відрізок $[0, 1]$ в себе. Обернена функція має вигляд

$$H^{-1}(x) = \frac{1}{K} \int\limits_0^{\arcsin\sqrt{x}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}.$$

Використовуючи (5.55), побудуємо функцію

$$r(x) = H^{-1}(f(H((x))) = H^{-1}\Big(\mathrm{sn}^{\,2}(nKx)\Big).$$

Якщо $0 \le x \le \dfrac{1}{n}$, то $r(x) = nx$. Якщо $\dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{2}{n}$, то

$$r(x) = H^{-1}(\operatorname{sn}^2(nKx)) = H^{-1}\Big(\operatorname{sn}^2\Big[2K - nK\Big(\frac{2}{n} - x\Big)\Big]\Big) =$$

$$= H^{-1}\Big(\operatorname{sn}^2\Big(nK\Big(\frac{2}{n} - x\Big)\Big)\Big) = 2 - nx.$$

Функція $r(x)$ є періодичною на відрізку $[0,1]$ з періодом $\dfrac{2}{n}$, тому графіком функції $r(x)$ буде кусково-лінійне зубчате відображення, еквівалентне розглянутому раніше $f_n(x)$.

Відображення $x \to f(x)$ має n нерухомих точок

$$x = \operatorname{sn}^2 \frac{2mK}{n+1}, \quad m \in \Big\{0, 1, \ldots, \Big[\frac{n+1}{2}\Big]\Big\},$$

$$x = \operatorname{sn}^2 \frac{2lK}{n-1}, \quad l \in \Big\{1, 2, \ldots, \Big[\frac{n}{2} - 1\Big]\Big\},$$

які належать відрізку $[0,1]$. Аналогічно можна знайти періодичні точки цього відображення. Відображення $x \to f(x)$ має абсолютно неперервну інваріантну міру

$$\mu(dx) = dH^{-1}(x) = \frac{dx}{2K\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

Зауважимо, що аналітичний вираз для функції $f(x)$ можна одержати із теореми додавання. Так, при $n = 2$ знаходимо

$$f(x) = \frac{4x(1-x)(1-k^2x)}{(1-k^2x^2)^2}.$$

Аналогічні властивості має відображення $x \to 1 - f(x)$.

Тепер визначимо функцію g співвідношенням $P^2(nx, 1, i) = g(P^2(x, 1, i))$. Функцію $P(x, 1, i)$ виразимо через еліптичний синус

$$P(x, 1, i) = -e_1 + \frac{2e_1}{\operatorname{sn}^2\sqrt{2e_1}x}.$$

Позначимо

$$H(x) = \frac{e_1^2}{P^2(x, 1, i)}, \quad f(x) = \frac{e_1^2}{g(e_1^2/x)},$$

тоді функція $f(x)$ задовольняє співвідношення $H(nx) = f(H(x))$. Виберемо $2e_1 = K^2$, де

$$K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - 0,5\sin^2\psi}}.$$

Тоді функція $H(x)$ гомеоморфно відображає відрізок $[0,1]$ в себе. Функція $f(x)$ еквівалентна кусково-лінійному зубчатому відображенню $r(x) = H^{-1}(f(H(x)))$.

За допомогою $H(x)$ можна визначити цикли відображення $x \to f(x)$. Це відображення має абсолютно неперервну інваріантну міру

$$\mu(dx) = dH^{-1}(x) = \frac{dx}{2\sqrt{2}Kx^{3/4}\sqrt{1-x}}.$$

При $n = 2$ функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \frac{16x(x-1)^2}{(x+1)^4}.$$

Відображення (5.49) відноситься до класу унімодальних відображень. Викладемо методи символічної динаміки для таких відображень.

Нехай f: $I \to I$ – унімодальне відображення, $I = I_1 \cup I_2$, на інтервалі I_1 функція $f(x)$ монотонно зростає, на інтервалі I_2 – монотонно спадає, c – точка екстремуму.

Визначимо адресу точки $x \in I$:

$$A(x) = \begin{cases} I_s, & x \in I_s, x \neq c, \\ c, & x = c. \end{cases}$$

Маршрут – це послідовність адрес

$$A_f(x) = (A(x), A(f(x)), A(f^2(x)), \ldots) = (A_0, A_1, A_2, \ldots).$$

Операцію зсуву σ на просторі односторонніх послідовностей $(A_0, A_1, A_2, \ldots)$ визначимо рівністю

$$\sigma(A_0, A_1, A_2, \ldots) = (A_1, A_2, \ldots).$$

Відображення f і зсув σ зв'язані рівністю

$$\sigma(A_f(x)) = A_f(f(x)).$$

При побудові символічної динаміки корисно враховувати не тільки адреси $A(f^n(x))$, але і зміну орієнтації [140].

Поставимо у відповідність інтервалам I_s знаки $\varepsilon(I_1) = +1$, $\varepsilon(I_2) = -1$, $\varepsilon(c) = 0$. Разом з маршрутом $A_f(x) = (A_0, A_1, A_2, \ldots)$ розглянемо послідовність $\theta_f(x) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots)$, де

$$\theta_0 = \varepsilon_0, \quad \theta_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1, \ \ldots, \quad \theta_n = \varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n, \quad \varepsilon_i = \varepsilon(A_i).$$

Знак $\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}$ відповідає локальній поведінці f^n в околі точки x, а саме рівний $+1$, -1, або 0, якщо f^n відповідно зростає, спадає, або має екстремум в точці x.

Можна довести, що відображення $x \to \theta_f(x)$ є монотонним.

Із монотонності випливає, що в кожній точці x існує границя справа $\theta_f(x^+)$ і зліва $\theta_f(x^-)$.

Нехай σ – зсув на множині Σ односторонніх послідовностей з алфавітом $\{-1, 1\}$. Для $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \Sigma$ і $\beta_0 \in \{-1, 1\}$ визначимо $\beta_0\alpha = (\beta_0\alpha_0, \beta_0\alpha_1, \beta_0\alpha_2, \ldots)$. Тоді $\sigma(\theta_f(x)) = \theta_0(x)\theta_f(f(x))$.

Позначимо

$$C = \bigcup_{i\geq 0} f^{-i}(c), \quad \Sigma' = \theta_f(x)|x \in I\backslash C.$$

Тоді множина Σ' буде інваріантною відносно перетворення $\sigma' : (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots) \to \theta_0(\theta_1, \theta_2, \ldots)$.

Дамо опис теорії інваріантів перемішування (теорії нідінгів [140]) у зміненій формі.

Для цього символам $\theta_i = +1$ поставимо у відповідність символи $\theta_i = 0$, а символам $\theta_i = -1$ поставимо у відповідність $\theta_i = 1$. Тоді послідовності $\theta_f(x)$

буде відповідати запис деякого числа у двійковій системі числення

$$x = \theta_0 2^{-1} + \theta_1 2^{-2} + \theta_2 2^{-3} + \ldots,$$

а перетворенню σ' буде відповідати відображення

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ 2(1-2x), & x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{5.56}$$

Відзначимо, що відображення $g(x)$ еквівалентне функції $f_2(x)$, а також другому поліному Чебишова $T_2(x)$.

Послідовності $\theta_f(c^-)$ відповідає деяке число $\nu \leq \dfrac{1}{2}$. Деякі значення $\theta_f(y)$ є неприпустимими для функції $f(y)$. Відповідно, для функції $g(x)$ будуть неприпустимими значення $x \in (\nu, 1-\nu)$, а також всі значення x, такі, що $g^n(x) \in (\nu, 1-\nu)$ при деякому $n \geq 0$.

Позначимо

$$M = \bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(\nu, 1-\nu),$$

тоді всі значення $x \in [0,1] \backslash M$ є припустимими. Число ν також може набувати не всіх значень.

Назвемо g – припустимим число ν, для якого при всіх $n \geq 0$ виконується нерівність

$$\left| g^n(x) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2} - \nu.$$

Зобразимо число x у двійковій системі числення $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$, де $x_i = 0$ або 1 і перепишемо відображення (5.56) у вигляді

$$g(x) = \begin{cases} 0, x_2 x_3 \ldots x_i \ldots, & x_1 = 0, \\ 0, \bar{x}_2 \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_i \ldots, & x_1 = 1, \end{cases}$$

де $\bar{x}_i = 1 - x_i$.

Структура множини припустимих послідовностей (припустимих чисел) була досліджена Джонкером і Рендом [140].

Розглянемо раціональне число β, $0 \le \beta \le \dfrac{1}{2}$, яке у двійковій системі числення

$$\beta^{(1)} = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_m\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_m\ldots$$

має мінімальний період m і позначимо

$$\beta = 0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_m\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\ldots\bar{\beta}_m\beta_1\beta_2\ldots\beta_m\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\ldots\bar{\beta}_m\ldots.$$

Число β будемо називати періодичним періоду m, число $\beta^{(1)}$ – антиперіодичним періоду m. При $n > 1$ визначимо індуктивно число $\beta^{(n)} = (\beta^{(n-1)})^{(1)}$. Його період рівний $m2^n$.

Кожне періодичне число α є припустимим тоді і тільки тоді, коли $\alpha^{(1)}$ припустиме. Якщо для деякого періодичного α виконується нерівність $\alpha < \beta < \alpha^{(1)}$, то β не є припустимим.

Нехай Π' – множина всіх припустимих чисел, $P \in \Pi'$ – множина періодичних чисел, $P' \in P$ – множина періодичних чисел, що не є антиперіодичними. Структура множини Π' описується наступною теоремою.

Теорема 5.6 [140]. *Кожне число $\nu \in \Pi' \backslash P$ є граничним як для $\alpha > \nu$, так і для $\alpha < \nu$; кожне число $\nu \in P'$ є граничним для $\alpha < \nu$ і ізольованим для $\alpha > \nu$; кожне $\nu \in P \backslash P'$ ізольоване в Π'. При цьому кожне антиперіодичне число є $\nu^{(k)}$ для деякого $\nu \in P'$ і входить в групу $\nu < \nu^{(1)} < \nu^{(2)} < \ldots < \nu^{(\infty)}$.*

Позначимо через $\mu(k)$ припустиме число, що є мінімальним серед g-припустимих періодичних чисел періоду k.

Виконуються нерівності

$$\mu(1) < \mu(2) < \mu(4) < \ldots \mu(2^n) < \ldots < \mu(2^n \cdot 7) < \mu(2^n \cdot 5) <$$

$$< \mu(2^n \cdot 3) < \ldots < \mu(2 \cdot 7) < \mu(2 \cdot 5) < \mu(2 \cdot 3) < \ldots <$$

$$< \mu(7) < \mu(5) < \mu(3). \tag{5.57}$$

Випишемо числа $\mu(2^n)$

$$\mu(1) = 0,000\ldots, \quad \mu(2) = 0,010101\ldots,$$

$$\mu(2^2) = 0,011001100110\ldots, \quad \mu(2^\infty) = 0,0110100110010110\ldots.$$

Визначимо вигляд чисел $\mu(2^n k)$. Нехай $k = 2i + 3$, $i \geq 0$. Тоді число $\mu(2^n k)$ утворюється періодичним повторенням скінченного ланцюжка $\alpha(2^n k)$ довжиною $2^n k$. При $n = 0$ маємо $\alpha(k) = \alpha(2i+3) = (0110101\ldots01)$, де пара (01) повторюється i раз. При $n \geq 1$ маємо $\alpha(2^n k) = \alpha(2^{n-1}k) \cdot (01)$, де права частина означає ланцюжок, утворений із ланцюжка $\alpha(2^{n-1}k)$ заміною кожної цифри 0 на 01, а цифри 1 на 10.

Згідно з [140] унімодальне відображення, порядок росту якого $s(f)$ більший 1, напівспряжене з кусково-лінійним відображенням

$$F_s(x) = \begin{cases} sx, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ s - sx, & x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

де $1 < s \leq 2$. Точніше, існує монотонне неперервне відображення λ: $[0,1] \to [0,1]$ таке, що $F_s(\lambda(x)) = \lambda(f(x))$ для всіх $x \in [0,1]$.

Розглянемо диференційовне відображення f: $[0,1] \to [0,1]$ таке, що $f(c) = 1$. Тоді f буде еквівалентним $F_2(x)$ або другому поліному Чебишова $T_2(x)$. Нехай функція $\lambda(x)$ диференційовна на інтервалі $(0,1)$. Тоді для нерухомої точки $x_0 \in (0,1)$ функції $f(x)$ виконується рівність $f'(x_0) = -2$. Аналогічно, якщо x_0 – періодична точка періоду m, то диференціюючи рівність

$$F_2^m(\lambda(x)) = \lambda(f^m(x))$$

в точці $x = x_0$, одержимо

$$f'(x_0)f'(x_1)\ldots f'(x_{m-1}) = (-1)^k 2^m, \tag{5.58}$$

де $x_i = f^i(x_0)$, $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, k – кількість точок циклу, що належать інтервалу I_2. Оскільки періодичні точки такого відображення $f(x)$ розміщені на інтервалі $[0, 1]$ всюди щільно, то рівність (5.58) накладає сильні обмеження на функцію $f(x)$.

Тому функція $\lambda(x)$ така, що $F_2(\lambda(x)) = \lambda(f(x))$ може бути недиференційовною в періодичних точках. Внаслідок цього ускладнюється побудова функції $\lambda(x)$. Оскільки функція $\lambda(x)$ монотонна, то згідно з теоремою Лебега множина точок розриву її похідної має нульову міру Лебега [67].

Знайдемо значення s, при яких відбувається біфуркація циклів відображення F_s періоду k у відповідності з порядком (5.57). Одна із точок циклу буде збігатися з точкою $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Ітерації точки x_0 будуть попадати на інтервали $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ і $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ у тому ж порядку, що й ітерації точки $\mu(k)$ під дією відображення g.

Тому найменше значення s, при якому існує цикл періоду $k = 2i + 3$, задовольняє рівняння

$$s - s^2 + s^3 - s^4 + \ldots + s^{k-4} - s^{k-3} + s^{k-1} - \frac{1}{2}s^k - \frac{1}{2} = 0. \qquad (5.59)$$

Домноживши рівняння (5.59) на 2 і розділивши на $1 - s$, одержимо

$$s^{k-1} - s^{k-2} - s^{k-3} + s^{k-4} - s^{k-5} + \ldots + s - 1 = 0. \qquad (5.60)$$

Відзначимо, що знаки коефіцієнтів рівняння (5.60) чергуються в тому ж порядку, що й цифри 0 і 1 у запису ланцюжка $\alpha(k)$. Рівняння (5.60) має єдиний розв'язок на інтервалі $(1, 2)$.

Аналогічно можна показати, що біфуркація циклу періоду $m = 2k$, $k = 2i + 3$, відбувається при значенні $s = r$, що задовольняє рівняння

$$(r-1)(r^{2k-2} - r^{2k-4} - r^{2k-6} + r^{2k-8} - r^{2k-10} + \ldots r^2 - 1) = 0. \qquad (5.61)$$

Зауважимо, що між розв'язком $r \in (1, 2)$ рівняння (5.61) і розв'язком $s \in (1, 2)$ рівняння (5.60) існує простий зв'язок $r = \sqrt{s}$.

Біфуркація циклу періоду $m = 2^n k$, $k = 2i+3$, відбувається при $s = r$, що задовольняє рівняння

$$(r-1)(r^2-1)\ldots(r^{2^{n-1}}-1)(r^{2^n(k-1)} - r^{2^n(k-2)} - r^{2^n(k-3)}+$$

$$+r^{2^n(k-4)} - r^{2^n(k-5)} + \ldots + r^{2^n} - 1) = 0. \quad (5.62)$$

При менших значеннях s відображення F_s не має циклів періоду m. Тут зберігається відповідність між коефіцієнтами рівняння (5.62) і ланцюжком $\alpha(2^n k)$. Розв'язок $r \in (1,2)$ рівняння (5.62) можна виразити через розв'язок $s \in (1,2)$ рівняння (5.60)

$$r = s^{2^{-n}}.$$

При

$$s = 2^{2^{-n}}, \quad n > 1,$$

відображення F_s має цикл інтервалів періоду 2^{n-1}.

Для відображення F_s, використовуючи методи символічної динаміки, можна явно виписати всі цикли.

Відзначимо, що $\nu(F_s)$ набуває не всіх припустимих значень. Наприклад, при всіх s маємо $\nu(F_s) \neq \nu^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, де $\nu^{(k)}$ – антиперіодичне число для деякого $\nu \in P'$. Для квадратного відображення (5.49) або відображення

$$f(x) = a - x^2 \quad (5.63)$$

$\nu(f)$ буде набувати всіх припустимих значень.

Становить інтерес вивчення відображення (5.63) при $a = a^* = 1,40155\ldots$. У цьому випадку відображення (5.63) має цикли періодів усіх степенів двійки і не має циклів інших періодів. При збільшенні a до значення a^* відбуваються біфуркації подвоєння, для яких справджується універсальність Фейгенбаума [120].

При дослідженні унімодальних відображень природним чином виникають p-адичні числа [61]. Наприклад, для відображення (5.63) при $a = a^*$ виникають 2-адичні числа. Дамо деякі означення p-адичних чисел.

Нехай p – деяке просте число. Для довільного ненульового цілого числа a позначимо через $ord_p a$ кратність входження p у розклад a на прості множники, тобто найбільше ціле невід'ємне число m, для якого $a \equiv 0(mod\ p^m)$. Для довільного раціонального числа $x = \dfrac{a}{b}$ позначимо

$$ord_p x = ord_p a - ord_p b.$$

Визначимо на полі $\mathbb{Q}$ раціональних чисел p-адичну норму

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{5.64}$$

Норма (5.64) є неархімедовою.

За допомогою норми (5.64) можна поповнити поле $\mathbb{Q}$ до поля $\mathbb{Q}_p$ p-адичних чисел, приєднавши до раціональних чисел їх всеможливі границі за нормою (5.64). Тоді кожне p-адичне число можна записати у вигляді

$$x = b_{-m}p^{-m} + \ldots + b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots,$$

де числа b_k, $k \in \{-m, -m+1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots\}$, $m \in \mathbb{Z}$, можуть набувати значень 0, 1, 2, ..., $p-1$. Якщо $b_{-m} \neq 0$, то $|x|_p = p^m$. Нехай $\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p \,|\, |a|_p \leq 1\}$. Елементи $b \in \mathbb{Z}_p$ називаються цілими p-адичними числами і можуть бути розкладені в ряд

$$b = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots. \tag{5.65}$$

Над полем $\mathbb{Q}_p$ природним чином визначаються математичні операції. Наприклад, при додаванні двох цілих p-адичних чисел вигляду (5.65) треба додати їх i-ті розряди, а одиницю переповнення перенести в $(i+1)$-й розряд.

Відображення (5.63) при $a = a^*$ набуде вигляду

$$f(x) = a^* - x^2. \tag{5.66}$$

Позначимо $k = 2^n$, $x_n = f^k(0)$, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Відображення (5.66) має цикл інтервалів періоду 2^n, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ з центральним інтервалом $I_{x_n, x_{n+1}}$, де $I_{x,y}$ рівний $[x, y]$, якщо $x < y$ і $[y, x]$, якщо $x > y$. Наприклад, цикл інтервалів періоду 1 $\{[f^2(0), f(0)]\}$ складається з одного інваріантного інтервала. Цикл інтервалів періоду 2 $\{[f^2(0), f^4(0)],\ [f^3(0), f(0)]\}$ складається з двох інтервалів, які одержуються, якщо з інтервала $[f^2(0), f(0)]$ викинути інтервал $(f^4(0), f^3(0))$. Цикл інтервалів періоду 4

$$\{[f^8(0), f^4(0)],\ [f^5(0), f(0)],\ [f^2(0), f^6(0)],\ [f^3(0), f^7(0)]\}$$

одержимо, якщо із інтервала $[f^2(0), f^4(0)]$ викинути інтервал $(f^6(0), f^8(0))$, а із інтервала $[f^3(0), f(0)]$ викинути інтервал $(f^7(0), f^5(0))$. Цю процедуру можна продовжувати до нескінченності. У границі одержимо деяку множину Φ, гомеоморфну стандартній множині Кантора. Ця множина Φ а також цикли періодів 2^n, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ є інваріантними множинами відображення (5.66).

Кожному цілому 2-адичному числу

$$k = k_0 + 2k_1 + 2^2 k_2 + \ldots, \tag{5.67}$$

де $k_i \in \{0, 1\}$, можна поставити у відповідність деякий елемент $x \in \Phi$. Якщо $k_n = 0$ при $n \geq n_0$, то число k буде цілим раціональним числом і йому відповідає елемент $f^k(0) \in \Phi$. Якщо ряд (5.67) нескінченний, то k можна наблизити в 2-адичній нормі цілими раціональними числами $m_n = k_0 + 2k_1 + \ldots + 2^n k_n$ і вважати, що k відповідає дійсне число

$$x = \lim_{n \to \infty} f^{m_n}(0).$$

Остання границя існує, причому $x \in \Phi$. Відповідність між цілими 2-адичними числами і $x \in \Phi$ є взаємно однозначною.

Відображенню (5.66) на множині Φ відповідає відображення $h(k) = k + 1$ на множині $\mathbb{Z}_2$ цілих 2-адичних чисел. Відображення h є гомеоморфізмом на множині $\mathbb{Z}_2$, обернене відображення має вигляд $h^{-1}(k) = k - 1$.

Відповідність між деякою інваріантною множиною відображення (5.63) і множиною $\mathbb{Z}_2$ можна одержати також і при інших значеннях параметра a.

Розглянемо функціональне рівняння

$$f^p(ax) = af(x), \tag{5.68}$$

де $x \in [-1, 1]$, $f(0) = 1$. В [120, 140] доведено існування унімодального, парного, аналітичного на $[-1, 1]$ розв'язку, причому $a \in (-1, 0)$.

Встановимо деякі властивості розв'язку $f(x)$ рівняння (5.68).

Лема 5.2. *При всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність*

$$f^{pn}(0) = af^n(0). \tag{5.69}$$

Для доведення використаємо індукцію відносно n. Підставивши в (5.68) $x = 0$ одержимо $f^p(0) = af(0) = a$. Нехай рівність (5.69) виконується при $n = k$. Тоді із рівняння (5.68) знаходимо $f^p(af^k(0)) = af^{k+1}(0)$ або $f^{p(k+1)}(0) = af^{k+1}(0)$. Лема доведена.

Якщо $x_0 \in (0, 1)$ – нерухома точка відображення $x \to f(x)$, то згідно з (5.68) одержимо $f^p(ax_0) = af(x_0) = ax_0$, а також

$$f^{p^n}(a^n x_0) = a^n x_0, \quad n \geq 1,$$

тобто $a^n x_0$ є періодичною точкою відображення $x \to f(x)$ періоду p^n.

Зауважимо, що $f^2(0) < 0$. Справді, якщо $f^2(0) \geq 0$, то $f^k(0) \geq 0$ при всіх $k \geq 1$. Це суперечить нерівності $f^p(0) = a < 0$.

Позначимо через $I_{x,y}$ відрізок $[x, y]$, якщо $x < y$, або відрізок $[y, x]$, якщо $y < x$. Доведемо, що функція $f(x)$ має цикл інтервалів періоду p з центральним інтервалом

$$J^{(p)} = I_{f_o^p, f_0^{2p}},$$

де $f_0^k = f^k(0)$. Справді, $f_0^p = a < 0$, $f_0^{2p} = af_0^2 > 0$, тому $0 \in J^{(p)}$. Під дією відображення $f(x)$ центральний інтервал $J^{(p)}$ буде послідовно переходити в інтервали

$$I_{f_0^1, f_0^{p+1}}, \ldots, I_{f_0^{p-1}, f_0^{2p-1}}.$$

Аналогічно можна показати, що існує цикл інтервалів періоду p^n, $n \geq 1$, з центральним інтервалом

$$J^{(p^n)} = I_{f_0^{p^n}, f_0^{2p^n}}.$$

Позначимо через A_{p^n} об'єднання інтервалів, що належать циклу інтервалів періоду p^n. Множина

$$\Phi = \bigcap_{n \geq 1} A_{p^n}$$

має структуру множини Кантора. На множині Φ функція $f(x)$ є взаємно однозначною.

Теорема 5.7. *Існує гомеоморфізм $H\colon \mathbb{Z}_p \to \Phi$. При цьому*

$$H(b+1) = f(H(b)), \quad H(b-1) = f^{-1}(H(b)), \tag{5.70}$$

$$H(pb) = aH(b), \tag{5.71}$$

де $b \in \mathbb{Z}_p$.

Доведення. Для цілого раціонального числа

$$k = k_0 + k_1 p + \ldots + k_n p^n, \quad 0 \leq k_i \leq p-1, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

підставимо $H(k) = f^k(0) \in \Phi$. Нехай $|r - k|_p \leq p^{-m}$, $r \in \mathbb{N}$, тобто $r = k + p^m l$, де $l \in \mathbb{N}$. Тоді одержимо $f^r(0) = f^k(a^m f^l(0))$. Оскільки $\lim\limits_{m \to \infty} a^m f^l(0) = 0$, то відхилення $|f^r(0) - f^k(0)|$ може бути зроблене як завгодно малим при $m \to \infty$. Якщо ряд (5.65) нескінченний, то b можна наблизити в p-адичній нормі цілим раціональним числом $k_n = b_0 + b_1 p + \ldots + b_n p^n$ і вважати, що

$$H(b) = \lim_{n \to \infty} f^{k_n}(0).$$

Рівності (5.70) для $b \in \mathbb{N}$ очевидні, для $b \in \mathbb{Z}_p$ випливають із неперервності. Тотожність (5.71) випливає із леми і з неперервності. Теорема доведена.

Нехай відображення $g(x)$ еквівалентне розв'язку $f(x)$ рівняння (5.68). Тоді інваріантній множині відображення $g(x)$ також відповідає множина цілих p-адичних чисел. Наприклад, твердження теореми правильні для відображення $x \to a - x^2$ при відповідних значеннях параметра a. При цьому рівність (5.71) виконується наближено.

5.5. Висновки

Розділ 5 присвячено застосуванню методу інтегральних многовидів у теорії біфуркацій нелінійних систем із запізненням.

1. У підрозділі 5.1 одержано зображення інтегрального многовиду лінійної сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь з періодичною правою частиною, досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги та субфуркація періодичних розв'язків.

2. У підрозділі 5.2 одержано зображення інтегрального многовиду сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь з періодичною правою частиною. Показано, що при відповідних умовах на праву частину відображення Пуанкаре для збуреної системи має трансверсальну гомоклінічну точку.

3. У підрозділі 5.3 метод усереднення застосовано до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням.

4. У підрозділі 5.4 досліджено поліноміальні і раціональні одновимірні відображення, еквівалентні кусково-лінійним і такі, що мають інваріантну міру. Показано, що інваріантній множині деякого відображення відповідає множина цілих p-адичних чисел.

Розділ 6

ДОСЛІДЖЕННЯ БІФУРКАЦІЇ СТАНУ РІВНОВАГИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

У цьому розділі досліджено умови існування та властивості інтегральних многовидів нелінійної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджена біфуркація тора із стану рівноваги. Аналогічні задачі досліджені для сингулярно збуреної системи нелінійних параболічних рівнянь з перетвореним аргументом. Доведено існування зліченного числа періодичних розв'язків гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою. Вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом.

6.1. Біфуркація стану рівноваги в нелінійній параболічній системі з перетвореним аргументом

6.1.1. Перетворення вихідної задачі

Розглянемо нелінійну параболічну систему з перетвореним аргументом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(t,\varepsilon)u + B(t,\varepsilon)u_\Delta + f(t,x,u,u_\Delta,\varepsilon) \tag{6.1}$$

і з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{6.2}$$

Тут ε – p-вимірний параметр з малими додатними компонентами, $u_\Delta = u(t, x - \Delta)$, Δ – зсув аргументу, матриці $D(t, \varepsilon)$, $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ і функція f: $\mathbb{R}^{2n+p+2} \to \mathbb{R}^n$ п'ять разів неперервно диференційовні за всіма аргументами і 2π-періодичні відносно t, x, $f(t, x, u, v, \varepsilon) = O(|u|^2 + |v|^2)$ при $|u| + |v| \to 0$. Тому функція $f(t, x, u, v, \varepsilon)$ задовольняє умови

$$f(t, x, 0, 0, \varepsilon) = 0, |f(t, x, u, v, \varepsilon) - f(t, x, u', v', \varepsilon)| \leq \nu(|u - u'|^2 + |v - v'|^2)^{1/2},$$

$$|u| \leq \rho, |u'| \leq \rho, |v| \leq \rho, |v'| \leq \rho, \tag{6.3}$$

де $|u|^2 = u_1^2 + \ldots + u_n^2$, причому стала Ліпшиця ν може бути зроблена як завгодно малою при зменшенні ρ. Функцію $f(t, x, u, v, \varepsilon)$ можна довизначити поза областю $|u| \leq \rho$, $|v| \leq \rho$ так, щоб умова (6.3) виконувалася у всьому просторі. Нехай матриця $D(t, \varepsilon)$ додатно визначена.

Система (6.1) застосовується для моделювання нелінійних ефектів у оптиці [6]. Інтегральні многовиди і біфуркація розв'язків параболічних задач вивчалися в працях [9, 33, 101, 133, 136], причому в [33, 101] досліджена біфуркація народження циклу автономного параболічного рівняння з перетвореним аргументом. Розглянемо параболічну систему з перетвореним аргументом більш загального вигляду, для якої за допомогою методу інтегральних многовидів доведемо існування інваріантного тора.

Поряд з (6.1) розглянемо лінійну систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t, \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(t, \varepsilon)u + B(t, \varepsilon)u_\Delta. \tag{6.4}$$

Розв'язок задачі (6.4), (6.2) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(-ikx), \quad y_{-k}(t) = \overline{y}_k(t). \tag{6.5}$$

Підставляючи (6.5) в (6.4) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(-ikx)$, одержимо зліченну систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = [-k^2 D(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon)\exp(ik\Delta)]y_k(t), \quad k = 0, \pm 1, \ldots . \tag{6.6}$$

Система (6.6) є системою лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Згідно з теоремою Флоке існує невироджена матриця $H_k(t,\varepsilon)$, $H_k(t+2\pi,\varepsilon) = H_k(t,\varepsilon)$, така, що заміна $y_k = H_k(t,\varepsilon)z_k$ зводить систему (6.6) до вигляду

$$\frac{dz_k}{dt} = C_k(\varepsilon)z_k, \quad C_{-k}(\varepsilon) = \overline{C}_k(\varepsilon), \quad k = 0, \pm 1, \ldots .$$

Розв'язок задачі (6.1), (6.2) будемо шукати у вигляді ряду (6.5). Підставляючи (6.5) в (6.1) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(-ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, одержимо зліченну систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy}{dt} = M(t,\varepsilon)y + F(t,y,\varepsilon), \tag{6.7}$$

де $y = (y_0, y_1, y_{-1}, \ldots)^T$, $M(t,\varepsilon)$ – нескінченна блочно-діагональна матриця з блоками

$$M_k(t,\varepsilon) = -k^2 D(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon)\exp(ik\Delta), \quad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

$F(t,y,\varepsilon) = (f_0, f_1, f_{-1}, \ldots)^T$ – нелінійна функція, причому f_k є коефіцієнтами при $\exp(-ikx)$ розкладу функції $f(t,x,u,u_\Delta,\varepsilon)$ в ряд Фур'є.

