УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.14

І.В. Розора[1], *к.ф.-м.н., доцент*
О.С. Переяслов [2], *студ.*

Розробка програмного забезпечення для моделювання випадкових процесів із заданою точністю та надійністю

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13.

e-mail: [1] irozora@bigmir.net
e-mail: [2] paslstchs@gmail.com

I.V. Rozora[1], *Ph.D., Associate Professor*
O.S.Pereiaslov[2], *stud.*

The development of software for simulation of random processes with a given accuracy and reliability

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st.,

e-mail: [1] irozora@bigmir.net
e-mail: [2] paslstchs@gmail.com

У даній роботі розглядаються стаціонарні гауссові випадкові процеси, вивчається питання точності та надійності побудованих моделей. Це означає, що спочатку ми будуємо модель, а потім перевіряємо її, використовуючи деякі тести на адекватність з відомою точністю та надійністю. А також знайдені оцінки методом моментів для параметрів моделі. Всі отримані теоретичні результати покладено в основу розробки програмного забезпечення для побудови відповідних моделей.

Ключові слова: моделювання, точність, надійність, оцінювання

Today, the theory of random processes and time series prediction is widely used in various fields of science, not only in natural fields. That is why one of the urgent problems is to build a mathematical model of a random process and study its properties. Numerical modeling tasks become especially important due to the powerful capabilities of computer technology, which allows you to create software modeling tools and predict the behavior of a random process. There are different methods of modeling random processes and fields. In some works related to the modeling of random processes, the issues of accuracy and reliability have not been studied. In [1, 2, 3] for various stochastic processes and fields this problem was investigated. In this paper the question of accuracy and reliability of the constructed model is considered. This means that we first build the model and then test it using some adequacy tests with known accuracy and reliability. We also find the estimators of the model parameters using methods of moments. All theoretical results are applied to develop software for model construction of stochastic processes.

Key Words: simulation, accuracy, reliability, estimation.
Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

Сьогодні теорія випадкових процесів та прогнозування часових рядів широко використовується в різних галузях науки, а не тільки в природничих областях. Ось чому однією з актуальних проблем є побудова математичної моделі випадкового процесу та вивчення її властивостей. Задачі чисельного моделювання стають особливо важливими завдяки потужним можливостям комп'ютерних технологій, що дозволяють створювати інструменти моделювання програмного забезпечення та прогнозувати поведінку випадкового процесу. Існують різні методи моделювання випадкових процесів та полів. В деяких роботах, що стосуються моделювання випадкових процесів, питання точності та надійності не вивчено. В [1, 2, 3] для різних стохастичних процесів і полів ця проблема була досліджена.

Робота присвячена теоретичному обгрунтуванню та створенню програмного забезпечення для моделей гауссових випадкових процесів з дискретним спектром. Ці процеси розглядаються як вхідні процеси для стаціонарної лінійної системи з дійснозначною інтегрованою з квадратом імпульсної перехідною функцією. Більш детальну інформацію про лінійну систему, що описується за допомогою імпульсної функції, та про оцінки імпульсної функції можна знайти в [4]. Реакцію системи на вхідний сигнал будемо також називати ихідним процесом. У роботі використовуються методи і властивості квадратично-гауссових процесів, метод моментів для знаходження оцінки параметрів процесу.

Метою роботи є побудова моделі $X_N(t)$, яка буде наближати вхідний процес $X(t)$ із заданою точністю та надійністю в банаховому просторі $L_2([0,T])$ з врахуванням реакції системи, знаходження оцінок моделі за вхідними даними та створення програмної реалізації для побудови моделей таких поцесів. Для цього розглядаємо теорему, що дає необхідні умови для побудови моделі.

2 Теоретичні викладки

Нехай (Ω, F, P) є деяким імовірнісним простором.

Означення 2.1. Стаціонарний стохастичний процес називається процесом з дискретним спектром, якщо його кореляційна функція може бути задана як

$$B(h) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \cos \lambda_k h,$$

де $b_k^2 > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty$, та λ_κ - зростаюча послідовність така, що $0 \leqslant \lambda_\kappa \leqslant \lambda_{k+1} \to \infty$, коли $k \to \infty$.

З визначення вище випливає, що (див., наприклад, [1, 2]) стохастичний процес з дискретним спектром може бути записаний таким чином

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t), \qquad (1)$$

де ξ_k, η_k є незалежними випадковими величинами з нульовим математичним сподіванням, $E\xi_k = E\eta_k = E\xi_k\eta_l = 0$ та $E\xi_k\xi_l = E\eta_k\eta_l = \delta_k^l$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$.

