Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА
на тему:

Закон повторного логарифма для загального гіллястого процесу, породженого процесом відновлення

за спеціальністю 113 Прикладна математика

студента 2 курсу ОКР "Магістр"
Костогриза Руслана Олександровича

Науковий керівник:
професор, доктор фізико-математичних наук
Іксанов О. М.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № 8 від 03 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО проф. Іксанов О.М.

Київ-2023

Зміст

1. Вступ

Нехай $\xi_1, \xi_2, ...$ - незалежні, однаково розподілені додатні випадкові величини. Позначимо через $S := (S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ стандартне випадкове блукання зі стрибками ξ_1, $\xi_2, \ldots$, тобто $S_k := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k$ для $k \in \mathbb{N}$ та $N(t) := \sum\limits_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}}$ для $t \geq 0$.

Уявимо собі популяцію індивідуумів, що еволюціонує так. В момент часу 0 популяція зароджується одним індивідуумом - початковим предком (вона є єдиним представником 0-го покоління). В моменти часу S_1, $S_2, \ldots$ вона народжує потомство, що утворює 1-е покоління популяції. Кожен індивідуум першого покоління, незалежно від інших, народжує своє потомство. Діти індивідуума, народженого в момент часу $S_i, i \in \mathbb{N}$ народжуються у моменти $S_i + S_k^{(i)}, k \in \mathbb{N}$, де $(S_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}, (S_k^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots$ є незалежними та мають той самий розподіл, що і $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Подальша еволюція аналогічна: зсуви часів народження індивідуумів $(k+1)$-го покоління відносно часів народження їхніх матерів, що належать k-му поколінню, задаються копією $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$, при цьому для різних матерів ці копії є незалежними. Також ці копії є різними у різних поколіннях (копія $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ - випадкова послідовність, що має такий самий розподіл як $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$).

Описаний вище гіллястий процес є окремим випадком загального гіллястого процесу (також відомого як гіллястий процес Крампа-Мода-Ягерса), у якому народження у першому поколінні регулюється процесом відновлення $(N(t))_{t\geq 0}$. Детальне означення загального процесу Крампа-Мода-Ягерса можна знайти у розділі X книги [1].

Позначимо через $N_k(t)$ - число індивідуумів k-го покоління, народжених до моменту часу t включно. Зокрема, $N_1(t) = N(t), t \geq 0$.

2. Основна теорема

Наведемо основний результат даної роботи. Для сім'ї функцій (x_t) позначимо через $C((x_t))$ множину її граничних точок. Запис "м.н." є скороченням для "майже напевно".

Теорема 1. *Припустимо, що* $\sigma^2 := \operatorname{Var}\xi \in (0,\infty)$. *Тоді для кожного фіксованого* $k \in \mathbb{N}$

$$C\Big(\Big(\frac{a_k(N_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k})}{(2t^{2k-1}\log\log t)^{1/2}} : t > e\Big)\Big) = [-1,1] \quad \text{м. н.},$$

де

$$a_k := \frac{\mu^{k+1/2}(k-1)!(2k-1)^{1/2}}{\sigma}, \quad \mu := \mathbb{E}\xi < \infty.$$

Зокрема,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{a_k(N_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k})}{(2t^{2k-1}\log\log t)^{1/2}} = 1 \quad \text{м. н.}$$

та

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{a_k(N_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k})}{(2t^{2k-1}\log\log t)^{1/2}} = -1 \quad \text{м. н.}$$

Центрування $\frac{t^k}{k!\mu^k}$ *можна замінити на* $\mathbb{E}N_k(t)$.

3. Огляд відомих результатів

Теорема 1.3 статті [3]- це функціональна гранична теорема (ФГТ) для процесів $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$, належним чином шкальованих, нормалізованих та центрованих, у просторі $D^{\mathbb{N}}$, наділеному продакт J_1-топологією, за умови $\mathbb{E}\xi^2<\infty$. Обговоримо стисло доведення цієї теореми. Для $i\in\mathbb{N}$ розглянемо індивідуума 1-го покоління, народженого у час S_i і позначимо $N_j^{(i)}(t)$ для $j\in\mathbb{N}$ - число предків $(j+1)$-го покоління, народжених до моменту часу $t+S_i$ За властивістю розгалуження $(N_j^{(1)}(t))_{t\geq 0}$, $\quad (N_j^{(2)}(t))_{t\geq 0},\ldots$ - незалежні копії $(N_j(t))_{t\geq 0}$, що не залежать від S. Виходячи з цього, отримуємо таке зображення:

$$N_k(t)=\sum_{i\geq 1}N_{k-1}^{(i)}(t-S_i),\quad t\geq 0,\ k\geq 2. \tag{1}$$

Для $t\geq 0$ і $k\in\mathbb{N}$ покладемо $V_k(t):=\mathbb{E}N_k(t)$ і, виходячи з цього, $V_1(t)=V(t)$, а також

$$V_k(t)=\int\limits_{[0,\,t]}V_{k-1}(t-y)\mathrm{d}V(y)=\int\limits_{[0,\,t]}V(t-y)\mathrm{d}V_{k-1}(y).$$

Стратегія доведення теореми є такою. З урахуванням декомпозиції

$$\begin{aligned}N_k(t)-\frac{t^k}{k!\mu^k}&=\sum_{j\geq 1}\big(N_{k-1}^{(j)}(t-S_j)-V_{k-1}(t-S_j)\,1\!\!1_{\{S_j\leq t\}}\big)\\&\quad+\sum_{j\geq 1}\Big(V_{k-1}(t-S_j)\,1\!\!1_{\{S_j\leq t\}}-\mu^{-1}\int\limits_0^t V_{k-1}(y)\mathrm{d}y\Big)\\&\quad+\Big(\mu^{-1}\int\limits_0^t V_{k-1}(y)\mathrm{d}y-\frac{t^k}{k!\mu^k}\Big)=:N_{k,1}(t)+N_{k,2}(t)+N_{k,3}(t)\end{aligned}$$

для $k\geq 2$ достатньо довести три граничні співвідношення: для всіх $T>0$

$$\frac{\sup_{0\leq s\leq T}|N_{k,1}(st)|}{t^{k-1/2}}\xrightarrow[t\to\infty]{\mathbb{P}}0;$$

$$\lim_{t\to\infty}t^{-(k-1/2)}\sup_{0\leq s\leq T}|N_{k,3}(st)|=0,$$

і

$$\Big(\frac{N_1(t\cdot)-\mu^{-1}(t\cdot)}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}},\frac{(k-1)!N_{k,2}(t\cdot)}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-2k-1}t^{2k-1}}}\Big)_{k\geq 2}\xrightarrow[t\to\infty]{}(R_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$$

в продакт J_1-топології простору $D^{\mathbb{N}}$.

Зазначу, що функціональна гранична теорема також подана, як теорема 6 статті [6]. Різниця у тім, що в останній статті ФГТ сформульована для початкових рівнів загального гіллястого процесу, породженого збуреним випадковим блуканням. А ось теорема 2.4 статті [7] та твердження 1 статті [5]- це багатовимірні функціональні граничні теореми (БФГТ) для проміжних рівнів загального гіллястого процесу, породженого збуреним випадковим блуканням.

