УДК 519.233.2+681.5
DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/2.10

Олександр СЛАБОСПИЦЬКИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доц.
ORCID ID: 0009-0007-8753-2075
e-mail: alexsl@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

РЕКУРЕНТНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПАРАМЕТРІВ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ З НАЙМЕНШИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ ВІД ТОЧОК ТЯЖІННЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА НЕКЛАСИЧНИХ ПРИПУЩЕНЬ

Для дискретних нелінійних динамічних систем розглянуто задачу оптимального оцінювання нестаціонарних параметрів, що можуть повільно змінюватися із часом. Для оцінювання невідомих параметрів згаданих об'єктів використано метод найменших квадратів зі змінним фактором забування. Розглянуто ситуацію, коли можуть бути порушені класичні припущення, що гарантують єдиність цієї оцінки. У попередніх публікаціях як єдину оцінку на множині усіх таких оцінок проаналізовано оцінку, що має найменшу евклідову норму, тобто найменше відхилення від нульового вектора. Для неї були отримані явна та рекурентна форми представлення. Також було запропоновано рекурентну процедуру обчислення значення відповідної залишкової суми квадратів. У цій статті на множині усіх оптимальних оцінок як єдину оцінку було взято оцінку, що має найменше відхилення від заданих точок тяжіння у кожен момент часу. Для цієї оцінки наведено явну форму представлення через оператор псевдообернення за Муром – Пенроузом. Також отримано зручну рекурентну форму представлення для неї, що дає змогу прискорити процес обчислення, оскільки вона вже не вимагає використання ні операції псевдообернення матриць за Муром – Пенроузом, ні навіть операції звичайного обернення матриць. Представлений рекурентний алгоритм для відповідної зваженої залишкової суми квадратів буде корисним для контролю якості отриманої математичної моделі. Запропоновані рекурентні процедури перерахунку оптимальної оцінки нестаціонарних параметрів з найменшим відхиленням від заданих точок тяжіння та зваженої залишкової суми квадратів сприяють суттєвому прискоренню процесу оцінювання нестаціонарних параметрів у режимі on-line для дискретних нелінійних динамічних систем у разі можливого порушення класичних припущень та дають змогу уникнути необхідності обчислення псевдообернених матриць за Муром – Пенроузом.

Ключові слова: ***дискретна нелінійна динамічна система, рекурентне оцінювання нестаціонарних параметрів, некласичні припущення, точки тяжіння, оператор псевдообернення за Муром – Пенроузом, метод найменших квадратів зі змінним фактором забування, зважена залишкова сума квадратів.***

Класифікація відповідно до AMS 2020: 93E24, 62H12.

Вступ

Побудова якісної математичної моделі для динамічного об'єкта надає суттєві переваги під час його подальшого дослідження. У багатьох випадках конструювання моделі зводиться до задачі оптимального оцінювання її постійних параметрів. Проте не завжди параметри математичної моделі є стаціонарними, бо з плином часу вони можуть повільно змінюватися, що приводить до необхідності розв'язання актуальнішої задачі оптимального оцінювання нестаціонарних параметрів математичної моделі. Зі свого боку, така модель може надати адекватніше представлення системи та можливість провести її ефективніше дослідження.

Залежно від обсягу апріорної інформації про невизначеності об'єкта можна використовувати ряд методів для оцінювання її постійних параметрів (Eykhoff, 1974; Graupe, 1976; Isermann, & Münchhof, 2011; Ljung, 1999; Ljung, & Söderström, 1983; Söderström, & Stoica, 1994; Tangirala, 2015).