Зауважимо, що ряд в (1) збігається в середньому квадратичному [1, 2]. Якщо випадкові величини ξ_k, η_k є гауссовими, тоді випадковий процес $X(t)$ з (1) буде також гауссовим. У роботі розглядається гауссовий випадковий процес з дискретним спектром.

Розглянемо стаціонарну лінійну систему з дійснозначною інтегрованою з квадратом імпульсної перехідною функцією $H(\tau)$, яка визначається в області $\tau \in [0,T]$. Це означає, що реакція системи на вхідний сигнал $X(t)$, який спостерігається на $[-T,T]$, має такий вигляд

$$Y(t) = \int_0^T H(\tau) X(t-\tau) d\tau, \quad t \in [0,T] \qquad (2)$$

та $H(\tau) \in L_2([0,T])$.

Припустимо, що функція імпульсної відповіді є відома. Ми також припускаємо, що вхідний сигнал в системі (2) є стаціонарним випадковим процесом з дискретним спектром. З (1) та (2) випливає, що відповідь системи $Y(t)$ може бути представлена як

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\xi_k \cdot c_k(t) + \eta_k \cdot s_k(t)), \qquad (3)$$

де функції $c_k(t)$, $s_k(t)$ дорівнюють

$$\begin{aligned} c_k(t) &= b_k \int_0^T H(\tau) \cos(\lambda_k(t-\tau)) d\tau, \\ s_k(t) &= b_k \int_0^T H(\tau) \sin(\lambda_k(t-\tau)) d\tau, \ t \in [0,T](4) \end{aligned}$$

У даній роботі досліджується побудова моделі процесу $X(t)$ та умови для наближення вхідного сигналу $X(t)$ побудованою моделлю з урахуванням реакції системи (вихідного процесу) $Y(t)$ з заданою точністю та надійністю в банаховому просторі $L_2([0,T])$. Для досягнення цієї мети використовується теорія квадратично-гауссових випадкових величин і стохастичних процесів.

Моделлю стохастичного процесу $X(t)$ будемо називати зрізаний ряд з (1).

Означення 2.2. Випадковий процес $X_N(t)$ називається моделлю процеса $X(t)$, якщо

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k(\xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t).$$

Якщо модель $X_N(t)$ розглядається як вхідний сигнал лінійної системи, то вихідний процес має такий вигляд

$$Y_N(t) = \sum_{k=0}^{N} (\xi_k \cdot c_k(t) + \eta_k \cdot s_k(t)),$$

де функції $c_k(t)$, $s_k(t)$ з (4).

Через $\xi_N(t)$ позначимо суму квадратів різниць $X(t)-X_N(t)$ та $Y(t)-Y_N(t)$

$$\xi_N(t)=(X(t)-X_N(t))^2+(Y(t)-Y_N(t))^2 \quad (5)$$

Означення 2.3. Будемо говорити, що модель $X_N(t)$ апроксимує стохастичний процес $X(t)$ з урахуванням відповіді системи з заданою надійністю $1-\nu$, $\nu\in(0,1)$, і точність $\delta>0$ у просторі $L_2([0,T])$, якщо

$$P\left\{\int_T|\xi_N(t)-E\xi_N(t)|^2d\mu(t)>\delta\right\}<\nu.$$

Розглянемо такі умови:

- **Умова A:** Існує стала $c>0$, яка обмежує функцію імпульсної відповіді $H(\tau)$ на області $[0,T]$
$$|H(\tau)|\leqslant c.$$
- **Умова B:** Наступний інтеграл є збіжним
$$I_H=\int_0^T H^2(\tau)d\tau<\infty.$$
- **Умова C:**
$$\sum_{k=N+1}^{\infty}b_k^2\lambda_k^{2\alpha}<\infty,\ \alpha\in(0,1].$$

Припустимо, що умови **A, B, C** виконуються. Тоді

$$E\xi_N(t) \leqslant (1+T\cdot I_H)\sum_{k=N+1}^{\infty}b_k^2;$$

$$\begin{aligned}D\xi_N(t) \leqslant\ & (8+2T^2\cdot I_H^2)\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}b_k^2\right)^2\\ &+(64c^2+2\cdot I_H^2)\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k^2}{\lambda_k}\right)^2\\ &+4T\cdot I_H^2\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}b_k^2\right)\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k^2}{\lambda_k}\right):=(\delta_0(N))^2;\end{aligned}$$