У теоремі 2.6 роботи [5] встановлено асимптотику дисперсії $\operatorname{Var} N_k(t)$ при $t \to \infty$ для фіксованого $k \in \mathbb{N}$ за умов, що $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, та що розподіл ξ є негратчастим. У теоремах 2.1 та 2.2 статті [4] доведено слабку збіжність скінченновимірних розподілів процесів $(N_{\lfloor k(t)u \rfloor}(t))_{u>0}$, належним чином нормалізованих та центрованих, за припущення, що розподіл ξ є показниковим. У останньому реченні k є додатною функцією, що задовольняє співвідношення $k(t) \to +\infty$ та $k(t) = o(t)$ при $t \to \infty$.

4. Допоміжні результати

Нагадаємо позначення: $V_k(t) = \mathbb{E}N_k(t)$ для $k \in \mathbb{N}$ та $t \geq 0$. Для доведення того, що центрування $\frac{t^k}{k!\mu^k}$ можна замінити на $V_k(t)$, достатньо встановити таку лему.

Лема 2. *Зафіксуємо будь-яке $k \in \mathbb{N}$.*
а) Припустимо, що $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V_k(t+h) - V_k(t)}{t^{k-1}} = \frac{h}{(k-1)!\mu^k},$$

де $h > 0$ - будь-яке, якщо розподіл ξ є неарифметичним, та $h = id$, $d > 0$, якщо розподіл ξ є d-арифметичним.
б) Припустимо, що розподіл ξ є d-арифметичним, $d > 0$, та що $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_k(nd) - \frac{(nd)^k}{k!\mu^k}}{(nd)^{k-1}} = \frac{\frac{d}{2\mu} + k(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - 1)}{\mu^{k-1}(k-1)!}.$$

в) Припустимо, що $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тоді

$$-\infty < \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{V_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k}}{t^{k-1}} \leq \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{V_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k}}{t^{k-1}} < \infty.$$

Доведення. Для доведення пункту а) скористаємось методом математичної індукції. При $k = 1$ рівність

$$\lim_{t\to\infty} V_1(t+h) - V_1(t) = \frac{h}{\mu}$$

виконується згідно з теоремою Блекуелла. Припустимо, що ця рівність також виконується при $k = n$, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V_n(t+h) - V_n(t)}{t^{n-1}} = \frac{h}{\mu^n(n-1)!}.$$

Доведемо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V_{n+1}(t+h) - V_{n+1}(t)}{t^n} = \frac{h}{\mu^{n+1}n!}. \tag{2}$$

Використовуючи те, що V_{n+1} є $(n+1)$-кратною згорткою V з собою, отримуємо

$$\begin{aligned} V_{n+1}(t+h) - V_{n+1}(t) &= \int_{[0,\,t+h]} V_n(t+h-y)\mathrm{d}V(y) - \int_{[0,\,t]} V_n(t-y)\mathrm{d}V(y) \\ &= \int_{[0,\,t]} (V_n(t+h-y) - V_n(t-y))\mathrm{d}V(y) + \int_{(t,\,t+h]} V_n(t+h-y)\mathrm{d}V(y). \end{aligned}$$

Для встановлення граничного співвідношення (2) достатньо довести таке:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,t]}(V_n(t+h-y)-V_n(t-y))\mathrm{d}V(y)}{t^n} = \frac{h}{\mu^{n+1}n!} \tag{3}$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{(t,\,t+h]} V_n(t+h-y)\mathrm{d}V(y)}{t^n} = 0. \tag{4}$$

Доведення (3). Припущення індукції означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує значення $t_0 > 0$ таке, що

$$\Big|\frac{V_n(t+h)-V_n(t)}{t^{n-1}} - \frac{h}{\mu^n(n-1)!}\Big| \le \varepsilon$$

для всіх $t \ge t_0$. Розіб'ємо інтеграл на два:

$$\int_{[0,\,t]}(V_n(t+h-y)-V_n(t-y))\mathrm{d}V(y) =: \mathbb{A}_n(t)+\mathbb{B}_n(t),$$

де

$$\mathbb{A}_n(t) = \int_{[0,\,t-t_0]}(V_n(t+h-y)-V_n(t-y))\mathrm{d}V(y)$$

та

$$\mathbb{B}_n(t) = \int_{(t-t_0,\,t]}(V_n(t+h-y)-V_n(t-y))\mathrm{d}V(y).$$

В інтегралі $\mathbb{A}_n(t)$ $t-y \ge t_0$. Тому

$$\Big(\frac{h}{\mu^n(n-1)!}-\varepsilon\Big)\int_{[0,\,t-t_0]}(t-y)^{n-1}\mathrm{d}V(y) \le \mathbb{A}_n(t)$$
$$\le \Big(\frac{h}{\mu^n(n-1)!}+\varepsilon\Big)\int_{[0,\,t-t_0]}(t-y)^{n-1}\mathrm{d}V(y).$$

Доведемо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,t-t_0]}(t-y)^{n-1}\mathrm{d}V(y)}{t^n} = \frac{1}{\mu n}. \tag{5}$$

Для цього спочатку зазначимо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,t]}(t-y)^{n-1}\mathrm{d}V(y)}{t^n} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{\mu}\int_0^t y^{n-1}\mathrm{d}y}{t^n} = \frac{1}{\mu n}.$$

Далі, враховуючи те, що степенева функція не спадає, а також субадитивність $V+1$

$$\int_{(t-t_0,\,t]}(t-y)^{n-1}\mathrm{d}V(y) \le t_0^{n-1}(V(t)-V(t-t_0)) \le t_0^{n-1}(V(t_0)+1),$$

звідки випливає

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{(t-t_0,\,t]}(t-y)^{n-1}\mathrm{d}V(y)}{t^n} = 0.$$

Отже, (5) виконується. Таким чином,

$$\Big(\frac{h}{\mu^n(n-1)!} - \varepsilon\Big)\frac{1}{\mu n} \le \varliminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{A}_n(t)}{t^n} \le \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{A}_n(t)}{t^n} \le \Big(\frac{h}{\mu^n(n-1)!} + \varepsilon\Big)\frac{1}{\mu n}. \qquad (6)$$

Дослідимо асимптотику $\mathbb{B}_n(t)$. Використовуючи те, що функція V_n не спадає (оскільки кількість індивідуумів деякого покоління, що народилися до моменту часу t, з ростом n не може зменшуватись), та субадитивність $V+1$, запишемо

$$\int_{(t-t_0,\,t]}(V_n(t+h-y) - V_n(t-y))\mathrm{d}V(y) \le \int_{(t-t_0,\,t]} V_n(t+h-y)\mathrm{d}V(y)$$
$$\le V_n(t_0+h)(V(t) - V(t-t_0)) \le V_n(t_0+h)(V(t_0)+1).$$

Отже, $\lim_{t\to\infty} t^{-n}\mathbb{B}_n(t) = 0$, що разом із (6) забезпечує виконання нерівності

$$\Big(\frac{h}{\mu^n(n-1)!} - \varepsilon\Big)\frac{1}{\mu n} \le \varliminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{A}_n(t)+\mathbb{B}_n(t)}{t^n} \le \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{A}_n(t)+\mathbb{B}_n(t)}{t^n}$$
$$\le \Big(\frac{h}{\mu^n(n-1)!} + \varepsilon\Big)\frac{1}{\mu n}$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Спрямовуючи тепер $\varepsilon \to 0+$, отримуємо (3).
Доведення (4). Використовуючи те, що функція V_n не спадає, та субадитивність $V+1$, запишемо

$$\int_{(t,\,t+h]} V_n(t+h-y)\mathrm{d}V(y) \le V_n(h)(V(t+h) - V(t)) \le V_n(h)(V(h)+1).$$

Оскільки права частина не залежить від t, то виконується (4).

