УДК 539.3

Маслов Б.П., д.ф.-м.н., с.н.с.

Застосування квазілінійної моделі в'язкопружності для прогнозування повзучості неоднорідного геологічного середовища

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Maslov B.P., Dr. Sci., Phys.-Math.

Application of a quasi-linear visco-elastic model for the creep of a non-heterogeneous geological media prediction

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterov Str.,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Розглянуто задачу комп'ютерного моделювання фізико-механічних процесів у геологічних середовищах, властивості яких змінюються у часі. Запропоновано теоретичне обґрунтування підходів до методики побудови мікромеханічних геофізичних моделей пористого середовища з рідиною. Проведено аналіз сучасного стану проблеми побудови розрахункових нелінійних моделей багатофазних геологічних середовищ та зазначено необхідність застосування підходів нелінійної реології. Отримані раніше результати в межах пружній лінійній та нелінійній областях поведінки середовища узагальнено на випадок вязкопружної квазілінійної поведінки. Запропоновано методику ідентифікації параметрів повзучості та проникності багатофазного пористого середовища та алгоритмів прогнозування на основі розробленого чисельно-аналітичного моделювання ефективних фізико-механічних властивостей флюїдонасиченої гірської породи. Розглянуто варіанти випадкової або періодичної мікроструктури. Модель базується на використанні фундаментальних співвідношень механіки в'язкопружного суцільного середовища, інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа-Карсона із застосуванням відповідних чисельних алгоритмів.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність,багатофазне середовище.

The problem of computer modeling of physical and mechanical processes in geological environments whose properties change in time is considered. The theoretical substantiation of approaches to the method of constructing micromechanical geophysical models of a porous medium with a liquid is proposed. The analysis of the current state of the problem of construction of calculated nonlinear models of multiphase geological environments is carried out and the necessity of using nonlinear rheology approaches is indicated. The results obtained earlier within the elastic linear and nonlinear domains of the behavior of the medium are generalized to the case of visco-elastic quasilinear behavior. The method of identification of creep parameters and permeability of multiphase porous medium and forecasting algorithms is proposed on the basis of developed numerical-analytical modeling of effective physical and mechanical properties of fluid-saturated rocks. Considered variants of random or periodic microstructure. The model is based on the use of the fundamental relations of the mechanics of the viscoelastic continuous medium, integral Fourier transforms and Laplace-Carson using the corresponding numerical algorithms.

Ключові слова: nonlinear visco-elasticity, multiphase medium.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Комп'ютерне моделювання фізико-механічних процесів у геологічних середовищах, властивості яких змінюються у часі, являє собою актуальну задачу сучасної прикладної механіки [1, 2]. Необхідним є теоретичне обґрунтування підходів до методики побудови мікромеханічних геофізичних моделей пористого середовища з рідиною. Аналіз сучасного стану проблеми побудови розрахункових нелінійних моделей багатофазних геологічних середовищ [3, 4] свідчить про недостатню увагу до застосування саме нелінійної реології. Адже у зв'язку із розвитком обчислювальних методів механіки і математики виникають можливості дослідження складних геофізичних процесів. Слід зазначити, що постановка задачі в пружній лінійній та нелінійній областях запроваджена в роботах [2,4,5]. В той же час аналіз деформацій повзучості, руйнування, та, як результат, зміни параметрів проникності [4] потребує подальшої уваги. Одночасно існує необхідність розробки методик ідентифікації параметрів повзучості [6, 7] та проникності багатофазного пористого середовища та алгоритмів прогнозування на основі запропонованих теоретичних підходів. В статті пропонується новий підхід до чисельно-аналітичного моделювання ефективних фізико-механічних властивостей флюїдонасиченої гірської породи з урахуванням її випадкової або періодичної мікроструктури. Модель базується на використанні фундаментальних співвідношень механіки в'язкопружного суцільного середовища, інтегральних перетворень Фур'є (FT) та Лапласа-Карсона (LC) із застосуванням відповідних чисельних алгоритмів [1, 6].