Одним з поширених методів ідентифікації стаціонарних параметрів математичної моделі є метод найменших квадратів (МНК). За справедливості класичних припущень оцінка МНК є єдиною і добре дослідженою (Björck, 1996; Hansen, et al., 2013; Hsia, 1977; Rao, et al., 2007; Weisberg, 2013; Wolberg, 2006). У разі, коли ця оцінка може бути не є єдиною, тобто можливе порушення класичних припущень, то під час дослідження оцінки МНК потрібно звернутися до використання оператора псевдообернення за Муром – Пенроузом (Moore, 1920; Penrose, 1955). У цій ситуації аналіз оцінки МНК з найменшою нормою при оцінюванні постійних параметрів регресійної моделі було наведено у роботі (Albert, 1972). Перенесення останніх результатів на випадок оцінювання нестаціонарних параметрів за допомогою МНК зі змінним фактором забування було проведено в роботі (Слабоспицький, 1999).

Надалі врахування знання точок тяжіння для стаціонарних параметрів регресійної моделі у випадку можливого порушення класичних припущень, як єдину оцінку на множині усіх оцінок МНК дало змогу взяти не оцінку з найменшою нормою, а оцінку з найменшим відхиленням від точки тяжіння у кожен момент часу й отримати відповідні алгоритми (Слабоспицький, 2008). Потім ці результати було перенесено на оцінювання нестаціонарних параметрів регресійної моделі (Слабоспицький, 2012) та лінійної динамічної системи за допомогою МНК зі змінним фактором забування.

Пропонована робота присвячена поширенню останніх результатів на випадок оцінювання нестаціонарних параметрів нелінійних дискретних динамічних систем за допомогою оцінок методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшими відхиленнями від заданих точок тяжіння в кожен момент часу у ситуації, коли можливе порушення класичних припущень.

1. Основні результати

Розглянемо динамічний об'єкт, математична модель якого має такий вигляд:

$$x(k+1) = F(x(k),u(k),k)\alpha + g(x(k),u(k),k) + \xi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де вектор фазового стану $x(k) \in \mathbb{R}^n$, вектор керувань $u(k) \in \mathbb{R}^m$, вектор збурень $\xi(k) \in \mathbb{R}^n$, вектор невідомих параметрів $\alpha \in \mathbb{R}^p$, $F(x(k),u(k),k)$, $g(x(k),u(k),k)$ – задані матрична та векторна функції відповідних розмірностей.

Нехай відомо, що вектор параметрів α може повільно змінюватися з плином часу і для нього в кожен момент часу k доступна інформація про його точку тяжіння $\alpha_*(k), k \in \mathbb{N}$.

Потрібно за доступними значеннями векторів фазового стану та керування знайти оцінку вектора параметрів α. Для його оцінювання скористаємося методом найменших квадратів із заданим змінним фактором забування $\lambda(k), \lambda(k) \in (0,1], k \in \mathbb{N}$. Задачу будемо розв'язувати у припущенні, що не гарантована справедливість класичних припущень, які забезпечують єдиність цієї оцінки.

З огляду на це множину усіх таких оптимальних оцінок, можна задати як

$$\operatorname{Arg}\min_{\alpha} Q(\alpha, N), \tag{2}$$

де функціонал якості

$$Q(\alpha, N) = \sum_{k=1}^{N} w(k,N)\|\xi(k)\|^2, \quad \|\bullet\| \text{ – евклідова норма,}$$

$$w(k,N) = \begin{cases} \prod_{i=k}^{N-1} \lambda(i), & \textit{якщо} \quad k = \overline{1, N-1}, \\ 1, & \textit{якщо} \quad k = N. \end{cases}$$

Згідно з роботою (Слабоспицький, 2012) множину всіх оптимальних оцінок (2) задаємо так:

$$\operatorname{Arg}\min_{\alpha} Q(\alpha, N) = \left\{\hat{\alpha}_c(N): \quad \hat{\alpha}_c(N) = \tilde{F}_N^+ \tilde{x}_N + \left(E_p - \tilde{F}_N^+ \tilde{F}_N\right)c, c \in \mathbb{R}^p\right\}, \tag{3}$$