Для доведення пункту б) також скористаємось методом математичної індукції. При $k=1$ згідно з наслідком з теореми Блекуелла

$$\lim_{n\to\infty}\Big(V_1(nd) - \frac{nd}{\mu}\Big) = \frac{d}{2\mu} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - 1.$$

Таким чином, ми показали, що пункт б) леми 1 при $k=1$ виконується.

Припустимо, що пункт б) леми 1 виконується при $k \le i$, тобто

$$V_k(nd) - \frac{(nd)^k}{k!\mu^k} \sim \frac{(nd)^{k-1}\big(\frac{d}{2\mu} + k\big(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - 1\big)\big)}{\mu^{k-1}(k-1)!}, \quad n\to\infty.$$

Тоді для заданого $\varepsilon > 0$ існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для $1 \le k \le i$

$$V_k(nd) - \frac{(nd)^k}{k!\mu^k} \le (c_k + \varepsilon)\frac{(nd)^{k-1}}{\mu^{k-1}(k-1)!}, \quad n \to \infty, \tag{7}$$

де $c_k := \frac{d}{2\mu} + k\big(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} - 1\big)$.

Запишемо

$$V_{i+1}(nd) - \frac{(nd)^{i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}} = \sum_{r=1}^{n} V((n-r)d)(V_i(rd) - V_i((r-1)d)) - \frac{(nd)^{i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} V\Big((n-r)d - \frac{(n-r)d}{\mu}\Big)(V_i(rd) - V_i((r-1)d)) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} \frac{(n-r)d}{\mu}(V_i(rd) - V_i((r-1)d)) - \frac{(nd)^{i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}}.$$

Сумуючи частинами, можна показати, що

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{(n-r)d}{\mu}(V_i(rd) - V_i((r-1)d)) = \frac{d}{\mu}\sum_{r=1}^{n-1} V_i(rd).$$

Таким чином,

$$V_{i+1}(nd) - \frac{(nd)^{i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}} = \sum_{r=1}^{n} V\Big((n-r)d - \frac{(n-r)d}{\mu}\Big)(V_i(rd) - V_i((r-1)d)) +$$

$$+ \frac{d}{\mu}\sum_{r=1}^{n-1} V_i(rd) - \frac{(nd)^{i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}} = \sum_{r=1}^{n} V\Big((n-r)d - \frac{(n-r)d}{\mu}\Big)(V_i(rd) - V_i((r-1)d)) +$$

$$+ \frac{d}{\mu}\sum_{r=1}^{n-1}\Big(V_i(rd) - \frac{(rd)^i}{i!\mu^i}\Big) + \frac{d^{i+1}}{\mu^{i+1}i!}\Big(\sum_{r=1}^{n-1} r^i - \frac{n^{i+1}}{i+1}\Big) = A_i(n) + B_i(n) + C_i(n).$$

Проаналізуємо $A_i(n)$:

$$A_i(n) = \sum_{r=1}^{n-n_0} V\Big((n-r)d - \frac{(n-r)d}{\mu}\Big)(V_i(rd) - V_i((r-1)d)) +$$

$$+ \sum_{r=n-n_0+1}^{n} V\Big((n-r)d - \frac{(n-r)d}{\mu}\Big)(V_i(rd) - V_i((r-1)d))$$

$$\le (c_1 + \varepsilon)\sum_{r=1}^{n-n_0}(V_i(rd) - V_i((r-1)d)) + \sup_{1 \le r \le n_0 - 1}\Big(V(rd) - \frac{rd}{\mu}\Big)(V_i(nd) - V_i(n-n_0)d) =$$

$$= (c_1 + \varepsilon)V_i((n-n_0)d) + \sup_{1 \le r \le n_0 - 1}\Big(V(rd) - \frac{rd}{\mu}\Big)(V_i(nd) - V_i(n-n_0)d).$$

Аналогічно перевіряємо, що

$$A_i(n) \geq (c_1-\varepsilon)V_i((n-n_0)d) + \inf_{1\leq r\leq n_0-1}\Big(V(rd)-\frac{rd}{\mu}\Big)(V_i(nd)-V_i(n-n_0)d).$$

У пункті а) та в статті [6] було доведено, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_i(n-n_0)d}{(nd)^i} = \frac{1}{i!\mu^i}$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_i(nd)-V_i(n-n_0)d}{(nd)^{i-1}} = \frac{n_0 d}{(i-1)!\mu^i}.$$

Отже, спрямувавши $\varepsilon \to 0$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_i(n)}{(nd)^i} = \frac{c_1}{i!\mu^i} = \frac{\frac{d}{2\mu}+\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1}{i!\mu^i}.$$

Проаналізуємо $B_i(n)$. Оскільки

$$V_i(nd)-\frac{(nd)^i}{i!\mu^i} \sim \frac{(nd)^{i-1}\big(\frac{d}{2\mu}+i\big(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1\big)\big)}{\mu^{i-1}(i-1)!}, \quad n\to\infty$$

то

$$\sum_{r=1}^{n-1}\Big(V_i(rd)-\frac{(rd)^i}{i!\mu^i}\Big) \sim \frac{(nd)^i\big(\frac{d}{2\mu}+i\big(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1\big)\big)}{\mu^{i-1}(i-1)!}\cdot\frac{1}{di}, \quad n\to\infty.$$

Тож,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_i(n)}{(nd)^i} = \frac{d}{\mu}\cdot\frac{\frac{d}{2\mu}+i\big(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1\big)}{\mu^{i-1}(i-1)!}\cdot\frac{1}{di} = \frac{\frac{d}{2\mu}+i\big(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1\big)}{i!\mu^i}.$$

Проаналізуємо $C_i(n)$. Скориставшись формулою Фаульхабера та біномом Ньютона, запишемо

$$\sum_{r=1}^{n-1} r^i - \frac{n^{i+1}}{i+1} \sim \frac{(n-1)^{i+1}}{i+1} + \frac{1}{2}(n-1)^i - \frac{n^{i+1}}{i+1} + O(n^{i-1}) =$$

$$= \frac{(n-1)^{i+1}-n^{i+1}}{i+1} + \frac{1}{2}(n-1)^i + O(n^{i-1}) =$$

$$= \frac{(-1)^{i+1}+C_{i+1}^1 n^1(-1)^i+\cdots+C_{i+1}^{i-1}n^{i-1}(-1)^2+C_{i+1}^i n^i(-1)^1+n^{i+1}-n^{i+1}}{i+1} +$$

$$+\frac{1}{2}((-1)^i + C_i^1 n^1(-1)^{i-1}+\cdots+C_i^{i-1}n^{i-1}(-1)^1+n^i)+O(n^{i-1}) =$$

$$= \frac{O(n^{i-1})}{i+1} - n^i + \frac{1}{2}(O(n^{i-1})+n^i)+O(n^{i-1}) = \frac{-n^i}{2}+O(n^{i-1}).$$

Тож,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_i(n)}{(nd)^i} = -\frac{\frac{d}{2\mu}}{i!\mu^i}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_{i+1}(nd)-\frac{(nd)^{i+1}}{(i+1)!\mu^{i+1}}}{(nd)^i} = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{A_i(n)}{(nd)^i}+\frac{B_i(n)}{(nd)^i}+\frac{C_i(n)}{(nd)^i}\Big)$$
$$= \frac{\frac{d}{2\mu}+\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1}{i!\mu^i}+\frac{\frac{d}{2\mu}+i\big(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1\big)}{i!\mu^i}-\frac{\frac{d}{2\mu}}{i!\mu^i} = \frac{\frac{d}{2\mu}+(i+1)\big(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1\big)}{i!\mu^i}.$$

Як бачимо, твердження пункту б) леми при $k=i+1$ виконується.