1. Об'єкт дослідження. Постановка задачі

Зазвичай, критеріями при виділенні колекторів слугують коефіцієнти глинистості та пористості [3]. Оцінка тріщинуватості виконується за дпомогою акустичного каротажу, при інтерпретації якого відмічають значне затухання амплітуд і зростання інтервального часу пробігу на тріщинуватих ділянках [2]. Це свідчить про наявність в'язкої складової у загальній деформації середовища та вимагає застосування моделі в'язкопружної поведінки для аналізу фізико-механічних властивостей пористого середовища. Тому перспективним є застосування саме в'язкопружної моделі середовища із подальшим аналізом реакції складнопобудованої геологічної структури на збурення з різними частотами, та з використанням як акустичних, так і електромагнітних полів [1]. Постановка задачі в пружній моделі не надає можливості виявити саме частотну залежність поведінки пористого флюїдонасиченого середовища від частоти та форми збуджуючого імпульсу. Комплексний аналіз результатів досліджень акустичних властивостей в умовах змінних тисків надає можливість якісно визначити особливості структури пустотного простору порід. Як типову структуру для подальшого аналізу розглянемо теригенну породу, яка складається з глинистої в'язкопружної матриці, вкраплених в неї лінійно пружних зерен кварцу і кальциту, та яка містить різно-форматний тріщинно-поровий простір. Розглянемо надалі клас гірських порід з неперервною матричною фазою, в яку вміщено мінеральні включення та пори різного формату [2, 4]. Мінеральна матриця являє собою однорідний континуум, фізико-механічна поведінка якого описується відповідною в'язкопружною моделлю [6, 7]. Таким чином, у першому наближенні, вапняковистий пісковик в мезоскопічній шкалі розглядається як система матриця-включення. Глинисті мінерали утворюють матричну фазу, яка підкріплена зернами кальциту і кварцу. Одна або кілька фаз середовища можуть демонструвати нелінійну поведінку, що описується гіперпружними моделями типу Мурнагана (стисливі породи) або Муні-Рівліна (випадок нестисливості) [1]. В [4] визначено параметри цих моделей для теригенної породи, яка складається із глинистої в'язкопружної матриці, в яку вкраплені лінійно пружні зерна кварцу і кальциту. Використовуємо визначальні рівняння квазілінійної, у розумінні Работнова, в'язкопружності, а саме

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}^R(t) = (\boldsymbol{g} * d\boldsymbol{\sigma})(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{g}(t-t_1)\, d\boldsymbol{\sigma}(t_1), \\ &\boldsymbol{g} = \boldsymbol{J}(t)/\boldsymbol{J}(0), \\ &\boldsymbol{\sigma}^R = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{e}}, \ W = W(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $\boldsymbol{\sigma}^R(t)$ - модифіковані напруження Работнова, $\boldsymbol{J}(t)$ -тензорна функція повзучості, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t)$ - деформації повзучості, $\boldsymbol{x}$ - просторова координата, t - час. Енергія пружної деформації на одиницю об'єму матеріалу може бути подана розвиненням у ряд Тейлора в околі природного, ненапруженого стану [1]

$$W(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{2!} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \frac{1}{3!} C_{ijklmn} e_{ij} e_{kl} e_{mn} + \mathrm{K} \tag{2}$$

де $e_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ – компоненти лінійного тензора деформацій; C_{ijkl} – тензор констант лінійної пружності. Тензор пружних констант третього порядку C_{ijklmn} характеризує нелінійні властивості геологічного середовища. Симетричний тензор напружень Коші є градієнтом пружної енергії по відношенню до пружних деформацій

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = C_{ijkl} e_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijklmn} e_{kl} e_{mn} \tag{3}$$

Співвідношення (3) можна обернути, в результаті отримуємо вираз, корисний саме в задачах механіки повзучості, де напруження є заданими, а нелінійні деформації є результат моделювання

$$e_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} = J_{ijkl}\sigma_{kl} + \frac{1}{2}J_{ijklmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn}. \qquad (4)$$

Тут

$$U(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}J_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \frac{1}{3!}J_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} \qquad (5)$$

додаткова енергія деформації, що визначається перетворенням Лежандра від функції $W(\boldsymbol{e})$.

Тензор деформацій повзучості $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t)$ можна адитивно розкласти [7] на девіаторну частину $\boldsymbol{e}_d(\boldsymbol{x},t)$ і сферичну частину $\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x},t)$, які визначаємо, відповідно

$$\boldsymbol{e}_m = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{e})\boldsymbol{1}, \qquad \boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{e} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{e})\boldsymbol{1}. \qquad (9)$$

Тут $\boldsymbol{1}$ - одиничний тензор другого рангу, таким чином

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{e}_d(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x},t) \qquad (10)$$

У лінійній теорії в'язкопружності розв'язок задач може бути значно спрощено використанням принципу відповідності [1, 6].