де $(^+)$ – оператор псевдообернення за Муром – Пенроузом, E_p – одинична матриця порядку p,

$$\tilde{x}_N = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1,N)\left(x(2) - g(x(1),u(1),1)\right) \\ w^{\frac{1}{2}}(2,N)\left(x(3) - g(x(2),u(2),2)\right) \\ \dots \\ w^{\frac{1}{2}}(N,N)\left(x(N+1) - g(x(N),u(N),N)\right) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{F}_N = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1,N)F(x(1),u(1),1) \\ w^{\frac{1}{2}}(2,N)F(x(2),u(2),2) \\ \dots \\ w^{\frac{1}{2}}(N,N)F(x(N),u(N),N) \end{pmatrix}.$$

Причому як єдину оцінку $\hat{\alpha}(N)$ у момент N на цій множині оцінок (3) візьмемо оцінку $\hat{\alpha}_{\alpha_*(N)}(N)$ з найменшим відхиленням від заданої точки тяжіння $\alpha_*(N)$. Зважаючи на це, явна форма представлення шуканої оцінки $\hat{\alpha}(N)$ згідно з публікацією (Слабоспицький, 2012) набуває вигляду

$$\hat{\alpha}(N) = \hat{\alpha}_{\alpha_*(N)}(N) = \tilde{F}_N^+ \tilde{x}_N + \left(E_p - \tilde{F}_N^+ \tilde{F}_N\right)\alpha_*(N), N \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Зауважимо, що з огляду на це оцінка з найменшою евклідовою нормою буде такою:

$$\hat{\alpha}_{\theta_p}(N) = \tilde{F}_N^+ \tilde{x}_N, \tag{5}$$

де θ_p – нульовий вектор розмірності p.

Для отримання рекурентної форми представлення для оцінки $\hat{\alpha}(N)$ спочатку є необхідність навести рекурентну процедуру для перерахунку оцінки з найменшою евклідовою нормою $\hat{\alpha}_{\theta_p}(N)$. Якщо скористатися результатом з роботи (Слабоспицький, 2005), то шуканий алгоритм у потрібному вигляді не важко виписати і він набуває вигляду, наведеному в наступному твердженні.

Лема. *Для оцінки (5) вектора нестаціонарних параметрів* α *системи (1) методу найменших квадратів зі змінним фактором забування з найменшою евклідовою нормою рекурентний алгоритм є таким*:

$$\hat{\alpha}_{\theta_p}(N+1) = \tilde{\alpha}(N+1,n), \quad N = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, \textit{ де, якщо } \delta(N+1, j+1) > 0, \textit{ то}$$

$$
\begin{cases}
\tilde{\alpha}(N+1,j+1)=\tilde{\alpha}(N+1,j)+\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times \\
\qquad \times[x_{j+1}(N+2)-f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{\alpha}(N+1,j)- \\
\qquad -g_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)]/\delta(N+1,j+1), \\
\tilde{R}(N+1,j+1)=\dfrac{1}{\tilde{\lambda}(N,j+1)}\Big\{\tilde{R}(N+1,j)- \\
\qquad -\dfrac{1}{\delta(N+1,j+1)}\Big[\tilde{R}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times \\
\qquad \times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{P}(N+1,j)+ \\
\qquad +\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times \\
\qquad \times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{R}(N+1,j)\Big]+ \\
\qquad +\dfrac{\gamma(N+1,j+1)}{\delta^{2}(N+1,j+1)}\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times \\
\qquad \times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{P}(N+1,j)\Big\}, \\
\tilde{P}(N+1,j+1)=\tilde{P}(N+1,j)-\dfrac{1}{\delta(N+1,j+1)}\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times \\
\qquad \times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{P}(N+1,j), \qquad j=\overline{0,n-1},
\end{cases}
$$