Покажемо, що функція $F(t,y,\varepsilon)$ задовольняє умову Ліпшиця. Введемо в просторі послідовностей норму $|y| = (\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|^2)^{1/2}$.

Розглянемо інший вектор $z = (z_0, z_1, z_{-1}, \ldots)^T$ коефіцієнтів Фур'є розв'язку $v(t,x)$ рівняння (6.1) і відповідний йому вектор $F(t,z,\varepsilon) = (g_0, g_1, g_{-1}, \ldots)^T$. Використовуючи рівність Парсеваля, одержимо

$$|F(t,y,\varepsilon) - F(t,z,\varepsilon)| = (\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k - g_k|^2)^{1/2} = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t,x,u,u_\Delta,\varepsilon) -$$

$$-f(t,x,v,v_\Delta,\varepsilon)|^2dx\Big)^{1/2} \le \nu\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(|u-v|^2+|u_\Delta-v_\Delta|^2)dx\Big)^{1/2} =$$

$$=\nu(2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|y_k-z_k|^2)^{1/2}=\sqrt{2}\nu|y-z|.$$

Отже, функція F задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $\sqrt{2}\nu$.

Використовуючи нерівність Важевського, оцінимо розв'язок $y_k(t)$ системи (6.6):

$$|y_k(t)| \le |y_k(t_0)|\exp\int\limits_{t_0}^{t}\Lambda_k(t_1)dt_1, \tag{6.8}$$

де $\Lambda_k(t)$ – найбільший характеристичний корінь матриці $[M_k(t,\varepsilon)+M_k^*(t,\varepsilon)]/2$.

Нехай для всіх x, що належать одиничній сфері $|x|=1$, $x\in\mathbb{R}^n$, виконуються нерівності

$$(D(t,\varepsilon)x,x)\ge\mu>0, \quad (Ax+A^Tx,x)\le 2a,$$

$$(B\exp(ik\Delta)x+B^T\exp(-ik\Delta)x)\le 2b.$$

Тоді

$$\Lambda_k(t)=\frac{1}{2}\max_{|x|=1}(M_k(t,\varepsilon)x+M_k^*(t,\varepsilon)x,x)\le -k^2\mu+a+b.$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty}\Lambda_k(t)=-\infty$. Припустимо, що характеристичне рівняння $\det(C_k(\varepsilon)-\lambda E)=0$, $k\in\mathbb{Z}$, має прості корені $\alpha_m(\varepsilon)\pm i\beta_m(\varepsilon)$, $\alpha_m(0)=0$, $\beta_m(0)>0$, $m\in\{1,\dots,p\}$, а інші корені задовольняють умову $|\mathrm{Re}\lambda|>\gamma+\delta$, $\gamma>\delta>0$. Умова $\alpha_m(0)=0$ не має характеру виродження, оскільки ε є p-вимірним параметром. Для всіх цілих k, крім скінченної кількості, виконується нерівність $k^2\ge(\gamma+\delta+a+b)/\mu$. Тоді $-k^2\mu+a+b\le-(\gamma+\delta)$, $\Lambda_k(t)\le-(\gamma+\delta)$ і з нерівності (6.8) випливає оцінка

$$|y_k(t)|\le|y_k(t_0)|\exp[-(\gamma+\delta)(t-t_0)], \quad t\ge t_0. \tag{6.9}$$

Перепишемо систему (6.7) у вигляді

$$\frac{dY_1}{dt} = N_1(t,\varepsilon)Y_1 + F_1(t,y,\varepsilon), \quad \frac{dY_2}{dt} = N_2(t,\varepsilon) + F_2(t,y,\varepsilon), \tag{6.10}$$

де

$$y = (Y_1, Y_2)^T, \quad Y_1 = (y_0, y_1, y_{-1}, \ldots, y_{k_0}, y_{-k_0})^T, \quad Y_2 = (y_{k_0+1}, y_{-k_0-1}, \ldots)^T,$$

$$N_1(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(M_0, M_1, M_{-1}, \ldots, M_{k_0}, M_{-k_0}), \quad N_2(t,\varepsilon) =$$

$$= \mathrm{diag}(M_{k_0+1}, M_{-k_0-1}, \ldots), \quad F_1(t,y,\varepsilon) = (f_0, f_1, f_{-1}, \ldots, f_{k_0}, f_{-k_0})^T,$$

$$F_2(t,y,\varepsilon) = (f_{k_0+1}, f_{-k_0-1}, \ldots)^T, \quad k_0 = [\sqrt{(\gamma+\delta+a+b)/\mu}].$$

Матрицю $C(\varepsilon) = \mathrm{diag}(C_0, C_1, C_{-1}, \ldots, C_{k_0}, C_{-k_0})$ зведемо до вигляду $C(\varepsilon) = T(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)T^{-1}(\varepsilon)$, де

$$\Gamma(\varepsilon) = \mathrm{diag}(A_1(\varepsilon), \Gamma_1(\varepsilon)), \quad A_1(\varepsilon) = \mathrm{diag}(A_3(\varepsilon), A_4(\varepsilon)),$$

власні значення матриці $A_3(\varepsilon)$ задовольняють умову $\mathrm{Re}\lambda > \gamma + \delta$, $A_4(\varepsilon)$ – діагональна матриця з числами $\alpha_m(\varepsilon) \pm i\beta_m(\varepsilon)$ на діагоналі, а власні значення матриці $\Gamma_1(\varepsilon)$ задовольняють умову $\mathrm{Re}\lambda < -\gamma - \delta$. Таке перетворення можна одержати шляхом зведення матриці $C(\varepsilon)$ до жорданової нормальної форми. В системі (6.10) зробимо заміну $Y_1(t) = H(t,\varepsilon)T(\varepsilon)Y_3(t)$, де

$$H(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(H_0, H_1, H_{-1}, \ldots, H_{k_0}, H_{-k_0}).$$

В результаті одержимо систему

$$\frac{dY_3}{dt} = \Gamma(\varepsilon)Y_3 + T^{-1}(\varepsilon)H^{-1}(t,\varepsilon)F_1(t,y,\varepsilon),$$

$$\frac{dY_2}{dt} = N_2(t,\varepsilon)Y_2 + F_2(t,y,\varepsilon). \tag{6.11}$$

Оскільки матриця $\Gamma(\varepsilon)$ є блочно-діагональною, то систему (6.11) можна переписати у вигляді

$$\frac{dw_1}{dt} = A_1(\varepsilon)w_1 + G_1(t,w,\varepsilon),$$

$$\frac{dw_2}{dt} = A_2(t,\varepsilon)w_2 + G_2(t,w,\varepsilon), \tag{6.12}$$

де

$$A_2(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(\Gamma_1(\varepsilon), N_2(t,\varepsilon)),\ Y_3 = (w_1, Y_4)^T,\ w_2 = (Y_4, Y_2)^T,\ w_1 \in \mathbb{R}^{l+2p},$$

w_2 належить банаховому простору $\mathbb{M}$.

В силу припущень відносно власних значень матриці $\Gamma_1(\varepsilon)$ справджується оцінка

$$|\exp[\Gamma_1(\varepsilon)t]| \leq N\exp[-(\gamma+\delta)t], \quad t \geq 0, \quad N \geq 1.$$

Тоді для фундаментальної матриці $L(t,s)$ системи $dw_2/dt = A_2(t,\varepsilon)w_2$ із нерівності (6.9) випливає оцінка

$$|L(t,s)| \leq N\exp[-(\gamma+\delta)(t-s)], \quad t \geq s. \tag{6.13}$$

Аналогічно можна одержати оцінку

$$|\exp[A_1(\varepsilon)t]| \leq N\exp[(\delta-\gamma)t], \quad t \leq 0. \tag{6.14}$$

Оскільки вектор-функція F задовольняє умову Ліпшиця і $F(t,0,\varepsilon) = 0$, то

$$G_1(t,0,\varepsilon) = G_2(t,0,\varepsilon) = 0, \quad (|G_1(t,w,\varepsilon) - G_1(t,v,\varepsilon)|^2 +$$
$$+|G_2(t,w,\varepsilon) - G_2(t,v,\varepsilon)|^2)^{1/2} \leq \nu_1|w-v|, \tag{6.15}$$

де

$$\nu_1 = \sqrt{2}\nu\max\{1, |T^{-1}(\varepsilon)H^{-1}(t,\varepsilon)|\}\max\{1, |H(t,\varepsilon)T(\varepsilon)|\}$$

6.1.2. Існування та властивості інтегральних многовидів

Теорема 6.1. *Нехай виконуються умови (6.13) – (6.15). Тоді при*

$$\nu_1 < \frac{\delta}{N(1+2N)} \tag{6.16}$$

існує функція $w_2 = h(t, w_1, \varepsilon)$*, що визначена на* $\mathbb{R}^{l+3p+1}$*, задовольняє умови*

$$h(t,0,\varepsilon) = 0, \quad |h(t,w_1,\varepsilon) - h(t,w_1',\varepsilon)| \le \frac{1}{2}|w_1 - w_1'| \tag{6.17}$$

і така, що множина

$$S^- = \{(t, w_1 w_2) \ |t \in \mathbb{R}, w_1 \in \mathbb{R}^{l+2p}, w_2 = h(t,w_1,\varepsilon), w_2 \in \mathbb{M}\}$$

є інтегральним многовидом системи (6.12). Для кожного розв'язку $w(t) = (w_1(t), h(t, w_1(t), \varepsilon))$ *системи (6.12), що належить* S^-*, справджується оцінка*

$$|w(t)| \le 2N|w_1(\sigma)| \exp[\gamma(\sigma - t)], \quad t \le \sigma. \tag{6.18}$$

Доведення. Поряд із системою (6.12) розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$w_1(t) = \exp[A_1(\varepsilon)(t-\sigma)]c_1 - \int_t^\sigma \exp[A_1(\varepsilon)(t-s)]G_1(s, w(s), \varepsilon)ds,$$

$$w_2(t) = \int_{-\infty}^t L(t,s)G_2(s, w(s), \varepsilon)ds, \tag{6.19}$$

звідки

$$w(t) = H_+(t-\sigma)c - \int_t^\sigma H_+(t-s)G(s,w(s),\varepsilon)ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^t H_-(t,s)G(s,w(s),\varepsilon)ds, \tag{6.20}$$

де

$$H_+(t) = \mathrm{diag}[\exp[A_1(\varepsilon)t], 0], c = [c_1, 0]^T,$$

$$H_-(t,s) = \mathrm{diag}[0, L(t,s)], G = [G_1, G_2]^T.$$

Існування розв'язку рівняння (6.20) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$w^{(0)}(t) = 0, \quad w^{(n+1)}(t) = H_+(t-\sigma)c - \int\limits_t^\sigma H_+(t-s)G(s, w^{(n)}, \varepsilon)ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^t H_-(t,s)G(s, w^{(n)}(s), \varepsilon)ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{6.21}$$

Індукцією доведемо, що правильна нерівність

$$|w^{(m)}(t) - w^{(m-1)}(t)| \le N|c|(\nu_1 K)^{m-1} \exp[\gamma(\sigma - t)], \tag{6.22}$$

де $m = 1, 2, \ldots$, $t \le \sigma$, $K = 2N/\delta$.

При $m = 1$ нерівність (6.22) випливає із (6.14). Нехай нерівність (6.22) справджується при $m = n$. Тоді, враховуючи (6.13) – (6.15), одержимо

$$|w^{(n+1)}(t) - w^{(n)}(t)| \le \int\limits_t^\sigma N \exp[(\delta - \gamma)(t-s)]\nu_1 |w^{(n)}(s) - w^{(n-1)}(s)|ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^t N \exp[-(\delta + \gamma)(t-s)]\nu_1 |w^{(n)}(s) - w^{(n-1)}(s)|ds \le$$

$$\le N|c|(\nu_1 K)^n \exp[\gamma(\sigma - t)].$$

Отже, нерівність (6.22) вірна при $m = n + 1$, тому вона вірна при всіх натуральних m. Послідовні наближення збігаються до розв'язку рівняння (6.20) за умови $\nu_1 K < 1$.

Вибираючи в рівності (6.20) замість c іншу сталу c', одержимо

$$w'(t) = H_+(t-s)c' - \int\limits_t^\sigma H_+(t-s)G(s, w'(s), \varepsilon)ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^t H_-(t,s)G(s, w'(s), \varepsilon)ds.$$

Використовуючи (6.13) і (6.14), оцінимо різницю

$$|w(t)-w'(t)| \le N\exp[(\delta-\gamma)(t-\sigma)]|c-c'| + \int\limits_t^\sigma N\exp[(\delta-\gamma)(t-s)]\nu_1|w(s)-$$

$$-w'(s)|ds + \int\limits_{-\infty}^t N\exp[(\delta+\gamma)(s-t)]\nu_1|w(s)-w'(s)|ds.$$

Підставимо $x(t) = \exp[\gamma(t-\sigma)]|w(t)-w'(t)|$, тоді

$$x(t) \le N|c-c'|\exp[\delta(t-\sigma)] + \nu_1 N \int\limits_{-\infty}^\sigma \exp[-\delta|t-s|]x(s)ds,$$

звідки згідно з [28, с. 156] знаходимо

$$x(t) \le \frac{2\delta N|c-c'|}{\delta+\sqrt{\delta^2-2\nu_1\delta N}}\exp[\sqrt{\delta^2-2\nu_1\delta N}(t-\sigma)].$$

Враховуючи позначення для $x(t)$, одержимо

$$|w(t)-w'(t)| \le \frac{2\delta N|c-c'|}{\delta+\sqrt{\delta^2-2\nu_1\delta N}}\exp[(-\gamma+\sqrt{\delta^2-2\nu_1\delta N})(t-\sigma)]. \quad (6.23)$$

Підставляючи в (6.19) $t=\sigma$, знаходимо зображення інтегрального многовиду

$$w_1(\sigma) = c_1, \quad h(\sigma, c_1, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^\sigma L(\sigma, s)G_2(s, w(s), \varepsilon)ds.$$

Доведемо оцінку (6.17):

$$|h(\sigma, c_1, \varepsilon) - h(\sigma, c_1', \varepsilon)| \le \int\limits_{-\infty}^\sigma N\exp[(\delta+\gamma)(s-\sigma)]\nu_1|w(s)-w'(s)|ds \le$$

$$\le \frac{2\nu_1\delta N^2|c_1-c_1'|}{(\delta+\sqrt{\delta^2-2\nu_1\delta N})^2}.$$

Виберемо ν_1 із умови

$$\frac{2\nu_1\delta N^2}{(\delta+\sqrt{\delta^2-2\nu_1\delta N})^2} \le \frac{1}{2}.$$

Для виконання цієї нерівності досить, щоб виконувалася умова (6.16). Але тоді виконується оцінка (6.17). Оцінка (6.18) випливає із (6.23), якщо підставити $c' = 0$. Теорема доведена.

Теорема 6.2. *Нехай виконуються умови (6.13) – (6.16). Тоді існує функція* $w_1 = g(t, w_2, \varepsilon)$*, що визначена на* $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{M}$*, задовольняє умови* $g(t, 0, \varepsilon) = 0$*,* $|g(t, w, \varepsilon) - g(t, w', \varepsilon)| \leq |w - w'|/2$*, і така, що множина*

$$S^+ = \{(t, w_1, w_2)\,|t \in \mathbb{R}, w_2 \in \mathbb{M}, w_1 = g(t, w_2, \varepsilon), w_1 \in \mathbb{R}^{l+2p}\}$$

є інтегральним многовидом системи (6.12). Для кожного розв'язку $w(t) = (g(t, w_2(t), \varepsilon), w_2(t))$ *системи (6.12), що належить* S^+*, справджується оцінка*

$$|w(t)| \leq 2N|w_2(\sigma)| \exp[\gamma(\sigma - t)], \quad t \geq \sigma.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 6.1.

Нехай $t = \sigma$ – деяке число (початковий момент). Покажемо, що інтегральна множина S^- стійка в тому розумінні, що вона притягує до себе всі близькі розв'язки $w(t)$, $t \geq \sigma$, за експоненціальним законом.

Зауважимо, що поведінка розв'язків системи (6.12) на інтегральному многовиді S^- описується рівнянням

$$\frac{dv}{dt} = A_1(\varepsilon)v + G_1(t, v, h(t, v, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6.24}$$

Теорема 6.3. *Нехай* $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ *– довільний розв'язок системи (6.12) з початковим значенням* $w(\sigma)$ *при* $t = \sigma$*. За умови (6.16) існує розв'язок* $\xi(t) = (v(t), h(t, v(t), \varepsilon))$*, що належить* S^- *і такий, що вірна оцінка*

$$|w(t) - \xi(t)| \leq 2N|w_2(\sigma) - h(\sigma, v(\sigma), \varepsilon)| \exp[\gamma(\sigma - t)], \quad t \geq \sigma. \tag{6.25}$$

Доведення. Позначимо через $v(t)$ розв'язок рівняння (6.24) з початковою умовою $v(\sigma) = a$. Тоді $\xi(t)$ буде залежати від a і мати початкове значення $\xi(\sigma) = (a, h(\sigma, a, \varepsilon))$. Виконуючи в системі (6.12) заміну змінних

$$x(t) = w_1(t) - v(t), \quad y(t) = w_2(t) - h(t, v(t), \varepsilon),$$

одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1(\varepsilon)x + G_1(t, \eta + \xi, \varepsilon) - G_1(t, \xi, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= A_2(t, \varepsilon)y + G_2(t, \eta + \xi, \varepsilon) - G_2(t, \xi, \varepsilon), \end{aligned} \tag{6.26}$$

де $\eta(t) = (x(t), y(t))$. Функція $G(t, \eta+\xi, \varepsilon) - G(t, \xi, \varepsilon)$ задовольняє за змінною η умову Ліпшиця із сталою ν_1.

Згідно з теоремою 6.2 система (6.26) має інтегральний многовид S^+, який можна зобразити у вигляді $x = g(t, y, a, \varepsilon)$, де функція g задовольняє умову

$$g(t, 0, a, \varepsilon) = 0, \quad |g(t, y, a, \varepsilon) - g(t, y', a, \varepsilon)| \leq \frac{1}{2}|y - y'|. \tag{6.27}$$

Для кожного розв'язку $\eta(t) = (x(t), y(t))$ системи (6.26) з початковими даними $y(\sigma) = \zeta$, $x(\sigma) = g(\sigma, \zeta, a, \varepsilon)$, $\zeta \in \mathbb{M}$, вірна нерівність

$$|\eta(t)| \leq 2N|y(\sigma)| \exp[\gamma(\sigma - t)], \quad t \geq \sigma.$$

Покажемо тепер існування таких ζ і a, що для розв'язку $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ системи (6.12) і розв'язку $\eta(t) = (x(t), y(t))$ системи (6.26) при всіх $t \geq \sigma$ виконуються рівності

$$x(t) = w_1(t) - v(t), \quad y(t) = w_2(t) - h(t, v(t), \varepsilon), \tag{6.28}$$

звідки й буде випливати оцінка (6.25).

Якщо рівності (6.28) виконуються при $t = \sigma$, то згідно з теоремою єдиності вони виконуються і при всіх $t \geq \sigma$. При $t = \sigma$ (6.28) набувають вигляду

$$g(\sigma, \zeta, a, \varepsilon) = w_1(\sigma) - a, \quad \zeta = w_2(\sigma) - h(\sigma, a, \varepsilon). \tag{6.29}$$

Розглядаючи (6.29) як систему рівнянь відносно ζ і a, одержимо

$$a = w_1(\sigma) - g(\sigma, w_2(\sigma) - h(\sigma, a, \varepsilon), a, \varepsilon). \tag{6.30}$$

Покажемо, що це рівняння має розв'язок при довільних $w_1(\sigma)$ та $w_2(\sigma)$. Розглянемо відображення

$$H(a) = w_1(\sigma) - g(\sigma, w_2(\sigma) - h(\sigma, a, \varepsilon), a, \varepsilon).$$

Використовуючи властивості (6.27) функції g, знаходимо оцінку

$$|H(a) - w_1(\sigma)| \leq |w_2(\sigma) - h(\sigma, a, \varepsilon)|/2,$$

звідки

$$|H(a) - w_1(\sigma)| \leq \frac{1}{2}|w_2(\sigma) - h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon)| + \frac{1}{4}|a - w_1(\sigma)|.$$

Розглянемо в $(l + 2p)$-вимірному просторі кулю $\overline{H}$, що визначається нерівністю (відносно a)

$$|a - w_1(\sigma)| \leq |w_2(\sigma) - h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon)|.$$

Із нерівності

$$|H(a) - w_1(\sigma)| \leq \frac{3}{4}|w_2(\sigma) - h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon)| \tag{6.31}$$

випливає, що відображення $H(a)$ переводить кулю $\overline{H}$ в себе, тому, згідно з теоремою Брауера, це відображення має нерухому точку a^*.

Отже, рівняння (6.30) має розв'язок $a = a^*$, який згідно з (6.31) задовольняє оцінку

$$|a^* - w_1(\sigma)| \leq \frac{3}{4}|w_2(\sigma) - h(\sigma, w_1(\sigma), \varepsilon)|.$$

Підставляючи розв'язок a^* у друге рівняння (6.29), знаходимо, що пара a^*, ζ^*, де $\zeta^* = w_2(\sigma) - h(\sigma, a^*, \varepsilon)$, задовольняє систему (6.29). Теорема доведена.

Систему (6.24) перепишемо у вигляді

$$\frac{dw_3}{dt} = A_2(\varepsilon)w_3 + G_3(t, w_3, w_4, h(t, w_3, w_4, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$\frac{dw_4}{dt} = A_4(\varepsilon)w_4 + G_4(t, w_3, w_4, h(t, w_3, w_4, \varepsilon), \varepsilon), \tag{6.32}$$

де $v = (w_3, w_4)$, $G_1 = (G_3, G_4)$. Згідно з припущеннями відносно власних значень матриць $A_3(\varepsilon)$ та $A_4(\varepsilon)$ правильні оцінки

$$|\exp[A_3(\varepsilon)]t| \leq N\exp[(\gamma - \delta)t], \quad t \geq 0,$$

$$|\exp[A_4(\varepsilon)]t| \leq N\exp[(\gamma + \delta)t], \quad t \leq 0. \tag{6.33}$$

За умови (6.16), згідно з [98, с. 42], існує інтегральний многовид S_1^+ системи (6.32), який можна подати у вигляді $w_3 = r(t, w_4, \varepsilon)$. При цьому функція $r(t, w, \varepsilon)$ задовольняє умови

$$r(t, 0, \varepsilon) = 0, \quad |r(t, w, \varepsilon) - r(t, v, \varepsilon)| \leq \frac{1}{2}|w - v|, w \in \mathbb{R}^{2p}, v \in \mathbb{R}^{2p}.$$

Звідси випливає існування центрального многовиду. Позначимо $r_1(t, w, \varepsilon) = h(t, r(t, w, \varepsilon), w, \varepsilon)$.

Теорема 6.4. *Нехай виконуються оцінки (6.13) – (6.16), (6.33). Тоді існує центральний многовид*

$$S = \{(t, w_3, w_4, w_2)\,|t \in \mathbb{R}, w_4 \in \mathbb{R}^{2p}, w_3 = r(t, w_4, \varepsilon), w_3 \in \mathbb{R}^l,$$
$$w_2 = r_1(t, w_4, \varepsilon), w_2 \in \mathbb{M}\}$$

системи (6.12).

Рівняння на многовиді S має вигляд

$$\frac{dw_4}{dt} = A_4(\varepsilon)w_4 + G_4(t, r(t, w_4, \varepsilon), w_4, r_1(t, w_4, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6.34}$$

У багатьох випадках для дослідження біфуркації тривіального розв'язку рівняння (6.34) досить визначити функції $r(t, w, \varepsilon)$ та $r_1(t, w, \varepsilon)$ наближено. Для цього знайдемо спочатку наближений вираз функції $h(\sigma, c_1, \varepsilon)$ за припущення, що матриця $A_2(t, \varepsilon) = A_2(\varepsilon)$ не залежить від t. Нехай, наприклад,

$$h_n(\sigma, c_1, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\sigma} \exp[A_2(\varepsilon)(\sigma - s)]G_2(s, w^{(n)}(s), \varepsilon)ds,$$

де $w^{(n)}(s)$ знаходиться за допомогою рекурентної формули (6.21). Наприклад, нульове і перше наближення мають вигляд

$$h_0(\sigma, c_1, \varepsilon) = 0, \quad h_1(\sigma, c_1, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\sigma} \exp[A_2(\varepsilon)(\sigma - s)]G_2(s, H_+(s-\sigma)c, \varepsilon)ds.$$

Звідси знаходимо нульове і перше наближення функцій $r(\sigma, w, \varepsilon)$, $r_1(\sigma, w, \varepsilon)$:

$$r^{(0)}(\sigma, w, \varepsilon) = 0, \quad r_1^{(0)}(\sigma, w, \varepsilon) = 0,$$

$$r^{(1)}(\sigma, w, \varepsilon) = -\int\limits_{\sigma}^{\infty} \exp[A_3(\varepsilon)(\sigma - s)]G_3(s, 0, \exp[A_4(\varepsilon)(s-\sigma)]w, 0, \varepsilon)ds,$$

$$r_1^{(1)}(\sigma, w, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\sigma} \exp[A_2(\varepsilon)(\sigma - s)]G_2(s, 0, \exp[A_4(\varepsilon)(s-\sigma)]w, 0, \varepsilon)ds.$$

Нехай функції $G_2(t, 0, w, 0, \varepsilon)$ та $G_3(t, 0, w, 0, \varepsilon)$, $w \in \mathbb{R}^{2p}$, аналітичні відносно w в деякому околі точки $w = 0$:

$$G_2(t, 0, w, 0, \varepsilon) = \sum_{|\alpha|=q}^{\infty} g_\alpha(t)w^\alpha, \quad G_3(t, 0, w, 0, \varepsilon) = \sum_{|\alpha|=q}^{\infty} f_\alpha(t)w^\alpha,$$

де $q \geq 2$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2p})$, α_j, $j \in \{1, \ldots, 2p\}$ – невід'ємні цілі, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{2p}$, $w^\alpha = w_1^{\alpha_1} \ldots w_{2p}^{\alpha_{2p}}$.

Припустимо, що відомі розклади

$$f_\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\alpha k}e^{ikt}, \quad g_\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{\alpha k}e^{ikt}.$$

Тоді знаходження функцій $r^{(1)}(\sigma, w, \varepsilon)$ та $r_1^{(1)}(\sigma, w, \varepsilon)$ зводиться до обчислення інтегралів вигляду

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty} \exp[\mu(\varepsilon)(\sigma - s)] \exp[iks + n(\alpha_m(\varepsilon) \pm i\beta_m(\varepsilon))(s - \sigma)]ds,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\sigma} \exp[\lambda(\varepsilon)(\sigma - s)] \exp[iks + n(\alpha_m(\varepsilon) \pm i\beta_m(\varepsilon))(s - \sigma)]ds,$$

де $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{1, \ldots, p\}$, $\lambda(\varepsilon)$ та $\mu(\varepsilon)$ – власні значення матриць $A_2(\varepsilon)$ і $A_3(\varepsilon)$ відповідно.

Зауважимо, що для дослідження умов біфуркації досить обмежитися членами другого порядку в розкладі функцій $r^{(1)}(\sigma, w, 0)$, $r_1^{(1)}(\sigma, w, 0)$ у ряд Тейлора. Тоді права частина системи (6.34) при $\varepsilon = 0$ буде відома з точністю до членів третього порядку.

6.1.3. Дослідження біфуркації стану рівноваги

Систему (6.34) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dv_k}{dt} &= [\alpha_k(\varepsilon) + i\beta_k(\varepsilon)]v_k + V_k(t, v, \overline{v}, \varepsilon), \\ \frac{d\overline{v}_k}{dt} &= [\alpha_k(\varepsilon) - i\beta_k(\varepsilon)]\overline{v}_k + \overline{V}_k(t, v, \overline{v}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{6.35}$$

де v_k – комплексна змінна, $v = (v_1, \ldots, v_p)^T$, $V_k(t + 2\pi, v, \overline{v}, \varepsilon) = V_k(t, v, \overline{v}, \varepsilon)$, $V_k(t, v, \overline{v}, \varepsilon) = O(|v|^2)$ при $|v| \to 0$, $k \in \{1, \ldots, p\}$.

Нехай виконується умова A:

$$n_1\beta_1(0) + \ldots + n_p\beta_p(0) \neq m \quad \text{при} \quad 0 < |n_1| + \ldots + |n_p| < 6,$$

де m, n_1, …, n_p – цілі.

Перетворимо систему (6.35) за допомогою підстановки

$$v = x + \sum_{i=2}^{4} W_i(t, x, \overline{x}, \varepsilon), \tag{6.36}$$

де W_2, W_3, W_4 – форми відповідно другого, третього і четвертого порядку з періодичними коефіцієнтами. Перетворення (6.36) можна підібрати так, що рівняння для x та $\overline{x}$ набудуть вигляду [12, 108]

$$\frac{dx_k}{dt} = [\alpha_k(\varepsilon) + i\beta_k(\varepsilon)]x_k + x_k \sum_{j=1}^{p} a_{kj}(\varepsilon)x_j\overline{x}_j + X_k(t, x, \overline{x}, \varepsilon),$$

$$\frac{d\overline{x}_k}{dt} = [\alpha_k(\varepsilon) - i\beta_k(\varepsilon)]\overline{x}_k + \overline{x}_k \sum_{j=1}^{p} \overline{a}_{kj}(\varepsilon) x_j \overline{x}_j + \overline{X}_k(t, x, \overline{x}, \varepsilon),$$

де

$$X_k(t + 2\pi, x, \overline{x}, \varepsilon) = X_k(t, x, \overline{x}, \varepsilon), \quad X_k(t, x, \overline{x}, \varepsilon) = O(|x|^5)$$

при $|x| \to 0$. Перейдемо до полярних координат, поклавши $x_k = r_k \exp(i\varphi_k)$, $\overline{x}_k = r_k \exp(-i\varphi_k)$. Тоді одержимо систему рівнянь

$$\frac{dr_k}{dt} = \alpha_k(\varepsilon) r_k + r_k \sum_{j=1}^{p} b_{kj}(\varepsilon) r_j^2 + R_k(t, r, \varphi, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \beta_k(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{p} c_{kj}(\varepsilon) r_j^2 + r_k^{-1} \Phi_k(t, r, \varphi, \varepsilon),$$

де

$$b_{kj}(\varepsilon) = \operatorname{Re} a_{kj}(\varepsilon), \quad c_{kj}(\varepsilon) = \operatorname{Im} a_{kj}(\varepsilon), \quad R_k(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^5),$$

$\Phi_k(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^5)$ при $|r| \to 0$.

Розглянемо біфуркаційне рівняння $B(\varepsilon) r^2 + \alpha(\varepsilon) = 0$, де $B(\varepsilon)$ – матриця з елементами $b_{kj}(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ та r^2 – вектори з елементами $\alpha_k(\varepsilon)$ та r_j^2 відповідно. Позначимо через $\rho(\varepsilon) = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$ розв'язок рівняння

$$B(0) r^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon}(0)\varepsilon = 0$$

і розглянемо матрицю

$$Q(\varepsilon) = \operatorname{diag}[\rho_1, \ldots, \rho_p] B(0) \operatorname{diag}[\rho_1, \ldots, \rho_p].$$

Теорема 6.5. *Нехай* $\det B(0) \neq 0$, $\det \dfrac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon}(0) \neq 0$, *всі елементи вектора* $B^{-1}(0) \dfrac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon}(0)\varepsilon$ *від'ємні, виконується умова A і матриця* $Q(\varepsilon)$ *некритична. Тоді існує інваріантний тор системи (6.1).*

Твердження випливає з існування інваріантного тора системи (6.35).