Доведення пункту в). Якщо розподіл ξ є неарифметичним, то згідно з теоремою 1 статті [6]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{V_k(t)-\frac{t^k}{k!\mu^k}}{t^{k-1}} = \frac{k(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1)}{\mu^{k-1}(k-1)!},$$

і твердження пункту в) леми виконується. Якщо розподіл ξ є d-арифметичним, то згідно з пунктом б) поточної леми

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_k(nd)-\frac{(nd)^k}{k!\mu^k}}{(nd)^{k-1}} = \frac{\frac{d}{2\mu}+k(\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}-1)}{\mu^{k-1}(k-1)!} = \text{const}.$$

Отже, що для кожного $t\ge 0$ знайдеться значення $n\in\mathbb{N}$ таке, що $t\in[(n-1)d, nd)$, при цьому $t\to\infty$ тоді й тільки тоді, коли $n\to\infty$. За монотонністю

$$\frac{V_k(t)-\frac{t^k}{k!\mu^k}}{t^{k-1}} \le \frac{V_k(nd)-\frac{((n-1)d)^k}{k!\mu^k}}{((n-1)d)^{k-1}} = \frac{V_k(nd)-\frac{(nd)^k}{k!\mu^k}}{(nd)^{k-1}}\cdot\frac{(nd)^{k-1}}{((n-1)d)^{k-1}}$$
$$+\frac{\frac{(nd)^k}{k!\mu^k}-\frac{((n-1)d)^k}{k!\mu^k}}{((n-1)d)^{k-1}} = \frac{V_k(nd)-\frac{(nd)^k}{k!\mu^k}}{(nd)^{k-1}}\cdot\frac{(nd)^{k-1}}{((n-1)d)^{k-1}}+\frac{d}{k!\mu^k}\cdot\frac{n^k-(n-1)^k}{(n-1)^{k-1}}$$
$$\to \text{const}+\frac{d}{k!\mu^k}(k-1), \quad n\to\infty$$

Отже,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{V_k(t)-\frac{t^k}{k!\mu^k}}{t^{k-1}} < \infty.$$

Для оцінки знизу запишемо

$$\frac{V_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k}}{t^{k-1}} \geq \frac{V_k((n-1)d) - \frac{(nd)^k}{k!\mu^k}}{(nd)^{k-1}} =$$
$$= \frac{V_k(nd) - \frac{(nd)^k}{k!\mu^k}}{(nd)^{k-1}} - \frac{V_k(nd) - V_k((n-1)d)}{(nd)^{k-1}} \to \mathrm{const} - \frac{d}{(k-1)!\mu^k}, \quad n \to \infty.$$

Для отримання граничного співвідношення ми скористалися пунктами а) та б) леми. Таким чином,

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{V_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k}}{t^{k-1}} > -\infty.$$

Доведення леми 1 завершене. □

5. Доведення теореми 1

З урахуванням (1) запишемо

$$N_k(t) - V_k(t) = \sum_{i\geq 1}\big(N_{k-1}^{(i)}(t-S_i) - V_{k-1}(t-S_i)\big) + \\ + \sum_{i\geq 1}\big(V_{k-1}(t-S_i) - V_k(t)\big) =: I_k(t) + J_k(t), \quad t\geq 0,\ k\geq 2.$$

Доведення теореми 1 базується на лемах 3 та 4.

Лема 3. *Для кожного $k \geq 2$ виконується граничне співвідношення*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{I_k(t)}{(t^{2k-1}\log\log t)^{1/2}} = 0 \quad \text{м. н.}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що $\mathbb{E}\big(I_k(t)\big)^2 = O(t^{2k-2})$ при $t\to\infty$.

Для $t\geq 0$ та $k\geq 1$ покладемо $D_k(t) := \mathrm{Var}\, N_k(t)$ та зазначимо, що для $k\geq 2$ $D_k(t) = \mathbb{E}\big(I_k(t)\big)^2 + \mathbb{E}\big(J_k(t)\big)^2$. Для початку покажемо, що $D_k(t) = O(t^{2k-1})$ при $t\to\infty$. Для цього скористаємося методом математичної індукції. Якщо $k=1$, то $\mathrm{Var}N_1(t) = O(t)$ при $t\to\infty$ згідно з лемою 5.1 статті [3]. Припустимо, що $D_{m-1}(t) = O(t^{2m-3})$ для деякого $m\geq 2$. Тоді існують $t_0>0$ і $c_m>0$ такі, що $D_{m-1}(t)\leq c_m t^{2m-3}$ при $t\geq t_0$. При цьому

$$\mathbb{E}\big(I_m(t)\big)^2 = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} D_{m-1}(t-S_i)\,\mathbb{1}_{\{S_i\leq t\}} = \\ = \int_{[0,t-t_0]} D_{m-1}(t-x)\mathrm{d}V(x) + \int_{(t-t_0,t]} D_{m-1}(t-x)\mathrm{d}V(x) \leq \\ \leq c_m\int_{[0,t-t_0]}(t-x)^{2m-3}\mathrm{d}V(x) + \sup_{0\leq y\leq t_0} D_{m-1}(y)\big(V(t)-V(t-t_0)\big) \leq \\ \leq c_m t^{2m-3}V(t) + \sup_{0\leq y\leq t_0} D_{m-1}(y)\big(V(t_0)+1\big) = O(t^{2m-2}) \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

Остання нерівність випливає з субадитивності $V+1$, а остання рівність - з елементарної теореми відновлення, згідно з якою $V(t)\sim t/\mu$ при $t\to\infty$.

Запишемо

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{r\geq 1} V_{k-1}(t-S_r)\,\mathbb{1}_{\{S_r\leq t\}}\Big)^2 = \\ = 2\mathbb{E}\sum_{r<i} V_{k-1}(t-S_r)V_{k-1}(t-S_i)\,\mathbb{1}_{\{S_i\leq t\}} + \mathbb{E}\sum_{r\geq 1} V_{k-1}^2(t-S_r)\,\mathbb{1}_{\{S_r\leq t\}}\,.$$