інакше

$$
\begin{cases}
\tilde{\alpha}(N+1,j+1)=\tilde{\alpha}(N+1,j)+\dfrac{1}{\gamma(N+1,j+1)}\times \\
\qquad \times\tilde{R}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times \\
\qquad \times[x_{j+1}(N+2)-f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{\alpha}(N+1,j)- \\
\qquad -g_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)], \\
\tilde{R}(N+1,j+1)=\dfrac{1}{\tilde{\lambda}(N,j+1)}\Big\{\tilde{R}(N+1,j)- \\
\qquad -\dfrac{1}{\gamma(N+1,j+1)}\tilde{R}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times \\
\qquad \times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{R}(N+1,j)\Big\}, \\
\tilde{P}(N+1,j+1)=\tilde{P}(N+1,j), \qquad j=\overline{0,n-1},
\end{cases}
$$

з початковими умовами:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\alpha}(N+1,0)=\tilde{\alpha}(N,n), \quad \tilde{\alpha}(1,0)=\theta_{p}, \\
&\tilde{R}(N+1,0)=\tilde{R}(N,n), \quad \tilde{R}(1,0)=\Theta_{p}, \\
&\tilde{P}(N+1,0)=\tilde{P}(N,n), \quad \tilde{P}(1,0)=E_{p},
\end{aligned}
$$

де (^{T}) *– символ транспонування,* Θ_p *– нульова матриця порядку* p ,

$$
x(k)=\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix},\ F(x(k),u(k),k)=\begin{pmatrix} f_1^{T}(x(k),u(k),k) \\ f_2^{T}(x(k),u(k),k) \\ \vdots \\ f_n^{T}(x(k),u(k),k) \end{pmatrix},\ g(x(k),u(k),k)=\begin{pmatrix} g_1(x(k),u(k),k) \\ g_2(x(k),u(k),k) \\ \vdots \\ g_n(x(k),u(k),k) \end{pmatrix},
$$

$$
\delta(N+1,j+1)=f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1),
$$

$$\gamma(N+1,j+1)=\tilde{\lambda}(N,j+1)+f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{R}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1),$$

$$\lambda(0)=1,\quad \tilde{\lambda}(N,j+1)=\begin{cases}\lambda(N), & \textit{якщо}\quad j=0,\\ 1, & \textit{якщо}\quad j=\overline{1,n-1}.\end{cases}$$

Після того, як отримано рекурентну форму представлення для оцінки методу найменших квадратів зі змінним фактором забування з найменшою евклідовою нормою $\hat{\alpha}_{\theta_p}(N)$, можна перейти до побудови рекуренту для оцінки $\hat{\alpha}(N)$.

Потрібну рекурентну форму представлення для оцінки $\hat{\alpha}(N)$ не важко навести, якщо врахувати співвідношення (4)–(5) та те, що $\tilde{P}(N,n)=E_p-\tilde{F}_N^{+}\tilde{F}_N$, $N\in\mathbb{N}$.

У підсумку отримуємо такий результат.

Теорема 1. *Рекурентний алгоритм для оцінки (4) методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшим відхиленням від заданої точки тяжіння* $\alpha_*(N)$ *у кожен момент часу* N *для вектора нестаціонарних параметрів* α *системи (1) буде таким:*

$$\hat{\alpha}(N+1)=\tilde{\alpha}(N+1,n)+\tilde{P}(N+1,n)\alpha_*(N+1),\quad N=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

де, якщо $\delta(N+1,j+1)>0$, *то*

$$\begin{cases}
\tilde{\alpha}(N+1,j+1)=\tilde{\alpha}(N+1,j)+\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times\\
\qquad\times[x_{j+1}(N+2)-f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{\alpha}(N+1,j)-\\
\qquad-g_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)]/\delta(N+1,j+1),\\
\tilde{R}(N+1,j+1)=\dfrac{1}{\tilde{\lambda}(N,j+1)}\Big\{\tilde{R}(N+1,j)-\\
\qquad-\dfrac{1}{\delta(N+1,j+1)}\Big[\tilde{R}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times\\
\qquad\times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{P}(N+1,j)+\\
\qquad+\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times\\
\qquad\times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{R}(N+1,j)\Big]+\\
\qquad+\dfrac{\gamma(N+1,j+1)}{\delta^{2}(N+1,j+1)}\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times\\
\qquad\times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{P}(N+1,j)\Big\},\\
\tilde{P}(N+1,j+1)=\tilde{P}(N+1,j)-\dfrac{1}{\delta(N+1,j+1)}\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times\\
\qquad\times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{P}(N+1,j), \qquad j=\overline{0,n-1},
\end{cases}$$