Інваріантний тор буде умовно стійким. Нехай $l = 0$, виконуються умови теореми 5 і всі власні значення матриці $Q(\varepsilon)$ мають від'ємні дійсні частини.

Тоді інваріантний тор системи (6.35) буде стійким, тому із теореми 3 випливає стійкість інваріантного тора системи (6.1).

Розв'язки на торі будуть квазіперіодичними, якщо $|(m, \beta(0)) + q| > \gamma |m|^{-p-1}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$, при деякому $\gamma > 0$, цілому q і векторі $m = (m_1, \ldots, m_p)$ з цілочисельними елементами [16, с. 47].

Зауваження 1. Крім тора максимальної розмірності можуть існувати також тори менших розмірностей, для яких $r_k = 0$ при деяких k.

Зауваження 2. Результати цього підрозділу можна узагальнити на системи вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} D_j(t, \varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + A(t, \varepsilon) u + B(t, \varepsilon) u_\Delta + f(t, x, u, u_\Delta, \varepsilon),$$

$x = (x_1, \ldots, x_m)$, $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$, з періодичними умовами $u(t, x_1, \ldots, x_j + 2\pi, \ldots, x_m) = u(t, x_1, \ldots, x_m)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Як приклад розглянемо рівняння [33]

$$\tau \frac{\partial v}{\partial t} + v = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K \sin v(t, x - \Delta) \tag{6.37}$$

з періодичною умовою

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \tag{6.38}$$

де $\tau > 0$, $d > 0$, $K > 0$. Дослідимо біфуркацію нульового розв'язку рівняння (6.37). Розв'язок задачі (6.37), (6.38) будемо шукати у вигляді ряду (6.5). Лінеаризуючи рівняння (6.37), одержимо рівняння

$$\tau \frac{\partial v}{\partial t} + v = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K v(t, x - \Delta). \tag{6.39}$$

Характеристичне рівняння задачі (6.39), (6.38) запишемо у вигляді

$$\lambda \tau + 1 + m^2 d - K \exp(im\Delta) = 0, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{6.40}$$

Позначимо через $\varepsilon = -1 - n^2 d + K \cos(n\Delta)$, n – фіксоване, $n \in \mathbb{N}$, малий додатній параметр. Нехай $\cos(n\Delta) > 0$, $\sin(n\Delta) \neq 0$. Тоді рівняння (6.40) має пару коренів $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{\tau} \pm i\dfrac{K}{\tau}\sin(n\Delta)$. Нехай всі інші корені рівняння (6.40) задовольняють умову $|\mathbb{R}e\lambda| > \gamma > 0$. Тоді згідно з теоремою 6.4 існує центральний многовид рівняння (6.37). Рівняння на цьому многовиді з точністю до членів третього порядку має вигляд

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = -dn^2 y + K\exp(in\Delta) - \frac{K}{8}y^2\overline{y}\exp(in\Delta), \tag{6.41}$$

де $y = y_n(t)$, та $\overline{y} = \overline{y}_n(t)$ виражаються через коефіцієнти Фур'є ряду (6.5). У рівнянні (6.41) перейдемо до полярних координат заміною $y = r\exp(i\varphi)$. Тоді одержимо дійсну систему

$$\tau\frac{dr}{dt} = \varepsilon r - \frac{K}{8}r^3\cos(n\Delta),$$
$$\tau\frac{d\varphi}{dt} = K\sin(n\Delta) - \frac{K}{8}r^2\sin(n\Delta). \tag{6.42}$$

Перше рівняння системи (6.42) має стаціонарний розв'язок $r = \sqrt{\varepsilon}N$, де $N = \sqrt{8/(K\cos(n\Delta))}$. Тоді

$$\varphi = \psi(t) = c + t\varepsilon\frac{K}{\tau}\sin(n\Delta) - t\frac{\varepsilon}{\tau}\; tg(n\Delta),$$

де c – довільна стала. Цьому розв'язку відповідає періодичний розв'язок $y = \sqrt{\varepsilon}N\exp(i\psi(t))$ рівняння (6.41) та періодичний розв'язок $v = \sqrt{\varepsilon}N\cos(\psi(t) - nx) + O(\varepsilon)$ задачі (6.37), (6.38).

6.2. Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної параболічної системи з перетвореним аргументом

Розглянемо систему нелінійних сингулярно збурених параболічних рівнянь з перетвореним аргументом

$$L(\varepsilon)\partial_t u = D(t)\partial_x^2 u + A(t)u + B(t)u_\Delta + f(t, x, u, u_\Delta) \tag{6.43}$$

і з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{6.44}$$

Тут $L(\varepsilon) = \mathrm{diag}[E_m, \varepsilon E_p], m + p = n$, ε – малий додатний параметр, $u_\Delta = u(t, x - \Delta)$, Δ – зсув аргументу, матриці $D(t)$, $A(t)$, $B(t)$ і функція $f : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^n$ п'ять раз неперервно диференційовні за всіма аргументами і 2π - періодичні відносно $t, x, f(t, x, u, v) = O(|u|^2 + |v|^2)$ при $|u| + |v| \to 0$. Тому функція $f(t, x, u, v)$ задовольняє умови

$$f(t, x, 0, 0) = 0, |f(t, x, u, v) - f(t, x, u', v')| \leq \nu \left(|u - u'|^2 + |v - v'|^2\right)^{1/2}, \tag{6.45}$$

де

$$|u| \leq \rho,\ |u'| \leq \rho,\ |v| \leq \rho,\ |v'| \leq \rho,\ |u|^2 = u_1^1 + \ldots + u_n^2,$$

причому стала Ліпшиця ν може бути зроблена як завгодно малою при зменшенні ρ. Функцію $f(t, x, u, v)$ можна довизначити поза областю $\{\{u, v\} \subset \mathbb{R}^n | \quad |u| \leq \rho, |v| \leq \rho\}$ так, щоб умови (6.45) виконувалися у всьому просторі. Нехай матриця $L^{-1}(\varepsilon)D(t)$ додатно визначена.

Поряд з (6.43) розглянемо лінійну систему

$$L(\varepsilon)\partial_t u = D(t)\partial_x^2 u + A(t)u + B(t)u_\Delta. \tag{6.46}$$

Розв'язок задачі (6.46), (6.44) шукатимемо у вигляді ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) \exp(-ikx), \tag{6.47}$$

де $y_{-k}(t) = \bar{y}_k(t)$. Підставляючи (6.47) в (6.46) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(-ikx)$, одержимо зліченну систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$L(\varepsilon)\frac{dy_k}{dt} = M_k(t)y_k(t), k = 0, \pm 1, \ldots\ , \tag{6.48}$$

де $M_k(t) = -k^2 D(t) + A(t) + B(t)\exp(ik\Delta)$. Позначимо

$$y_k = \begin{bmatrix} v_k \\ u_k \end{bmatrix}, \; D(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ D_3(t) & D_4(t) \end{bmatrix}, A(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ B_3(t) & B_4(t) \end{bmatrix},$$

де $v_k \in \mathbb{R}^m$, $u_k \in \mathbb{R}^p$, матриці $D_1,\; A_1,\; B_1$ мають розмірність $m \times m$, матриці $D_2,\; A_2,\; B_2$ – розмірність $m \times p$, матриці $D_3,\; A_3,\; B_3$ – розмірність $p \times m$, матриці $D_4,\; A_4,\; B_4$ – розмірність $p \times p$. Тоді систему (6.48) можна переписати у вигляді

$$\frac{dv_k}{dt} = M_{k1}(t)v_k + M_{k2}(t)u_k, \quad \varepsilon\frac{du_k}{dt} = M_{k3}(t)v_k + M_{k4}(t)u_k, \tag{6.49}$$

де

$$M_{kq} = -k^2 D_q(t) + A_q(t) + B_q(t)\exp(ik\Delta), \; q = 1, 2, 3, 4.$$

Лема 6.1. *Нехай виконується умова 1) Всі корені характеристичного рівняння* $\det(M_{k4}(t) - \lambda E) = 0$, $k = 0, \pm 1, \ldots,$ *лежать у півплощині* $Re\lambda < 0$. *Тоді знайдеться таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *існує інтегральний многовид системи (6.49), який можна зобразити у вигляді* $u_k = h(t, \varepsilon)v_k$, *де*

$$h(t, \varepsilon) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + O(\varepsilon^2), \quad h_0(t) = -M_{k4}^{-1}(t)M_{k3}(t),$$
$$h_1(t) = M_{k4}^{-1}\left[\frac{dh_0}{dt} + h_0 M_{k1}(t) + h_0 M_{k2}(t)h_0\right].$$

Доведення. Існування інтегрального многовиду доводиться так, як в [31]. Матриця-функція h задовольняє диференціальне рівняння Ріккаті

$$\varepsilon\frac{dh}{dt} + \varepsilon h M_{k1}(t) + \varepsilon h M_{k2}(t)h = M_{k3}(t) + M_{k4}(t)h. \tag{6.50}$$

Розв'язок рівняння (6.50) можна шукати у вигляді ряду $h(t, \varepsilon) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + \ldots$, звідки знаходяться функції $h_0(t)$ та $h_1(t)$.

Лема доведена.

Розв'язок задачі (6.43), (6.44) будемо шукати у вигляді ряду (6.47). Підставляючи (6.47) в (6.43) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(-ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, одержимо зліченну систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$L_1(\varepsilon)\frac{dy}{dt} = M(t)y + F(t, y), \tag{6.51}$$

де $y = (y_0, y_1, y_{-1}, \ldots)^T$, $L_1(\varepsilon)$ та $M(t)$ – нескінченні блочно-діагональні матриці з блоками $L(\varepsilon)$ та $M_k(t)$, $k = 0, \pm1, \ldots$, відповідно; $F(t, y) = (f_0, f_1, f_{-1}, \ldots)^T$ – нелінійна функція, причому f_k є коефіцієнтами при $\exp(-ikx)$ розкладу функції $f(t, x, u, u_\Delta)$ в ряд Фур'є.

Доведемо, що функція $F(t, y)$ задовольняє умову Ліпшиця по y. Введемо в просторі послідовностей норму

$$|y| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|^2\right)^{1/2}.$$

Розглянемо інший вектор $z = (z_0, z_1, z_{-1}, \ldots)^T$ коефіцієнтів Фур'є розв'язку $v(t, x)$ рівняння (6.43) і відповідний йому вектор $F(t, z) = (g_0, g_1, g_{-1}, \ldots)^T$. Використовуючи рівність Парсеваля, одержимо

$$|F(t,y) - F(t,z)| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k - g_k|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t,x,u,u_\Delta) -\right.$$

$$\left. - f(t,x,v,v_\Delta)|^2 dx\right)^{1/2} \le \nu \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|u - v|^2 + |u_\Delta - v_\Delta|^2\right) dx\right)^{1/2} =$$

$$= \nu \left(2\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k - z_k|^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}\nu|y - z|.$$

Отже, функція F задовольняє умову Ліпшиця із сталою $\sqrt{2}\nu$.

Перепишемо систему (6.51) у вигляді системи рівнянь

$$L(\varepsilon)\frac{dy_k}{dt} = M_k(t)y_k + f_k(t, y)$$

або у вигляді

$$\frac{dv_k}{dt} = M_{k1}(t)v_k + M_{k2}(t)u_k + V_k(t,v,u), \quad \varepsilon\frac{du_k}{dt} = \tag{6.52}$$

$$= M_{k3}(t)v_k + M_{k4}(t)u_k + U_k(t,v,u),$$

де $y_k = (v_k, u_k)^T$, $f_k = (V_k, U_k)^T$.

Розглянемо систему рівнянь

$$M_{k3}(t)v_k + M_{k4}(t)u_k + U_k(t,v,u) = 0. \tag{6.53}$$

За теоремою про неявну функцію в деякому околі початку координат існує розв'язок $u = \varphi(t,v)$ системи (6.53); функція $\varphi(t,v)$ п'ять раз неперервно диференційовна за всіма аргументами, причому $\varphi(t,0) = 0$.

Для дослідження біфуркації стану рівноваги системи (6.52) побудуємо відповідне рівняння на многовиді з точністю до членів порядку $O(\varepsilon)$ в лінійній частині і $O(6.43)$ в нелінійній частині. Тоді одержимо систему рівнянь

$$\frac{dv_k}{dt} = P_k(t,\varepsilon)v_k + V_k(t,v,\varphi(t,v)), \tag{6.54}$$

де $P_k(t,\varepsilon) = M_{k1}(t) + M_{k2}(t)h_0(t) + \varepsilon M_{k2}(t)h_1(t)$.

Розглянемо відповідну лінійну систему

$$\frac{dv_k}{dt} = P_k(t,\varepsilon)v_k. \tag{6.55}$$

Використовуючи нерівність Важевського, оцінимо розв'язок $v_k(t)$ системи (6.55):

$$|v_k(t)| \leq |v_k(t_0)| \exp\int\limits_{t_0}^{t} \Lambda_k(t_1)dt_1, \tag{6.56}$$

де $\Lambda_k(t)$ – найбільший характеристичний корінь матриці $\dfrac{1}{2}[P_k(t,\varepsilon) + P_k^*(t,\varepsilon)]$. Нехай для всіх x, що належать одиничній сфері $|x| = 1,\ x \in \mathbb{R}^m$, виконуються нерівності

$$(Dy,y) \geq \mu > 0, \quad (Ay + A^Ty, y) \leq 2a, \quad (B\exp(ik\Delta)y+$$

$$+B^T \exp(-ik\Delta)y, y) \le 2b, \quad \frac{1}{2}(M_{k2}h_1x + (M_{k2}h_1)^T x, x) \le k^2\mu_0 + a_0 + b_0,$$

де $y = (x, -M_{k4}^{-1} M_{k3}x)^T$. Тоді

$$\frac{1}{2}\max_{|x|=1}(M_k(t)y + M_k^*(t)y, y) \le -k^2\mu + a + b.$$

Враховуючи співвідношення

$$(P_k(t,0)x + P_k^*(t,0)x, x) = (M_k(t)y + M_k^*(t)y, y),$$

одержуємо

$$\Lambda_k(t) = \frac{1}{2}\max_{|x|=1}(P_k(t,\varepsilon)x + P_k^*(t,\varepsilon)x, x) \le -k^2(\mu - \varepsilon\mu_0) + a + \varepsilon a_0 + b + \varepsilon b_0.$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{k\to 0} \Lambda_k(t) = -\infty$.

Система (6.55) є системою лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Згідно з теоремою Флоке існує невироджена матриця $H_k(t,\varepsilon)$, $H_k(t+2\pi,\varepsilon) = H_k(t,\varepsilon)$, така, що заміна $v_k = H_k(t,\varepsilon)z_k$ зводить систему (6.55) до вигляду

$$\frac{dz_k}{dt} = C_k(\varepsilon)z_k,$$

де $C_{-k}(\varepsilon) = \bar{C}_k(\varepsilon), \quad k = 0, \pm 1, \dots$ Припустимо, що характеристичне рівняння $\det(C_k(\varepsilon) - \lambda E) = 0$ при деяких значеннях $k = \pm k_1$ має пару коренів $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, $\beta(0) > 0$, а решта коренів задовольняють умову $|Re\lambda| > \gamma + \delta$, $\gamma > \delta > 0$. Для всіх цілих k, крім скінченного числа, виконується нерівність $k^2 \ge (\gamma + \delta + a + \varepsilon a_0 + b + \varepsilon b_0)/(\mu - \varepsilon\mu_0)$. Тоді $-k^2(\mu - \varepsilon\mu_0) + a + \varepsilon a_0 + b + \varepsilon b_0 \le -(\gamma + \delta)$, $\Lambda_k(t) \le -(\gamma + \delta)$ і з нерівності (6.56) випливає оцінка

$$|v_k(t)| \le |v_k(t_0)| \exp[-(\gamma + \delta)(t - t_0)], \tag{6.57}$$

де $t \ge t_0$.

Перепишемо систему (6.54) у вигляді

$$\frac{dY_1}{dt} = N_1(t,\varepsilon)Y_1 + F_1(t,v), \quad \frac{dY_2}{dt} = N_2(t,\varepsilon)Y_2 + F_2(t,v), \tag{6.58}$$

де $v=(Y_1,Y_2)^T$, $Y_1=(v_0,v_1,v_{-1},\ldots,v_{k_0},v_{-k_0})^T$,

$$Y_2=(v_{k_0+1},v_{-k_0-1},\ldots)^T,\quad N_1(t,\varepsilon)=\ diag(P_0,P_1,P_{-1},\ldots,P_{k_0},P_{-k_0}),$$

$$N_2(t,\varepsilon)=\ diag(P_{k_0+1},P_{-k_0-1},\ldots),\quad F_1(t,\varepsilon)=(V_0,V_1,V_{-1},\ldots,V_{k_0},V_{-k_0})^T,$$

$$F_2(t,\varepsilon)=(V_{k_0+1},V_{-k_0-1},\ldots)^T,\ k_0=[\sqrt{(\gamma+\delta+a+\varepsilon a_0+b+\varepsilon b_0)/(\mu-\varepsilon\mu_0)}].$$

Матрицю $C(\varepsilon)=\ diag(C_0,C_1,C_{-1},\ldots,C_{k_0},C_{-k_0})$ зведемо до вигляду $C(\varepsilon)=T(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)T^{-1}(\varepsilon)$, де $\Gamma(\varepsilon)=\ diag(A_1(\varepsilon),\Gamma_1(\varepsilon))$, $A_1(\varepsilon)=\mathrm{diag}(A_3(\varepsilon),A_4(\varepsilon))$, власні значення матриці $A_3(\varepsilon)$ задовольняють умову $Re\lambda>\gamma+\delta$, $A_4(\varepsilon)$ – діагональна матриця з числами $\alpha(\varepsilon)\pm i\beta(\varepsilon)$ по діагоналі, а власні значення матриці $\Gamma_1(\varepsilon)$ задовольняють умову $Re\lambda<-\gamma-\delta$. Таке перетворення можна одержати шляхом зведення матриці $C(\varepsilon)$ до жорданової нормальної форми. В системі (6.58) зробимо заміну $Y_1(t)=H(t,\varepsilon)T(\varepsilon)Y_3(t)$, де $H(t,\varepsilon)=\mathrm{diag}(H_0,H_1,H_{-1},\ldots,H_{k_0},H_{-k_0})$. Тоді одержимо систему

$$\frac{dY_3}{dt}=\Gamma(\varepsilon)Y_3+T^{-1}(\varepsilon)H^{-1}(t,\varepsilon)F_1(t,v),$$

$$\frac{dY_2}{dt}=N_2(t,\varepsilon)Y_2+F_2(t,v).\tag{6.59}$$

Оскільки матриця $\Gamma(\varepsilon)$ є блочно-діагональною, то систему (6.59) можна переписати у вигляді

$$\frac{dw_1}{dt}=A_1(\varepsilon)w_1+G_1(t,w,\varepsilon),\quad \frac{dw_2}{dt}=A_2(t,\varepsilon)w_2+G_2(t,w,\varepsilon),\tag{6.60}$$

де

$$A_2(t,\varepsilon)=\mathrm{diag}(\Gamma_1(\varepsilon),N_2(t,\varepsilon)),\quad Y_3=(w_1,Y_4)^T,$$

$$w_2=(Y_4,Y_2)^T,\quad w_1\in\mathbb{R}^{l+2},\quad w=(w_1,w_2),$$

w_2 належить деякому банаховому простору $\mathbb{M}$.

Згідно з припущенням відносно власних значень матриці $\Gamma_1(\varepsilon)$ справджується оцінка

$$|\exp[\Gamma_1(\varepsilon)t]|\le N\exp[-(\gamma+\delta)t],\quad t\ge 0,\quad N>1.$$

Тоді для фундаментальної матриці $K(t,s)$ системи $dw_2/dt = A_2(t,\varepsilon)w_2$ з нерівності (6.57) випливає оцінка

$$|K(t,s)| \leq N\exp[-(\gamma+\delta)(t-s)], \quad t \geq s. \tag{6.61}$$

Аналогічно можна одержати оцінку

$$|\exp[A_1(\varepsilon)t]| \leq N\exp[(-\gamma+\delta)t], \quad t \leq 0. \tag{6.62}$$

Оскільки вектор-функція F та функції V_k задовольняють умову Ліпшиця і $F(t,0) = 0$, $V_k(t,0,\varphi(t,0)) = 0$, то

$$G_1(t,0,\varepsilon) = G_2(t,0,\varepsilon) = 0,$$

$$(|G_1(t,w,\varepsilon) - G_1(t,v,\varepsilon)|^2 + |G_2(t,w,\varepsilon) - G_2(t,v,\varepsilon)|^2)^{1/2} \leq \nu_1|w-v|. \tag{6.63}$$

Теорема 6.6. *Нехай виконуються умови (6.61) – (6.63). Тоді при*

$$\nu_1 < \frac{\delta}{N(1+2N)} \tag{6.64}$$

існує функція $w_2 = h(t,w_1,\varepsilon)$, що визначена на $\mathbb{R}^{l+4}$, задовольняє умови

$$h(t,0,\varepsilon) = 0, \quad |h(t,w_1,\varepsilon) - h(t,w_1',\varepsilon)| \leq \frac{1}{2}|w_1 - w_1'|$$

і така, що множина

$$S^- = \{(t,w_1,w_2)|\ t\in\mathbb{R},\ w_1\in\mathbb{R}^{l+2},\ w_2 = h(t,w_1,\varepsilon),\ w_2\in\mathbb{M}\}$$

є інтегральним многовидом системи (6.60). Для кожного розв'язку $w(t) = (w_1(t), h(t,w_1(t),\varepsilon))$ системи (6.60), який належить S^-, виконується оцінка

$$|w(t)| \leq 2N|w_1(\sigma)|\exp[\gamma(\sigma-t)], \quad t\leq\sigma.$$

Теорема доводиться аналогічно доведенню теореми 1 із [126].

Теорема 6.7. *Нехай виконуються умови (6.61) – (6.64). Тоді існує функція $w_1 = g(t,w_2,\varepsilon)$, яка визначена на $\mathbb{R}^2\times\mathbb{M}$, задовольняє умови*

$$g(t,0,\varepsilon) = 0, \quad |g(t,w,\varepsilon) - g(t,w',\varepsilon)| \leq \frac{1}{2}|w-w'|$$

і така, що множина

$$S^+ = \{(t, w_1, w_2)|\ t \in \mathbb{R},\ w_2 \in \mathbb{M},\ w_1 = g(t, w_2, \varepsilon),\ w_1 \in \mathbb{R}^{l+2}\}$$

є інтегральним многовидом системи (6.60). Для кожного розв'язку $w(t) = (g(t, w_2(t), \varepsilon), w_2(t))$ *системи (6.60), що належить* S^+*, виконується оцінка*

$$|w(t)| \leq 2N|w_2(\sigma)| \exp[\gamma(\sigma - t)],\ t \geq \sigma.$$

Доведення теореми 6.7 можна провести тим же шляхом, що і доведення теореми 6.6.

Доведемо, що інтегральна множина S^- стійка в тому розумінні, що вона притягує до себе всі близькі розв'язки $w(t)$ $(t \geq \sigma)$ за експоненціальним законом. Зауважимо, що поведінка розв'язків системи (6.60) на інтегральному многовиді S^- описується рівнянням

$$\frac{dz}{dt} = A_1(\varepsilon)z + G_1(t, z, h(t, z, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6.65}$$

Теорема 6.8. *Нехай* $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ *– довільний розв'язок системи (6.60) з початковою умовою* $w(\sigma)$ *при* $t = \sigma$*. За умови (6.64) існує розв'язок* $\xi(t) = (z(t), h(t, z(t), \varepsilon))$*, який належить* S^- *і такий, що правильна оцінка*

$$|w(t) - \xi(t)| \leq 2N|w_2(\sigma) - h(\sigma, z(\sigma), \varepsilon)| \exp[\gamma(\sigma - t)],\ t \geq \sigma.$$

Теорема доводиться аналогічно доведенню теореми 5 із [126].

Систему (6.65) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dw_3}{dt} &= A_3(\varepsilon)w_3 + G_3(t, w_3, w_4, h(t, w_3, w_4, \varepsilon), \varepsilon), \\ \frac{dw_4}{dt} &= A_4(\varepsilon)w_4 + G_4(t, w_3, w_4, h(t, w_3, w_4, \varepsilon), \varepsilon), \end{aligned} \tag{6.66}$$

де $z = (w_3, w_4)$, $G_1 = (G_3, G_4)$. Згідно з припущенням відносно власних значень матриць $A_3(\varepsilon)$ та $A_4(\varepsilon)$ правильні оцінки

$$|\exp[A_3(\varepsilon)t]| \leq N\exp[(\gamma-\delta)t], \quad t \geq 0,$$
$$|\exp[A_4(\varepsilon)t]| \leq N\exp[(\gamma+\delta)t], \quad t \leq 0. \tag{6.67}$$

За умови (6.64) згідно з [98, с. 42] існує інтегральний многовид S_1^+ системи (6.66), який можна подати у вигляді $w_3 = r(t, w_4, \varepsilon)$. При цьому функція $r(t, w, \varepsilon)$ задовольняє умови

$$r(t,0,\varepsilon)=0,\ |r(t,w,\varepsilon)-r(t,v,\varepsilon)| \leq \frac{1}{2}|w-v|,\ w\in\mathbb{R}^2,\ v\in\mathbb{R}^2.$$

Звідси випливає існування центрального многовиду. Покладемо $r_1(t, w, \varepsilon) = h(t, r(t, w, \varepsilon), w, \varepsilon)$.

Теорема 6.9. *Нехай виконуються оцінки (6.61) – (6.64), (6.67). Тоді існує центральний многовид*

$$S = \{(t, w_3, w_4, w_2)|\ t\in\mathbb{R},\ w_4\in\mathbb{R}^2,\ w_3 = r(t,w_4,\varepsilon),$$
$$w_3\in\mathbb{R}^l,\ w_2 = r_1(t,w_4,\varepsilon),\ w_2\in\mathbb{M}\}$$

системи (6.60).

Рівняння на многовиді S має вигляд

$$\frac{dw_4}{dt} = A_4(\varepsilon)w_4 + G_4(t, r(t,w_4,\varepsilon), w_4, r_1(t,w_4,\varepsilon),\varepsilon). \tag{6.68}$$

Систему (6.68) перепишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = [\alpha(\varepsilon)+i\beta(\varepsilon)]x + X(t,x,\bar{x},\varepsilon),$$
$$\frac{d\bar{x}}{dt} = [\alpha(\varepsilon)-i\beta(\varepsilon)]\bar{x} + \bar{X}(t,x,\bar{x},\varepsilon), \tag{6.69}$$

де x – комплексна змінна, $X(t+2\pi, x, \bar{x}, \varepsilon) = X(t, x, \bar{x}, \varepsilon)$, $X(t, x, \bar{x}, \varepsilon) = O(|x|^2)$ при $|x| \to 0$.

Нехай відсутній сильний резонанс, тобто для всіх цілих $m_1,\ m_2,\ 0 < m_2 < 6$, виконується нерівність $m_2\beta(0) + m_1 \neq 0$. Тоді перше рівняння системи (6.69) перетворимо за допомогою підстановки

$$x = p + W_2(t, p, \bar{p}, \varepsilon) + W_3(t, p, \bar{p}, \varepsilon) + W_4(t, p, \bar{p}, \varepsilon), \tag{6.70}$$

де $W_2,\ W_3,\ W_4$ – форми відповідно другого, третього і четвертого порядків з періодичними коефіцієнтами. Перетворення (6.70) можна підібрати так, що рівняння для p набуде вигляду [11, с. 1542]

$$dp/dt = [\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon)]p + [\gamma(\varepsilon) + i\delta(\varepsilon)]p^2\bar{p} + P(t, p, \bar{p}, \varepsilon),$$

де $P(t + 2\pi, p, \bar{p}, \varepsilon) = P(t, p, \bar{p}, \varepsilon)$, $P(t, p, \bar{p}, \varepsilon) = O(|p|^5)$ при $|p| \to 0$. Перейдемо до полярних координат, поклавши $p = r\exp(i\varphi)$. Тоді одержимо дійсну систему

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)r^2 + \Phi(t, r, \varphi, \varepsilon), \\ dr/dt &= \alpha(\varepsilon)r + \gamma(\varepsilon)r^3 + R(t, r, \varphi, \varepsilon), \end{aligned} \tag{6.71}$$

де $R(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^5)$, $\Phi(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^4)$ при $|r| \to 0$.

Нехай $\gamma(0) < 0$. Тоді з [11, 108] випливає, що при досить малому ε система (6.71) має інваріантний тор

$$S_\varepsilon = \{(t, \varphi, r)|\ t \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathbb{R},\ r = S(t, \varphi, \varepsilon)\}.$$

При цьому

$$S(t + 2\pi, \varphi, \varepsilon) = S(t, \varphi, \varepsilon), \quad S(t, \varphi + 2\pi, \varepsilon) = S(t, \varphi, \varepsilon)$$

і справджується рівність

$$S(t, \varphi, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon N} + O(\varepsilon), \quad N = -\frac{\alpha'(0)}{\gamma(0)}.$$

Звідси випливає існування інваріантного тора системи (6.43).

Отже, одержуємо наступне твердження.

Теорема 6.10. *Нехай виконується умова 1 та умови (6.61) – (6.64), (6.67); характеристичне рівняння* $\det(C_k(\varepsilon)-\lambda E)=0$ *при деяких значеннях* $k=\pm k_1$ *має пару коренів* $\alpha(\varepsilon)\pm i\beta(\varepsilon)$, $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)>0$, $\beta(0)>0$, *а решта коренів задовольняють умову* $|Re\lambda|>\gamma+\delta$, $\gamma>\delta>0$*; відсутній сильний резонанс,* $\gamma(0)<0$*. Тоді при досить малому* ε *існує інваріантний тор системи (6.43).*

Інваріантний тор буде умовно стійким. Нехай $l=0$ і виконуються умови теореми 6.10. Тоді інваріантний тор системи (6.71) буде стійким, тому із теореми 6.8 виплинає стійкість інваріантного тора системи (6.43).

Зауваження 1. *Аналогічно [39] можна довести, що за умови* $\beta'(0)-\delta(0)\alpha'(0)/\gamma(0)\neq 0$ *значення* $\varepsilon=0$ *є точкою субфуркації періодичних розв'язків системи (6.43).*

Зауваження 2. *Результати цього підрозділу можна узагальнити на системи вигляду*

$$L(\varepsilon)\partial_t u=\sum_{k=1}^{q} D_k(t)\partial^2_{x_k}u+A(t)u+B(t)u_\Delta+f(t,x,u,u_\Delta),$$

$x=(x_1,...,x_q)$, $\Delta=(\Delta_1,...,\Delta_q)$ *з періодичними умовами* $u(t,x_1,...,x_k+2\pi,...,x_q)=u(t,x_1,...,x_q)$, $k=1,...,q$.

Зауваження 3. *У працях [33, 86] досліджені релаксаційні коливання в сингулярно збурених параболічних системах та біфуркація народження циклу автономного параболічного рівняння з перетвореним аргументом та малою дифузією.*

6.3. Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь та параболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [42, 50, 60, 126, 132]. У цьому підрозділі досліджено існування та стійкість зліченного числа циклів для деяких класів гіперболічних систем з перетвореним аргументом. Такі задачі у простіших випадках розглядалися в [47]. Подібні задачі для інших класів диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [10, 63, 87].