Теорема 2.1. *[6] Припустимо, що умови **A, B, C** виконуються. Модель $X_N(t)$ апроксимує гауссовий стохастичний процес з дискретним спектром $X(t)$, беручи до уваги реакцію системи, із заданою надійністю $1-\nu$, $\nu\in(0,1)$, та точністю $\delta>0$ в просторі $L_2([0,T])$, якщо для N справедливі нерівності*

$$\delta\geqslant(\frac{2}{\sqrt{2}}+4)C_2(N), \quad (6)$$

$$2\sqrt{1+\frac{\delta^{1/2}\sqrt{2}}{C_2(N)^{\frac{1}{2}}}}\exp\left\{-\frac{\delta^{1/2}}{\sqrt{2}C_2(N)^{\frac{1}{2}}}\right\}<\nu, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned}C_2(N) &= \int_T(D_N(t))dt\\ &= \Bigg[(8+2T^2\cdot I_H^2)\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}b_k^2\right)^2 \quad (8)\\ &+ (64c^2+2\cdot I_H^2)\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k^2}{\lambda_k}\right)^2\\ &+ 4T\cdot I_H^2\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}b_k^2\right)\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k^2}{\lambda_k}\right)\Bigg]^{\frac{1}{2}};\end{aligned}$$

3 Знаходження оцінок параметрів моделі

Для побудови моделі процесу за вибірковими значеннями потрібно запропонувати метод оцінювання характеристик процесу b_k і λ_k.

Надалі припускаємо, що ці значення мають показниковий вигляд:

$$b_k=b^k,\quad \lambda_k=\lambda^k,$$

де $b\in(0,1)$, $\lambda>1$, — невідомі параметри, що потрібно оцінити.

Для знаходження оцінки b використаємо метод моментів. Обчислимо другий теоретичний момент:

$$\begin{aligned}Ex^2(t) &= E\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}b^ib^j(\xi_i\sin\lambda^it+\eta_i\sin\lambda^it)\\ &\times (\xi_j\sin\lambda^jt+\eta_j\sin\lambda^jt)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}b^ib^j\\ &\times E\big[\xi_i\xi_j\sin\lambda^it\sin\lambda^jt+E\xi_i\eta_j\sin\lambda^it\cos\lambda^jt\\ &+ \eta_i\xi_j\cos\lambda^it\sin\lambda^jt+E\eta_i\eta_j\cos\lambda^it\cos\lambda^jt\big]\end{aligned}$$

Оскільки

$$E\xi_i\xi_j=E\eta_i\eta_j=\delta_{ij},\quad E\xi_i\eta_j=0,\forall i,j\geqslant0,$$

де δ_{ij}— символ Кронекера, то

$$Ex^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b^{2i}\left[E\xi_i^2 \sin^2 \lambda^i t + E\eta_i^2 \cos^2 \lambda^i t\right] = \sum_{i=0}^{\infty} b^{2i} = \frac{1}{1-b^2}.$$

Якщо задана вібірка розмірністю n для вхідного процесу $(x_1, \cdots, x_n)$, то оцінку b можна знайти, якщо прирівняти вибірковий та теоретичний момент:

$$\frac{1}{1-\hat{b^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Тому

$$\hat{b} = \sqrt{1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}$$

Щоб оцінити параметр λ, прирівняємо теоретичний та вибірковий вигляд кореляційної функції в точці $t = 1$:

$$B(1) = \sum_{k=0}^{N} b^{2k} \cos(\lambda^k)$$

$$\hat{B(1)} = Cov(X(t+1), X(t)) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(X_{k+1} - \overline{X_1})(X_k - \overline{X_2}),$$

де $\overline{X_1} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n} x_i$ та $\overline{X_2} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_i$.

Оскільки cos та sin мають період 2π, то стає можливим перебір можливих варіантів оцінки λ. Беручи до уваги те, що $\lambda \geqslant 1$, інтервал для перебору має вигляд $(1, 2\pi]$. Для прискорення пошуку відповідного значення перебір починається з кроком $h = 0.1$ і далі поступово зменшується. Таким чином ми кількісно оцінили параметр моделі λ.

4 Програмна реалізація

Для створення моделі процесу та пошуку N для різної точності та надійності з умов теореми 2.1 використаємо вільне програмне середовище Microsoft Visual Studio та мову C#. Для роботи програми треба ввести вхідні дані, а саме: точніть, надійність та вибірку даних.

Для тестування програми використовувалась вибірка курсу гривні до долару. Дані були взяті з відкритої платформи даних Quandl. В представленому прикладі розглядаємо курс гривні за останні 20 місяців. На основі вхідних даних були знайдені оцінки $\lambda = 1.57$, $b = 0.819$ та верхня межа сумування N. Результат моделі можна побачити на рисунку 1.