2. Квазілінійна вязкопружність

Природною є спроба узагальнити цей принцип на задачі квазіліниної в'язко-пружності. У спрощених варіантах визначальних рівнянь нелінійної в'язкопружності використовується концепція модифікованих пружних напружень $\sigma^R(t) = \dfrac{\partial W}{\partial e}$. Функція $W(e)$ являє собою пружний потенціал. Для аналізу задач повзучості в рамках квазілінійної моделі в'язкопружності використовуємо модифікований принцип відповідності, відмінний від застосовуваного у лінійній теорії [6]. Залежність поточних напруг в'язкопружності $\sigma(t)$ від відповідних їм відновлених пружних (модифікованих) $\sigma^R(t)$ запишемо у формі

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t \boldsymbol{h}(t-s)\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x},s)ds \qquad (11)$$

де $\boldsymbol{h}(t)$, за аналогією з лінійної теорією, нормалізований тензор релаксації напруг четвертого порядку, $\boldsymbol{\sigma}(t)$ – тензор напружень Коші, $\boldsymbol{\sigma}^R(\boldsymbol{e},t)$ – спадкова функція миттєвої пружної деформації. Напруги $\boldsymbol{\sigma}^R(t)$ розглядаються як еквівалентні, модифіковані, пружні напруги, які визначаються через пружний потенціал $W(\boldsymbol{e})$.

3. Ітераційний розв'язок граничної задачі із заданими зусиллями

Звичайний підхід до аналізу нелінійної задачі – збурення відповідної линийної задачі [1, 2]. Задані поверхневі зусилля $\boldsymbol{t}_R$ визначено як функції $\boldsymbol{x}$ і t на границі $\partial\Omega$. Масові сили також задано як функції $\boldsymbol{x}$ і t. Тут припускаємо, що відлікова конфігурація є природним станом середовища, тоді можна записати

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{e}) = \sum_{s=1}^{\infty}\boldsymbol{\sigma}_{[s]}(\boldsymbol{e}), \qquad (12)$$

де $\boldsymbol{\sigma}_{[s]}(\boldsymbol{e})$- однорідний поліном ступеня s. Однорідність середовища тут не вводиться, таким чином, змінні $\boldsymbol{\sigma}$, і $\boldsymbol{e}$ можуть залежати від координати $\boldsymbol{x}$. Підставляючи розкладання (12) в рівняння рівноваги, отримуємо послідовність систем диференційних рівнянь і відповідних граничних умов. Розв'язок нелінійної теорії пружності другого порядку дається послідовністю

$$\boldsymbol{u}^{[2]}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}^{[1]}(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon^2\boldsymbol{u}_{[2]}(\boldsymbol{x},t) \qquad (13)$$

Тут $\boldsymbol{u}^{[1]}(\boldsymbol{x},t)$ - розв'язок задачі лінійної теорії пружності.

4. Ідентифікація параметрів. Приклади

Надалі використовуємо інтегральне представлення визначальних рівнянь в'язкопружності дробового порядку [6, 7], та застосовуємо принцип відповідності для трансформування в'язкопружної задачі дробового порядку в аналогічну квазіпружну. Для цього переходимо з області змінної часу t в область змінної z перетворення Лапласа.

$$LC\{f(t)\} = f(z) = z\int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt. \qquad (14)$$

Припускаючи, що макроскопічні напруги на границі представницького елемента геоматеріалу задані, формулюємо задачу локальної рівноваги в'язкопружного середовища в області змінних перетворення Лапласа-Карсона. Реалізуючи обчислювальну процедуру, визначену співвідношеннями (13), отримуємо

$$\boldsymbol{e}_{(2)}^{(r)} = \boldsymbol{A}^{(r)}\overline{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{d}_{(1)}^{(r)}(\overline{\boldsymbol{e}}). \qquad (16)$$

При цьому

$$\boldsymbol{A}^{(m)} = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{e}^T\right)^{-1}, \qquad \boldsymbol{e}^T = \sum_{i=1}^{n} c^{(i)}z^{(i)}h^{(i)},$$

$$\boldsymbol{A}^{(i)} = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{e}^{gi}\right)\boldsymbol{A}^{(m)}, \quad \boldsymbol{e}^{gi} = (\boldsymbol{zh})^{(i)} \qquad (17)$$

$$\boldsymbol{d}^{(m)} = -\sum_{i=1}^{n} c^{(i)}q^{(i)}\gamma^{(i)}.$$

Розв'язок (16, 17) дозволяє знайти макроскопічні фізичні співвідношення в'язкопружності другого та третього порядків типу (3). Коефіцієнти Ламе другого λ,μ і третього ν_k порядків та їх в'язкопружні аналоги визначаються формулами

$$\chi = 3\langle \kappa\kappa_A\rangle - \frac{2}{3}\mu, \ \mu = 2\langle \mu\mu_A\rangle, \ \nu_i = \langle a_{ik}\nu_k\rangle. \qquad (19)$$