6.3.1. Існування зліченного числа циклів гіперболічної системи першого порядку

Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний простір з нормою $|u| = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ – простір неперервних функцій із значеннями в $\mathbb{R}^n$ з нормою $||\varphi|| = \sup\limits_{-\Delta \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$. Позначимо через u_x – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $u_x(t, \theta) = u(t, x + \theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$.

Розглянемо гіперболічну систему з перетвореним аргументом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + B(\varepsilon)u + F(u_x, \varepsilon) \tag{6.72}$$

та періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{6.73}$$

де ε – малий додатний параметр, $a \in \mathbb{R}$ $a \ne 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$; $F : \mathbb{C} \times [0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}^n$.

Нехай виконуються умови:

1) $F(\varphi, \varepsilon) = O(||\varphi||^2)$ при $||\varphi|| \to 0$, оператор F п'ять раз неперервно диференційовний відносно своїх аргументів;

2) матриця $B(\varepsilon)$ двічі неперервно диференційовна відносно ε, має пару власних значень вигляду $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, $\beta(0) > 0$, а інші власні значення λ задовольняють умову $Re\, \lambda < -2\gamma_0 < 0$.

Розв'язок задачі (6.72), (6.73) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \xi(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\xi(y)$ має період 2π. Підставляючи $u = \xi(y)$ в рівняння (6.72), одержимо систему диференціально-функціональних рівнянь

$$(\sigma - a)\frac{d\xi}{dy} = B(\varepsilon)\xi + F(\xi_y, \varepsilon), \tag{6.74}$$

де ξ_y – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $\xi_y(\theta) = \xi(y + \theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$.

Зробивши в системі (6.74) заміну $y = (\sigma - a)z$, одержимо

$$\frac{d\xi}{dz} = B(\varepsilon)\xi + F(\xi_z, \varepsilon), \tag{6.75}$$

де ξ_z – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $\xi_z(\theta) = \xi(z+\theta)$, $-\Delta/(\sigma - a) \leq \theta \leq 0$.

Матрицю $B(\varepsilon)$ можна записати у вигляді $B(\varepsilon) = U(\varepsilon)D(\varepsilon)U^{-1}(\varepsilon)$, де матриця $D(\varepsilon)$ є блочно-діагональною $D(\varepsilon) = diag[B_1(\varepsilon), B_2(\varepsilon)]$, $B_1(\varepsilon)$ – діагональна матриця другого порядку з елементами $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ на діагоналі, власні значення матриці $B_2(\varepsilon)$ задовольняють умову $Re\, \lambda \leq -2\gamma_0 < 0$. Виконавши в системі (6.75) заміну $\xi = U(\varepsilon)v$, де $v = [\eta, \zeta]^T$, $\eta \in \mathbb{R}^2$, $\zeta \in \mathbb{R}^{n-2}$, одержимо систему

$$\frac{d\eta}{dz} = B_1(\varepsilon)\eta + F_1(v_z, \varepsilon), \quad \frac{d\zeta}{dz} = B_2(\varepsilon)\zeta + F_2(v_z, \varepsilon). \tag{6.76}$$

Тоді згідно з [126] існує інтегральний многовид системи (6.76), що може бути поданий у вигляді $v_z = S(\eta, \varepsilon)$. Поведінка розв'язків системи (6.76) на многовиді описується рівнянням

$$\frac{d\chi}{dz} = B_1(\varepsilon)\chi + F_1(S(\chi, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6.77}$$

Систему (6.77) перепишемо у вигляді

$$\frac{dw}{dz} = (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))w + G_1(w, \bar{w}, \varepsilon),$$
$$\frac{d\bar{w}}{dz} = (\alpha(\varepsilon) - i\beta(\varepsilon))\bar{w} + \bar{G}_1(w, \bar{w}, \varepsilon), \tag{6.78}$$

де $\chi = [w, \bar{w}]^T$. Для кожного розв'язку системи (6.76) існує розв'язок системи (6.77) такий, що вірна оцінка [126]

$$||v_z(t) - S(\chi(t), \varepsilon)|| \leq M \exp(-\gamma_0 t), \quad t \geq 0. \tag{6.79}$$

Перше рівняння системи (6.78) перетворимо за допомогою підстановки

$$w = p + W_2(p, \bar{p}, \varepsilon) + W_3(p, \bar{p}, \varepsilon), \tag{6.80}$$

де W_2 та W_3 — форми відповідно другого та третього порядку. Перетворення (6.80) можна підібрати так, що рівняння для p набуде вигляду [15]

$$\frac{dp}{dz} = (\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon))p + (\gamma(\varepsilon) + i\delta(\varepsilon))p^2\bar{p} + P(p, \bar{p}, \varepsilon), \tag{6.81}$$

де $P(p, \bar{p}, \varepsilon) = O(|p|^4)$ при $|p| \to 0$. В рівнянні (6.81) перейдемо до полярних координат $p = r\ \exp(i\varphi)$, тоді одержимо систему

$$\frac{d\varphi}{dz} = \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)r^2 + \Phi(r, \varphi, \varepsilon),$$
$$\frac{dr}{dz} = \alpha(\varepsilon)r + \gamma(\varepsilon)r^3 + R(r, \varphi, \varepsilon), \tag{6.82}$$

де $R(r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^4)$, $\Phi(r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^3)$ при $|r| \to 0$.

Нехай $\gamma(0) < 0$. Аналізуючи систему (6.82), переконуємося, що рівняння (6.81) має періодичний розв'язок $p = \rho(\varphi, \varepsilon)\exp(i\varphi)$, де

$$\rho(\varphi, \varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon\alpha'(0)}{-\gamma(0)}} + O(\varepsilon),\ \varphi = \varphi_0 + z[\beta(\varepsilon) - \varepsilon\delta(\varepsilon)\frac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O(\varepsilon^{1,5})],\ \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Звідси

$$\varphi = \varphi_0 + z[\beta(0) + \varepsilon\beta'(0) - \varepsilon\delta(0)\frac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O(\varepsilon^{1,5})].$$

Підставивши періодичний розв'язок p рівняння (6.81) у праву частину рівності (6.80), одержимо періодичний розв'язок $w(t,\varepsilon)$ першого рівняння системи (6.78), звідки знаходимо періодичний розв'язок системи (6.76), а потім періодичний розв'язок $\xi(z,\varepsilon) = \xi\left(\dfrac{y}{\sigma - a}, \varepsilon\right)$ систем (6.75) та (6.74). Функція ξ буде мати період 2π відносно y тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{1}{\sigma - a}[\beta(0) + \varepsilon\beta'(0) - \varepsilon\delta(0)\frac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O(\varepsilon^{1,5})] = k, \quad k = \pm 1, \pm 2, ... \tag{6.83}$$

Розв'язуючи рівняння (6.83) відносно σ, одержимо зліченне число значень $\sigma = \sigma_k(\varepsilon)$. Отже, система (6.72) має зліченне число граничних циклів. Якщо $k > 0$, то $\sigma > a$ при малих ε і з нерівності (6.79) випливає, що такі цикли будуть експоненціально орбітально стійкими.

Теорема 6.11. *Нехай виконуються умови 1, 2 і для коефіцієнта в рівнянні (6.81) виконується нерівність* $\gamma(0) < 0$. *Тоді існує зліченне число циклів системи (6.72) з параметрами* $\sigma = \sigma_k$, *що задовольняють рівняння (6.83). Значенням параметрів* σ_k, $k > 0$, *відповідають стійкі граничні цикли, для яких* $\sigma_k > a$.

Як приклад розглянемо систему (6.72), де $u \in \mathbb{R}^2$,

$$B(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad F(u_x, \varepsilon) = -(u_1^2(x-\Delta) + u_2^2(x-\Delta)) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді для знаходження хвильового розв'язку $u = \xi(y)$, $y = \sigma t + x$ задачі (6.72), (6.73) одержимо систему вигляду (6.74). Перейшовши у цій системі до полярних координат $\xi_1 = r\, sin\varphi$, $\xi_2 = r\, cos\varphi$, одержимо систему

$$(\sigma - a)\frac{d\varphi}{dy} = 1, \quad (\sigma - a)\frac{dr}{dy} = r(\varepsilon - r^2(y - \Delta)).$$

Отже, періодичний розв'язок системи (6.74) у цьому випадку має вигляд $\xi_1 = \sqrt{\varepsilon}\, sin\varphi$, $\xi_2 = \sqrt{\varepsilon}\, cos\varphi$, $\varphi = \varphi_0 + \dfrac{y}{\sigma - a}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Цей розв'язок буде мати період 2π тоді і тільки тоді, коли $\sigma = \sigma_k = a + \dfrac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, ...$ Періодичні розв'язки будуть експоненціально орбітально стійкими при $k > 0$.

Зауваження 1. При виконанні умов теореми 6.11 існує також стійкий граничний цикл, що не залежить від змінної x.

6.3.2. Біжучі хвилі квазілінійного рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом

Дослідимо існування періодичних розв'язків крайової задачі

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \varepsilon\, f(w, w(t, x-\Delta)), \tag{6.84}$$

$$w(t, x+2\pi) = w(t,x), \tag{6.85}$$

де ε — малий додатний параметр, $a \neq 0,\ f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Розв'язок задачі (6.84), (6.85) будемо шукати у вигляді хвилі $w = \theta(y),\ y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Підставляючи $w = \theta(y)$ в рівняння (6.84), одержимо диференціальне рівняння із запізнюючим аргументом

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} + a^2\frac{d^3\theta}{dy^3} = \varepsilon\, f(\theta, \theta(y-\Delta)), \tag{6.86}$$

або

$$\frac{d^3\theta}{dy^3} = -\gamma^2\frac{d\theta}{dy} + \mu\, f(\theta, \theta(y-\Delta)), \tag{6.87}$$

де $\gamma^2 = \frac{\sigma}{a^2},\ \mu = \frac{\varepsilon}{a^2}$. Рівняння (6.87) запишемо у вигляді системи

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = -\gamma^2\theta_1 + \mu\, f(\theta, \theta(y-\Delta)). \tag{6.88}$$

Зведемо систему (6.88) до стандартної форми. Зробивши заміну $\theta = u_1 + u_2 + \bar{u}_2$, $\theta_1 = i\gamma u_2 - i\gamma\bar{u}_2$, $\theta_2 = -\gamma^2 u_2 - \gamma^2\bar{u}_2$, де u_2 — комплексна змінна, знаходимо

$$u_1' = 2\varepsilon_1 f(u_1 + u_2 + \bar{u}_2, u_1(y-\Delta) + u_2(y-\Delta) + \bar{u}_2(y-\Delta)),$$

$$u_2' = i\gamma u_2 - \varepsilon_1 f(u_1 + u_2 + \bar{u}_2, u_1(y-\Delta) + u_2(y-\Delta) + \bar{u}_2(y-\Delta)), \quad \varepsilon_1 = \frac{\mu}{2\gamma^2}.$$

Виконавши заміну $u_1 = v_1,\ u_2 = v_2\ \exp(i\gamma y),\ \bar{u}_2 = \bar{v}_2\ \exp(-i\gamma y)$, одержимо систему

$$v_1' = 2\varepsilon_1 f(v_1 + e^{i\gamma y}v_2 + e^{-i\gamma y}\bar{v}_2, v_1(y-\Delta) + e^{i\gamma(y-\Delta)}v_2(y-\Delta) + e^{-i\gamma(y-\Delta)}\bar{v}_2(y-\Delta)),$$

$$v_2' = -\varepsilon_1 e^{-i\gamma y} f(v_1 + e^{i\gamma y}v_2 + e^{-i\gamma y}\bar{v}_2, v_1(y-\Delta) + \tag{6.89}$$

$$+e^{i\gamma(y-\Delta)}v_2(y-\Delta) + e^{-i\gamma(y-\Delta)}\bar{v}_2(y-\Delta)).$$

Системі (6.89) поставимо у відповідність усереднену систему [153]

$$v_1' = 2\varepsilon_1 g_1(v_1, v_2\bar{v}_2), \quad v_2' = -\varepsilon_1 v_2 g_2(v_1, v_2\bar{v}_2), \tag{6.90}$$

де

$$g_1(v_1, v_2\bar{v}_2) = M[f(v_1 + v_2\exp(i\gamma y) + \bar{v}_2\exp(-i\gamma y), v_1 + v_2\exp(i\gamma(y-\Delta)) +$$

$$+\bar{v}_2\exp(-i\gamma(y-\Delta)))],\ g_2(v_1, v_2\bar{v}_2) = \frac{1}{v_2}M[\exp(-i\gamma y)f(v_1 + v_2\exp(i\gamma y) +$$

$$+\bar{v}_2\exp(-i\gamma y), v_1 + v_2\exp(i\gamma(y-\Delta)) + \bar{v}_2\exp(-i\gamma(y-\Delta)))],$$

$M[*]$ — середнє значення відносно y. Перейшовши в (6.90) до полярних координат $v_2 = r\ \exp(i\varphi)$, одержимо систему

$$v_1' = 2\varepsilon_1 g_1(v_1, r^2), \quad r' = -\varepsilon_1 r g_2(v_1, r^2). \tag{6.91}$$

Припустимо, що система $g_1(v_1, s) = 0,\ g_2(v_1, s) = 0$ має розв'язок (v_{10}, s_0), $v_{10} \in \mathbb{R},\ s_0 > 0$. Нехай матриця A з елементами

$$a_{11} = 2\frac{\partial g_1(v_1, r^2)}{\partial v_1},\ a_{12} = 2\frac{\partial g_1(v_1, r^2)}{\partial r},$$

$$a_{21} = -\frac{\partial[rg_2(v_1, r^2)]}{\partial v_1},\ a_{22} = -\frac{\partial[rg_2(v_1, r^2)]}{\partial r}$$

при $v = v_{10},\ r = \sqrt{s_0}$ задовольняє умови

$$\det\ A \neq 0, \quad sp\, A \neq 0. \tag{6.92}$$

Тоді система (6.91) має експоненціально стійкий або експоненціально дихотомічний стан рівноваги $(v_{10}, \sqrt{s_0})$. Стаціонарному розв'язку $(v_{10}, \sqrt{s_0})$ системи (6.91) відповідає періодичний розв'язок $\theta = v_{10}+2\sqrt{s_0}\cos\gamma_1(\varepsilon)y+O(\varepsilon)$, $\gamma_1(\varepsilon) = \gamma+O(\varepsilon)$, рівняння (6.86). Цей розв'язок буде мати період 2π відносно y тоді і тільки тоді, коли $\gamma = k+O(\varepsilon)$, $k = \pm1, \pm2, \ldots$, тобто $\sigma = k^2a^2+O(\varepsilon)$.

Теорема 6.12. *Нехай виконуються умови (6.92). Тоді існує* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *задача (6.84), (6.85) має зліченне число періодичних розв'язків*

$$w_k = v_{10} + 2\sqrt{s_0}\cos ky + O(\varepsilon), \quad y = (k^2a^2 + O(\varepsilon))t + x, \quad k = \pm1, \pm2, \ldots.$$

Теорема 6.13. *Періодичний розв'язок* w_k *задачі (6.84), (6.85) буде експоненціально орбітально стійким, якщо виконуються нерівності* $\det A > 0$, $spA < 0$.

Твердження теореми 6.13 випливає з експоненціальної стійкості стаціонарного розв'язку системи (6.91).

Як приклад розглянемо рівняння (6.84) з функцією $f(v, w) = \alpha(v - v^3) + \beta(w - w^3)$. Тоді функції g_1 та g_2 в правій частині системи (6.91) будуть мати вигляд $g_1(v_1, s) = (\alpha + \beta)(v_1 - v_1^3 - 6v_1s)$, $g_2(v_1, s) = (\alpha + \beta\cos(\gamma\Delta))(1 - 3v_1^2 - 3s)$, отже, система (6.91) має стаціонарні розв'язки $(0, 1/\sqrt{3})$ та $(\pm1/\sqrt{5}, \sqrt{2}/\sqrt{15})$. Неважко перевірити, що першому з них відповідають стійкі хвилі при $\beta(\cos(k\Delta) - 1) < 0$, $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta\cos(k\Delta)) < 0$, а двом іншим — стійкі хвилі при $\beta(\cos(k\Delta)-1) < 0$, $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta\cos(k\Delta)) > 0$.

Зауваження 2. Для рівняння вигляду (6.84), у якому немає запізнення в правій частині, аналогічні питання розглядалися в [63].

6.4. Висновки

У розділі 6 досліджено біфуркацію стану рівноваги диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. У підрозділі 6.1 досліджено умови існування та властивості інтегральних многовидів нелінійної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджена біфуркація тора із стану рівноваги.

2. У підрозділі 6.2 доведено існування інтегральних многовидів сингулярно збуреної системи нелінійних параболічних рівнянь з перетвореним аргументом. Досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги.

3. У підрозділі 6.3 доведено існування зліченного числа періодичних розв'язків гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою. Вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом.

Розділ 7

БІФУРКАЦІЯ ЦИКЛІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

У цьому розділі досліджено біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією та вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння. Розв'язки таких систем шукаються у вигляді ряду Фур'є (6.5), причому використовується введена у підрозділі 6.1 норма. Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння Хатчінсона. Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи двох диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюється, та малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння із запізненням. Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль, одержано біфуркаційні рівняння.

7.1. Періодичні режими рівняння спінового горіння

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\xi=2\varepsilon\left[\frac{\partial\xi}{\partial t}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\right)+\frac{1}{\rho^2}\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}\right], \tag{7.1}$$

$$\xi(t,x+2\pi)=\xi(t,x),$$

де ε – малий додатний параметр, $\Delta-$ одновимірний оператор Лапласа, $\rho>0$.

Теорема 7.1. *Біжучі хвилі задачі (7.1) мають вигляд*

$$\xi_k(t,x)=\sqrt{1-\frac{k^2}{\rho^2}}\cos(t+kx)+O(\varepsilon),$$

де $k\in\mathbb{Z}$, $k^2<\rho^2$.

Доведення. Задача (7.1) еквівалентна системі

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=p,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+\xi=2\varepsilon\left[p\left(1-\frac{4}{3}p^2\right)+\frac{1}{\rho^2}\Delta p\right], \tag{7.2}$$

$$\xi(t,x+2\pi)=\xi(t,x),\quad p(t,x+2\pi)=p(t,x).$$

Розв'язок системи (7.2) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi=\theta_1(y)$, $p=\theta_2(y)$, $y=\sigma t+x$, де функції $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ мають період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy}=\theta_2,\quad \sigma\frac{d\theta_2}{dy}+\theta_1=2\varepsilon\left[\theta_2\left(1-\frac{4}{3}\theta_2^2\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\theta_2}{dy^2}\right]. \tag{7.3}$$

Позначимо через λ_1, λ_2, λ_3 корені характеристичного рівняння

$$\sigma^2\lambda^2+1=2\varepsilon\left[\sigma\lambda+\frac{\sigma}{\rho^2}\lambda^3\right]$$

лінеаризованої системи, причому корінь λ_3 дійсний, а корені λ_1, λ_2 – комплексно спряжені. Ці корені характеристичного рівняння можна зобразити у вигляді

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{i}{\sigma}+\frac{\varepsilon}{\sigma}-\frac{\varepsilon}{\sigma^3\rho^2}+O(\varepsilon^2),\quad \lambda_3=\frac{\sigma\rho^2}{2\varepsilon}+\frac{2\varepsilon}{\sigma^3\rho^2}-\frac{2\varepsilon}{\sigma}+O(\varepsilon^2).$$

Заміною $\theta_3 = \theta_2'$ система (7.3) зводиться до системи трьох диференціальних рівнянь, яку в свою чергу лінійною заміною можна звести до вигляду

$$
\begin{aligned}
{u_1}' &= \lambda_1 u_1 + \alpha(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3)^3,\\
{u_2}' &= \lambda_2 u_2 + \beta(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3)^3,\\
{u_3}' &= \lambda_3 u_3 + \gamma(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3)^3,
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

де $\theta_1 = u_1 + u_2 + u_3$, $u_2 = \bar{u}_1$,

$$
\alpha = \frac{4\rho^2\sigma^2}{3(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \beta = \frac{4\rho^2\sigma^2}{3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)}, \gamma = \frac{4\rho^2\sigma^2}{3(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}.
$$

Зауважимо, що лінійна частина системи (7.4) має діагональний вигляд.

При малих ε та $|u_1| \le K$, $K > 2$, існує інтегральний многовид системи (7.4), який можна зобразити у вигляді $u_3 = g(\varepsilon, u_1, u_2)$, де $u_2 = \bar{u}_1$, причому $g(\varepsilon, u_1, u_2) = O(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \to 0$. Система рівнянь на цьому многовиді набуде вигляду

$$
\begin{aligned}
{u_1}' &= \lambda_1 u_1 + \alpha(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)^3 + O(\varepsilon^3),\\
{u_2}' &= \lambda_2 u_2 + \beta(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)^3 + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Оскільки $\alpha = O(\varepsilon)$, $\beta = O(\varepsilon)$, то заміною $u_1 = v_1 \exp\left(\frac{iy}{\sigma}\right)$, $u_2 = v_2 \exp\left(-\frac{iy}{\sigma}\right)$ систему (7.5) зведемо до стандартної форми і застосуємо усереднення відносно y [15]. В результаті одержимо періодичний розв'язок

$$
u_1 = r_0 \exp\left(\frac{iy}{\sigma}\right) + O(\varepsilon),\ u_2 = r_0 \exp\left(-\frac{iy}{\sigma}\right) + O(\varepsilon),\ 2r_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2\sigma^2}},
$$

системи (7.5). Тут $v_1 = v_2 = r_0$ – стаціонарний розв'язок усередненої системи. Звідси знаходимо

$$
\begin{aligned}
\theta_1 = u_1 + u_2 + O(\varepsilon^3) &= r_0 \exp\left(\frac{iy}{\sigma}\right) + r_0 \exp\left(-\frac{iy}{\sigma}\right) + O(\varepsilon) =\\
&= 2r_0 \cos\frac{y}{\sigma} + O(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Враховуючи, що функція θ_1 повинна мати період 2π, одержимо $\sigma = \frac{1}{k} + O(\varepsilon), k = \pm 1, \pm 2, ...$, отже, $\theta_1 = \sqrt{1 - \frac{k^2}{\rho^2}} \cos(ky) + O(\varepsilon)$. Тому біжучі хвилі задачі (7.1) мають вигляд

$$\xi_k(t, x) = \sqrt{1 - \frac{k^2}{\rho^2}} \cos(t + kx) + O(\varepsilon),$$

де $k \in \mathbb{Z}$, $k^2 < \rho^2$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Аналогічно [10] можна показати, що біжучі хвилі $\xi_k(t, x)$ задачі (7.1) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $k^2 < \frac{1}{6}(2\rho^2 + 1)$.

7.2. Біфуркація циклів параболічних систем із малою дифузією

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, параболічних та гіперболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [40, 42, 50, 57, 132]. У цьому підрозділі досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузією, рівняння спінового горіння та рівняння Хатчінсона. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [10, 86, 87].

7.2.1. Біжучі хвилі параболічних рівнянь із малою дифузією

Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon\gamma \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \varepsilon\delta \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \omega_0 u_2 + \varepsilon(\alpha u_1 - \beta u_2) + (d_0 u_1 - c_0 u_2)(u_1^2 + u_2^2),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \omega_0 u_1 + \varepsilon(\alpha u_2 + \beta u_1) + (d_0 u_2 + c_0 u_1)(u_1^2 + u_2^2) \quad (7.6)$$

з періодичною умовою

$$u_1(t, x + 2\pi) = u_1(t, x), \quad u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t, x), \qquad (7.7)$$

де ε – малий додатний параметр, $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$.

Перейшовши до комплексних змінних $u = u_1 + iu_2$, $\bar{u} = u_1 - iu_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u\right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u}. \qquad (7.8)$$

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (7.6), (7.7). Розв'язок рівняння (7.8) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{d^2\theta}{dy^2} + (\alpha + i\beta)\theta\right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}.$$

Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma\theta_1 = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{d\theta_1}{dy} + (\alpha + i\beta)\theta\right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}. \qquad (7.9)$$

Інтегральний многовид системи (7.9) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha + i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \ldots.$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha + i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \ldots. \qquad (7.10)$$

Перейшовши у рівнянні (7.10) до полярних координат, $\theta = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma^3}\omega_0^2\right)r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \qquad (7.11)$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\alpha > \dfrac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2$. Тоді рівняння (7.11) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (7.10) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0 \exp\left(\dfrac{i\omega_0}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$. Отже, періодичний розв'язок рівняння (7.8) має вигляд

$$u_n = u_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon}r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon), \tag{7.12}$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді періодичний розв'язок задачі (7.6), (7.7) має вигляд

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon}r_n \cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad u_2 = \sqrt{\varepsilon}r_n \sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7.13}$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 7.2. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (7.6), (7.7) має періодичні відносно t розв'язки (7.13).*

7.2.2. Стійкість періодичних розв'язків

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (7.12) рівняння (7.8) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i\omega_0 v + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)v\right] + \varepsilon(d_0 + ic_0)(2r_n^2 v + w_n^2 \bar{v}), \tag{7.14}$$

де $w_n = r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$. Зробивши в рівнянні (7.14) заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$, одержимо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon\Big[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)w +$$

$$+(d_0+ic_0)r_n^2(w+\overline{w}\exp(2inx))\Big]. \qquad (7.15)$$

Розв'язок рівняння (7.15) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$w(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx),$$

$$\overline{w}(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \qquad (7.16)$$

Підставляючи (7.16) в (7.15) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt}=\varepsilon[(\alpha+i\delta n^2+d_0r_n^2)y_{k+n}-(\gamma+i\delta)(k+$$

$$+n)^2y_{k+n}+(d_0+ic_0)r_n^2(y_{k+n}+v_{k-n})]. \qquad (7.17)$$

Аналогічно підставляючи (7.16) у спряжене до (7.15) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt}=\varepsilon[(\alpha-i\delta n^2+d_0r_n^2)v_{k-n}-(\gamma-i\delta)(k-$$

$$-n)^2v_{k-n}+(d_0-ic_0)r_n^2(v_{k-n}+y_{k+n})]. \qquad (7.18)$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (7.6), (7.7) визначається стійкістю системи (7.17), (7.18) з параметром $k\in\mathbb{Z}$. У системі (7.17), (7.18) зробимо заміну $y_{k+n}=z_{k+n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn)$, $v_{k-n}=w_{k-n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn)$. Тоді отримаємо лінійну систему з матрицею

$$\varepsilon A=\begin{pmatrix}\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12}\\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22}\end{pmatrix}.$$

Оскільки сума діагональних елементів матриці A від'ємна, $a=a_{11}+a_{22}<0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k\neq 0$ виконувалась умова $a^2c>f^2$, де $c=Re(det(A))$, $f=Im(det(A))$, $f=4\gamma kn(c_0r_n^2-\delta k^2)$, тобто

$$(d_0r_n^2-\gamma k^2)^2(\gamma^2k^2+\delta^2k^2-2\gamma d_0r_n^2-4\gamma^2n^2-2\delta c_0r_n^2)>4\gamma^2n^2(c_0r_n^2-\delta k^2)^2, \quad (7.19)$$

де $r_n^2 = (\gamma n^2 - \alpha)/d_0$.

Теорема 7.3. *Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (7.6), (7.7) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (7.19) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Як приклад розглянемо рівняння (7.6), в якому $\delta = 0$, $\beta = 0$, $c_0 = 0$. Тоді з теореми 7.2 випливає, що при $d_0 < 0$, $\gamma n^2 < \alpha$ існує періодичний розв'язок

$$u_n = \sqrt{\varepsilon(\alpha - \gamma n^2)|d_0|^{-1}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + nx) \\ \sin(\omega_0 t + nx) \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 7.3 біжучі хвилі $u_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6\gamma}(\gamma + 2\alpha)$.

7.2.3. Біжучі хвилі рівняння спінового горіння

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} \right], \tag{7.20}$$

$$\xi(t, x + 2\pi) = \xi(t,x), \tag{7.21}$$

де ε – малий додатний параметр, $\varrho > 0$.

Задача (7.20), (7.21) еквівалентна системі

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \xi = 2\varepsilon \left[p \left(1 - \frac{4}{3} p^2 \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right], \tag{7.22}$$

$$\xi(t, x + 2\pi) = \xi(t,x), \quad p(t, x + 2\pi) = p(t,x).$$

Розв'язок системи (7.22) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi = \theta_1(y)$, $p = \theta_2(y)$, $y = \sigma t + x$, де функції $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ мають період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma \frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \sigma \frac{d\theta_2}{dy} + \theta_1 = 2\varepsilon \left[\theta_2 \left(1 - \frac{4}{3} \theta_2^2 \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 \theta_2}{dy^2} \right].$$

Цю систему заміною $\dfrac{d\theta_2}{dy}=\theta_3$ зведемо до вигляду

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy}=\theta_2,\quad \frac{d\theta_2}{dy}=\theta_3,\quad \sigma\theta_3+\theta_1=2\varepsilon\left[\theta_2\left(1-\frac{4}{3}\theta_2^2\right)+\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\theta_3}{dy}\right]. \qquad (7.23)$$

Інтегральний многовид системи (7.23) можна зобразити у вигляді

$$\theta_3=-\frac{1}{\sigma}\theta_1+\frac{2\varepsilon}{\sigma}\left[\theta_2\left(1-\frac{4}{3}\theta_2^2\right)+\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\theta_2\right]+O(\varepsilon^2).$$

Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy}=\theta_2,\quad \frac{d\theta_2}{dy}=-\frac{1}{\sigma}\theta_1+\frac{2\varepsilon}{\sigma}\left[\theta_2\left(1-\frac{4}{3}\theta_2^2\right)+\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\theta_2\right]+O(\varepsilon^2). \qquad (7.24)$$

Перейшовши до комплексних змінних $u=\theta_1+i\theta_2$, $\bar u=\theta_1-i\theta_2$, одержимо рівняння

$$\frac{du}{dy}=-\frac{i}{\sigma}u+\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[u-\bar u+\frac{1}{3}(u-\bar u)^2-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}(u-\bar u)\right]+O(\varepsilon^2). \qquad (7.25)$$

Зробивши у рівнянні (7.25) заміну

$$u=w+\varepsilon i\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\right)\bar w+\frac{1}{6}w^3-\frac{1}{2}w\bar w^2+\frac{1}{12}\bar w^3\right],$$

одержимо

$$\frac{dw}{dy}=-\frac{i}{\sigma}w+\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[w-w^2\bar w-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}w\right]+O(\varepsilon^2). \qquad (7.26)$$

Перейшовши у рівнянні (7.26) до полярних координат $w=r\exp(i\varphi)$, отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{dy}=\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[r-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}r-r^3\right]+O(\varepsilon^2). \qquad (7.27)$$

Нехай виконується нерівність $\sigma^2\varrho^2>1$. Тоді рівняння (7.27) має стаціонарний розв'язок

$$R_0=\sqrt{1-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (7.25) має вигляд $u=R_0\exp\left(-\dfrac{i}{\sigma}y\right)+O(\varepsilon)$. Звідси знаходимо періодичний розв'язок

$$\theta_1=R_0\cos\left(\frac{y}{\sigma}\right)+O(\varepsilon),\quad \theta_2=-R_0\sin\left(\frac{y}{\sigma}\right)+O(\varepsilon)$$

системи (7.24). Враховуючи, що функції θ_1 та θ_2 повинні мати період 2π, одержуємо $\sigma = -\dfrac{1}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (7.20) має вигляд

$$\xi_n = \sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}} \cos(-t + nx) + O(\varepsilon), \tag{7.28}$$

де $n \in \mathbb{Z}$. Тому правильне наступне твердження.