Маємо
$$\mathbb{E}\sum_{r\ge 1} V_{k-1}^2(t-S_r)\,\mathbb{1}_{\{S_r\le t\}} = \int_{[0,t]} V_{k-1}^2(t-y)\mathrm{d}V(y).$$
Далі
$$\mathbb{E}\sum_{1\le r\le i} V_{k-1}(t-S_r)V_{k-1}(t-S_i)\,\mathbb{1}_{\{S_i\le t\}} =$$
$$= \mathbb{E}\sum_{r\ge 1} V_{k-1}(t-S_r)\big(V_{k-1}(t-S_{r+1})\,\mathbb{1}_{\{S_{r+1}\le t\}} + V_{k-1}(t-S_{r+2})\,\mathbb{1}_{\{S_{r+2}\le t\}} + \cdots\big) =$$
$$= \mathbb{E}\sum_{r\ge 1} V_{k-1}(t-S_r)\,\mathbb{1}_{\{S_r\le t\}}\,\mathbb{E}\big(V_{k-1}(t-S_r-\xi_{r+1})\,\mathbb{1}_{\{\xi_{r+1}\le t-S_r\}} +$$
$$+ V_{k-1}(t-S_r-\xi_{r+1}-\xi_{r+2})\,\mathbb{1}_{\{\xi_{r+1}+\xi_{r+2}\le t-S_r\}} + \cdots |S_r\big) =$$
$$= \mathbb{E}\sum_{r\ge 1} V_{k-1}(t-S_r)\int_{[0,t-S_r]} V_{k-1}(t-S_r-y)\mathrm{d}V(y)\,\mathbb{1}_{\{S_r\le t\}} =$$
$$= \mathbb{E}\sum_{r\ge 1} V_{k-1}(t-S_r)V_k(t-S_r)\,\mathbb{1}_{\{S_r\le t\}} = \int_{[0,t]} V_{k-1}(t-y)V_k(t-y)\mathrm{d}V(y).$$
Отже,
$$\mathbb{E}\Big(\sum_{r\ge 1} V_{k-1}(t-S_r)\,\mathbb{1}_{\{S_r\le t\}}\Big)^2 =$$
$$= 2\int_{[0,t]} V_{k-1}(t-y)V_k(t-y)\mathrm{d}V(y) + \int_{[0,t]} V_{k-1}^2(t-y)\mathrm{d}V(y).$$
Із леми 4.1 статті [3] відомо, що для $m\le 2k-3$
$$\int_{[0,t]} (t-y)^m \mathrm{d}V(y) = o(t^{2k-1}), \quad t\to\infty,$$
$$\int_{[0,t]} (t-y)^{2k-2} \mathrm{d}V(y) = O(t^{2k-1}), \quad t\to\infty,$$
$$\int_{[0,t]} (t-y)^{2k-1} \mathrm{d}V(y) \le \frac{t^{2k}}{2k\mu} + ct^{2k-1}, \quad t\ge 0.$$
Використовуючи ці співвідношення та нерівність (4.3) статті [4]
$$\mathbb{E}\Big(\sum_{r\ge 1} V_{k-1}(t-S_r)\,\mathbb{1}_{\{S_r\le t\}}\Big)^2 \le$$
$$\le \frac{2}{(k-1)!k!\mu^{2k-1}}\int_{[0,t]} (t-y)^{2k-1}\mathrm{d}V(y) + O(t^{2k-1}) \le \frac{t^{2k}}{(k!)^2\mu^{2k}} + O(t^{2k-1}).$$

Для аналізу V_k^2, використавши нерівність (4.3) статті [4], запишемо, що для $t \to \infty$

$$V_k^2(t) = \frac{t^{2k}}{(k!)^2\mu^{2k}} + \frac{2t^k}{k!\mu^k}\Big(V_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k}\Big) + \Big(V_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k}\Big)^2 =$$
$$= \frac{t^{2k}}{(k!)^2\mu^{2k}} + O(t^{2k-1}).$$

Урешті-решт, можна обчислити $\mathbb{E}\big(J_k(t)\big)^2$:

$$\mathbb{E}\big(J_k(t)\big)^2 = \mathrm{Var}\Big(\sum_{r\geq 1} V_{k-1}(t-S_r)\,\mathbb{1}_{\{S_r\leq t\}}\Big) =$$
$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{r\geq 1} V_{k-1}(t-S_r)\,\mathbb{1}_{\{S_r\leq t\}}\Big)^2 - V_k^2(t) = O(t^{2k-1}).$$

Отже,

$$D_k(t) = \mathbb{E}\big(I_k(t)\big)^2 + \mathbb{E}\big(J_k(t)\big)^2 = O(t^{2k-2}) + O(t^{2k-1}) = O(t^{2k-1}) \quad t\to\infty.$$

Співвідношення $\mathbb{E}\big(I_k(t)\big)^2 = O(t^{2k-2})$ при $t\to\infty$ для $k\geq 2$ є наслідком доведення, наведеного вище.

Для довільного $\varepsilon > 0$ згідно з нерівністю Маркова та виходячи з того, що $\mathbb{E}\big(I_k(t)\big)^2 = O(t^{2k-2})$:

$$\sum_{n\geq 1} P\Big\{\frac{|I_k(n^{3/2})|}{n^{3/2(k-1/2)}} > \varepsilon\Big\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\geq 1}\frac{\mathbb{E}[I_k(n^{3/2})]^2}{n^{3(k-1/2)}} =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\geq 1} O\Big(\frac{n^{3/2(2k-2)}}{n^{3k-3/2}}\Big) = \sum_{n\geq 1} O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) < \infty.$$

Як бачимо, ряд $\sum_{n\geq 1} P\Big\{\frac{|I_k(n^{3/2})|}{n^{3/2(k-1/2)}} > \varepsilon\Big\}$ збіжний, тому згідно з лемою Бореля-Кантеллі: для всіх достатньо великих n

$$\frac{|I_k(n^{3/2})|}{n^{3/2(k-1/2)}} \leq \varepsilon \quad \text{м.н.},$$

що іншими словами означає те, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_k(n^{3/2})}{n^{3/2(k-1/2)}} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{8}$$

Далі перейдемо від дискретного аргумента $n^{3/2}$ до неперервного t. Для довільного $t\geq 0$ знайдеться значення $n\in\mathbb{N}_0$ таке, що $t\in[n^{3/2},(n+1)^{3/2})$. При цьому

$$I_k(t) \le \sum_{i\ge 1} \big(N_{k-1}^{(i)}((n+1)^{3/2} - S_i) - V_{k-1}(n^{3/2} - S_i)\big) =$$
$$= I_k((n+1)^{3/2}) + \sum_{i\ge 1} \big(V_{k-1}((n+1)^{3/2} - S_i) - V_{k-1}(n^{3/2} - S_i)\big).$$

Розглянемо більш детально останній доданок:

$$\sum_{i\ge 1} \big(V_{k-1}((n+1)^{3/2} - S_i) - V_{k-1}(n^{3/2} - S_i)\big) =$$
$$= \int_{[0,(n+1)^{3/2}]} V_{k-1}((n+1)^{3/2} - x)\mathrm{d}N(x) - \int_{[0,n^{3/2}]} V_{k-1}(n^{3/2} - x)\mathrm{d}N(x) =$$
$$= \int_{(n^{3/2},(n+1)^{3/2}]} V_{k-1}((n+1)^{3/2} - x)\mathrm{d}N(x) +$$
$$+ \int_{[0,n^{3/2}]} \big(V_{k-1}((n+1)^{3/2} - x) - V_{k-1}(n^{3/2} - x)\big)\mathrm{d}N(x) =: A_k(n) + B_k(n).$$

За монотонністю V_{k-1}

$$A_k(n) \le V_{k-1}((n+1)^{3/2} - n^{3/2})(N((n+1)^{3/2}) - N(n^{3/2})).$$

Згідно з асимптотикою V_{k-1}, яка відома з рівності (3) статті [6]

$$V_{k-1}((n+1)^{3/2} - n^{3/2}) \sim \frac{((n+1)^{3/2} - n^{3/2})^{k-1}}{(k-1)!\mu^k} = \frac{(n^{3/2}((1+\frac{1}{n})^{3/2} - 1))^{k-1}}{(k-1)!\mu^k} =$$
$$= \frac{(n^{3/2}(\frac{3}{2n} + o(\frac{1}{n})))^{k-1}}{(k-1)!\mu^k} = \frac{(\frac{3}{2}n^{1/2} + o(n^{1/2}))^{k-1}}{(k-1)!\mu^k} = O(n^{1/2(k-1)})$$