інакше

$$\begin{cases}
\tilde{\alpha}(N+1,j+1)=\tilde{\alpha}(N+1,j)+\dfrac{1}{\gamma(N+1,j+1)}\times\\
\qquad\times\tilde{R}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times\\
\qquad\times[x_{j+1}(N+2)-f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{\alpha}(N+1,j)-\\
\qquad-g_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)],\\
\tilde{R}(N+1,j+1)=\dfrac{1}{\tilde{\lambda}(N,j+1)}\Big\{\tilde{R}(N+1,j)-\\
\qquad-\dfrac{1}{\gamma(N+1,j+1)}\tilde{R}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)\times\\
\qquad\times f_{j+1}^{T}(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{R}(N+1,j)\Big\},\\
\tilde{P}(N+1,j+1)=\tilde{P}(N+1,j), \qquad j=\overline{0,n-1},
\end{cases}$$

з початковими умовами:

$$\tilde{\alpha}(N+1,0)=\tilde{\alpha}(N,n),\quad \tilde{\alpha}(1,0)=\theta_p,$$
$$\tilde{R}(N+1,0)=\tilde{R}(N,n),\quad \tilde{R}(1,0)=\Theta_p,$$
$$\tilde{P}(N+1,0)=\tilde{P}(N,n),\quad \tilde{P}(1,0)=E_p,$$

де

$$\delta(N+1,j+1)=f_{j+1}^T(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{P}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1),$$
$$\gamma(N+1,j+1)=\tilde{\lambda}(N,j+1)+f_{j+1}^T(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{R}(N+1,j)f_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1),$$
$$\lambda(0)=1,\quad \tilde{\lambda}(N,j+1)=\begin{cases}\lambda(N), & якщо\quad j=0,\\ 1, & якщо\quad j=\overline{1,n-1}.\end{cases}$$

Отримаємо тепер рекурент для зваженої залишкової суми квадратів $Q(\hat{\alpha}(N),N)$. Уведемо позначення $q(N)=Q(\hat{\alpha}(N),N)$.

Ураховуючи очевидний зв'язок між зваженими залишковими сумами квадратів для оцінок $\hat{\alpha}(N)$, $\hat{\alpha}_{\theta_p}(N)$ та потрібний результат для останньої оцінки (Слабоспицький, 2005), шуканий рекурент для зваженої залишкової суми квадратів $q(N)$ набуває такого вигляду.

Теорема 2. *Для зваженої залишкової суми квадратів $q(N)$ для задачі оцінювання нестаціонарних параметрів α об'єкта (1) методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшим відхиленням від заданої точки тяжіння $\alpha_*(N)$ у кожен момент часу N рекурентний алгоритм для її перерахунку має вигляд*

$$q(N+1)=\tilde{q}(N+1,n),\quad N=0,1,2,\dots,$$

$$\tilde{q}(N+1,j+1)=\begin{cases}\tilde{\lambda}(N,j+1)\tilde{q}(N+1,j), \quad якщо\ \delta(N+1,j+1)>0,\\ \tilde{\lambda}(N,j+1)\Big\{\tilde{q}(N+1,j)+\dfrac{1}{\gamma(N+1,j+1)}\times\\ \times[x_{j+1}(N+2)-f_{j+1}^T(x(N+1),u(N+1),N+1)\tilde{\alpha}(N+1,j)-\\ -g_{j+1}(x(N+1),u(N+1),N+1)]^2\Big\}, \quad в\ іншому\ випадку,\end{cases}\qquad j=\overline{0,n-1},$$

з початковими умовами $\tilde{q}(N+1,0)=\tilde{q}(N,n), \tilde{q}(1,0)=0$.