Теорема 7.4. *Нехай для деякого цілого n виконується нерівність $n^2 < \varrho^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (7.20), (7.21) має періодичні відносно t розв'язки (7.28), де $n \in \mathbb{Z}$.*

7.2.4. Стійкість періодичних режимів рівняння спінового горіння

Система рівнянь у варіаціях в околі періодичного розв'язку $\xi_n = \xi_n(t, x)$, $p_n = \dfrac{\partial \xi_n(t, x)}{\partial t}$ системи (7.22) має вигляд

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = v_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 = 2\varepsilon \left[v_2 - 4p_n^2 v_2 + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right].$$

Перейшовши до комплексних змінних $v = v_1 + iv_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -iv + \varepsilon \left[v - \bar{v} - 4p_n^2 (v - \bar{v}) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 (v - \bar{v})}{\partial x^2} \right].$$

Зробивши заміну $v = w \exp(-it)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon \left[w - 2r_n^2 w - r_n^2 \exp(2inx) \bar{w} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \tag{7.29}$$

де $r_n = \sqrt{1 - \dfrac{n^2}{\varrho^2}}$.

Розв'язок рівняння (7.29) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є (7.16). Підставляючи (7.16) в (7.29) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon \left[y_{k+n} - 2r_n^2 y_{k+n} - r_n^2 v_{k-n} - \frac{(k+n)^2}{\varrho^2} y_{k+n} \right]. \tag{7.30}$$

Аналогічно підставляючи (7.16) у спряжене до (7.29) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon \left[v_{k-n} - 2r_n^2 v_{k-n} - r_n^2 y_{k+n} - \frac{(k-n)^2}{\varrho^2} v_{k-n} \right]. \tag{7.31}$$

Стійкість періодичних розв'язків рівняння спінового горіння визначається стійкістю системи (7.30), (7.31) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо через εA матрицю системи (7.30), (7.31) з елементами εa_{11}, εa_{12}, εa_{21}, εa_{22}. Матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елементів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості періодичного розв'язку $\xi_n(t, x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $det(A) > 0$, тобто $k^2 \left(k^2 + 2\varrho^2 - 6n^2\right) / \varrho^4 > 0$. Ця умова рівносильна умові

$$n^2 < \frac{1}{6}(2\varrho^2 + 1). \tag{7.32}$$

Теорема 7.5. *Біжучі хвилі $\xi_n(t, x)$ задачі (7.20), (7.21) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (7.32).*

7.2.5. Періодичні режими рівняння Хатчінсона

Розглянемо рівняння Хатчінсона з дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) u(t-1, x)(1+u) \tag{7.33}$$

та періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{7.34}$$

що використовується в математичній екології [86]. Тут ε – малий додатний параметр, $D > 0$.

Аналогічно [60] запишемо рівняння на многовиді

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\varepsilon D\Psi(0)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\begin{pmatrix}0 & \pi/2+8\varepsilon\alpha\\ -\pi/2 & 4\pi\varepsilon\alpha\end{pmatrix}v+\frac{\pi}{2}\Psi(0)[v_1v_2+$$

$$+kv_1^3-(m+l)v_1^2v_2-2kv_1v_2^2+mv_2^3],$$

де

$$\Psi(0)=4\alpha\begin{pmatrix}2\\ \pi\end{pmatrix},\quad \alpha=\frac{1}{\pi^2+4},\quad v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix},$$

$$k=1/5-4\pi\alpha/3,\quad l=1/5+8\alpha/3,\quad m=8\alpha/3-1/5.$$

Перейшовши до комплексних змінних $w=v_1+iv_2$, $\bar{w}=v_1-iv_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t}=2\varepsilon\alpha(2+\pi i)D\frac{\partial^2(w+\bar{w})}{\partial x^2}-\frac{\pi}{2}iw+2\varepsilon\alpha(\pi-2i)(w-\bar{w})+$$

$$+2\pi\alpha(2+\pi i)\Big[\frac{i}{4}(\bar{w}^2-w^2)+\frac{k}{8}(w+\bar{w})^3- \tag{7.35}$$

$$-\frac{(m+l)i}{8}(w+\bar{w})(\bar{w}^2-w^2)-\frac{2k}{8}(w-\bar{w})(\bar{w}^2-w^2)+\frac{mi}{8}(w-\bar{w})^3\Big].$$

Перетворимо рівняння (7.35) за допомогою підстановки

$$w=s+\alpha(2+\pi i)(s^2+\bar{s}^2/3)+V_3(s,\bar{s}), \tag{7.36}$$

де V_3 – форма третього порядку. Перетворення (7.36) можна підібрати так, що рівняння для s набуде вигляду

$$\frac{\partial s}{\partial t}=-\frac{\pi}{2}is+\varepsilon\left[(\gamma+i\delta)\frac{\partial^2(s+\overline{s})}{\partial x^2}+(\alpha_1+i\beta)(s-\overline{s})\right]+(d_0+ic_0)s^2\overline{s}, \tag{7.37}$$

де $\gamma=4\alpha D$, $\delta=2\pi\alpha D$, $\alpha_1=2\pi\alpha$, $\beta=-4\alpha$, $d_0=\pi\alpha(2-3\pi)/20$, $c_0=\pi\alpha(\pi+6)/20$.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (7.33), (7.34). Розв'язок рівняння (7.37) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $s=\theta(y)$, $y=\sigma t+x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy}=-\frac{\pi}{2}i\theta+\varepsilon\left[(\gamma+i\delta)\frac{d^2(\theta+\overline{\theta})}{dy^2}+(\alpha_1+i\beta)(\theta-\overline{\theta})\right]+(d_0+ic_0)\theta^2\overline{\theta}.$$

Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma\theta_1 = -\frac{\pi}{2}i\theta + \varepsilon\Big[(\gamma + i\delta)\frac{d(\theta_1 + \overline{\theta}_1)}{dy} +$$

$$+(\alpha_1 + i\beta)(\theta - \overline{\theta})\Big] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}. \tag{7.38}$$

Інтегральний многовид системи (7.38) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2\sigma}i\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[-\frac{\pi^2}{4\sigma^2}(\gamma + i\delta)(\theta + \overline{\theta}) + (\alpha_1 + i\beta)(\theta - \overline{\theta})\right] +$$

$$+\frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta} + \dots .$$

Тут в лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = -\frac{\pi}{2\sigma}i\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\Big[-\frac{\pi^2}{4\sigma^2}(\gamma + i\delta)(\theta + \overline{\theta}) +$$

$$+(\alpha_1 + i\beta)(\theta - \overline{\theta})\Big] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta} + \dots .$$

У цьому рівнянні зробимо заміну $\theta = p\exp(-\dfrac{\pi}{2\sigma}iy)$ і усереднимо одержане рівняння відносно y [15]. Тоді одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[-\frac{\pi^2}{4\sigma^2}(\gamma + i\delta)p + (\alpha_1 + i\beta)p\right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}p^2\overline{p}. \tag{7.39}$$

Перейшовши у рівнянні (7.39) до полярних координат $p = r\exp(i\varphi)$, отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = -\varepsilon\frac{\pi^2\gamma}{4\sigma^3}r + \varepsilon\frac{\alpha_1}{\sigma}r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \tag{7.40}$$

Нехай виконується нерівність $2\sigma^2 > \pi D$. Тоді рівняння (7.40) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\frac{40}{3\pi - 2}\left(1 - \frac{\pi D}{2\sigma^2}\right)},$$

отже, періодичний розв'язок системи (7.38) має вигляд

$$\theta = \sqrt{\varepsilon} R_0 \exp\left(-\frac{\pi i}{2\sigma} y\right) + O(\varepsilon), \quad \theta_1 = \frac{d\theta}{dy}.$$

Враховуючи, що функція θ повинна мати період 2π, одержуємо $\sigma = -\dfrac{\pi}{2n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (7.37) має вигляд

$$s_n = s_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)), \tag{7.41}$$

де

$$r_n = \sqrt{\frac{40}{3\pi - 2}\left(1 - \frac{2Dn^2}{\pi}\right)}, \quad \chi_n(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2.$$

Звідси одержимо періодичний розв'язок задачі (7.33), (7.34)

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx). \tag{7.42}$$

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (7.41) рівняння (7.37) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\pi}{2} iv + \varepsilon\Big[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2(v + \overline{v})}{\partial x^2} + (\alpha_1 +$$

$$+ i\beta)(v - \overline{v})\Big] + (d_0 + ic_0)(2\varepsilon r_n^2 v + s_n^2 \overline{v}).$$

Зробивши заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon\Big[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha_1 + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)w + (d_0 + ic_0)r_n^2(w + \overline{w}\exp(2inx))\Big]. \tag{7.43}$$

Розв'язок рівняння (7.43) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є (7.16) в комплексній формі. Підставляючи (7.16) в (7.43) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha_1 + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k +$$

$$+ n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \tag{7.44}$$

Аналогічно підставляючи (7.16) у спряжене до (7.43) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha_1 - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k-$$

$$-n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \tag{7.45}$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (7.33), (7.34) визначається стійкістю системи (7.44), (7.45) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (7.44), (7.45) зробимо заміну $y_{k+n} = z_{k+n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn)$. Тоді одержимо лінійну систему з матрицею

$$\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\alpha_1 - \gamma n^2 = -d_0 r_n^2$, то матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елементів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2-$$

$$-2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2. \tag{7.46}$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 7.6. *Нехай для деякого цілого n виконується нерівність $2Dn^2 < \pi$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (7.33), (7.34) має періодичні відносно t розв'язки (7.42), де $n \in \mathbb{Z}$. Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (7.46) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

7.3. Біфуркація автоколивань параболічних систем із аргументом, що запізнюється, та малою дифузією

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, параболічних та гіперболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [40, 42, 50, 57, 132]. У цьому підрозділі досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із запізненням та малою дифузією і рівняння спінового горіння із запізненням. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [10, 87].

7.3.1. Біжучі хвилі параболічних рівнянь із запізненням та малою дифузією

Розглянемо систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u, u(t-\Delta, x)) \tag{7.47}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x+2\pi) = u(t, x), \tag{7.48}$$

де ε – малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $u \in \mathbb{R}^2$, функція $F(u, v)$ чотири рази неперервно диференційовна відносно своїх аргументів, $F(0,0) = 0$, причому F має в нулі порядок малості вище першого, $A_0 a = i\omega_0 a$, $\omega_0 > 0$, $A_0^* b = -i\omega_0 b$. Тут a і b – власні вектори матриць A_0 і A_0^* відповідно, для яких $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, матриця $A_0 + \varepsilon A_1$ має пару власних значень вигляду $\tau(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) > 0$, $\omega(0) = \omega_0$, $D = diag(d_1, d_2)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (7.47), (7.48). Розв'язок системи (7.47) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} = \varepsilon D\frac{d^2\theta}{dy^2} + A_0\theta + \varepsilon A_1\theta + F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)).$$

Цю систему заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma\theta_1 = \varepsilon D\frac{d\theta_1}{dy} + A_0\theta + \varepsilon A_1\theta + F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)). \qquad (7.49)$$

Інтегральний многовид системи (7.49) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{1}{\sigma}A_0\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma^3}DA_0^2\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}A_1\theta + \frac{1}{\sigma}F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)) + \ldots.$$

Тут в лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sigma}A_0\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma^3}DA_0^2\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}A_1\theta + \frac{1}{\sigma}F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)) + \ldots. \qquad (7.50)$$

У системі (7.50) виконаємо заміну $\theta = av + \bar{a}\bar{v}$ і домножимо обидві частини зліва на матрицю $\begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Тоді, враховуючи, що $(a, b) = 1$, де $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, одержуємо

$$\frac{dv}{dy} = i\frac{\omega_0}{\sigma}v - \frac{\varepsilon}{\sigma^3}\omega_0^2 b^* D(av + \bar{a}\bar{v}) + \frac{\varepsilon}{\sigma}b^* A_1(av + \bar{a}\bar{v}) +$$
$$+\frac{1}{\sigma}b^* F(av + \bar{a}\bar{v}, av(y - \sigma\Delta) + \bar{a}\bar{v}(y - \sigma\Delta)) + \ldots. \qquad (7.51)$$

Використавши у рівнянні (7.51) заміну $v = w\exp\left(i\dfrac{\omega_0}{\sigma}y\right)$, одержимо

$$\frac{dw}{dy} = \left(-\frac{\varepsilon}{\sigma^3}\omega_0^2 b^* D + \frac{\varepsilon}{\sigma}b^* A_1\right)\left(aw + \bar{a}\bar{w}\exp\left(-2i\frac{\omega_0}{\sigma}y\right)\right) + \exp\left(-i\frac{\omega_0}{\sigma}y\right)\times$$
$$\times F\Big(aw\exp\left(i\frac{\omega_0}{\sigma}y\right) + \bar{a}\bar{w}\exp\left(-i\frac{\omega_0}{\sigma}y\right), aw(y - \sigma\Delta)\exp\left(i\frac{\omega_0}{\sigma}(y - \sigma\Delta)\right) +$$
$$+\bar{a}\bar{w}(y - \sigma\Delta)\exp\left(-i\frac{\omega_0}{\sigma}(y - \sigma\Delta)\right)\Big) + \ldots.$$

В останньому рівнянні перейдемо до нормальної форми, використавши властивості функції F, і замінимо w на $\sqrt{\varepsilon}w$ [15, 153]. В результаті одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\varepsilon}{\sigma^3}\omega_0^2 b^* D a w + \frac{\varepsilon}{\sigma} b^* A_1 a w + \frac{\varepsilon}{\sigma}(d_0 + ic_0) w^2 \bar{w}. \tag{7.52}$$

Оскільки $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, то $Re(b^* D a) = \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$. Зауважимо, що сталі d_0 та c_0 залежать від власного вектора a.

Перейшовши у рівнянні (7.52) до полярних координат, $w = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = -\frac{\varepsilon}{2\sigma^3}\omega_0^2(d_1 + d_2) r + \frac{\varepsilon}{\sigma}\tau'(0) r + \frac{\varepsilon}{\sigma} d_0 r^3, \tag{7.53}$$

де $\tau'(0) = Re(A_1 a, b) > 0$. Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\tau'(0) > \dfrac{1}{2\sigma^2}\omega_0^2(d_1 + d_2)$. Тоді рівняння (7.53) має стаціонарний розв'язок

$$R_0 = \sqrt{\left(\tau'(0) - \frac{1}{2\sigma^2}\omega_0^2(d_1 + d_2)\right)|d_0|^{-1}}.$$

Отже, періодичний розв'язок рівняння (7.51) має вигляд $v = \sqrt{\varepsilon} R_0 \exp\left(i\dfrac{\omega_0}{\sigma} y\right) + O(\varepsilon)$. Звідси знаходимо періодичний розв'язок $\theta = av + \bar{a}\bar{v}$ системи (7.50). Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Отже, періодичний розв'язок системи (7.47) має вигляд

$$u_n = \sqrt{\varepsilon} r_n (a \exp i\eta + \bar{a}\exp(-i\eta)) + O(\varepsilon), \tag{7.54}$$

де $r_n = \sqrt{\left(\tau'(0) - \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2) n^2\right)|d_0|^{-1}}$, $\eta = \omega_n(\varepsilon) t + nx$, $\omega_n(\varepsilon) = \omega_0 + O(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому справджується таке твердження.

Теорема 7.7. *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\tau'(0) > \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2) n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (7.47), (7.48) має періодичні відносно t розв'язки (7.54).*

7.3.2. Стійкість періодичних розв'язків

Система рівнянь у варіаціях в околі розв'язку $u_n(t,x)$ системи (7.47) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_0 v + \varepsilon A_1 v + \varepsilon B_1(t)v + \varepsilon B_2(t)v(t-\Delta,x) + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (7.55)$$

У системі (7.55) зробимо заміну $v = aw + \bar{a}\bar{w}$ і домножимо обидві частини зліва на матрицю $\begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, де $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Тоді одержимо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon b^* D\frac{\partial^2 (aw+\bar{a}\bar{w})}{\partial x^2} + i\omega_0 w + \varepsilon b^*(A_1 + B_1(t))(aw+\bar{a}\bar{w}) +$$
$$+\varepsilon b^* B_2(t)(aw(t-\Delta,x) + \bar{a}\bar{w}(t-\Delta,x)) + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (7.56)$$

Виконавши в рівнянні (7.56) заміну $w = z\exp(i\omega_0 t)$ і використавши друге наближення в методі усереднення відносно t, одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon b^* Da\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varepsilon b^* A_1 a z + \varepsilon(d_0 + ic_0)(2r_n^2 z + w_n^2 \bar{z}), \quad (7.57)$$

де

$$w_n = r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)), \quad \chi_n(\varepsilon) = \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2,$$
$$\beta = Im(A_1 a, b), \quad \delta = Im(Da, b).$$

Заміною $z = u\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ рівняння (7.57) зведемо до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\Big[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)u +$$
$$+(d_0 + ic_0)r_n^2(u + \overline{u}\exp(2inx))\Big], \quad (7.58)$$

де $\gamma = Re(Da,b) = \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$, $\alpha = \tau'(0) = Re(A_1 a, b)$.

Розв'язок рівняння (7.58) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx),$$

$$\overline{u}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{7.59}$$

Підставляючи (7.59) в (7.58) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, отримуємо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k+n)^2 y_{k+n} +$$

$$+(d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \tag{7.60}$$

Аналогічно підставляючи (7.59) у спряжене до (7.58) рівняння, одержуємо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k-n)^2 v_{k-n} +$$

$$+(d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \tag{7.61}$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (7.47), (7.48) визначається стійкістю системи (7.60), (7.61) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (7.60), (7.61) виконаємо заміну $y_{k+n} = z_{k+n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n}\exp(-2i\varepsilon\delta kn)$. Тоді отримаємо лінійну систему з матрицею

$$\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\alpha - \gamma n^2 = -d_0 r_n^2$, то матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елементів матриці A є від'ємною, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і достатньо, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 -$$

$$-2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2, \tag{7.62}$$

де $r_n^2 = (\gamma n^2 - \alpha)/d_0$.

Теорема 7.8. *Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (7.47), (7.48) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (7.62) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Як приклад розглянемо рівняння (7.47), в якому

$$D = diag(d,d), \quad d > 0, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = E,$$

E – одинична матриця,

$$F(u, u(t-\Delta, x)) = d_0(u_1^2 + u_2^2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді $\gamma = d$, $\delta = 0$, $\alpha = 1$, $c_0 = 0$, тому з теореми 7.7 випливає, що при $d_0 < 0$, $n^2 < \dfrac{1}{d}$ існує періодичний розв'язок

$$u_n = \sqrt{\varepsilon(1 - dn^2)|d_0|^{-1}} \begin{pmatrix} \cos(t + nx) \\ -\sin(t + nx) \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 7.8 біжучі хвилі $u_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6d}(d+2)$.

Зауваження 1. Умови існування та стійкості періодичних розв'язків задачі (7.47), (7.48) можна отримати із рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u \right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u},$$

яке одержується за допомогою усереднення.

7.3.3. Періодичні режими рівняння спінового горіння із запізненням

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} + F\left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \xi(t-\Delta, x), \frac{\partial \xi}{\partial t}(t-\Delta, x) \right) \right], \quad (7.63)$$

$$\xi(t,x+2\pi)=\xi(t,x), \tag{7.64}$$

де ε – малий додатний параметр, $\Delta>0$, $\varrho>0$, причому F – однорідний многочлен третього степеня, тобто $F(a\xi,ap,a\eta,a\zeta)=a^3F(\xi,p,\eta,\zeta)$, $a\in\mathbb{R}$.

Задача (7.63), (7.64) еквівалентна системі

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=p,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+\xi=2\varepsilon\left[p+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+F(\xi,p,\xi_\Delta,p_\Delta)\right], \tag{7.65}$$
$$\xi(t,x+2\pi)=\xi(t,x),\quad p(t,x+2\pi)=p(t,x),$$

де $\xi_\Delta=\xi(t-\Delta,x)$, $p_\Delta=p(t-\Delta,x)$.

Розв'язок системи (7.65) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi=\theta_1(y)$, $p=\theta_2(y)$, $y=\sigma t+x$, де функції $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ мають період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy}=\theta_2,\ \sigma\frac{d\theta_2}{dy}+\theta_1=2\varepsilon\left[\theta_2+\frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2\theta_2}{dy^2}+F(\theta_1,\theta_2,\theta_1(y-\sigma\Delta),\theta_2(y-\sigma\Delta))\right].$$

Цю систему заміною $\dfrac{d\theta_2}{dy}=\theta_3$ зведемо до вигляду

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy}=\theta_2,\quad \frac{d\theta_2}{dy}=\theta_3,\quad \sigma\theta_3+\theta_1=$$
$$=2\varepsilon\left[\theta_2+\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\theta_3}{dy}+F(\theta_1,\theta_2,\theta_1(y-\sigma\Delta),\theta_2(y-\sigma\Delta))\right]. \tag{7.66}$$

Інтегральний многовид системи (7.66) можна зобразити у вигляді

$$\theta_3=-\frac{1}{\sigma}\theta_1+\frac{2\varepsilon}{\sigma}\left[\theta_2-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\theta_2+F(\theta_1,\theta_2,\theta_1(y-\sigma\Delta),\theta_2(y-\sigma\Delta))\right]+O(\varepsilon^2).$$

Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\sigma\frac{d\theta_1}{dy}=\theta_2,\quad \frac{d\theta_2}{dy}=-\frac{1}{\sigma}\theta_1+\frac{2\varepsilon}{\sigma}\Big[\theta_2-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\theta_2+$$
$$+F(\theta_1,\theta_2,\theta_1(y-\sigma\Delta),\theta_2(y-\sigma\Delta))\Big]+O(\varepsilon^2). \tag{7.67}$$

Перейшовши до комплексних змінних $u=\theta_1+i\theta_2$, $\bar u=\theta_1-i\theta_2$, одержимо рівняння

$$\frac{du}{dy}=-\frac{i}{\sigma}u+\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big[u-\bar u-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}(u-\bar u)+$$

$$+2iF_1(u,\bar{u},u(y-\sigma\Delta),\bar{u}(y-\sigma\Delta))\Big]+O(\varepsilon^2), \tag{7.68}$$

де

$$F_1(u,\bar{u},u(y-\sigma\Delta),\bar{u}(y-\sigma\Delta))=F\Big(\frac{1}{2}(u+\bar{u}),\frac{i}{2}(\bar{u}-u),\frac{1}{2}(u(y-\sigma\Delta)+$$

$$+\bar{u}(y-\sigma\Delta)),\frac{i}{2}(\bar{u}(y-\sigma\Delta)-u(y-\sigma\Delta))\Big).$$

Виконуючи у рівнянні (7.68) заміну $u=w\exp\left(-\dfrac{i}{\sigma}y\right)$, одержуємо рівняння

$$\frac{dw}{dy}=\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big[\left(1-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\right)\left(w-\bar{w}\exp\left(2\frac{i}{\sigma}y\right)\right)+2i\exp\left(-\frac{i}{\sigma}y\right)\times$$

$$\times F_1\Big(w\exp\left(-\frac{i}{\sigma}y\right),\bar{w}\exp\left(\frac{i}{\sigma}y\right),w(y-\sigma\Delta)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{i}{\sigma}(y-\sigma\Delta)\right),\bar{w}(y-\sigma\Delta)\exp\left(\frac{i}{\sigma}(y-\sigma\Delta)\right)\Big)\Big]+O(\varepsilon^2).$$

Виконавши усереднення в цьому рівнянні відносно y [15, 153], отримаємо рівняння

$$\frac{dw}{dy}=\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[w-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}w+(d_0+ic_0)w^2\bar{w}\right]. \tag{7.69}$$

Перейшовши у рівнянні (7.69) до полярних координат $w=r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy}=\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[r-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}r+d_0r^3\right].$$

Нехай $d_0<0$ і виконується нерівність $\sigma^2\varrho^2>1$. Тоді рівняння (7.69) має стаціонарний розв'язок

$$R_0=\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\right)|d_0|^{-1}}.$$

Отже, періодичний розв'язок рівняння (7.68) має вигляд $u=R_0\exp\left(-\dfrac{i}{\sigma}y\right)+O(\varepsilon)$. Звідси знаходимо періодичний розв'язок

$$\theta_1=R_0\cos\left(\frac{y}{\sigma}\right)+O(\varepsilon),\quad \theta_2=-R_0\sin\left(\frac{y}{\sigma}\right)+O(\varepsilon)$$

системи (7.67). Враховуючи, що функції θ_1 та θ_2 мають період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{1}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Отже, періодичний розв'язок рівняння (7.63) має вигляд

$$\xi_n = r_n \cos(t + nx) + O(\varepsilon), \quad r_n = \sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right)|d_0|^{-1}}, \tag{7.70}$$

де $n \in \mathbb{Z}$. Тому справджується таке твердження.

Теорема 7.9. *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $n^2 < \varrho^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (7.47), (7.48) має періодичні відносно t розв'язки (7.70), де $n \in \mathbb{Z}$.*

7.3.4. Стійкість періодичних режимів рівняння спінового горіння із запізненням

Система рівнянь у варіаціях в околі розв'язку $\xi = \xi_n(t,x)$, $p = \dfrac{\partial \xi_n(t,x)}{\partial t}$ системи (7.65) має вигляд

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = v_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 = 2\varepsilon\Big[v_2 + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + B_1(t)v_1 + B_2(t)v_2 +$$

$$+ B_3(t)v_1(t-\Delta, x) + B_4(t)v_2(t-\Delta, x)\Big].$$

Перейшовши до комплексних змінних $v = v_1 + iv_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -iv + \varepsilon\left[v - \bar v + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 (v - \bar v)}{\partial x^2} + C_1(t)v + C_2(t)\bar v + C_3(t)v_\Delta + C_4(t)\bar v_\Delta\right].$$

де $v_\Delta = v(t-\Delta, x)$, $\bar v_\Delta = \bar v(t - \Delta, x)$. Виконавши заміну $v = w\exp(-it)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, отримаємо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon\left[w + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (d_0 + ic_0)(2r_n^2 w + u_n^2 \bar w)\right], \tag{7.71}$$

де $u_n = r_n \exp(i(\omega_n(\varepsilon)t + nx))$, $\omega_n(\varepsilon) = \varepsilon c_0 r_n^2$. Заміною $w = u\exp(i\omega_n(\varepsilon)t)$ рівняння (7.71) зведемо до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\left[u + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (d_0 + ic_0)(r_n^2 u + r_n^2 \bar u \exp(2inx)) + d_0 r_n^2 u\right]. \tag{7.72}$$

Розв'язок рівняння (7.72) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx),$$

$$\overline{u}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{7.73}$$

Підставляючи (7.73) в (7.72) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержуємо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon\left[(1+d_0r_n^2)y_{k+n} - \frac{(k+n)^2}{\varrho^2}y_{k+n} + (d_0+ic_0)r_n^2(y_{k+n}+v_{k-n})\right]. \tag{7.74}$$

Аналогічно підставляючи (7.73) у спряжене до (7.72) рівняння, отримаємо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon\left[(1+d_0r_n^2)v_{k-n} - \frac{(k-n)^2}{\varrho^2}v_{k-n} + (d_0-ic_0)r_n^2(v_{k-n}+y_{k+n})\right]. \tag{7.75}$$

Стійкість періодичних розв'язків рівняння спінового горіння визначається стійкістю системи (7.74), (7.75) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо через εA матрицю системи (7.74), (7.75) з елементами εa_{11}, εa_{12}, εa_{21}, εa_{22}. Матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елементів матриці A від'ємна, $a = a_{11}+a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості періодичного розв'язку $\xi_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2c > f^2$, де

$$c = Re(det(A)), \quad f = Im(det(A)), \quad f = \frac{4c_0nk}{|d_0|\varrho^2}\left(1-\frac{n^2}{\varrho^2}\right),$$

тобто

$$\left(\frac{k^2}{\varrho^2}+1-\frac{n^2}{\varrho^2}\right)^2\left(\frac{k^2}{\varrho^2}+2-\frac{6n^2}{\varrho^2}\right) > \frac{4c_0^2n^2}{\varrho^2d_0^2}\left(1-\frac{n^2}{\varrho^2}\right)^2. \tag{7.76}$$

Теорема 7.10. *Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ задачі (7.63), (7.64) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (7.76) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Як приклад розглянемо рівняння (7.63) з нелінійністю $F = -\frac{4}{3}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^3$. Тоді $d_0 = -1$, $c_0 = 0$, тому з теореми 7.9 випливає, що при $n^2 < \varrho^2$ існує періодичний розв'язок

$$\xi_n = \sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}}\cos(t + nx) + O(\varepsilon).$$

Згідно з теоремою 7.10 біжучі хвилі $\xi_n(t, x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \frac{1}{6}(2\varrho^2 + 1)$.

7.4. Біфуркація циклів параболічних систем із запізненням та малою дифузією

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, параболічних та гіперболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [42, 50, 57, 126, 132]. У цьому підрозділі досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із запізненням та малою дифузією. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [10, 86, 87].

7.4.1. Періодичні режими та їх стійкість

Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний простір з нормою $|u| = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ – простір неперервних функцій із значеннями в $\mathbb{R}^n$ з нормою $||\varphi|| = \sup\limits_{-\Delta\leq\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|$. Позначимо через u_t – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $u_t(\theta, x) = u(t + \theta, x)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$.

Розглянемо параболічну систему із запізнюючим аргументом та малою дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon)u_t + f(u_t, \varepsilon) \tag{7.77}$$

і періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{7.78}$$

де ε – малий додатний параметр, $u \in \mathbb{R}^n$, $L(\varepsilon) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ – лінійний неперервний оператор, $f : \mathbb{C} \times [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$, $f(\varphi, \varepsilon) = O(||\varphi||^2)$ при $||\varphi|| \to 0$, оператор f п'ять раз неперервно диференційовний відносно своїх аргументів. Припустимо, що нульовий розв'язок рівняння (7.77) при $\varepsilon = 0$ асимптотично стійкий.

Поряд з (7.77) розглянемо лінійні рівняння

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L(\varepsilon)\tilde{u}_t, \tag{7.79}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L(0)\tilde{u}_t. \tag{7.80}$$

Згідно з теоремою Рісса оператор $L(\varepsilon)$ можна зобразити у вигляді інтеграла Стілтьєса

$$L(\varepsilon)\varphi = \int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta, \varepsilon)]\varphi(\theta),$$

де матриця $\eta(\theta, \varepsilon)$ має обмежену варіацію відносно θ. Нехай $\eta(\theta, \varepsilon)$ двічі неперервно диференційовна відносно ε. Характеристичне рівняння для рівняння (7.79) має вигляд

$$det\Lambda_\varepsilon(\lambda) = 0,\ \Lambda_\varepsilon(\lambda) = \lambda I - \int_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta, \varepsilon), \tag{7.81}$$

де I – одинична матриця. Припустимо, що рівняння (7.81) має одну пару коренів вигляду $\xi(\varepsilon) \pm i\zeta(\varepsilon)$, $\xi(0) = 0$, $\xi'(0) > 0$, $\zeta(0) > 0$, а інші корені лежать у півплощині $Re\lambda \leq \lambda_0 < 0$.