Також, згідно з посиленим законом великих чисел, $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{1} \frac{1}{\mu}$ при $t \to \infty$ м.н. Тому
$N((n+1)^{3/2}) - N(n^{3/2}) = o(n^{3/2})$ м.н. Таким чином,

$$A_k(n) = O(n^{1/2(k-1)}) \cdot o(n^{3/2}) = o(n^{k/2+1}), \quad n \to \infty \quad \text{м.н.}$$

Доведемо, що для всіх $x, h \ge 0$

$$V_k(x+h) - V_k(x) \le (V(h)+1)(V(x+h))^{k-1}.$$

Для цього скористаємось методом математичної індукції. При $k = 1$ рівність

$$V(x+h) - V(x) \le V(h) + 1$$

виконується виходячи з субадитивності функції $V+1$. Припустимо, що

$$V_m(x+h) - V_m(x) \le (V(h)+1)(V(x+h))^{m-1}.$$

Запишемо

$$\begin{aligned}
&V_{m+1}(x+h) - V_{m+1}(x) = \\
&\qquad = \int_{[0,x+h]} V_m(x+h-y)\mathrm{d}V(y) - \int_{[0,x]} V_m(x-y)\mathrm{d}V(y) = \\
&= \int_{[0,x]} (V_m(x+h-y) - V_m(x-y))\mathrm{d}V(y) + \int_{(x,x+h]} V_m(x+h-y)\mathrm{d}V(y) = \\
&\qquad\qquad\qquad = A_m(x) + B_m(x).
\end{aligned}$$

Оцінимо $A_m(x)$:

$$\begin{aligned}
&A_m(x) \le \int_{[0,x]} (V(h)+1)(V(x-y+h))^{m-1}\mathrm{d}V(y) = \\
&= (V(h)+1)\int_{[0,x]} (V(x-y+h))^{m-1}\mathrm{d}V(y) \le (V(h)+1)(V(x+h))^{m-1}V(x).
\end{aligned}$$

Оцінимо $B_m(x)$:

$$\begin{aligned}
&B_m(x) \le V_m(h)(V(x+h)-V(x)) \le V(h)V^{m-1}(h)(V(x+h)-V(x)) \le \\
&\qquad \le (V(h)+1)(V(x+h))^{m-1}(V(x+h)-V(x)).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&V_{m+1}(x+h) - V_{m+1}(x) \le \\
&\le (V(h)+1)(V(x+h))^{m-1}V(x) + (V(h)+1)(V(x+h))^{m-1}(V(x+h)-V(x)) = \\
&= (V(h)+1)(V(x+h))^{m-1}(V(x)+V(x+h)-V(x)) = (V(h)+1)(V(x+h))^{m}.
\end{aligned}$$

Скориставшись нерівністю, доведеною вище, запишемо:

$$\begin{aligned}
&B_k(n) \le \left(V((n+1)^{3/2} - n^{3/2}) + 1\right) \int_{[0,n^{3/2}]} (V((n+1)^{3/2} - x))^{k-2}\mathrm{d}N(x) \le \\
&\qquad \le \left(V((n+1)^{3/2} - n^{3/2}) + 1\right)(V((n+1)^{3/2}))^{k-2}N(n^{3/2}).
\end{aligned}$$

Враховуючи асимптотику функцій V та N, яка була показана при дослідженні $A_k(n)$, доходимо до висновку, що $B_k(n) = o(n^{3/2(k-1/2)})$ при $n \to \infty$ м.н. Таким чином,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{I_k(t)}{t^{3/2(k-1/2)}} \le \lim_{t\to\infty} \frac{I_k((n+1)^{3/2})}{n^{3/2(k-1/2)}} = 0.$$

Зробимо аналогічну оцінку знизу:

$$I_k(t) \geq \sum_{i\geq 1} \big(N_{k-1}^{(i)}(n^{3/2}-S_i) - V_{k-1}((n+1)^{3/2}-S_i)\big) =$$
$$= I_k(n^{3/2}) + \sum_{i\geq 1} \big(V_{k-1}(n^{3/2}-S_i) - V_{k-1}((n+1)^{3/2}-S_i)\big) = I_k(n^{3/2}) + o(n^{3/2(k-1/2)}).$$

Таким чином,

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{I_k(t)}{t^{3/2(k-1/2)}} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{I_k(n^{3/2})}{n^{3/2(k-1/2)}} = 0.$$

Тому в рівності (8) від дискретного аргумента $n^{3/2}$ можна перейти до неперервного t.

Лишилось зазначити, що $(\log\log t)^{1/2}$ зростає з ростом t. Тому доведення леми 3 завершене. $\square$

За допомогою інтегрування частинами, для $k \geq 2$ і $t \geq 0$, запишемо

$$J_k(t) = \int_{[0,t]} V_{k-1}(t-x)\mathrm{d}(N(x)-V(x)) = \int_{[0,t)} (N(t-x)-V(t-x))\mathrm{d}V_{k-1}(x) =$$
$$= \int_{[0,t)} (N(t-x)-V(t-x)-\sigma\mu^{-3/2}W(t-x))\mathrm{d}V_{k-1}(x) +$$
$$+ \sigma\mu^{-3/2} \int_{[0,t)} W(t-x)\mathrm{d}V_{k-1}(x) =: A_k(t) + \sigma\mu^{-3/2}B_k(t),$$

де W - стандартний броунівський рух. Згідно з лемою 3 та асимптотикою $V_k(t)$ при $t \to \infty$

$$|A_k(t)| \leq \sup_{0\leq u\leq t} |N(u)-V(u)-\sigma\mu^{-3/2}W(u)|V_{k-1}(t) =$$
$$= o\big((t^{2k-1}\log\log t)^{1/2}\big), \quad t\to\infty \quad \text{м. н.}$$

Більш того,

$$B_k(t) = \frac{1}{(k-1)!\mu^{k-1}} \int_{(0,t]} (t-x)^{k-1}\mathrm{d}W(x) +$$
$$+ \int_{(0,t]} \Big(V_{k-1}(t-x) - \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!\mu^{k-1}}\Big)\mathrm{d}W(x) =: ((k-1)!\mu^{k-1})^{-1}B_{1,k}(t) + B_{2,k}(t).$$

Лема 4. *Виконується граничне співвідношення*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_{2,k}(t)}{t^{k-1/2}} = 0 \quad \text{м. н.}$$

Доведення. Для цього достатньо показати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\ge 1}\mathbb{P}\{\sup_{t\in[n,\,n+1]}|B_{2,k}(t)| > \varepsilon n^{k-1/2}\} < \infty. \tag{9}$$

Дійсно, якщо це правда, то згідно з лемою Бореля-Кантеллі

$$\sup_{t\in[n\,n+1]}|B_{2,k}(t)| \le \varepsilon n^{k-1/2}$$

для достатньо великих n м. н. Отже, для всіх достатньо великих n і $t\in[n,\,n+1]$

$$|B_{2,k}(t)| \le \sup_{t\in[n,\,n+1]}|B_{2,k}(t)| \le \varepsilon n^{k-1/2} \le \varepsilon t^{k-1/2} \quad \text{м. н.}$$

Таким чином, $\limsup_{t\to\infty}|B_{2,k}(t)|/t^{k-1/2} \le \varepsilon$ м. н.