Дискусія і висновки

Для оцінки нестаціонарних параметрів нелінійних дискретних динамічних систем методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшими відхиленнями від заданих точок тяжіння у кожен момент часу, коли можливе порушення класичних припущень, що гарантують єдиність оцінки, отримано явну форму представлення з використанням оператора псевдообернення за Муром – Пенроузом та рекурентну форму представлення, що вже не вимагає використання ні операції псевдообернення матриць за Муром – Пенроузом, ні навіть операції звичайного обернення матриць. Для відповідної зваженої залишкової суми квадратів також отримано рекурентне співвідношення для її перерахунку. У частинному випадку, коли всі точки тяжіння дорівнюють нульовому вектору, наведені розв'язки повністю співпадають з раніше отриманими результатами.

Список використаних джерел

Слабоспицький, О. С. (1999). Рекурентний алгоритм оцінювання методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при некласичних припущеннях. *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки,* 4, 237–240.
Слабоспицький, О. С. (2005). Рекурентне оцінювання нестаціонарних параметрів нелінійних динамічних систем з дискретним часом при некласичних припущеннях. *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки,* 4, 232–236.
Слабоспицький, О. С. (2008). Використання додаткової інформації в рекурентному оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при некласичних припущеннях. *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки,* 4, 179–182.
Слабоспицький, О. С. (2012). Оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та мінімальною нормою відхилення від точок "тяжіння" для систем при некласичних припущеннях. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки,* 4, 199–202.
Albert, A. (1972). *Regression and the Moore – Penrose Pseudoinverse.* Academic Press.
Björck, Å. (1996). *Numerical Methods for Least Squares Problems*. SIAM.
Eykhoff, P. (1974). *System Identification: Parameter and State Estimation.* Wiley.
Graupe, D. (1976). *Identification of Systems*. Robert E. Krieger Publishing Company.
Hansen, P. C., Pereyra, V., & Scherer, G. (2013). *Least Squares Data Fitting with Applications*. Johns Hopkins University Press. https://doi.org/10.1353/book.21076
Hsia, T. C. (1977). *System Identification. Least-squares Methods.* Lexington Books.
Isermann, R., & Münchhof, M. (2011). *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Springer.
Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User* (2nd ed.). Prentice-Hall.
Ljung, L. & Söderström, T. (1983). *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press.

Moore, E. H. (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bull. American Mathematical Society*, 26(9), 394–395.
Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(3), 406–413.
Rao, C. R., Toutenburg, H., Shalabh, & Heumann, C. (2007). *Linear Models and Generalizations: Least Squares and Alternatives* (3rd ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-74227-2
Söderström, T., & Stoica, P. (1994). *System Identification*. Pearson Higher Education.
Tangirala, A. K. (2015). *Principles of System Identification: Theory and Practice*. CRC Press.
Weisberg, S. (2013). *Applied Linear Regression* (4th ed.). Wiley.
Wolberg, J. (2006). *Data Analysis Using the Method of Least Squares*. Springer. https://doi.org/10.1007/3-540-31720-1