Рівняння (7.77) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(0)u_t + F(u_t, \varepsilon), \tag{7.82}$$

де $F(u_t, \varepsilon) = \varepsilon D \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon)u_t - L(0)u_t + f(u_t, \varepsilon)$. Позначимо через $\tilde{u}_t(\varphi)$ розв'язок рівняння (7.80) з початковою функцією $\varphi \in \mathbb{C}$. Визначимо оператор зсуву за розв'язками рівняння (7.80) співвідношенням $T(t)\varphi = \tilde{u}_t(\varphi)$. Сім'я $\{T(t), t \geq 0\}$ утворює сильно неперервну півгрупу. Твірний оператор півгрупи є оператором диференціювання $A\varphi(\theta) = \dfrac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$, з областю визначення

$$D(A) = \left\{\varphi \in \mathbb{C}, \frac{d\varphi}{d\theta} \in \mathbb{C}, \frac{d\varphi(0)}{d\theta} = L(0)\varphi\right\}.$$

Позначимо через $\mathbb{P}$ власний підпростір в $\mathbb{C}$, породжений розв'язками рівняння (7.80), що відповідають кореням $\pm i\zeta(0)$. Розкладемо простір $\mathbb{C}$ в пряму суму $\mathbb{C} = \mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$. Нехай $\Phi = \Phi(\theta)$ – базис в $\mathbb{P}$. Розглядаючи спряжене до (7.80) рівняння, можна аналогічно визначити функцію $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \Delta$. Тоді кожний елемент $u_t \in \mathbb{C}$ можна зобразити у вигляді $u_t = \Phi y(t) + z_t$, де $y(t) = (\Psi, u_t)$, $z_t = u_t - \Phi y(t)$, $y(t) \in \mathbb{R}^2$, $z_t \in \mathbb{Q}$, (Ψ, u_t) – деякий білінійний функціонал. Рівняння (7.77) еквівалентне системі рівнянь [126, 132]:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = By + \Psi(0)F(\Phi y + z_t, \varepsilon),$$

$$z_t = T(t-\sigma)z_\sigma + \int\limits_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F(\Phi y(s) + z_s, \varepsilon)ds.$$

Тут X_0^Q – проекція на підпростір Q функції $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \leq \theta < 0$, $X_0(0) = I$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \zeta(0) \\ -\zeta(0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно [126] можна довести існування функції $g : \mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{Q}$, що задовольняє умови $g(0, \varepsilon) = 0$, $||g(y, \varepsilon) - g(y', \varepsilon)|| \leq \dfrac{1}{2}|y - y'|$ і такої, що множина

$$S_\varepsilon = \{(\varphi, \varepsilon) | \varepsilon \in [0, \varepsilon_0), \varphi = \Phi y + \vartheta, y \in \mathbb{R}^2, \vartheta = g(y, \varepsilon), \vartheta \in \mathbb{Q}\}$$

є локальним інтегральним многовидом рівняння (7.82). Функція $g(y, \varepsilon)$ буде чотири рази неперервно диференційовною відносно y. Поведінка розв'язків рівняння (7.82) на інтегральному многовиді S_ε описується рівнянням

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bv + \Psi(0)F(\Phi v + g(v, \varepsilon), \varepsilon), \tag{7.83}$$

де $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Для кожного розв'язку $u_t = \Phi y(t) + z_t$ рівняння (7.82) існує розв'язок $\chi_t = \Phi v(t) + g(v(t), \varepsilon)$, що належить S_ε і такий, що правильна оцінка

$$||u_t - \chi_t|| \leq Ke^{-\nu t}, \quad K > 0, \quad \nu > 0.$$

У рівнянні (7.83) збережемо в лінійних доданках члени порядку $O(\varepsilon)$. Тоді одержимо рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bv + \varepsilon\Psi(0)D\Phi(0)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\Psi(0)\times$$
$$\times L'(0)\Phi v + \Psi(0)f(\Phi v + g(v, \varepsilon), \varepsilon). \tag{7.84}$$

Перейшовши до комплексних змінних $w = v_1 + iv_2$, $\overline{w} = v_1 - iv_2$, одержимо рівняння вигляду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon(\gamma_1 + i\delta_1)\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} - i\zeta(0)w +$$
$$+ \varepsilon(\alpha + i\beta)w + \varepsilon(\alpha_1 + i\beta_1)\overline{w} + W(w, \overline{w}, \varepsilon), \tag{7.85}$$

де

$$(\gamma + i\delta)w + (\gamma_1 + i\delta_1)\overline{w} = (1, i)\Psi(0)D\Phi(0)v,$$

$$(\alpha + i\beta)w + (\alpha_1 + i\beta_1)\overline{w} = (1, i)\Psi(0)L'(0)\Phi v,$$

$$\alpha = \xi'(0),\ \beta = \zeta'(0),\ W(w, \overline{w}, \varepsilon) = (1, i)\Psi(0)f(\Phi v + g(v, \varepsilon), \varepsilon).$$

Перетворимо рівняння (7.85) за допомогою підстановки

$$w = s + V_2(s,\overline{s}) + V_3(s,\overline{s}), \tag{7.86}$$

де V_2 і V_3 – форми відповідно другого і третього порядку. Перетворення (7.86) можна підібрати так, що рівняння для s набере вигляду

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \varepsilon(\gamma_1 + i\delta_1)\frac{\partial^2 \overline{s}}{\partial x^2} - i\zeta(0)s +$$

$$+\varepsilon(\alpha + i\beta)s + \varepsilon(\alpha_1 + i\beta_1)\overline{s} + (d_0 + ic_0)s^2\overline{s} + \dots. \tag{7.87}$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (7.77), (7.78). Розв'язок рівняння (7.87) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $s = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} = \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{d^2\theta}{dy^2} + \varepsilon(\gamma_1 + i\delta_1)\frac{d^2\overline{\theta}}{dy^2} - i\zeta(0)\theta +$$

$$+\varepsilon(\alpha + i\beta)\theta + \varepsilon(\alpha_1 + i\beta_1)\overline{\theta} + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta} + \dots.$$

Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1,\ \sigma\theta_1 = \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{d\theta_1}{dy} + \varepsilon(\gamma_1 +$$

$$+i\delta_1)\frac{d\overline{\theta}_1}{dy} - i\zeta(0)\theta + \varepsilon(\alpha + i\beta)\theta + \varepsilon(\alpha_1 +$$

$$+i\beta_1)\overline{\theta} + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta} + \dots. \tag{7.88}$$

Інтегральний многовид системи (7.88) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = -\frac{\zeta(0)}{\sigma}i\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\Big[-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma + i\delta)\theta - \frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}\times$$

$$\times(\gamma_1 + i\delta_1)\overline{\theta} + (\alpha + i\beta)\theta + (\alpha_1 + i\beta_1)\overline{\theta}\Big] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta} + \dots.$$

Тут в лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = -\frac{\zeta(0)}{\sigma}i\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\Big[- \frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma + i\delta)\theta - \frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}\times$$

$$\times(\gamma_1 + i\delta_1)\overline{\theta} + (\alpha + i\beta)\theta + (\alpha_1 + i\beta_1)\overline{\theta}\Big] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta} + \ldots .$$

У цьому рівнянні зробимо заміну $\theta = p\exp\left(-\frac{\zeta(0)}{\sigma}iy\right)$ і усереднимо одержане рівняння відносно y [15]. Тоді одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma + i\delta)p + (\alpha + i\beta)p\right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}p^2\overline{p}. \qquad (7.89)$$

Перейшовши у рівнянні (7.89) до полярних координат $p = r\exp(i\varphi)$, отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = -\varepsilon\frac{\zeta^2(0)\gamma}{\sigma^3}r + \varepsilon\frac{\alpha}{\sigma}r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \qquad (7.90)$$

Нехай виконуються нерівності $\gamma > 0$, $d_0 < 0$, $\alpha\sigma^2 > \zeta^2(0)\gamma$. Тоді рівняння (7.90) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\zeta^2(0)\gamma}{\sigma^2}\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок системи (7.88) має вигляд

$$\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0\exp\left(-\frac{\zeta(0)}{\sigma}iy\right) + O(\varepsilon),\ \theta_1 = \frac{d\theta}{dy}.$$

Враховуючи, що функція θ повинна мати період 2π, одержуємо $\sigma = -\frac{\zeta(0)}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (7.87) має вигляд

$$s_n = s_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)), \qquad (7.91)$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = -\zeta(0) + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$. Звідси одержимо періодичний розв'язок задачі (7.77), (7.78)

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx). \qquad (7.92)$$

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (7.91) рівняння (7.87) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i\zeta(0)v + \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon(\gamma_1 + i\delta_1)\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} +$$

$$+\varepsilon(\alpha + i\beta)v + \varepsilon(\alpha_1 + i\beta_1)\overline{v} + (d_0 + ic_0)(2\varepsilon r_n^2 v + s_n^2 \overline{v}).$$

Зробивши заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon\Big[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)w +$$

$$+(d_0 + ic_0)r_n^2(w + \overline{w}\exp(2inx))\Big]. \tag{7.93}$$

Розв'язок рівняння (7.93) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$w(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx),$$

$$\overline{w}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{7.94}$$

Підставляючи (7.94) в (7.93) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k+$$

$$+n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \tag{7.95}$$

Аналогічно підставляючи (7.94) у спряжене до (7.93) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k-$$

$$-n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \tag{7.96}$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (7.77), (7.78) визначається стійкістю системи (7.95), (7.96) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (7.95), (7.96) зробимо заміну $y_{k+n} = z_{k+n} \exp(-2i\varepsilon\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n} \exp(-2i\varepsilon\delta kn)$. Тоді отримаємо лінійну систему з матрицею

$$\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\alpha - \gamma n^2 = -d_0 r_n^2$, то матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елементів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 -$$

$$-4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2. \qquad (7.97)$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 7.11. *Нехай $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (7.77), (7.78) має періодичні відносно t розв'язки (7.92), де $n \in \mathbb{Z}$. Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (7.97) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Для наближеного знаходження циклів задачі (7.77), (7.78) досить обмежитися членами другого і третього порядку розкладу функції $\Psi(0)f(\Phi v + g(v,0),0)$ в ряд за степенями v. А для цього досить визначити члени другого порядку в розкладі функції $g(v,0)$. Перше наближення функції $g(v,0)$ має вигляд

$$g_1(v,0) = \int_{-\infty}^{0} T(-s) X_0^Q f(\Phi e^{Bs} v, 0) ds.$$

Зобразимо функцію $f(\Phi y, 0)$ у вигляді $f(\Phi y, 0) = c_1 y_1^2 + c_2 y_1 y_2 + c_3 y_2^2 +$

$O(|y|^3)$. Тоді знаходження функції $g_1(v,0)$ зводиться до обчислення інтеграла

$$z = \int_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{i\omega s} ds,$$

де $\omega \in \{0, 2\zeta(0), -2\zeta(0)\}$. Зауважимо, що інтеграл z збіжний.

Теорема 7.12 [60]. *При довільних дійсних ω функція $z(\theta)$ належить $\mathbb{Q} \bigcap D(A)$ і виконується рівність*

$$i\omega z - Az = X_0^Q. \tag{7.98}$$

Для знаходження z потрібно розв'язати рівняння (7.98) відносно z. Це рівняння рівносильне такій системі

$$\frac{dz(\theta)}{d\theta} - i\omega z(\theta) = -X_0^Q(\theta),\ -\Delta \le \theta < 0, \tag{7.99}$$

$$\int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta, 0)]z(\theta) - i\omega z(0) = -X_0^Q(0). \tag{7.100}$$

Можна показати [60], що система (7.99), (7.100) має єдиний розв'язок.

7.4.2. Біфуркаційні рівняння для задачі про інваріантні тори

Нехай тепер рівняння (7.81) має прості корені $\xi_m(\varepsilon) \pm i\zeta_m(\varepsilon)$, $\xi_m(0) = 0$, $\xi_m'(0) > 0$, $\zeta_m(0) > 0$, $m \in \{1, \dots, p\}$, а решта коренів лежать у півплощині $Re\lambda \le \lambda_0 < 0$. У цьому випадку власний підпростір $\mathbb{P}$ буде мати розмірність $2p$, причому існує інтегральний многовид

$$S_\varepsilon = \{(\varphi, \varepsilon) |\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0),\ \varphi = \Phi y + \vartheta,\ y \in \mathbb{R}^{2p},\ \vartheta = g(y, \varepsilon),\ \vartheta \in \mathbb{Q}\}$$

рівняння (7.82). Тоді рівняння на многовиді зводиться до вигляду (7.84), де $v \in \mathbb{R}^{2p}$, а матриця B має власні значення $\pm i\zeta_m(0)$, $m \in \{1, \dots, p\}$. За допомогою невиродженого перетворення T матрицю B можна звести до вигляду

$B = TGT^{-1}$, де G – діагональна матриця з елементами $\pm i\zeta_m(0)$ на головній діагоналі. Зробивши в системі (7.84) заміну $v = Tw$, одержимо систему

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Gw + \varepsilon T^{-1}\Psi(0)D\Phi(0)T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$
$$+\varepsilon T^{-1}\Psi(0)L'(0)\Phi Tw + T^{-1}\Psi(0)f(\Phi Tw + g(Tw,\varepsilon),\varepsilon). \qquad (7.101)$$

Нехай виконується умова A:

$$n_1\zeta_1(0) + \ldots + n_p\zeta_p(0) \neq 0$$

$$\text{при} \quad 0 < |n_1| + \ldots + |n_p| < 6,$$

де n_1, …, n_p – цілі.

Перетворимо систему (7.101) за допомогою підстановки

$$w = s + \sum_{i=2}^{4} W_i(s,\overline{s},\varepsilon), \qquad (7.102)$$

де W_2, W_3, W_4 – форми відповідно другого, третього і четвертого порядку. Перетворення (7.102) можна підібрати так, що рівняння для s та $\overline{s}$ набудуть вигляду [10, 15]

$$\frac{\partial s}{\partial t} = Gs + \varepsilon T^{-1}\Psi(0)D\Phi(0)T\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} +$$
$$+\varepsilon T^{-1}\Psi(0)L'(0)\Phi Ts + S(s,\overline{s},\varepsilon) + O(|s|^5), \qquad (7.103)$$

де $S(s,\overline{s},\varepsilon)$ – вектор-функція з елементами $S_m = s_m \sum_{j=1}^{p} a_{mj}(\varepsilon)s_j\overline{s}_j$. У рівнянні (7.103) зробимо заміну $s = \exp(Gt)\chi$ і усереднимо одержане рівняння відносно t. Тоді отримаємо рівняння

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \varepsilon H\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \varepsilon J\chi + S(\chi,\overline{\chi},\varepsilon) + O(|\chi|^5), \qquad (7.104)$$

де H та J – діагональні матриці з діагональними елементами h_m та j_m відповідно. Розв'язок рівняння (7.104) будемо шукати у вигляді ряду Фур'є в комплексній формі. Якщо в рівнянні для кофіцієнтів Фур'є перейти до полярних координат, то отримаємо біфуркаційні рівняння вигляду $B(\varepsilon)r^2+\varepsilon\Theta-\varepsilon n^2\Gamma = 0$, де $n \in \mathbb{Z}$, Θ та Γ – вектори з елементами $Re\, j_m$ та $Re\, h_m$ відповідно, $B(\varepsilon)$ – матриця з елементами $Re\, a_{mj}$, r^2 – шуканий вектор з елементами r_j^2. Якщо існує розв'язок біфуркаційного рівняння, то існує інваріантний тор задачі (7.77), (7.78).

7.5. Висновки

У розділі 7 досліджено біфуркацію циклів параболічних систем з малою дифузією.

1. У підрозділах 7.1 та 7.2 вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння.

2. У підрозділі 7.2 доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь з малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння Хатчінсона.

3. У підрозділі 7.3 доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи двох диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюється, та малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння із запізненням.

4. У підрозділі 7.4 доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль, одержано біфуркаційні рівняння.

Розділ 8

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

У цьому розділі досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними. Крайові задачі для гіперболічних систем диференціальних рівнянь зводяться до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь. Досліджено узагальнені поліноми Чебишова багатьох змінних. Для побудови цих поліномів одержана рекурентна формула. Доведено, що поліноміальні відображення еквівалентні кусково-лінійним і мають зліченне число циклів. Показано, що узагальнені поліноми Чебишова задовольняють диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

8.1. Зведення крайових задач до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь

У монографіях [132, 141] крайові задачі для гіперболічних систем першого порядку з однією просторовою змінною зводяться до диференціально-різницевих рівнянь з одним запізненням. У цьому підрозділі розглянуто крайові задачі для гіперболічних систем з багатьма просторовими змінними, які зводяться до диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями. Це дозволяє дослідити асимптотичну поведінку розв'язків крайових задач.

Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = k_i(d, grad\ u_i), \tag{8.1}$$

де $d = (d_1, ..., d_p)^T$, $grad\ u_i = (\partial u_i/\partial x_1, ..., \partial u_i/\partial x_p)^T$, $x = (x_1, ..., x_p)^T$, $i \in \{1, ..., q\}$. Функції u_1, ..., u_q задовольняють граничні умови

$$u_1\Big|_{(c,x)=0} = u_2\Big|_{(c,x)=0} = ... = u_q\Big|_{(c,x)=0}, \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{(c,x)=1} = f\Big(u_1\Big|_{(c,x)=1}, ..., u_q\Big|_{(c,x)=1}\Big), \tag{8.3}$$

де $c = (c_1, ..., c_p)^T$. Припустимо, що $k_q > k_{q-1} > ... > k_1 > 0$, $(c, d) > 0$, де $(c, d)-$скалярний добуток векторів c, d.

Загальний розв'язок системи (8.1) записується у вигляді біжучих хвиль $u_i(x, t) = \varphi_i(x + k_i td)$, $i \in \{1, ..., q\}$. Підставляючи в (8.2), одержимо

$$\varphi_1(x + k_1 td)\Big|_{(c,x)=0} = \varphi_2(x + k_2 td)\Big|_{(c,x)=0} = ... = \varphi_q(x + k_q td)\Big|_{(c,x)=0}.$$

Нехай $x = \bar{x} - k_2\gamma d$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$, $t = t_0 + \gamma$. Тоді $x + k_2 td = \bar{x} + k_2 t_0 d$, $(c, x) = (c, \bar{x}) - k_2\gamma(c, d)$. Якщо $(c, x) = 0$, то $(c, \bar{x}) = k_2\gamma(c, d)$. Із умови $(c, \bar{x}) = 1$ знаходимо $\gamma = 1/[k_2(c, d)]$. Тоді

$$x + k_1 td = \bar{x} - \frac{d}{(c, d)} + k_1\left(t_0 + \frac{1}{k_2(c, d)}\right) d = \bar{x} + k_1\left(t_0 - \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2(c, d)}\right) d.$$

Позначимо $\Delta_2 = (k_2 - k_1)/[k_1 k_2(c, d)]$. Тоді $\varphi_2(\bar{x} + k_2 t_0 d)|_{(c,\bar{x})=1} = \varphi_1(\bar{x} + k_1(t_0 - \Delta_2)d)|_{(c,\bar{x})=1}$. Аналогічно $\varphi_i(\bar{x} + k_i t_0 d)|_{(c,\bar{x})=1} = \varphi_1(\bar{x} + k_1(t_0 - \Delta_i)d)|_{(c,\bar{x})=1}$, де $\Delta_i = (k_i - k_1)/[k_1 k_i(c, d)]$. Позначимо $z(t) = \varphi_1(\bar{x} + k_1 td)|_{(c,\bar{x})=1}$. Тоді умова (8.3) набуде вигляду

$$\frac{dz}{dt} = f(z(t), z(t - \Delta_2), ..., z(t - \Delta_q)). \tag{8.4}$$

Якщо крім умов (8.2), (8.3) для функції u_1 задати початкову умову

$$u_1\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad k_1/k_q \le (c,x) \le 1, \tag{8.5}$$

то одержимо початкову функцію для рівняння (8.4)

$$z(t) = \psi(x + k_1 t d)\Big|_{(c,x)=1}, \quad -\Delta_q \le t \le 0. \tag{8.6}$$

Отже, правильна наступна теорема.

Теорема 8.1. *Нехай $(c,d) > 0$, $0 < k_1 < k_2 < ... < k_q$. Тоді задача (8.1), (8.2), (8.3), (8.5) зводиться до задачі (8.4), (8.6).*

Зауваження 1. *Якщо умову (8.3) замінити умовою $u_1\Big|_{(c,x)=1} = h\Big(u_2\Big|_{(c,x)=1}, ..., u_q\Big|_{(c,x)=1}\Big)$, то замість рівняння (8.4) одержимо різницеве рівняння з неперервним часом $z(t) = h(z(t-\Delta_2), ..., z(t-\Delta_q))$.*

Розглянемо частковий випадок рівняння (8.4)

$$\frac{dz}{dt} = az(t-m) + bz(t-n), \tag{8.7}$$

де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m < n$.

Згідно з [145] для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (8.7) був асимптотично стійким, необхідно і досить, щоб всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda = ae^{-m\lambda} + be^{-n\lambda} \tag{8.8}$$

лежали в лівій півплощині.

Означення. *Областю стійкості рівняння (8.8) називається множина точок $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, для яких всі корені рівняння (8.8) містяться в лівій півплощині.*

Теорема 8.2. *Область стійкості рівняння (8.8) обмежена.*

Теорема випливає із теореми 3.1.

Із доведення теореми [52] випливає, що для точок (a,b) із області стійкості справджуються нерівності

$$||a| - |b|| \le \pi, \quad ||a|e^{-m} - |b|e^{-n}| \le \sqrt{\pi^2 + 1}. \tag{8.9}$$

Лема 8.1. *Якщо вектор* (a, b) *належить області стійкості рівняння (8.8), то*

$$a + b < 0. \tag{8.10}$$

Лема випливає із леми 3.3.

Як приклад знайдемо область стійкості рівняння

$$\lambda = ae^{-\lambda} + be^{-2\lambda}. \tag{8.11}$$

Із (8.9) випливає, що для точок (a, b) із області стійкості правильні нерівності

$$||a| - |b|| \leq \pi, \quad ||a|e^{-1} - |b|e^{-2}| \leq \sqrt{\pi^2 + 1}. \tag{8.12}$$

Нерівності (8.10) і (8.12) визначають деякий обмежений многокутник.

Для знаходження області стійкості застосуємо тепер метод $D-$ розбиттів. Пряма $a + b = 0$ є однією з ліній, що утворюють межу $D-$ розбиття.

Якщо квазіполіном має суто уявний корінь iy, то рівняння меж $D-$ розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y \cos 2y}{\sin y}, \quad b = -\frac{y}{\sin y}. \tag{8.13}$$

Відзначимо, що лінії $D-$розбиття досить нанести в многокутнику, що обмежує область стійкості. Неважко переконатися, що зв'язна область, обмежена відрізком прямої $b = -a$ та дугою лінії (8.13) при $0 \leq y \leq 2\pi/3$ є областю стійкості.

Область стійкості рівняння (8.11) – це заштрихована частина площини, зображена на рис. 5.

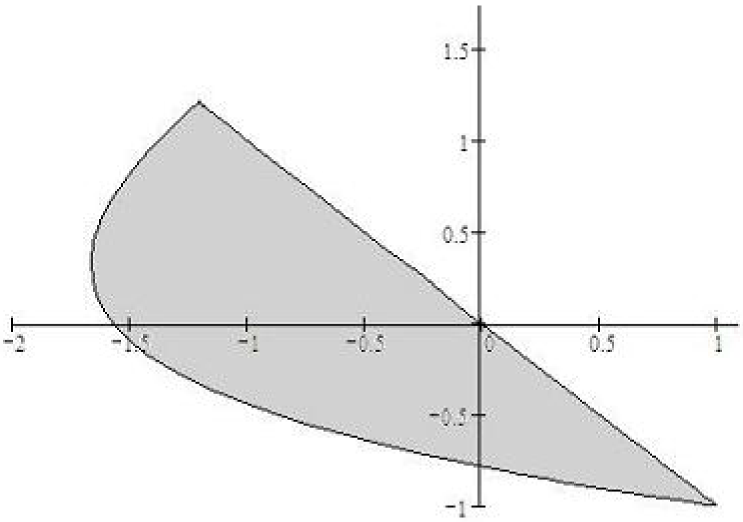

Рис. 5

Якщо крайова задача зводиться до різницевого рівняння першого порядку, то потрібно досліджувати відображення відрізка в себе.

Теорема 8.3. *Нехай* $f-$*унімодальне відображення,* $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(0) = 0$, $f(1/2) = 1$, $f(1/2+x) = f(1/2-x)$, $0 \leq x \leq 1/2$, *функція* $f(x)$ *двічі неперервно диференційовна на* $[0,1]$, $f''(1/2) < 0$. *Тоді відображення* $x \to f(x)$ *еквівалентне відображенню* $x \to h(x)$, *тобто* $\varphi(f(x)) = h(\varphi(x))$, *де* $\varphi(x) = \mu[0,x]$, $\varphi(1) = 1$, $\mu-$*абсолютно неперервна інваріантна міра. Тут функція* h *кусково диференційовна на* $[0,1]$, *причому* $h'(\varphi(1/2-0)) = 2$, $h'(\varphi(1/2+0)) = -2$.

Доведення. Згідно з [146] існує абсолютно неперервна інваріантна міра μ, $\mu[0,1] = 1$. Із означення інваріантної міри випливає, що $\mu[0,f(x)] = \mu[0,x] + \mu[1-x,1]$ при $0 \leq x \leq 1/2$. Згідно з властивостями міри існує монотонно зростаюча функція $g(x)$, така, що $\mu[1-x,1] = g(\mu[0,x])$. Позначимо $\varphi(x) = \mu[0,x]$. Тоді одержимо рівність

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + g(\varphi(x)), \quad 0 \leq x \leq 1/2. \tag{8.14}$$

Якщо $1/2 \le x \le 1$, то $\mu[0, f(x)] = \mu[0, 1-x] + \mu[x, 1]$. Оскільки $\mu[x, 1] = 1 - \mu[0, x] = 1 - \varphi(x)$, $\mu[0, 1-x] = g^{-1}(\mu[x, 1]) = g^{-1}(1 - \varphi(x))$, то

$$\varphi(f(x)) = 1 - \varphi(x) + g^{-1}(1 - \varphi(x)), \quad 1/2 \le x \le 1. \tag{8.15}$$

Диференціюючи рівності (8.14) та (8.15), одержимо $\varphi'(f(x))f'(x) = \varphi'(x) + g'(\varphi(x))\varphi'(x)$, $0 \le x \le 1/2$; $\varphi'(f(x))f'(x) = -\varphi'(x) - \varphi'(x)/[g'(g^{-1}(1-\varphi(x))]$, $1/2 \le x \le 1$. Згідно з [146] існує $\lim_{x\to 1/2} \sqrt{1 - f(x)}\varphi'(f(x)) = a \ne 0$. Позначимо $b = -f''(1/2)$. Тоді $\lim_{x\to 1/2} f'(x)/(x - 1/2) = -b$. Але $\lim_{x\to 1/2-0} \sqrt{1 - f(x)}/(x-1/2) = -\sqrt{b}/\sqrt{2}$, $\lim_{x\to 1/2+0} \sqrt{1 - f(x)}/(x-1/2) = \sqrt{b}/\sqrt{2}$. Тому $\lim_{x\to 1/2-0} \varphi'(f(x))f'(x) = a\sqrt{2b}$, $\lim_{x\to 1/2+0} \varphi'(f(x))f'(x) = -a\sqrt{2b}$. Отже, $\lim_{x\to 1/2-0} \varphi'(f(x))f'(x) = -\lim_{x\to 1/2+0} \varphi'(f(x))f'(x)$, звідки $\varphi'(1/2) + g'(\varphi(1/2))\varphi'(1/2) = \varphi'(1/2) + \varphi'(1/2)/[g'(\varphi(1/2)]$. Якщо $\varphi'(1/2) \ne 0$, то $g'(\varphi(1/2) = -1$, або $g'(\varphi(1/2) = 1$. Оскільки $a \ne 0$, $b \ne 0$, то перший випадок неможливий. Розглянемо відображення $h(x) = x + g(x)$ при $0 \le \varphi^{-1}(x) \le 1/2$, $h(x) = 1 - x + g^{-1}(1 - x)$ при $1/2 \le \varphi^{-1}(x) \le 1$. Тоді $\varphi(f(x)) = h(\varphi(x))$, $0 \le x \le 1$; $h'(\varphi(1/2 - 0)) = 2$, $h'(\varphi(1/2 + 0)) = -2$. Теорема доведена.

8.2. Дослідження нелінійних систем різницевих рівнянь з комутуючими правими частинами

Розглянемо комплексну просту алгебру Лі, а також групу Вейля, що породжена дзеркальними відбиттями деякого евклідового простору $\mathbb{E}$. Нехай S_α – ортогональне відбиття $S_\alpha(x) = x - 2\dfrac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$, $x \in \mathbb{E}$, α_1, α_2, $\ldots$, α_n – базис системи коренів.

Група Вейля W, що породжена відбиттями S_{α_1}, S_{α_2}, $\ldots$, S_{α_n}, скінченна. Нехай ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n – фундаментальні ваги. Позначимо через Ω_j орбіту фундаментальної ваги ω_j під дією групи W, тобто множину образів вектора ω_j під дією елементів групи W.

Можна провести класифікацію систем коренів [113], причому для систем типу A_n, B_n, C_n, D_n явно виписані вектори α_1, α_2, $\ldots$, α_n, фундаментальні ваги ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n та інші характеристики цих систем.

Для систем типу B_n, C_n, D_n візьмемо $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ і позначимо через ε_i, $1 \leq i \leq n$ ортонормований базис простору $\mathbb{E}$.

Наприклад, для системи типу $C_n (n \geq 2)$ базис системи коренів та фундаментальні ваги мають вигляд $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\ldots$, $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, $\alpha_n = 2\varepsilon_n$, $\omega_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k$, $1 \leq k \leq n$.

Звідси знаходимо множини

$$\Omega_1 = \{\pm\varepsilon_k | 1 \leq k \leq n\}, \Omega_2 = \{\pm\varepsilon_k \pm \varepsilon_j | 1 \leq k < j \leq n\}, \ldots,$$

$$\Omega_n = \{\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \ldots \pm \varepsilon_n\}.$$

Тут беруться всеможливі набори знаків $+$ та $-$.

Для системи типу $B_n (n \geq 2)$ маємо $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\ldots$, $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, $\alpha_n = \varepsilon_n$, $\omega_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k$, $1 \leq k \leq n-1$, $\omega_n = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)$, група Вейля збігається з групою Вейля системи C_n. Звідси знаходимо множини

$$\Omega_1 = \{\pm\varepsilon_k | 1 \leq k \leq n\}, \Omega_2 = \{\pm\varepsilon_k \pm \varepsilon_j | 1 \leq k < j \leq n\}, \ldots,$$

$$\Omega_n = \left\{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \ldots \pm \varepsilon_n)\right\}.$$

Зауважимо, що множина $\Omega_1 \cup \Omega_2$ збігається із системою коренів B_n.

Для системи типу $D_n (n \geq 3)$ маємо $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\ldots$, $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$, $\omega_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k$, $1 \leq k \leq n-2$, $\omega_{n-1} = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1})$, $\omega_n = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)$.