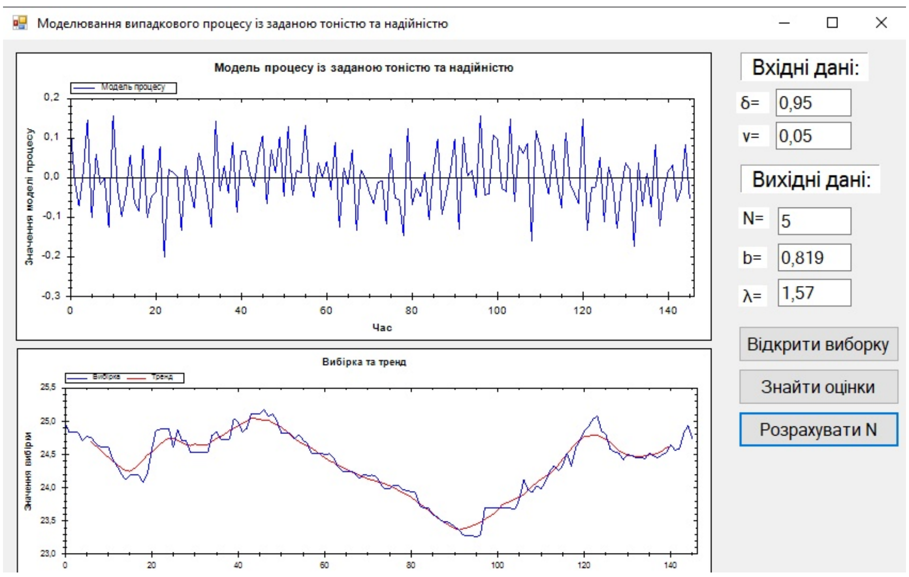

Рис.1 Інтерфейс програмного забезпечення для моделювання випадкових процесів

5 Висновки

В роботі вивчались гаусссові випадкові процеси з дискретним спектром. Для них запропонована модель, що наближає процес із наперед заданими точністю та надійністю в просторі $L_p([0,T])$. Методом моментів знайдені оцінки параметрів моделі. А також розроблено програмне забезпечення для знаходження моделі, оцінок параметрів моделі. Одним із результатів програми є побудована траєкторія моделі випадкового процесу.

Список використаних джерел

1. *Козаченко Ю.* Моделювання випадкових процесів та полів/ Ю.Козаченко, А.Пашко, І.Розора.– Київ, Задруга.– 2007.

2. *Козаченко Ю.* Моделювання випадкових процесів із заданою точністю та надійністю / Ю.Козаченко, О.Погоріляк, І.Розора, А.Тегза.— Лондон, ISTE Press - Elsevier.– 2016.

3. *Козаченко Ю.* Моделювання гауссових випадкових процесів / Ю.Козаченко, І.Розора // Random Oper. and Stochastic Equ. – 2003.– 11, №.3. – С.275–296.

4. *Козаченко Ю.* Про корелограмні оцінки імпульсних перехідних функцій / Ю.Козаченко, І.Розора // Теор. ймовір. та матем. статист.– 2015.– № 93.–С. 75-86.

5. *Розора І.* Про моделювання вхідних випадкових процесів на лінійну систему із заданою точністю та надійністю / І.Розора, М.Лижечко // Monte Carlo Methods Appl.– 2018.– **24**, №. 2.– С.129–137.

6. *Розора І.* Про точність та надійність моделювання в просторі $L_p([0,T])$ вхідного гауссового процесу, що подається на лінійну систему, з урахуванням виходу / І.Розора // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.–2018.– №. 2.– С.75–80.

References

1. KOZACHENKO YU., PASHKO A., ROZORA I. (2007) *Simulation of Stochastic Processes and fields*, Zadruga, Kyi. (in Ukrainian)

2. KOZACHENKO Yu., POGORILYAK O., ROZORA I. AND TEGZA A. (2016) *Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability*, ISTE Press - Elsevier.

3. KOZACHENKO, YU., ROZORA, I. (2003) Simulation of Gaussian stochastic processes, *Random Oper. and Stochastic Equ.*, **11**, №.3, 275–296.

4. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2015) On cross-correlogram estimators of impulse response functions *Theor. Probability and Math. Statist.*, **93**, 75-86.

5. ROZORA I., LYZHECHKO M. (2018) On the modeling of linear system input stochastic processes with given accuracy and reliability, *Monte Carlo Methods Appl.*, **24**, №. 2, 129–137.

6. ROZORA I. (2018) On simulation accuracy and reliability in the space $L_p([0,T])$ for the input Gaussian process served by the linear system taking into account the output, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №. 2, 75–80.

Received: 20.12.2019