Кутові дужки означають операцію статистичного осереднення тензорів або скалярів. Використано позначення, прийняті в [2]. В наближенні малих деформацій отримано чисельні результати розрахунку швидкості поздовжної хвилі у флуїдонасиченому зразку та порівняно їх із лабораторними експериментальними даними [3]. На основі проведених чисельних експериментів зроблено висновки про вплив фактору часу і миттєвої пружної нелінійності середовища на динамічні характеристики поведінки складнопобудованого середовища. В цілому, порівняння отриманих чисельних результатів прогнозування та лабораторних експериментальних даних [4], дозволяють вважати достовірною запропоновану чисельно-аналітичну модель. Одним з перспективних напрямків подальших досліджень, можна вважати узагальнення запропонованої моделі на випадок великих деформацій [1, 3] у неоднорідному середовищі із попереднім гідростатичним навантаженням. Це дозволить більш надійно оцінювати перспективність розвідки та експлуатації ущільнених порід-колекторів [2, 4].

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми »Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Список використаних джерел

1. *Булат А.Ф.* Прикладная механика упругонаследственных сред, Том 3 / В.И. Дырда , В.Г. Карнаухов – К: Наук. думка. – 2013. – 427 с.

2. *Выжва С.А.* Эффективные упругие свойства нелинейных многокомпонентных геологических сред / С.А. Выжва, Б.П. Маслов, Г.Т. Продайвода // Геофиз. журнал. – 2005. – 27, №6. – С.86-96.

3. *Лубков М.В.* Застосування в'язкопружної моделі Кельвіна-Фойгта для моделювання геотектонічних процесів / М.В. Лубков // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2017. – 3.– С. 127-130.

4. *Маслов Б.* Моделювання нелінійних в'язкопружних властивостей теригенно-вапняковистих пісковиків / Б. Маслов, І. Онищук, А. Шинкаренко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Геологія. – 2017. – **77** (2). – С. 99–105.

5. *Маслов Б.* Прогнозування довготривалої міцності гірського масиву у геологічних середовищах складної структури /Б. Маслов, Я. Ляшенко, О. Максименко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Геологія. – 2009, № 3. – С. 57-60.

6. *Maslov B.P.* Combined numerical and analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials / B. P. Maslov // International Appl. Mechanics, 2018. – **54**, N2. – P. 220-230.

7. *Golub V.P.* Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State II. Deviators Proportionality / V.P. Golub, B.P. Maslov, P.V. Fernati // International Apppl. Mechanics. – 2016. – **52**, N.6. – P.111-125.

References

1. BULAT, A.F., DYRDA, V.I. & KARNAUHOV, V.G. (2013) *Prykladnaya mehanyka uprugonasledstvennyh sred.* Tom 3. K: Naukova dumka.

2. VYZHVA, S.A., MASLOV, B.P. & PRODAYVODA, G.T. (2005) Effektyvnye uprugye svojstva nelynejnyh mnogokomponentnyh geologycheskyh sred. *Geofyzycheskyj zhurnal*. **27,** 6. pp.86-96.

3. LUBKOV, M.V. (2017) Zastosuvannya vyazkopruzhnoyi modeli Kelvina-Fojgta dlya modelyuvannya geotektonichnyh procesiv. *Visnyk Kyyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya fizyko-matematychni nauky*. **3.** pp. 127-130.

4. MASLOV, B., ONYSCHUK, I. & SHYNKARENKO, A. (2017) Modelyuvannya nelinijnyh vyazko-pruzhnyh vlastyvostej terygenno-vapnyakovystyh piskovykiv. *Visnyk Kyyivskogo nacionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Geologiya*. – **77 (2).** – pp. 99-105.

5. MASLOV, B., LYASHENKO, Ya. & MAKSYMENKO, O. (2009) Prognozuvannya dovgotryvaloyi micznosti girskogo masyvu u geologichnyh seredovyshhah skladnoyi struktury. *Visnyk Kyyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Geologiya*. 3. pp. 57-60.

6. MASLOV, B.P. (2018) Combined numerical and analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials. *International Applied Mechanics*. **54**, 2. pp. 220-230.

7. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P. & FERNATI P.V. (2016) Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress. *International Apppl. Mechanics*. **52**, 6. pp.111-125.

Надійшла до редколегії 28.08.2019