Звідси знаходимо множини

$$\Omega_1 = \{\pm\varepsilon_k | 1 \leq k \leq n\}, \Omega_2 = \{\pm\varepsilon_k \pm \varepsilon_j | 1 \leq k < j \leq n\}, \ldots,$$

$$\Omega_{n-1} = \left\{ \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \ldots \pm \varepsilon_n) \right\}, \Omega_n = \left\{ \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \ldots \pm \varepsilon_n) \right\}.$$

Елементи множини Ω_{n-1} містять непарне число доданків із знаком $-$, а елементи множини Ω_n – парне.

Розглянемо камеру Вейля Φ, тобто множину $x \in \mathbb{E}$ таких, що $(\alpha_j, x) > 0$, $1 \leq j \leq n$, причому $(\overline{\alpha}, x) < 1$, де $\overline{\alpha}$ – максимальний корінь. Множина Φ утворює відкритий симплекс.

Наприклад, для системи типу C_n камера Вейля Φ визначається нерівностями

$$x_{j-1} > x_j, 2 \leq j \leq n, x_n > 0, 2x_1 < 1,$$

а для системи типу B_n одержимо симплекс

$$x_{j-1} > x_j, 2 \leq j \leq n, x_n > 0, x_1 + x_2 < 1.$$

Побудуємо функції

$$y_j(x) = \sum_{r \in \Omega_j} \exp(-2\pi i(x, r)), 1 \leq j \leq n \tag{8.16}$$

і розглянемо узагальнений косинус $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$. Функція $h(x)$ взаємно однозначно відображає камеру Вейля Φ на її образ F.

Для цілого $k \geq 0$ будемо називати узагальненим поліномом Чебишова [21, 160] поліноміальну функцію $P_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, що задовольняє співвідношення $P_k(h(x)) = h(kx)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Із (8.16) випливає, що узагальнений косинус для системи C_n має вигляд

$$h \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma_1(\cos 2\pi x_1, \ldots, \cos 2\pi x_n) \\ \ldots \\ 2^n \sigma_n(\cos 2\pi x_1, \ldots, \cos 2\pi x_n) \end{bmatrix},$$

де σ_j – j-та елементарна симетрична функція.

Функція $h(kx)$ буде симетричним многочленом $\cos 2\pi x_1, \ldots, \cos 2\pi x_n$, тому що $\cos 2k\pi x_j$ можна записати у вигляді полінома від $\cos 2\pi x_j$ (полінома Чебишова). Кожен симетричний многочлен можна зобразити у вигляді многочлена від елементарних симетричних функцій [70]. Тому існує єдиний многочлен $P_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такий, що $P_k(h(x)) = h(kx)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Узагальнений косинус для системи типу B_n має вигляд

$$h\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma_1(\cos 2\pi x_1, ..., \cos 2\pi x_n) \\ ... \\ 2^{n-1}\sigma_{n-1}(\cos 2\pi x_1, ..., \cos 2\pi x_n) \\ 2^n \cos \pi x_1 ... \cos \pi x_n \end{bmatrix}.$$

Підставляючи $n = 2$, одержимо

$$h(x_1, x_2) = (2\cos 2\pi x_1 + 2\cos 2\pi x_2, 4\cos \pi x_1 \cos \pi x_2),$$

тому

$$P_1(x, y) = (x, y), P_2(x, y) = (x^2 - 2y^2 + 4x + 4, y^2 - 2x - 4).$$

Позначимо $x_0 = -\sum_{j=1}^{n} x_j$. Тоді узагальнений косинус для системи типу $A_n (n \geq 1)$ набуде вигляду

$$h\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1(e^{-2\pi i x_0}, ..., e^{-2\pi i x_n}) \\ ... \\ \sigma_n(e^{-2\pi i x_0}, ..., e^{-2\pi i x_n}) \end{bmatrix}.$$

Підставляючи $n = 1$, одержимо $h(x) = 2\cos 2\pi x$. Тому $P_k(x)$ можна виразити через поліноми Чебишова $T_k(x) : P_k(x) = 2T_k\left(\frac{x}{2}\right)$. Підставляючи $n = 2$, одержимо

$$h(x_1, x_2) = \left(e^{2\pi i(x_1+x_2)} + e^{-2\pi i x_1} + e^{-2\pi i x_2}, e^{-2\pi i(x_1+x_2)} + e^{2\pi i x_1} + e^{2\pi i x_2}\right)$$

і відповідно

$$P_1(z,\bar z)=z, P_2(z,\bar z)=z^2-2\bar z, P_3(z,\bar z)=z^3-3z\bar z+3.$$

Аналогічно одержується узагальнений косинус для системи типу D_n

$$h\begin{bmatrix}x_1\\ ...\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sigma_1(\cos 2\pi x_1,\ldots,\cos 2\pi x_n)\\ \ldots\\ 2^{n-2}\sigma_{n-2}(\cos 2\pi x_1,\ldots,\cos 2\pi x_n)\\ 2^{n-1}(\cos\pi x_1\cos\pi x_n+\sin\pi x_1\ldots\sin\pi x_n)\\ 2^{n-1}(\cos\pi x_1\cos\pi x_n-\sin\pi x_1\ldots\sin\pi x_n)\end{bmatrix}.$$

Можна показати, що поліноми $P_k(x)$ є ортогональними в області F.

Позначимо $P_k(h(x))=(j_{k1}(x),\ldots,j_{kn}(x))$.

Зауважимо, що оскільки $P_k(h(x))=h(kx)$, де $h(x)=(y_1(x),\ldots,y_n(x))$, $x\in\mathbb{R}^n$, то $j_{kl}(x)=y_l(kx)$, $1\le l\le n$.

Позначимо через $r=|\Omega_q|$ кількість елементів множини $\Omega_q=\{z_1,\ldots,z_r\}$.

Теорема 8.4. *Нехай* $\Omega_q=\{z_1,\ldots,z_r\}$ *і нехай* $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ *– елементарні симетричні многочлени змінних* $\exp(-2\pi i(z_1,x)),\ldots,\exp(-2\pi i(z_r,x))$*. Тоді для* $m\ge r$ *правильна рекурентна формула*

$$j_{mq}=\sigma_1 j_{(m-1)q}-\sigma_2 j_{(m-2)q}+\ldots+(-1)^{r-1}\sigma_r j_{(m-r)q}, 1\le q\le n. \qquad (8.17)$$

Доведення. Відзначимо, що

$$\sum_{s=1}^{r}\left(t-e^{-2\pi i(z_s,x)}\right)=t^r-\sigma_1 t^{r-1}+\ldots+(-1)^r\sigma_r.$$

Якщо підставити $t=e^{-2\pi i(z_s,x)}$, то ліва частина перетвориться в нуль, тому

$$e^{-2\pi i r(z_s,x)}=\sigma_1 e^{-2\pi i(r-1)(z_s,x)}-\sigma_2 e^{-2\pi i(r-2)(z_s,x)}+\ldots+(-1)^{r-1}\sigma_r.$$

Домноживши обидві частини останньої рівності на $\exp[-2\pi i(m-r)(z_s,x)]$ і просумувавши відносно s, одержимо рекурентну формулу (8.17). Теорема доведена.

Функції $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ можна виразити через компоненти вектор-функції $h(x)$ і одержати рекурентну формулу для компонент полінома $P_k(x)$. Наприклад, для системи типу A_1 одержимо рекурентну формулу $P_k(x) = xP_{k-1}(x) - P_{k-2}(x)$, $k \geq 2$, а для системи типу A_2 – формулу $P_k(z) = zP_{k-1}(z) - \bar{z}P_{k-2}(z) + P_{k-3}(z)$, $k \geq 3$.

Для кожного кореня α даної системи та цілого q розглянемо гіперплощину $L_{\alpha,q} = \{x \in E|\ (\alpha, x) = q\}$. Тоді дзеркальне відбиття відносно гіперплощини $L_{\alpha,q}$ має вигляд

$$S_{\alpha,q}(x) = x - 2\frac{(\alpha, x) - q}{(\alpha, \alpha)}\alpha = S_\alpha(x) + \frac{2q}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Підставляючи $q = 0$, одержимо $S_{\alpha,0}(x) = S_\alpha(x)$.

Відбиття $S_{\alpha,q}$ породжують нескінченну групу $\overline{W}$, яка називається афінною групою Вейля системи коренів. Камера Вейля Φ є фундаментальною областю афінної групи Вейля $\overline{W}$, тобто для кожного $x \in \mathbb{E}$ існує елемент $\overline{S} \in \overline{W}$ такий, що $\overline{S}(x) \in \Phi$.

Узагальнені косинуси будуть інваріантними відносно відбиттів $S_{\alpha,q}$, тобто $h(S_{\alpha,q}(x)) = h(x)$.

Лінійне відображення $x \to kx$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, трансформує камеру Φ у відкритий симплекс $\overline{\Phi}$, що визначається нерівностями $(\alpha_j, x) > 0$, $1 \leq j \leq n$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – базис системи коренів, а також нерівністю $(\bar{\alpha}, x) < k$, де $\bar{\alpha}$ – максимальний корінь. Гіперплощини $L_{\alpha,q}$ розбивають симплекс $\overline{\Phi}$ на симплекси Φ_j, $1 \leq j \leq k^n$, конгруентні симплексу Φ. Для кожного симплекса Φ_j існує елемент $\overline{S}_j \in \overline{W}$ такий, що $\overline{S}_j(\Phi_j) = \Phi$. Відображення $\overline{S}_j$ лінійне як суперпозиція скінченного числа відбиттів $S_{\alpha,q}$. Тому якщо $kx \in \Phi_j$, то $h(kx) = h(\overline{S}_j(kx))$, отже, $P_k(h(x)) = h(\overline{S}_j(kx))$ і для $x \in \Phi$ маємо

$$h^{-1}(P_k(h(x))) = \overline{S}_j(kx), \quad 1 \leq j \leq k^n. \tag{8.18}$$

Таким чином, ми приходимо до такого твердження.

Теорема 8.5. *Відображення $x \to P_k(x)$, $k \geq 1$, еквівалентне кусково-лінійному відображенню.*

Очевидно, що кусково-лінійне відображення є неперервним.

Нерухомі точки відображення $x \to P_k(x)$ знайдемо із рівняння $P_k(x) = x$.

Зробимо заміну $x = h(y)$, де $y \in \Phi$, тоді $P_k(h(y)) = h(y)$, або $h^{-1}(P_k(h(y))) = y$. Згідно з (8.18) одержимо

$$\overline{S}_j(ky) = y, \ \ 1 \leq j \leq k^n. \tag{8.19}$$

Рівняння (8.19) при фіксованому j має єдиний розв'язок, тому рівняння $P_k(x) = x$ має k^n розв'язків.

Розглянемо циклічну перестановку

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{pmatrix},$$

де $1 \leq \tau_j \leq n, 1 \leq j \leq n$.

Тоді знаходження нерухомих точок відображення $x \to P_k(x)$ у випадку системи типу C_n зводиться до розв'язування системи

$$\cos 2k\pi x_j = \cos 2\pi x_{\tau_j}, 1 \leq j \leq n,$$

або системи

$$kx_j = \pm x_{\tau_j} mod\, 1, 1 \leq j \leq n. \tag{8.20}$$

У випадку системи типу B_n одержимо систему

$$\cos k\pi x_j = \cos \pi x_{\tau_j}, 1 \leq j \leq n,$$

або

$$kx_j = \pm x_{\tau_j} mod\, 2, 1 \leq j \leq n. \tag{8.21}$$

У випадку системи типу A_n розглянемо циклічну перестановку

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{pmatrix},$$

де $0 \leq \tau_j \leq n, 0 \leq j \leq n$, тоді одержимо систему

$$\exp(-2k\pi i x_j) = \exp(-2\pi i x_{\tau_j}), \quad 0 \leq j \leq n,$$

або

$$kx_j = x_{\tau_j} mod\, 1, \quad 0 \leq j \leq n. \tag{8.22}$$

Розв'язки рівняння $P_k(z) = z$ у випадку систем типу C_n, B_n та A_n мають вигляд $z = h(x)$, де x – розв'язок системи (8.20), (8.21) або (8.22). У кожному випадку рівняння $P_k(z) = z$ має k^n розв'язків і всі вони належать замиканню множини $F = h(\Phi)$.

Аналогічно можна знайти цикли відображення $x \to P_k(x)$. Їх зчисленне число і всі вони належать замиканню множини F.

Розглянемо крайову задачу для гіперболічної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$u_t + u_x = 0, \quad v_t - v_x = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, +\infty), \tag{8.23}$$

$$u(0, t) = v(0, t), \quad v(1, t) = P_k(u(1, t)), \quad t \in [0, +\infty), \tag{8.24}$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad v(x, 0) = \varphi_2(x) \quad x \in [0, 1], \tag{8.25}$$

де $u \in R^n$, $v \in R^n$.

Якщо аналогічно [141] застосувати до такої системи метод характеристик, то розв'язок крайової задачі (8.23), (8.24), (8.25) набуде вигляду

$$u(t, x) = y(t - x), \quad v(t, x) = y(t + x), \quad x \in [0, 1], t \in [0, +\infty),$$

де $y(t)$ – розв'язок різницевого рівняння

$$y(t + 2) = P_k(y(t)), \quad t \in [-1, +\infty) \tag{8.26}$$

з початковою умовою

$$y(t) = \begin{cases} \varphi_1(-t), & t \in [-1, 0), \\ \varphi_2(t), & t \in [0, 1). \end{cases}$$

Рівняння (8.26) є різницевим рівнянням з неперервним часом. Для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків рівняння (8.26) можна використати результати дослідження різницевого рівняння $x_{m+1} = P_k(x_m)$. Звідси можна зробити висновок про хаотичну поведінку розв'язків крайової задачі (8.23), (8.24), (8.25).

Як приклад дамо більш просте означення поліномів Чебишова систем типу A_2, B_2, G_2.

Спочатку побудуємо поліноми Чебишова для системи типу A_2. Позначимо

$$x_1 = \exp(t), \quad x_2 = \exp(\zeta t), \quad x_3 = \exp\left(\zeta^2 t\right),$$

де $\zeta = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Розглянемо функції $f(t)$ та $g(t)$, що збігаються з елементарними симетричними многочленами від трьох змінних $f(t) = \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $g(t) = \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. Виражаючи за формулами Ньютона степеневі суми через елементарні симетричні многочлени, одержимо вирази для $f(nt)$ та $g(nt)$ через $f(t)$ та $g(t)$. Узагальненими поліномами Чебишова від двох змінних будемо називати відображення, що задовольняють співвідношення

$$P_n(f(t), g(t)) = (f(nt), g(nt)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0.$$

Незалежні змінні можна вважати комплексно спряженими і розглядати поліноми

$$P_0(z, \overline{z}) = 3,\ P_1(z, \overline{z}) = z,\ P_2(z, \overline{z}) = z^2 - 2\overline{z},\ P_3(z, \bar{z}) = z^3 - 3z\overline{z} + 3, \ldots,$$

що залежать від z та $\overline{z}$. Інваріантна множина таких відображень обмежена замкненою кривою $\{z \in \mathbb{C} \,|\, z = 2\exp(iu) + \exp(-2iu),\ u \in \mathbb{R}\}$.

Поліноми P_n для системи типу B_2 визначаються по аналогії з поліномами P_n для системи типу A_2 за допомогою функцій $f(t) = \sigma_1$, $g(t) = \sigma_2 - 2$, де σ_1, σ_2 – елементарні симетричні многочлени від чотирьох змінних $x_1 =$

$\exp(t)$, $x_2 = \exp(-t)$, $x_3 = \exp(it)$, $x_4 = \exp(-it)$. Із формул Ньютона можна одержати вирази для функцій $f(nt)$ та $g(nt)$ через $f(t)$ та $g(t)$, що дозволить знайти відображення P_n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Поліноми P_n для системи типу G_2 визначаються по аналогії з поліномами P_n для системи типу A_2 за допомогою функцій $f(t) = \sigma_1$, $g(t) = \sigma_2 - f(t) - 3$, де σ_1, σ_2 – елементарні симетричні многочлени від шести змінних

$$x_k = \exp\left(\zeta^{k-1}t\right), \quad 1 \leq k \leq 6, \quad \zeta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

8.3. Диференціальні рівняння для узагальнених поліномів Чебишова

Розглянемо комплексну просту алгебру Лі, а також групу Вейля, що породжена відбиттями S_α деякого евклідового простору E, $S_\alpha(x) = x - 2(x,\alpha)\alpha/(\alpha,\alpha)$, $x \in E$. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – базис системи коренів. Група Вейля W, що породжена відбиттями $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, ..., S_{\alpha_n}$, скінченна. Позначимо через Ω_j орбіту фундаментальної ваги w_j під дією групи W.

Незвідними групами Вейля є тільки групи, породжені системами коренів типу A_n, $n \geq 1$, B_n, $n \geq 2$, C_n, $n \geq 3$, D_n, $n \geq 4$, E_6, E_7, E_8, F_4 та G_2 [113].

Розглянемо камеру Вейля Φ, тобто множину $x \in E$ таких, що $(\alpha_j, x) > 0$, $1 \leq j \leq n$, причому $(\bar{\alpha}, x) < 1$, де $\bar{\alpha}$ – максимальний корінь. Множина Φ утворює відкритий симплекс.

Побудуємо функції

$$y_j(x) = \sum_{r \in \Omega_j} \exp(-2\pi i(x,r)), \quad 1 \leq j \leq n,$$

і розглянемо узагальнений косинус $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $h(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$. Функція $h(x)$ взаємно однозначно відображає камеру Вейля Φ на її образ F. Для цілого $k \geq 0$ будемо називати узагальненим поліномом Чебишова поліноміальну функцію $P_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, що задовольняє співвідношення $P_k(h(x)) = h(kx)$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Ця конструкція була запропонована в [21, 22, 160, 172]. Поліноми Чебишова є ортогональними в області F [160]. Такі відображення мають унікальні динамічні властивості. Вони мають абсолютно неперервну інваріантну міру [160, 172], еквівалентні кусково лінійним і мають зліченне число циклів [38].

Компоненти поліномів P_k задовольняють лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = \lambda P, \tag{8.27}$$

де $a_{ij} = a_{ji}$, a_{ij} та b_i – поліноми відносно x, λ – спектральний параметр.

У цьому підрозділі розглянуто загальний випадок систем типу A_n, B_n, C_n, D_n.

Для системи типу A_n розглянемо допоміжні поліноми $T_k : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ з компонентами $T_k^{(i)}(x) = \sigma_i(u_1^k, ..., u_{n+1}^k)$, де $x = (x_1, ..., x_{n+1})$, $u = (u_1, ..., u_{n+1})$, σ_i — i-та елементарна симетрична функція, $x_i = \sigma_i(u)$. Тоді $P_k(x_1, ..., x_n) = T_k(x_1, ..., x_n, 1)$.

Теорема 8.6. *Для системи типу A_n компоненти поліномів $T_k(x)$ задовольняють диференціальні рівняння*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n+1} b_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \lambda T, \tag{8.28}$$

де $b_i = ix_i$, $a_{ij} = ix_ix_j - \sum_{k=1}^{i}(j-i+2k)x_{i-k}x_{j+k}, 1 \leq i \leq j \leq n+1$, $x_0 = 1$. *При* $i > n+1$ *вважаємо* $x_i = 0$.

Доведення. Компоненти поліномів $T_k(\sigma_1(u), ..., \sigma_{n+1}(u))$ задовольняють диференціальні рівняння

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_i^2 \frac{\partial^2 T}{\partial u_i^2} + \sum_{i=1}^{n+1} u_i \frac{\partial T}{\partial u_i} - \lambda T = 0. \tag{8.29}$$

Зробивши в рівнянні (8.29) заміну $x_i = \sigma_i(u)$, одержимо рівняння (8.28), де

$$b_i = \sum_{j=1}^{n+1} u_j^2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_j^2} + \sum_{j=1}^{n+1} u_j \frac{\partial x_i}{\partial u_j}, \quad a_{ij} = \sum_{m=1}^{n+1} u_m^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_m} \frac{\partial x_j}{\partial u_m}.$$

Використаємо рівності

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k x_{i-k-1} u_j^k, \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_j^2} = 0, \tag{8.30}$$

де $x_0 = 1$. Тоді, враховуючи формулу Ньютона [70, с. 331], одержимо

$$b_i = \sum_{j=1}^{n+1} u_j \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k x_{i-k-1} u_j^k = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k x_{i-k-1} \sum_{j=1}^{n+1} u_j^{k+1} = i x_i.$$

Використовуючи, що $\partial x_i / \partial u_m = x_{i-1} - u_m \partial x_{i-1} / \partial u_m$, одержимо рекурентну формулу для a_{ij}

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{n+1} u_m \frac{\partial x_i}{\partial u_m} \left(x_j - \frac{\partial x_{j+1}}{\partial u_m} \right) = x_j \sum_{m=1}^{n+1} u_m \frac{\partial x_i}{\partial u_m} - \sum_{m=1}^{n+1} u_m \frac{\partial x_i}{\partial u_m} \frac{\partial x_{j+1}}{\partial u_m} =$$

$$= i x_i x_j - \sum_{m=1}^{n+1} u_m \left(x_{i-1} - u_m \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_m} \right) \frac{\partial x_{j+1}}{\partial u_m} = i x_i x_j - x_{i-1} \sum_{m=1}^{n+1} u_m \frac{\partial x_{j+1}}{\partial u_m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n+1} u_m^2 \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_m} \frac{\partial x_{j+1}}{\partial u_m} = i x_i x_j - (j+1) x_{i-1} x_{j+1} + a_{i-1,j+1}.$$

Звідси знаходимо значення коефіцієнтів a_{ij}.

Теорему доведено.

Для системи типу C_n компоненти узагальнених косинусів мають вигляд $y_i(x) = 2^i \sigma_i(\cos 2\pi x_1, ..., \cos 2\pi x_n)$, $i = 1, ..., n$, їм відповідають поліноми $P_k(x)$. Розглянемо функції $z_i(x) = \sigma_i($

$cos x_1, ..., \cos x_n)$, $h(x) = (z_1(x), ..., z_n(x))$ і визначимо поліноми $T_k(x)$ рівністю

$T_k(h(x)) = h(kx)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Тоді між компонентами $P_k^{(i)}(x)$ та $T_k^{(i)}(x)$ поліномів $P_k(x)$ та $T_k(x)$ існує відповідність $2^i T_k^{(i)}(x) = P_k^{(i)}(2x_1, ..., 2^n x_n)$.

Теорема 8.7. *Для системи типу C_n компоненти поліномів $T_k(x)$ задовольняють диференціальні рівняння (8.27), де $b_i = ix_i$, $a_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \tilde{a}_{i-1,j-1} + (i+j-n-2)x_{i-1}x_{j-1}$, $\tilde{a}_{ij} = ix_ix_j - \sum\limits_{k=1}^{i}(j-i+2k)x_{i-k}x_{j+k}, 1 \le i \le j \le n$, $x_0 = 1$. При $i > n$ вважаємо $x_i = 0$.*

Доведення. Функції $T_k^{(i)}(h(v)) = \sigma_i(\cos kv_1, ..., \cos kv_n)$ задовольняють рівняння

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial v_i^2} - \lambda T = 0. \tag{8.31}$$

Зробивши в рівнянні (8.31) заміну $x_i = z_i(v)$, $v \in \Phi$, одержимо рівняння (8.27), де

$$b_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial v_j^2}, \quad a_{ij} = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial v_m} \frac{\partial x_j}{\partial v_m}. \tag{8.32}$$

Використаємо рівності (8.30) та тотожності

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial v_j^2} = -u_j \frac{\partial x_i}{\partial u_j}, \quad u_j = \cos v_j, \quad x_0 = 1.$$

Тоді, враховуючи формулу Ньютона, одержимо

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k x_{i-k-1} u_j^k = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k x_{i-k-1} \sum_{j=1}^{n} u_j^{k+1} = ix_i.$$

Перетворимо коефіцієнти a_{ij} до вигляду

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_m} \frac{\partial x_j}{\partial u_m} \left(u_m^2 - 1\right) = \sum_{m=1}^{n} u_m^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_m} \frac{\partial x_j}{\partial u_m} - \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_m} \frac{\partial x_j}{\partial u_m}.$$

Аналогічно доведенню теореми 1 одержуємо

$$\sum_{m=1}^{n} u_m^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_m} \frac{\partial x_j}{\partial u_m} = \tilde{a}_{ij} = ix_ix_j - \sum_{k=1}^{i} (j-i+2k) x_{i-k} x_{j+k}.$$

Для знаходження іншої суми використаємо вирази для $\partial x_i/\partial u_j$. Тоді

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_m}\frac{\partial x_j}{\partial u_m}=\sum_{m=1}^{n}\left(x_{i-1}-u_m\frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_m}\right)\left(x_{j-1}-u_m\frac{\partial x_{j-1}}{\partial u_m}\right)=$$

$$=\tilde{a}_{i-1,j-1}+nx_{i-1}x_{j-1}-x_{i-1}\sum_{m=1}^{n}u_m\frac{\partial x_{j-1}}{\partial u_m}-x_{j-1}\sum_{m=1}^{n}u_m\frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_m}=$$

$$=\tilde{a}_{i-1,j-1}+(n+2-i-j)x_{i-1}x_{j-1}.$$

Звідси знаходимо значення коефіцієнтів $a_{ij}=\tilde{a}_{ij}-\tilde{a}_{i-1,j-1}+(i+j-n-2)x_{i-1}x_{j-1}$, $1\le i\le j\le n$.

Теорему доведено.

Для системи типу B_n аналогічно системі типу C_n можна побудувати допоміжні поліноми $T_k(x)$, що визначаються через узагальнені косинуси $h(x)=(z_1(x),...,z_n(x))$, де $z_i(x)=\sigma_i(\cos x_1,...,\cos x_n)$, $1\le i\le n-1$, $z_n(x)=\cos(x_1/2)...\cos(x_n/2)$.

Теорема 8.8. *Для системи типу B_n компоненти поліномів $T_k(x)$ задовольняють диференціальні рівняння (8.27), де $b_i=ix_i$, $a_{ij}=\tilde{a}_{ij}-\tilde{a}_{i-1,j-1}+(i+j-n-2)x_{i-1}x_{j-1}$, $\tilde{a}_{ij}=ix_ix_j-\sum_{k=1}^{i}(j-i+2k)x_{i-k}\tilde{x}_{j+k}$, $\tilde{x}_i=x_i$, $1\le i\le j\le n-1$; $\tilde{x}_n=2^nx_n^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_i-1$, $b_n=nx_n/4$, $a_{kn}=kx_kx_n/2+(k-n-1)x_{k-1}x_n/2$, $1\le k\le n-1$, $a_{nn}=nx_n^2/4-(n+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i)/2^{n+1}$, $x_0=1$. При $i>n$ вважаємо $\tilde{x}_i=0$.*

Доведення. Функції $T_k^{(i)}(h(v))=\sigma_i(\cos kv_1,...,\cos kv_n)$, $1\le i\le n-1$, та $T_k^{(n)}(h(v))=\cos(kv_1/2)...\cos(kv_n/2)$ задовольняють рівняння (8.31). Зробивши в рівнянні (8.31) заміну $x_i=z_i(v)$, $v\in\Phi$, одержимо рівняння (8.27), де b_i та a_{ij} визначаються із (8.32). Тому коефіцієнти b_i та a_{ij} при $1\le i\le j\le n-1$ збігаються з відповідними коефіцієнтами для системи типу C_n, якщо замінити x_n на $\tilde{x}_n=\cos v_1...\cos v_n=2^nx_n^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_i-1$. Аналогічно знаходимо решту коефіцієнтів:

$$b_n = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{v_1}{2}...\cos\frac{v_n}{2} = nx_n/4, \quad a_{kn} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j x_{k-j-1}u_i^j \sin v_i \times$$

$$\times \sin\frac{v_i}{2}x_n/\cos\frac{v_i}{2} = -\frac{1}{2}x_n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j x_{k-j-1}u_i^j(1-u_i) =$$

$$= \frac{1}{2}x_n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j x_{k-j-1}u_i^{j+1} - \frac{1}{2}x_n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j x_{k-j-1}u_i^j =$$

$$= \frac{1}{2}x_n\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j x_{k-j-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^{j+1} - \frac{1}{2}x_n\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j x_{k-j-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^j = \frac{k}{2}x_k x_n +$$

$$+\frac{k-n-1}{2}x_{k-1}x_n, \quad k \le n-1, \quad a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_n}{\partial v_i}\frac{\partial x_n}{\partial v_i} =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_n}{\cos(v_i/2)}\right)^2\left(1-\cos^2\frac{v_i}{2}\right) = \frac{n}{4}x_n^2 - \frac{1}{4}\sigma_{n-1}\left(\cos^2\frac{v_1}{2}, ..., \cos^2\frac{v_n}{2}\right) =$$

$$= \frac{n}{4}x_n^2 - \left(n + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)/2^{n+1}.$$

Теорему доведено.

Нехай $h(x) = (z_1(x), ..., z_n(x))$, де $z_i(x) = \sigma_i(\cos x_1, ..., \cos x_n)$, $1 \le i \le n-2$, $z_{n-1}(x) = \cos(x_1/2)...\cos(x_n/2) + \sin(x_1/2)...\sin(x_n/2)$, $z_n(x) = \cos(x_1/2)...\cos(x_n/2) - \sin(x_1/2)...\sin(x_n/2)$. Визначимо за допомогою узагальненого косинуса $h(x)$ поліноми $T_k(x)$ для системи типу D_n.

Теорема 8.9. *Для системи типу D_n компоненти поліномів $T_k(x)$ задовольняють диференціальні рівняння (8.27), де $b_i = ix_i$, $a_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \tilde{a}_{i-1,j-1} + (i+j-n-2)x_{i-1}x_{j-1}$, $\tilde{a}_{ij} = ix_ix_j - \sum_{k=1}^{i}(j-i+2k)x_{i-k}\tilde{x}_{j+k}$, $\tilde{x}_i = x_i, 1 \le i \le j \le n-2$; $b_{n-1} = nx_{n-1}/4$, $b_n = nx_n/4$, $a_{k,n-1} = kx_kx_{n-1}/2 + (k-n-1)x_{k-1}x_n/2$, $a_{kn} = kx_kx_n/2 + (k-n-1)x_{k-1}x_{n-1}/2$, $1 \le k \le n-2$, $x_0 = 1$. При n парному $\tilde{x}_{n-1} = 2^{n-1}x_{n-1}x_n - x_1 - x_3 - ... - x_{n-3}$,*

$\tilde{x}_n = 2^{n-2}(x_{n-1}^2 + x_n^2) - 1 - x_2 - ... - x_{n-2}$, $a_{n-1,n-1} = nx_{n-1}^2/4 - (n + (n-2)x_2 + ... + 2x_{n-2})/2^n$, $a_{nn} = nx_n^2/4 - (n + (n-2)x_2 + ... + 2x_{n-2})/2^n$, $a_{n-1,n} = (n-2)x_{n-1}x_n/4 - ((n-2)x_1 + (n-4)x_3 + ... + 2x_{n-3})/2^n$. *При* n *непарному* $\tilde{x}_{n-1} = 2^{n-2}(x_{n-1}^2 + x_n^2) - 1 - x_2 - ... - x_{n-3}$, $\tilde{x}_n = 2^{n-1}x_{n-1}x_n - x_1 - x_3 - ... - x_{n-2}$, $a_{n-1,n-1} = (n-1)x_{n-1}^2/4 - x_n^2/4 - ((n-1) + (n-3)x_2 + ... + 2x_{n-3})/2^n$, $a_{nn} = (n-1)x_n^2/4 - x_{n-1}^2/4 - ((n-1) + (n-3)x_2 + ... + 2x_{n-3})/2^n$, $a_{n-1,n} = nx_{n-1}x_n/4 - ((n-1)x_1 + (n-3)x_3 + ... + 2x_{n-2})/2^n$. *При* $i > n$ *вважаємо* $\tilde{x}_i = 0$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 8.8.