References

Albert, A. (1972). *Regression and the Moore – Penrose Pseudoinverse.* Academic Press.
Björck, Å. (1996). *Numerical Methods for Least Squares Problems*. SIAM.
Eykhoff, P. (1974). *System Identification: Parameter and State Estimation*. Wiley.
Graupe, D. (1976). *Identification of Systems*. Robert E. Krieger Publishing Company.
Hansen, P. C., Pereyra, V. & Scherer, G. (2013). *Least Squares Data Fitting with Applications*. Johns Hopkins University Press. https://doi.org/10.1353/book.21076
Hsia, T. C. (1977). *System Identification. Least-squares Methods.* Lexington Books.
Isermann, R., & Münchhof, M. (2011). *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Springer.
Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User* (2nd ed.). Prentice-Hall.
Ljung, L. & Söderström, T. (1983). *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press.
Moore, E. H. (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin American Mathematical Society*, 26(9), 394–395.
Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(3), 406–413.
Rao, C. R., Toutenburg, H., Shalabh, & Heumann, C. (2007). *Linear Models and Generalizations: Least Squares and Alternatives* (3rd ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-74227-2
Slabospitsky, A. S. (1999). Recursive algorithm of least squares estimation with variable forgetting factor under nonclassical assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics,* 4, 237–240 [in Ukrainian].
Slabospitsky, A. S. (2005). Recurrent estimation of nonstationary parameter of nonlinear dynamic systems with discrete time under nonclassical assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics,* 4, 232–236 [in Ukrainian].
Slabospitsky, A. S. (2008). Usage of supplementary information in the recurrent parameter estimation of the systems with discrete time by the least squares method under non-classical assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics,* 4, 179–182 [in Ukrainian].
Slabospitsky, A. S. (2012). Non-stationary parameter estimation by the least squares method with variable forgetting factor and minimal deviation norm from 'attraction' points for systems under non-classical assumptions. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, 4, 199–202 [in Ukrainian].
Söderström, T., & Stoica, P. (1994). *System Identification*. Pearson Higher Education.
Tangirala, A. K. (2015). *Principles of System Identification: Theory and Practice*. CRC Press.
Weisberg, S. (2013). *Applied Linear Regression* (4th ed.). Wiley.
Wolberg, J. (2006). *Data Analysis Using the Method of Least Squares*. Springer. https://doi.org/10.1007/3-540-31720-1

Отримано редакцією журналу / Received: 05.07.24
Прорецензовано / Revised 06.11.24
Схвалено до друку / Accepted: 26.11.24

Alexander SLABOSPITSKY, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0009-0007-8753-2075
e-mail: alexsl@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

RECURRENT ALGORITHM FOR NON-STATIONARY PARAMETER ESTIMATION BY LEAST SQUARES METHOD WITH LEAST DEVIATIONS FROM ATTRACTION POINTS FOR NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEMS UNDER NON-CLASSICAL ASSUMPTIONS

For discrete non-linear dynamic systems, the problem of optimal estimation of non-stationary parameters that can slowly change over time is considered. The method of least squares with a variable forgetting factor is used to estimate the unknown parameters of the above-mentioned objects. The situation is considered when the classical assumptions that guarantee the uniqueness of this estimate may be violated. In previous publications, the estimate that has the smallest euclidean norm, i. e. the smallest deviation from the zero vector, was analyzed as a unique estimate on the set of all such estimates. Explicit and recurrent forms of representation were obtained for it. A recurrent procedure for calculating the value of the corresponding residual sum of squares was also proposed. In this paper, on the set of all optimal estimates, the estimate that has the least deviation from the given attraction points at each moment of time was taken as a unique estimate. An explicit form of representation through the Moore – Penrose pseudo-inversion operator is given for this estimate. A convenient recurrent form of representation for it is also obtained, which allows to speed up the calculation process, because it no longer requires the use of either the Moore – Penrose matrix pseudo-inversion operation, or even the usual matrix inversion operation. The presented recurrent algorithm for the corresponding weighted residual sum of squares will be useful for quality control of the obtained mathematical model. The proposed recurrent procedures for recalculating the optimal estimate of non-stationary parameters with the least deviation from the given attraction points and the weighted residual sum of squares will allow to significantly speed up the process of estimating non-stationary parameters in the on-line mode for discrete nonlinear dynamic systems in case of possible violation of classical assumptions and avoid the need to calculate Moore – Penrose pseudo-inverse matrices.

K e y w o r d s : ***discrete-time non-linear dynamic system, recurrent time-varying parameter estimation, non-classical assumptions, attraction points, Moore – Penrose pseudo-inversion operator, least squares method with variable forgetting factor, weighted residual sum of squares.***

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.
The author declares no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.