Надалі $C_1, C_2, \ldots$ позначають додатні константи, значення яких неважливі. Покладемо $f_k(t) := V_{k-1}(t) - ((k-1)!\mu^{k-1})^{-1}t^{k-1}$ для $k\ge 2$ і $t\ge 0$. Запишемо

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[n,\,n+1]}|B_{2,k}(t)-B_{2,k}(n)| = \\
&\quad= \sup_{t\in[0,\,1]}\Big|\int_{(0,n+t]} f_k(n+t-x)\mathrm{d}W(x) - \int_{(0,n]} f_k(n-x)\mathrm{d}W(x)\Big| = \\
&= \sup_{t\in[0,\,1]}\Big|\int_{(n,n+t]} f_k(n+t-x)\mathrm{d}W(x) + \int_{(0,\,n]}(f_k(n+t-x)-f_k(n-x))\mathrm{d}W(x)\Big| \le \\
&\le \sup_{t\in[0,\,1]}\Big|\int_{(n,n+t]} f_k(n+t-x)\mathrm{d}W(x)\Big| + \sup_{t\in[0,\,1]}\Big|\int_{(0,n]}(f_k(n+t-x)-f_k(n-x))\mathrm{d}W(x)\Big|.
\end{aligned}$$

Зазначимо, що випадкова величина $B_{2,k}(n)$ має нормальний розподіл з нульовим середнім та дисперсією $\int_0^n f_k^2(x)dx$. Згідно з лемою 1(в) для достатньо великих n $\int_0^n f_k^2(x)\mathrm{d}x \le C_1 n^{2k-3}$. Отже, для всіх $\varepsilon > 0$ і великих n

$$\mathbb{P}\{|B_{2,k}(n)| > \varepsilon n^{k-1/2}\} \le \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{1/2}\int_{\varepsilon C_1^{-1/2}n}^{\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \le \Big(\frac{2C_1}{\varepsilon^2\pi}\Big)^{1/2}\frac{e^{-\varepsilon^2 n^2/(2C_1)}}{n}.$$

Права частина - це n-й член збіжного ряду.

Покажемо, що процес $B_{2,k}$ є м.н. неперервним. Дійсно,

$$B_{2,k}(t) = \int_{[0,t)} W(t-x)\mathrm{d}V_{k-1}(x) - \frac{1}{(k-1)!\mu^{k-1}}\int_{[0,t)} W(t-x)\mathrm{d}x^{k-1},$$

і кожен доданок м. н. неперервний як згортка Лебега-Стілт'єса м. н. неперервної і неспадної функції. З огляду на м. н. неперервність, яка тягне за собою м. н. обмеженість на $[0,1]$, робимо висновок, що для всіх $\varepsilon > 0$

$$-\log\mathbb{P}\{\sup_{t\in[0;1]}|B_{2,k}(t)| > \varepsilon n^{k-1/2}\} \sim \frac{\varepsilon^2 n^{2k-1}}{2\int_0^1 f_k^2(y)\mathrm{d}y}, \quad n\to\infty \tag{10}$$

згідно з оцінкою ймовірності великих відхилень для м.н. обмежених Гауссівських процесів, див. формулу (1.1) роботи [9]. Оскільки випадкова величина $\sup_{t\in[0,\,1]}\Big|\int_{(n,n+t]} f_k(n+t-x)\mathrm{d}W(x)\Big|$ має той самий розподіл, як і $\sup_{t\in[0,\,1]}|B_{2,k}(t)|$, робимо висновок, що послідовність

$$n\to\mathbb{P}\Big\{\sup_{t\in[0;1]}\Big|\int_{(n,n+t]} f_k(n+t-x)\mathrm{d}W(x)\Big|>\varepsilon n^{k-1/2}\Big\}$$

є сумованою.

Зазначимо, що випадкова величина $\sup_{t\in[0,\,1]}\Big|\int_{(0,n]}(f_k(n+t-x)-f_k(n-x))\mathrm{d}W(x)\Big|$ має той самий розподіл, як і $\sup_{t\in[0,\,1]}\Big|\int_{(0,n]}(f_k(x+t)-f_k(x))\mathrm{d}W(x)\Big|$. Якщо інтеграл Скорохода є збіжним, він збігається з результатом формального інтегрування частинами. Зокрема,

$$\begin{aligned}&\int_{(0,\,n]}(f_k(x+t)-f_k(x))\mathrm{d}W(x)=\\ &\qquad=(f_k(n+t)-f_k(n))W(n)-\int_{(0,\,n]}W(x)\mathrm{d}_x(f_k(x+t)-f_k(x))=\\ &\qquad\qquad=(f_k(n+t)-f_k(n))W(n)+\int_{(0,\,t]}W(x)\mathrm{d}f_k(x)+\\ &\qquad+\int_{(0,n-t]}(W(x+t)-W(x))\mathrm{d}f_k(x+t)-\int_{(n-t,\,n]}W(x)\mathrm{d}f_k(x+t).\end{aligned}$$

Отже, оскільки функція V_{k-1} неспадна

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,\,1]}\Big|\int_{(0,\,n]}(f_k(x+t)-f_k(x))\mathrm{d}W(x)\Big|\le(V_{k-1}(n+1)-V_{k-1}(n))|W(n)|+\\ &+((k-1)!\mu^{k-1})^{-1}((n+1)^{k-1}-n^{k-1})|W(n)|+\sup_{t\in[0;1]}\Big|\int_{(0,t]}W(x)\mathrm{d}V_{k-1}(x)\Big|+\\ &\qquad+((k-1)!\mu^{k-1})^{-1}\sup_{t\in[0,\,1]}\Big|\int_{(0,t]}W(x)\mathrm{d}x^{k-1}\Big|+\\ &\qquad+\sup_{t\in[0;1]}\int_{(0,n-t]}|W(x+t)-W(x)|\mathrm{d}_xV_{k-1}(x+t)+\\ &+((k-1)!\mu^{k-1})^{-1}\sup_{t\in[0,\,1]}\int_{(0,\,n-t]}|W(x+t)-W(x)|\mathrm{d}_x(x+t)^{k-1}+\\ &+\sup_{t\in[0,\,1]}\int_{(n-t,n]}|W(x)|\mathrm{d}_xV_{k-1}(x+t)+((k-1)!\mu^{k-1})^{-1}\times\\ &\qquad\times\sup_{t\in[0,\,1]}\int_{(n-t,\,n]}|W(x)|\mathrm{d}_x(x+t)^{k-1}.\end{aligned}\tag{11}$$

Ми проведемо лише аналіз доданків, що включають V_{k-1}. Аналіз доданків, що включають $t \to t^{k-1}$ аналогічний, але простіший. Починаємо з передостаннього члена в (11). Бачимо, що

$$\sup_{t\in[0,\,1]} \int_{(n-t,\,n]} |W(x)| \mathrm{d}_x V_{k-1}(x+t) \le \sup_{t\in[0,\,1]} (V_{k-1}(n+t) - V_{k-1}(n)) \sup_{n-t\le z\le n} |W(z)| \le$$
$$\le (V_{k-1}(n+1) - V_{k-1}(n)) \sup_{n-1\le z\le n} |W(z)|.$$