8.4. Висновки

Розділ 8 присвячено дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. У підрозділі 8.1 крайові задачі для гіперболічних систем диференціальних рівнянь зводяться до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь.

2. У підрозділі 8.2, використовуючи групу Вейля, дано означення узагальнених поліномів Чебишова багатьох змінних. Для побудови цих поліномів одержана рекурентна формула. Доведено, що поліноміальні відображення еквівалентні кусково-лінійним і мають зліченне число циклів.

3. У підрозділі 8.3 досліджено узагальнені поліноми Чебишова, побудовані за допомогою групи Вейля системи коренів і за схемами Динкіна типу A_n, B_n, C_n, D_n. Показано, що узагальнені поліноми Чебишова задовольняють диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку методу інтегральних многовидів для дослідження регулярно та сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь.

Автором вперше одержано такі результати:

1. Для диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, імпульсних диференціально-функціональних рівнянь та різницевих рівнянь доведено існування інтегральних многовидів та досліджено їх властивості.

2. Для вказаних рівнянь доведено принцип зведення для дослідження стійкості розв'язків у критичному випадку, згідно з яким стійкість нульового розв'язку рівняння рівносильна стійкості нульового розв'язку рівняння на многовиді.

3. Запропоновано метод побудови функції, що задає центральний многовид, який полягає у знаходженні асимптотичного розкладу в степеневий ряд за координатами.

4. Обґрунтовано алгоритм дослідження стійкості нульового розв'язку у критичному випадку, який включає в себе наближену побудову рівняння на многовиді; для дослідження стійкості розв'язку лінійного рівняння на многовиді запропоновано метод усереднення, а для нелінійного рівняння на многовиді – метод нормальних форм.

5. Доведена динамічна еквівалентність системи диференціально-

функціональних рівнянь та деякої більш простої системи рівнянь.

6. Побудована заміна, яка розщеплює систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу на два незалежних рівняння; така ж заміна побудована для лінійних сингулярно збурених систем нейтрального типу та лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням.

7. Розв'язана задача квазіоптимальної стабілізації лінійної керованої сингулярно збуреної системи із запізненням.

8. Для сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь одержано зображення інтегрального многовиду, досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги та субфуркація періодичних розв'язків.

9. Показано, що при певних припущеннях на праву частину сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь з періодичними коефіцієнтами відображення Пуанкаре має трансверсальну гомоклінічну точку.

10. Метод усереднення застосовано до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням.

11. Досліджено поліноміальні і раціональні відображення, еквівалентні кусково-лінійним і такі, що мають інваріантну міру.

12. Доведено існування інтегральних многовидів для нелінійної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджено біфуркацію стану рівноваги.

13. Доведено існування інтегральних многовидів сингулярно збуреної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджено біфуркацію інваріантного тора із стану рівноваги.

14. Доведено існування зліченного числа періодичних розв'язків гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою, вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега - де Фріза з перетвореним аргументом.

15. Досліджено біфуркацію циклів автономних параболічних систем з малою дифузією, одержано умови існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння. Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією, досліджено стійкість біжучих хвиль для таких систем.

16. Крайові задачі для гіперболічних систем диференціальних рівнянь першого порядку зводяться до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь.

17. Використовуючи групу Вейля, дано означення узагальнених поліномів Чебишова багатьох змінних. Для побудови цих поліномів одержана рекурентна формула. Доведено, що поліноміальні відображення еквівалентні кусково-лінійним і мають зліченне число циклів. Показано, що узагальнені поліноми Чебишова задовольняють диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Аврамов К.В.* Седло-узловые бифуркации параметрических колебаний гибких стержней с тремя положениями статического равновесия // Доп. НАН України. – 2003. – № 4. – С. 37 – 40.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.

3. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием. – М.: Наука, 1992. – 336 с.

4. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.

5. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1989. – 447 с.

6. *Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые физические принципы оптической обработки информации. – М.: Наука, 1990. – С. 263 – 325.

7. *Бакай А.С., Степановский Ю.П.* Адиабатические инварианты. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.

8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967. – 300 с.

9. *Белан Е.П., Лыкова О.Б.* Теорема о центральном многообразии нелинейного параболического уравнения // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1021 – 1036.

10. *Белан Е.П., Самойленко А.М.* Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 21 – 43.

11. *Бибиков Ю.Н.* Бифуркация типа Хопфа для квазипериодических движений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 9. – С. 1539 – 1544.

12. *Бибиков Ю.Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991. – 144 с.

13. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Львов: Изд-во АН УССР, 1945. – 137 с.

14. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Тр. междунар. симп. по нелинейным колебаниям. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – **1**. – С. 93 – 154.

15. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.

16. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1969. – 248 с.

17. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.

18. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.

19. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.

20. *Вебер В.А.* Об устойчивости в критическом случае нескольких пар чисто мнимых корней для систем с последействием // Дифференц. уравнения. – 1969. – **5**, № 9. – С. 1614 – 1625.

21. *Веселов А.П.* Интегрируемые отображения и алгебры Ли// Докл. АН СССР. – 1987. – **292**, № 6. – С. 1289 – 1291.

22. *Веселов А.П.* Интегрируемые отображения // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, вып.5. – С. 3 – 45.

23. *Гельфрейх В.Г., Лазуткин В.Ф.* Расщепление сепаратрис: теория возмущений, экспоненциальная малость // Успехи мат. наук. – 2001. – **56**, вып. 3. – С. 79 – 142.

24. *Гермаидзе В.Е.* Об асимптотической устойчивости систем с запаздывающим аргументом // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, вып. 4. – С. 149 – 156.

25. *Гольдштейн В.Г., Соболев В.А.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. – 154 с.

26. *Горяченко В.Д.* Методы теории устойчивости в динамике ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1976. – 263 с.

27. *Гулов Х.М., Перестюк Н.А.* Интегральные множества систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1613 – 1621.

28. *Далецкий Ю.Л. Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

29. *Долгий Ю.Ф., Захаров А.В.* Периодические колебания в консервативных системах с малым запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 10. – С. 1299 – 1309.

30. *Еременко А.Э.* О некоторых функциональних уравнениях, связанных

с итерацией рациональных функций // Алгебра и анализ. – 1989. – **1**, вып. 4. – С. 102 – 116.

31. *Задирака К.В.* О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 1. – С. 47 – 63.

32. *Каменский Г.А., Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 192 с.

33. *Кащенко С.А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1991. – **31**, № 3. – С. 467 – 473.

34. *Келли Дж.Л.* Общая топология.— М.: Наука, 1968.— 383 с.

35. *Кирьянен А.И.* Устойчивость систем с последействием и их приложения. – СПб: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 1994. – 240 с.

36. *Клевчук И.И.* Исследование разностных уравнений с полиномиальными правыми частями / Черновиц. ун-т. – Черновцы, 1992. – 20 с. – Библиогр.: 7 назв. – Деп. в УкрНИИНТИ 13.02.92, № 156.

37. *Клевчук І.І.* Дослідження різницевих рівнянь з раціональними правими частинами // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. пр. – К.: Ін-т математики НАН України, 1992. – С. 27 – 40.

38. *Клевчук І.І.* Узагальнені поліноми Чебишова та їх застосування // Системи еволюційних рівнянь з післядією: Зб. наук. пр. – К.: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 131 – 139.

39. *Клевчук І.І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із загаюванням // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1022 – 1028.

40. *Клевчук И.И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1999. –

35, № 4. – С. 464 – 472.

41. *Клевчук І.І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної параболічної системи з перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 46. Математика. – Чернівці: Рута, 1999. – С. 61 – 66.

42. *Клевчук И.И.* Бифуркация положения равновесия в системе нелинейных параболических уравнений с преобразованным аргументом // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1342 – 1351.

43. *Клевчук И.И.* Расщепление линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 4. – С. 490 – 500.

44. *Клевчук І.І.* Диференціальні рівняння для одного класу ортогональних многочленів багатьох змінних // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці: Рута, 2000. – С. 44 – 49.

45. *Клевчук І.І.* Розщеплення лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням // Вісник національного ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. № 411. – Львів, 2000. – С. 160 – 165.

46. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди та динамічна еквівалентність диференціально-функціональних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 55 – 59.

47. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа періодичних розв'язків у системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. Вип. 5. – Київ, 2001. – С. 67 – 72.

48. *Клевчук І.І.* Диференціальні рівняння для узагальнених поліномів Чебишова, побудованих за схемами Динкіна типу A_n, B_n, C_n, D_n // Доп. НАН України. – 2002. – № 1. – С. 32 – 36.

49. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди та принцип зведення для імпуль-

сних диференціально-функціональних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 52 – 56.

50. *Клевчук І.І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 563 – 567.

51. *Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 36 – 41.

52. *Клевчук І.І.* Зведення крайових задач до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 80 – 83.

53. *Клевчук І.І.* Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 56 – 59.

54. *Клевчук І.І.* Застосування методу усереднення до дослідження періодичних розв'язків та стійкості диференціально-різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 314-315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 85 – 90.

55. *Клевчук І.І.* Дослідження стійкості розв'язків різницевих рівнянь у критичному випадку // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 37 – 41.

56. *Клевчук І.І.* Застосування методу усереднення до дослідження стійкості диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 3. – С. 318 – 324.

57. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа циклів у гіперболічних си-

стемах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 71 – 78.

58. *Клевчук І.І., Пернай С.А., Черевко І.М.* Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь // Доп. НАН України. – 2012. – № 7. – С. 28 – 34.

59. *Клевчук И.И., Фодчук В.И.* О динамической эквивалентности дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа// Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 31 – 37.

60. *Клевчук И.И., Фодчук В.И.* Бифуркация особых точек дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 324 – 330.

61. *Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. – М.: Мир, 1982. – 192 с.

62. *Козякин В.С.* Субфуркация периодических колебаний // Докл. АН СССР. – 1977. – **232**, № 1. – С. 25 – 27.

63. *Колесов А.Ю.* Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией // Изв. РАН. Сер. матем. – 1995. – **59**, № 3. – С. 141 – 158.

64. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Обоснование алгоритма исследования устойчивости решений линейных почти периодических уравнений с последействием, коэффициенты которых близки к постоянным // Вестн. Ярослав. ун-та. – Ярославль, 1974 – Вып. 10. – С. 70 – 105.

65. *Колесов Ю.С., Швитра Д.И.* Автоколебания в системах с запаздыванием. – Вильнюс: Мокслас, 1979. – 147 с.

66. *Колмановский В.Б., Носов В.Г.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

67. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функцио-

нального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

68. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1959. – 212 с.

69. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. – 168 с.

70. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 430 с.

71. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

72. *Лыкова О.Б., Барис Я.С.* Приближенные интегральные многообразия. – К.: Наук. думка, 1993. – 315 с.

73. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.

74. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

75. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.

76. *Марданов И.Дж., Валеев К.Г.* Принцип сведения для разностных уравнений. – Баку: Элм, 1991. – 264 с.

77. *Мартынюк Д.И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 246 с.

78. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Моск. матем. об-ва. – 1963. – **12**. – С. 3 – 52.

79. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.

80. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.

81. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Периодические и квазиперио-

дические колебания систем с запаздыванием. – К.: Вища школа, 1979. – 247 с.

82. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью метода ускоренной сходимости // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 6. – С. 42 – 59.

83. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – К.: Наук. думка, 1985. – 216 с.

84. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И.* Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Укр. мат журн. – 1968. – **20**, № 6. – С. 791 – 801.

85. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 335 – 340.

86. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. – М.: Физматлит, 1995. – 336 с.

87. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. – М.: Физматлит, 2005. – 430 с.

88. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975. – 247 с.

89. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

90. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.

91. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975.

– 304 с.

92. *Ордынская З.П.* О поведении решений системы дифференциальных уравнений с запаздыванием вблизи интегрального многообразия // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 8. – С. 1447 – 1453.

93. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, № 5. – С. 605 – 618.

94. *Осипов Ю.С.* О стабилизации нелинейных управляемых систем с запаздыванием в критическом случае одного нулевого корня // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, № 7. – С. 908 – 922.

95. *Осипов Ю.С.* О принципе сведения в критических случаях устойчивости движения систем с запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 5. – С. 810 - 820.

96. *Пелюх Г.П., Шарковский А.Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. – К.: Наук. думка, 1974. – 119 с.

97. *Перестюк М.О., Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 94 – 104.

98. *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

99. *Прокопьев В.П., Шиманов С.Н.* Об устойчивости в критическом случае двойного нулевого корня для систем с последействием // Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 4. – С. 453 - 462.

100. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 392 с.

101. *Разгулин А.В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1993. – **33**, № 1. – С. 69 – 80.

102. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. – М.: Наука, 1988. – 108 с.

103. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 287 с.

104. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

105. *Самойленко А.М., Мартынюк Д.И., Перестюк Н.А.* Существование инвариантных торов систем разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 10. – С. 1904 - 1910.

106. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Выща школа, 1987. – 287 с.

107. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – К.: Наук. думка, 2004. – 475 с.

108. *Самойленко А.М., Полеся И.В.* Рождение инвариантных множеств в окрестности положения равновесия // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 8. – С. 1409 – 1415.

109. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Вища школа, 1976. – 180 с.

110. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.

111. *Самойленко А.М., Тимчишин О.Я., Прикарпатський А.К.* Геометричний аналіз Пуанкаре-Мельникова трансверсального розщеплення многовидів повільно збурених нелінійних динамічних систем. I // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1668 – 1681.

112. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 296 с.

113. *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли. – М.: Мир, 1969. – 375 с.

114. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 1. – С. 86 – 104.

115. *Слюсарчук В.Е.* Существенно неустойчивые решения разностных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 7. – С. 982 – 989.

116. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

117. *Стрыгин В.В., Соболев В.А., Горелова Н.Я., Фридман Э.М.* Интегральные многообразия сингулярно возмущенных систем и некоторые их применения // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 10. – С. 1723 – 1726.

118. *Ткаченко В.І.* Про експоненціальну дихотомію лінійних імпульсних майже періодичних систем // Укр. мат журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 136 – 142.

119. *Уиттекер Э., Ватсон Г.* Курс современного анализа. – М.: Физматгиз, 1963. – 616 с.

120. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. – 1983. – **141**, вып. 2. – С. 343 – 374.

121. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – К.: Наук. думка, 1981. – 296 с.

122. *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.

123. *Фодчук В.И.* Интегральные многообразия для нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. – 1970. – **6**, № 5. – С. 798 – 808.

124. *Фодчук В.И.* Теоремы существования и методы построения ограниченных решений и интегральных многообразий возмущенных дифференциально-

функциональных уравнений // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 279 – 289.

125. *Фодчук В.І., Бігун Я.Й., Клевчук І.І., Черевко І.М., Якімов І.В.* Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 210 с.

126. *Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений// Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 3. – С. 334 – 340.

127. *Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Расщепление линейных дифференциально-функциональных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 8. – С. 23 – 26.

128. *Фодчук В.И., Черевко И.М.* К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 6. – С. 725 – 731.

129. *Фридман Э.М.* Асимптотика интегральных многообразий и декомпозиция сингулярно возмущенных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 4. – С. 626 – 639.

130. *Халанай А.* Периодические и почти периодические решения некоторых сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Rev. Math. Pures at Appl. – 1963. – **8**, № 2. – P. 285 – 292.

131. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

132. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

133. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

134. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследо-

вании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – К.: Изд-во Киевского ун-та, 1997. – 236 с.

135. *Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А.* О близости решений линейных систем с запаздыванием и соответствующих им систем без запаздывания // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 11. – С. 1549 – 1552.

136. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

137. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.— Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.

138. *Черевко И.М.* Оценка фундаментальной матрицы сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений и некоторые ее применения// Дифференц. уравнения. – 1997. – **33**, № 2. – С. 281 – 283.

139. *Черникова О.С.* Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 5. – С. 601 – 607.

140. *Шарковский А.Н. и др.* Динамика одномерных отображений. – К.: Наук. думка, 1989. – 216 с.

141. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.

142. *Шиманов С.Н.* Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием // Сиб. мат. журн. – 1961. – **2**, № 3. – С. 467 – 480.

143. *Шиманов С.Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, № 1. – С. 102 – 116.

144. *Штокало И.З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. – К.: Изд-во АН УССР, 1960. – 78 с.

145. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

146. *Якобсон М.В.* Топологические и метрические свойства одномерных эндоморфизмов // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 866 – 869.

147. *Янушевский Р.Т.* Управление объектами с запаздыванием. – М.: Наука, 1978. – 416 с.

148. *Babram M.A., Hbid M.L., Arino O.* Approximation scheme of a center manifold for functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1997. – **213**, No. 2. – P. 554 – 572.

149. *Carr J.* Applications of centre manifold theory. – New York: Springer-Verlag, 1981. – 142 p.

150. *Chow S.N., Hale J.K.* Methods of bifurcation theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1982. – 515 p.

151. *Fenichel N.* Geometric singular perturbations theory for ordinary differential equations // J. Different. Equat. – 1979.— **31**, No 1. – P. 53 – 98.

152. *Foias C., Nicolaenko B., Sell G.R., Temam R.* Inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension. // J. Math. Pures Appl. – 1988. – **67**, No.3 – P. 197 – 226.

153. *Hale J.K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J. Different. Equat. – 1966. – **2**, No 1. – P. 57 – 73.

154. *Hale J.K.* Critical cases for neutral functional differential equations // J. Different. Equat. – 1971. – **10**, No 1. – P. 59 – 82.

155. *Hale J.K., Lunel Verduyn.* Introduction to functional differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1993. – 447 p.

156. *Hausrath A.* Stability in the critical case of purely imaginary roots for neutral functional differential equations // J. Different. Equat. – 1973. – **13**, No 2. – P. 329 – 357.

157. *Henry D.* Linear autonomous neutral functional differential equations //

J. Different. Equat. – 1974. – **15**, No 1. – P. 106 – 128.

158. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds // Lecture notes in mathematics. – 1977. – No 583. – 149 p.

159. *Hirsch M., Smale S., Devaney R.* Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. – Amsterdam: Academic Press. – 2013. – 418 p.

160. *Hoffman M.E., Withers W.D.* Generalized Chebyshev polynomials associated with affine Weyl groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1988. – **308**, No 1. – P. 91 – 104.

161. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in a system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // Nonlinear Boundary Value Problems. Vol. 9. – Donetsk, 1999. – P. 168 – 173.

162. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in singularly perturbed parabolic system with transformed argument // Нелинейные граничные задачи. Вып. 11. – Донецк, 2001. – С. 80 – 85.

163. *Knobloch H.W., Aulbach B.* Singular perturbations and integral manifolds // J. Math. Phys. Sci. – 1984. – **18**. – P. 415 – 424.

164. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 648 p.

165. *Palmer K.J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. – 1984. – **55**, No 2. – P. 225 – 256.

166. *Perello C.* Periodic solutions of differential equations with time lag containing a small parameter // J. Different. Equat. – 1968. – **4**, No 1. – P. 160 – 175.

167. *Ritt J.F.* Permutable rational functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1923. – **23**. – P. 399 – 448.

168. *Sakamoto K.* Invariant manifolds in singular perturbation problems for

ordinary differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1990. – 116 A, No.1-2. – P. 45 – 78.

169. *Schneider K.R.* On the application of integral manifolds to Hopf bifurcation // Math. Nachr. – 1980. – 37. – P. 313 – 323.

170. *Shen J.H.* Existence and uniqueness of solutions for impulsive functional differential equations on the PC space with applications// Acta. Sci. Nat. Uni. Norm. Hunan. – 1996. – **24**. – P. 285 – 291.

171. *Shen J.H., Yan J.* Razumikhin type stability theorems for impulsive functional differential equations// Nonlinear Analysis. – 1998. – **33**, No 5. – P. 519 – 531.

172. *Withers W.D.* Folding polynomials and their dynamics // Amer. Math. Monthly. – 1988. – No 5. – P. 399 – 413.

173. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1996. – 431 p.

174. *Фодчук В.И., Клевчук И.И., Черевко И.М.* Метод интегральных многообразий и бифуркация положения равновесия для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Респ.конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" , тез.докл. – Одесса, 1987. – С.120-121.

175. *Клевчук И.И.* Определение области устойчивости для линейных уравнений со многими запаздываниями // Регион.конф. "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения" , тез.докл. – Махачкала, 1988. – С.109.

176. *Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Метод интегральных многообразий для дифференциально-функциональных уравнений и его приложения // Всесоюз.конф. "Нелинейные проблемы диф.уравнений и мат.физики" , тез.докл. – Тернополь, 1989. – С.438-440.

177. *Клевчук И.И.* Некоторые применения интегральных многообразий си-

стем с последействием // Респ.конф. "Моделирование и исследование устойчивости процессов", тез.докл. – Киев, 1992. – С.68-69.

178. *Клевчук И.И.* Исследование разностных уравнений с полиномиальными правыми частями // Конф. "Нелинейные проблемы диф.уравнений и мат.физики-Вторые Боголюбовские чтения", тез.докл. – Киев, 1992. – С.69.

179. *Клевчук И.И.* Исследование разностных уравнений с рациональными правыми частями // Школа "Теория функций. Диф.уравнения в математическом моделировании", тез.докл. – Воронеж, 1993. – С.72.

180. *Клевчук И.И.* Бифуркация положения равновесия для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Респ.конф. "Моделирование и исследование устойчивости процессов", тез.докл. – Киев, 1993. – С.60.

181. *Клевчук І.І.* Біфуркація розв'язків сингулярно збурених систем із запізненням // Всеукр.конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь", тези доп. – Дрогобич, 1994. – С.64.

182. *Клевчук И.И.* Интегральные многообразия и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Респ.конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем", тез.докл. – Киев, 1994. – С.58-59.

183. *Клевчук І.І.* Комутуючі поліноми багатьох змінних та їх властивості // Міжнар.мат.конф., присвячена пам'яті Ганса Гана, тези доп. – Чернівці, 1994. – С.66.

184. *Клевчук І.І.* Дослідження комутуючих раціональних відображень та різницевих рівнянь // Респ.конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем", тез.докл. – Киев, 1995. – С.55.

185. *Клевчук І.І.* Застосування методу нормальних форм до дослідження інтегровних динамічних систем // Всеукр.конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", тези доп. – Чернівці, 1996. –

С.87.

186. *Клевчук І.І.* Дослідження однієї крайової задачі для гіперболічної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними // Респ.конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем", тез.докл. – Киев, 1996. – С.62.

187. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of autooscillations in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // Міжнар.конф. "Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань". – Київ, 1997. – С.85-86.

188. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of equilibrium point in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // Intern.conf. "Nonlinear partial differential equations". – Kiev, 1997. – P.98-99.

189. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in a system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // WIAS-Workshop "Singularly perturbed systems and applications". – Berlin, 1997. – P.9.

190. *Клевчук І.І.* Диференціальні рівняння для узагальнених поліномів Чебишова // Матеріали міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математики", Ч.1. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1998. – С.255-257.

191. *Клевчук И.И.* Расщепление линейных дифференциально-функциональных уравнений // Intern.conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 1999. – С.23.

192. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in singularly perturbed parabolic system with transformed argument // Intern.conf. "Nonlinear partial differential equations". – Lviv, 1999. – P.104.

193. *Клевчук И.И.* Интегральные множества и принцип сведения для импульсных дифференциально-функциональных уравнений // Тези доп. VIII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – Київ: НТУ (КПІ), 2000. – С.98.

194. *Клевчук И.И.* Устойчивость и бифуркация решений импульсных

дифференциально-функциональных уравнений // Тез. докл. V Крымской международ.мат.школы "МФЛ – 2000". – Симферополь, 2000. – С.91.

195. *Клевчук И.И.* О принципе сведения для импульсных дифференциально-функциональных уравнений // Тези доп. міжнар.наук.конф. "Диференціальні та інтегральні рівняння". – Одеса, 2000. – С.135.

196. *Клевчук И.И.* Гомоклинические точки для сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Intern.conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2001. – С.60.

197. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in nonlinear partial differential equations // Intern.conf. "Nonlinear partial differential equations". – Kiev, 2001. – P.63.

198. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди для диференціально-функціональних рівнянь з інтегральною умовою Ліпшиця // Міжнар.конф. "Диференціальні рівняння і нелінійні коливання". – Київ, 2001. – С.68-69.

199. *Клевчук І.І.* Стійкість системи слабко зв'язаних осциляторів із запізненням // Intern.conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2003. – С.63.

200. *Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь // Міжнар.конф. "Шості Боголюбовські читання". – Київ, 2003. – С.97.

201. *Клевчук І.І.* Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням // III Всеукраїнська наук.конф. "Нелінійні проблеми аналізу". – Івано-Франківськ, 2003. – С.48.

202. *Klevchuk I.I.* Reduction of boundary value problems to difference and differential difference equations // Intern. conf. "Nonlinear partial differential equations". – Donetsk, 2003. – P.104.

203. *Клевчук І.І.* Дослідження одновимірних відображень з абсолютно не-

перервною інваріантною мірою // Міжнар.конф., присвячена 125 річниці від дня народження Ганса Гана, тези доп. – Чернівці, 2004. – С.41.

204. *Клевчук И.И.* Применение критерия Мельникова для исследования сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // VII Крымская междунар.мат.школа "Метод Функций Ляпунова и его приложения". – Симферополь, 2004. – С.72.

205. *Клевчук І.І.* Квазіоптимальна стабілізація лінійних неавтономних сингулярно збурених систем із запізненням // Intern.conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2005. – C.59.

206. *Клевчук І.І.* Стійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку // Міжнародна конференція, присвяч. 60 - річчю кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь КНУ ім. Т.Шевченка. – Київ, 2005. – С.41.

207. *Клевчук І.І.* Застосування методу інтегральних многовидів до дослідження диференціально-функціональних рівнянь // Intern.conf. "Modern problems and new trends in probability theory". – Chernivtsi, 2005: Abstracts. – C.111.

208. *Клевчук І.І.* Зведення крайових задач до диференціально-різницевих рівнянь // 11 Міжнар.наук.конф. імені академіка М.Кравчука. – Київ, 2006. – С.453.

209. *Клевчук И.И.* Устойчивость решений одного класса линейных систем с запаздыванием // Восьмая Крымская Междунар.мат.школа "МФЛ-2006". – Симферополь, 2006. – С.79.

210. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of countable number of periodic solutions in singularly perturbed differential- difference equations// Intern. Conf. on Differential Equations. – Lviv, 2006. – P.106-107.

211. *Клевчук І.І.* Біфуркація періодичних розв'язків у сингулярно збуреній

системі диференціальних рівнянь із запізненням // Міжнар.конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Чернівці, 2006. – С.62.

212. *Клевчук І.І.* Дослідження періодичних розв'язків диференціально-різницевих рівнянь // Intern.conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2007. – С.51.

213. *Klevchuk I.I.* Stability of functional differential equations in critical cases // Lyapunov memorial conference. - Kharkiv, 2007. - P. 70-71.

214. *Клевчук І.І.* Дослідження стійкості розв'язків різницевих рівнянь у критичному випадку // Міжнар.мат.конф. ім.В.Я.Скоробогатька. - Дрогобич, 2007. - С.130.

215. *Клевчук І.І.* Біфуркація відображень Lozi // Міжнар.наук.конф. "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". – Мелітополь, 2008. – С.61.

216. *Клевчук И.И.* Устойчивость решений разностных уравнений в критическом случае // Девятая Крымская междунар.мат.школа "МФЛ – 2008". – Симферополь, 2008. – С.74.

217. *Клевчук І.І.* Узагальнені поліноми Чебишова та їх властивості // Міжнар.конф. до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди. – Чернівці, 2009. – С.72-73.

218. *Клевчук І.І.* Побудова області стійкості для лінійних диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями // Міжнар.наук.конф. "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури". – Чернівці, 2010. – С.77-79.

219. *Клевчук І.І.* Дослідження біфуркацій та еквівалентності одновимірних відображень // Intern.conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2011. – С.85.

220. *Клевчук І.І.* Дослідження одного класу різницевих рівнянь // Між-

нар.наук.конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Київ, 2011. – С.97.

221. *Клевчук І.І.* Застосування інтегральних многовидів систем із запізненням // Міжнар.конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Кам'янець-Подільський, 2012. – С.25.

222. *Клевчук І.І.* Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних рівнянь // Всеукр.наук.конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці". – Чернівці, 2012. – С.88.

223. *Klevchuk I.I.* Stability of differential difference equations in critical cases // Intern.conf. dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. – Lviv, 2012. – P.208.

224. *Клевчук І.І.* Дослідження стійкості розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку // Міжнар.наук.конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Ужгород, 2012. – С.43.

225. *Klevchuk I.I.* Application of asymptotic methods to regularly and singularly perturbed differential difference equations // Intern.conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2013. – С.34.

226. *Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь // Міжнар.конф. "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". – Севастополь, 2013. – С.114.

227. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними // Всеукр.наук.конф. "Нелінійні проблеми аналізу". – Івано-Франківськ, 2013. – С.35.

228. *Клевчук И.И.* Применение асимптотических методов к регулярно и сингулярно возмущенным дифференциально-разностным уравнениям // Ме-

ждунар.конф. "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация". – Минск, 2013. – С.153-156.

229. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа циклів гіперболічних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними // Міжнар.мат.конф. "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки". – Київ, 2014. – С.69.

230. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом // IV міжнародна ганська конференція. – Чернівці, 2014. – С.75-76.

231. *Клевчук І.І.* Біфуркація автоколивань параболічних систем із запізнюючим аргументом та малою дифузією // Intern.conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". Abstracts of conference reports. – Kyiv, 2015. – P.36.

232. *Клевчук І.І.* Біфуркація циклів параболічних систем із запізнюючим аргументом та малою дифузією // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге. Тези доповідей. – Чернівці, 2015. – С.53-54.

233. *Клевчук І.І.* Біфуркація циклів одного класу параболічних систем // Міжнар.наук.конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Ужгород, 2016. – С.77.

234. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of cycles of parabolic systems with small diffusion // Intern.conf. on differential equations ICL 110. – Lviv, 2016. – P.78.

235. *Клевчук І.І.* Біфуркація циклів параболічних систем із запізненням та малою дифузією // Міжнар.наук.конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування". – Чернівці, 2016. – С.55.

236. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди та розщеплення лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням // Буковинський математи-

чний журнал. – 2014. – **2**, № 4. – С. 70 – 73.

237. *Клевчук І.І.* Біфуркація циклів параболічних систем із запізненням та малою дифузією // Буковинський математичний журнал. – 2015. – **3**, № 2. – С. 48 – 52.

238. *Клевчук І.І.* Біфуркація циклів параболічних систем із малою дифузією // Буковинський математичний журнал. – 2015. – **3**, № 3-4. – С. 96 – 101.

239. *Клевчук І.І.* Біфуркація автоколивань параболічних систем із аргументом, що запізнюється, та малою дифузією // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 3. – С. 390 – 398.

240. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди і принцип зведення для диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, № 1-2. – С. 70 – 76.