Згідно з лемою 1(a) для великих n $V_{k-1}(n+1) - V_{k-1}(n) \le C_2 n^{k-2}$. Випадкова величина $\sup_{z\in[n-1;n]} |W(z)|$ має той самий розподіл, як і $\sup_{z\in[0;1]} |W(z) + W^{'}(n-1)|$, де $W^{'}(n-1)$ - копія $W(n-1)$, що не залежить від $\sup_{z\in[0\,1]} |W(z)|$. Отже, для всіх $\varepsilon > 0$ і великих n

$$\mathbb{P}\{(V_{k-1}(n+1) - V_{k-1}(n)) \sup_{z\in[n-1;n]} |W(z)| > \varepsilon n^{k-1/2}\} \le$$
$$\le \mathbb{P}\{(V_{k-1}(n+1) - V_{k-1}(n)) \sup_{z\in[0;1]} |W(z)| > \varepsilon n^{k-1/2}/2\} +$$
$$+ \mathbb{P}\{(V_{k-1}(n+1) - V_{k-1}(n))|W^{'}(n-1)| > \varepsilon n^{k-1/2}/2\} =: R_{n,1} + R_{n,2}.$$

Далі,

$$R_{n,2} \le \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{1/2} \int_{2^{-1}C_2^{-1/2}\varepsilon n}^{\infty} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x \le \Big(\frac{8C_2}{\varepsilon^2 \pi}\Big)^{1/2} \frac{e^{-\varepsilon^2 n^2/(8C_2)}}{n}.$$

Права частина - це n-й член збіжного ряду. Використовуючи нерівності

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\in[0,\,1]} |W(t)| > x\} \le 2\mathbb{P}\{\sup_{t\in[0,\,1]} W(t) > x\} = 2\mathbb{P}\{|W(1)| > x\}, \quad x > 0, \quad (12)$$

ми також доходимо до висновку, що послідовність $(R_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ сумована. Таким чином, для всіх $\varepsilon > 0$ послідовність

$$n \to \mathbb{P}\{(V_{k-1}(n+1) - V_{k-1}(n)) \sup_{z\in[n-1;n]} |W(z)| > \varepsilon n^{k-1/2}\}$$

сумована, і тому послідовність

$$n \to \mathbb{P}\{(V_{k-1}(n+1) - V_{k-1}(n))|W(n)| > \varepsilon n^{k-1/2}\}$$

сумована, оскільки $|W(n)| \le \sup_{z\in[n-1;n]} |W(z)|$. Для всіх $\varepsilon > 0$ послідовність

$$n \to \mathbb{P}\Big\{\sup_{t\in[0;1]} \Big| \int_{(0,t]} W(x) \mathrm{d}V_{k-1}(x) \Big| > \varepsilon n^{k-1/2}\Big\}$$

сумована внаслідок нерівності

$$\sup_{t\in[0,1]}\Big|\int_{(0,t]}W(x)\mathrm{d}V_{k-1}(x)\Big|\le\int_{(0,1]}|W(x)|\mathrm{d}V_{k-1}(x)\le\sup_{t\in[0,1]}|W(t)|V_{k-1}(1)$$

і (12).

Остаточно,

$$\sup_{t\in[0,1]}\int_{(0,n-t]}|W(x+t)-W(x)|\mathrm{d}_xV_{k-1}(x+t)\le$$
$$\le V_{k-1}(n)\sup_{t\in[0,1]}\sup_{z\in[0,n-1]}|W(z+t)-W(z)|.$$

Виходячи з асимптотики $V_k(t)$, $V_{k-1}(n)\le C_3n^{k-1}$ для великих n. Згідно з лемою 1.2.1 на ст. 29 монографії [2] для заданого $\delta>0$ існує $C=C(\delta)>0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon>0$ і $n\ge 2$

$$\mathbb{P}\{V_{k-1}(n)\sup_{t\in[0;1]}\sup_{z\in[0;n-1]}|W(z+t)-W(z)|>\varepsilon n^{k-1/2}\}\le Cn\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2n}{C_3^2(2+\delta)}\Big).$$

Це доводить, що послідовність

$$n\to\mathbb{P}\Big\{\sup_{t\in[0;1]}\int_{(0,n-t]}|W(x+t)-W(x)|\mathrm{d}_xV_{k-1}(x+t)>\varepsilon n^{k-1/2}\Big\}$$

сумована. Об'єднавши всі фрагменти, доходимо до висновку, що (9) справджується. □

Згідно з теоремою 1 статті [8]

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{(2k-1)^{1/2}B_{1,k}(t)}{(2t^{2k-1}\log\log t)^{1/2}}=1\quad\text{м. н.}$$

Оскільки $-W$ - також Броунівський рух, ми робимо висновок, що

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{(2k-1)^{1/2}B_{1,k}(t)}{(2t^{2k-1}\log\log t)^{1/2}}=-1\quad\text{м. н.}$$

і після цього

$$C\Big(\Big(\frac{(2k-1)^{1/2}B_{1,k}(t)}{(2t^{2k-1}\log\log t)^{1/2}}:t>e\Big)\Big)=[-1;1]\quad\text{м. н.}$$

оскільки випадкова функція $t\to B_{1,k}(t)t^{1/2-k}(\log\log t)^{-1/2}$ - м. н. неперервна на $(e;\infty)$. Це завершує доведення теореми 1.

6. Висновки

У даній дипломній роботі був доведений закон повторного логарифма для загального гіллястого процесу, породженого процесом відновлення. Гіллястий процес, про який йдеться в роботі, є окремим випадком гіллястого процесу Крампа-Мода-Ягерса, у якому народження у першому поколінні регулюються процесом відновлення $(N(t))_{t\geq 0}$. Гіллястому процесу Крампа-Мода-Ягерса присвячено чимало наукових статей. Однак у цій роботі була знайдена множина граничних точок для сім'ї функцій, де фігурує функція $N_k(t)$ - кількість індивідуумів, народжених до моменту t включно. Це дає змогу краще зрозуміти поведінку і асимптотику функції $N_k(t)$ при $t > e$. Результат роботи може бути застосований для дослідження еволюції індивідуумів різних біологічних видів. Таким чином, робота є актуальною і може бути застосованою в різних галузях, зокрема, в біології.

Література

[1] Asmussen S. and Hering H. *Branching processes.* Birkhäuser, 1983.

[2] Csörgö M. and Revesz P. *Strong approximations in probability and statistics.* Academic Press, 1981.

[3] Iksanov A. and Kabluchko Z. *A functional limit theorem for the profile of random recursive trees.* Electron. Commun. Probab. **23**, article no. 87 (2018), 13 pp.

[4] Iksanov A. and Kabluchko Z. *Weak convergence of the number of vertices at intermediate levels of random recursive trees.* J. Appl. Probab. **55** (2018), 1131–1142.

[5] Iksanov A., Marynych A. and Rashytov B. *Stable fluctuations of iterated perturbed random walks in intermediate generations of a general branching process tree.* Lith. Math. J. **62** (2022), 447–466.

[6] Iksanov A., Rashytov B. and Samoilenko I. *Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: early generations.* J. Appl. Probab. **60** (2023), 45–67.

[7] Bohun, V., Iksanov A., Marynych A. and Rashytov B. *Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: intermediate generations.* J. Appl. Probab. **59** (2022), 421-446.

[8] A. Lachal *Local asymptotic classes for the successive primitives of Brownian motion.* Ann. Probab. **25** (1997), 1712–1734.

[9] Marcus M. B. and Shepp L.A. *Sample behavior of Gaussian processes.* Proc. Sixth Berkeley Math. Symp. Statist. Probab. **2** (1972), 423–441. Univ. California Press, Berkeley.